Алгебра и анализ
Том 5 (1993), вып. 4

РАЗЛОЖЕНИЕ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СОЛЕНОИДЫ И СТРУКТУРА НОРМАЛЬНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ПОТОКОВ

С. К. Смирнов

Статья посвящена исследованию структуры векторных зарядов, дивергенция которых есть мера (нормальных одномерных потоков). Доказано, что любой векторный заряд с нулевой дивергенцией разлагается на элементарные соленоиды — простейшие заряды такого типа, представимые как „усреднение циркуляции“ вдоль достаточно хорошего вложения прямой $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$. В работе используется техника геометрической теории меры, но ее знание не обязательно для понимания результатов и доказательств.

§1. Введение

1.1. Вводные замечания. *Векторным зарядом* мы называем $\mathbb{R}^n$-значную счетно-аддитивную функцию множества T, заданную на σ-алгебре $\mathcal{B}_n$ борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$:

$$T(E) = \big(T_1(E), \dots, T_n(E)\big), \qquad E \in \mathcal{B}_n,$$

где T_j — вещественные меры, определенные на $\mathcal{B}_n$ (*скалярные заряды*). Снабдив множество всех векторных зарядов нормой

$$\operatorname{var}(T) := \sup \sum_j |T(E_j)|,$$

где supremum берется по всем борелевским разбиениям пространства $\mathbb{R}^n$, мы будем отождествлять его с пространством *одномерных потоков с конечной массой* (см.[1], 4.1.7). Последний термин означает непрерывный линейный функционал τ, заданный в нормированном пространстве $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ гладких векторных полей $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ с компактным носителем и равномерной нормой:

$$\|\varphi\|_{\sup} := \max_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2}.$$

Функционал τ, отвечающий заряду T, определяется формулой

$$\tau(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \varphi_j \, dT_j.$$

Часто, не различая τ и T, мы будем рассматривать пространство всех зарядов Ch, как пространство $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}^n)$, сопряженное с $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$, называя $\mathcal{D}$-топологией слабую топологию.

Соленоидальные заряды (или просто *соленоиды*), упомянутые в заглавии статьи, — это заряды T с нулевой дивергенцией:

$$\operatorname{div} T = 0.$$

Последнее равенство следует понимать в смысле теории обобщенных функций:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dT_j = 0 \text{ для любой функции } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Множество всех соленоидов обозначается символом Sol.

Особый интерес представляет пространство $\mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$ всех зарядов $T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^n)$, обладающих следующими свойствами:

$$\operatorname{spt} T \quad \text{компактен}, \qquad \operatorname{var}(\operatorname{div} T) < +\infty$$

(символ $\operatorname{spt} T$ обозначает замкнутый носитель заряда T). Конечность величины $\operatorname{var}(\operatorname{div} T)$ означает, что обобщенная функция $\operatorname{div} T$, заданная равенством

$$\operatorname{div} T(u) := -T(\nabla u), \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

представима (скалярным) зарядом, $\operatorname{var}(\operatorname{div} T)$ есть его полная вариация. Заряды класса $\mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$, следуя терминологии [1], мы называем *нормальными*. Множество $\mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$, очевидно, содержит множество Sol_c всех соленоидальных зарядов с компактным носителем.

Вопрос о геометрической структуре нормальных зарядов (в особенности, зарядов класса Sol) возникает в геометрической теории меры (см. [2], Problem 3.8) и в теории гомологий с вещественными коэффициентами (см. [3]). Автор пришел к этому вопросу при решении задач равномерной аппроксимации различными классами векторных полей и дифференциальных форм, а также некоторых задач продолжения полей и форм (см. [4], где нормальные и соленоидальные заряды естественно возникают как двойственные объекты).

Ограничиваясь для начала соленоидальными зарядами, обсудим на эвристическом уровне постановку вопроса об их структуре.

Простейший пример соленоидального заряда доставляет *ориентированная замкнутая кривая конечной длины*. Грубо говоря, это — циркуляция вдоль ориентированной кривой γ конечной длины:

$$T_\gamma(\varphi) := \int\limits_\gamma \langle \tau(x), \varphi(x) \rangle\, d\mathcal{H}^1(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n),$$

где τ — поле ортов, ориентирующее кривую (через $\mathcal{H}^m$ мы обозначаем m-мерную меру Хаусдорфа). Если $a, b \in \mathbb{R}^n$ — концы кривой, то

$$\operatorname{div} T_\gamma(u) = -T_\gamma(\nabla u) = -\int\limits_\gamma \dot{u}\, d\mathcal{H}^1(x) = u(a) - u(b),$$

где $\dot{u}$ обозначает производную функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ вдоль кривой γ. Очевидно, что в случае замкнутости γ дивергенция заряда T_γ нулевая.

Достаточен ли запас таких простейших соленоидов для создания *любого* соленоидального заряда? Представи́м ли произвольный соленоид T в виде „континуальной выпуклой комбинации“ замкнутых кривых? Мы имеем в виду формулу

$$T = \int T_\gamma d\mu(\gamma), \tag{1.1}$$

где μ — неотрицательная мера. „Выпуклость“ означает, что

$$\operatorname{var}(T) = \int \operatorname{var}(T_\gamma) d\mu(\gamma) \tag{1.2}$$

($\operatorname{var}(T_\gamma)$ — вариация заряда T_γ, т. е. длина соответствующей кривой). Последнее равенство показывает, в частности, что μ-почти все кривые не покидают $\operatorname{spt} T$. Надежду на существование такого представления подкрепляет наличие локального разложения гладких зарядов и разложения на „гиперповерхности“ для векторных мер с нулевым ротором (см. далее формулу Флеминга–Ришеля), что влечет существование разложения соленоидальных зарядов на замкнутые кривые в случае $\mathbb{R}^2$.

Тем не менее при $n > 2$ от формул (1.1), (1.2) все же приходится отказаться. В множество „элементарных соленоидов“ в общем случае нужно, кроме замкнутых кривых, включить еще некоторые их обобщения (типа соленоида Смейла–Вильямса или иррациональной обмотки тора — см. ниже) и тогда аналоги этих формул удается обосновать.

Прежде чем перейти к строгой постановке задачи, введем необходимые термины и обозначения.

Термин *мера* всегда будет означать неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества, заданную на σ-алгебре подмножеств пространства X.

Помимо зарядов нам понадобятся *локальные заряды*, т. е. счетно-аддитивные $\mathbb{R}^n$-значные функции множества T, заданные на кольце ограниченных борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Полная вариация локального заряда может быть бесконечной, тем не менее следующая мера $\|T\|$ определена на $\mathcal{B}_n$ (и конечна на каждом шаре):

$$\|T\|(E) := \sup \sum_j |T(E_j)|,$$

где supremum берется по всем борелевским разбиениям множества E. Множество всех локальных зарядов обозначается символом $\operatorname{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Заряд T абсолютно непрерывен относительно $\|T\|$. Поэтому по теореме Радона–Никодима $T = \mathbb{T}\,\|T\|$, где $\mathbb{T}$ — измеримое по Борелю поле единичных векторов, определенное $\|T\|$-почти всюду. Другими словами,

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \mathbb{T}(x) \rangle \, d\|T\|(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Для локального заряда T легко определяется *сужение* его на борелевское $E \subset \mathbb{R}^n$ — локальный заряд $T \llcorner E := \chi_E T$ (где χ_E — характеристическая функция множества E):
$$(T \llcorner E)(G) = T(E \cap G)$$
для (ограниченного) $G \in \mathcal{B}_n$. Очевидно,
$$(T \llcorner E)(\varphi) = \int_E \langle \varphi, \mathbb{T} \rangle \, d\|T\|, \qquad \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n).$$

Еще нам понадобится понятие декартова произведения $T \times S \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+l})$ заряда $T \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и скалярного заряда S в $\mathbb{R}^l$:
$$T \times S := \big(T_1 \times S, \dots, T_n \times S, 0, \dots, 0\big),$$
где $T_j \times S$ — обычное декартово произведение скалярных зарядов T_j и S. Легко проверить, что
$$\operatorname{div}\big(T \times S\big) = \operatorname{div} T \times S. \tag{1.4}$$
Аналогичное равенство верно для декартова произведения скалярного заряда T и заряда S (с соответствующим определением декартова произведения). Локальный заряд T мы будем называть *локально нормальным*, если его дивергенция (понимаемая как распределение) есть локальный (скалярный) заряд; в этом случае мы будем писать $T \in \mathbb{N}_{1,\mathrm{loc}}$. Множество локальных зарядов с нулевой дивергенцией мы обозначаем Sol_{loc}.

Символ $f_\sharp\mu$ будет обозначать образ меры μ при отображении f (заданный на соответствующей σ-алгебре):
$$f_\sharp\mu(E) := \mu(f^{-1}E).$$

Некоторые приводимые нами утверждения проще формулируются и доказываются с помощью понятия образа $f_\sharp T \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ заряда $T \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^k)$ при липшицевом отображении $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (достаточными условиями его существования являются, например, компактность носителя и конечность вариации заряда T — подробнее см. [1],4.1.7,4.1.14).

Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — собственное отображение класса C^∞ (слово „собственное“ означает, что $\lim_{|x|\to\infty}|f(x)| = \infty$; C^∞-диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя является собственным). Обозначим через $\mathbb{D}f$ его матрицу Якоби. Тогда для $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$
$$f_\sharp T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbb{D}f \cdot \mathbb{T}, \varphi(f) \rangle \, d\|T\| = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbb{T}, (\mathbb{D}f)^* \cdot \varphi(f) \rangle \, d\|T\|, \tag{1.5}$$
$$\text{или} \quad f_\sharp T(\varphi) = T(f^\sharp \varphi),$$
где символом $f^\sharp\varphi$ обозначен прообраз векторного поля φ при C^∞-гладком отображении f:
$$(f^\sharp\varphi)(x) := (\mathbb{D}f)^*(x)\varphi(f(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Негладкое (но липшицево) отображение f нам понадобится в одном случае: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. Тогда $\overrightarrow{T}(t)$ — функция (почти всюду равная по модулю 1), и вместо (1.5) мы используем

$$f_\sharp T(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{T}(t)\big\langle f'(t), \varphi(f(t))\big\rangle\, d\|T\|(t), \quad \varphi\in\mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n). \tag{1.5'}$$

Нетрудно проверить, что в этих случаях

$$(f\circ g)_\sharp T = f_\sharp g_\sharp T, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{var}(f_\sharp T) \leqslant \operatorname{Lip}(f)\operatorname{var}(T), \tag{1.7}$$

$$\operatorname{div}(f_\sharp T) = f_\sharp(\operatorname{div} T) \tag{1.8}$$

(доказательство этих фактов в более общих предположениях можно найти в [1]).

Осталось добавить, что символом δ_x мы будем обозначать δ-меру в точке x, символом $\mathcal{L}^n$ — меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $\overrightarrow{[a;b]}$ обозначает заряд из $\mathrm{Ch}(\mathbb{R})$: если $a<b$, то

$$\overrightarrow{[a;b]}(\varphi) = \int\limits_a^b \big\langle \varphi, e_1\big\rangle\, dt, \quad \varphi\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R});$$

если же $b>a$, то $\overrightarrow{[a;b]} := -\overrightarrow{[b;a]}$ ($e_1,\dots,e_n$ — координатные орты в $\mathbb{R}^n$).

1.2. Формулировка задачи. Вернемся к вопросу о разложении зарядов на простейшие. В эти слова мы будем вкладывать следующий точный смысл: заряд $T\in\mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *разлагается* на заряды из $J\subset\mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если на J существует мера μ такая, что

$$T = \int\limits_J R\, d\mu(R), \tag{1.9}$$

$$\|T\| = \int\limits_J \|R\|\, d\mu(R). \tag{1.10}$$

Если же $T\in\mathbb{N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $J\subset\mathbb{N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и, кроме (1.9), (1.10), выполнено условие

$$\|\operatorname{div} T\| = \int\limits_J \|\operatorname{div} R\|\, d\mu(R), \tag{1.11}$$

мы будем говорить, что заряд T *полностью разлагается* на заряды из J.

Замечание 1. Все рассматриваемые ниже меры будут борелевскими относительно $\mathcal{D}$-топологии, поэтому интегралы в (1.9), (1.10), (1.11) будут пониматься в слабом смысле: так, $\int_J R\,d\mu(R)$ — это заряд S, определяемый по правилу $T(\varphi)=\int_J R(\varphi)\,d\mu(R)$ для любого поля $\varphi\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2. *Если выполняется* (1.9), *то равенства* (1.10) *и* (1.11) *равносильны соответственно следующим:*

$$\operatorname{var}(T) = \int_J \operatorname{var}(R)\, d\mu(R), \tag{1.10'}$$

$$\operatorname{var}(\operatorname{div} T) = \int_J \operatorname{var}(\operatorname{div} R)\, d\mu(R). \tag{1.11'}$$

Замечание 3. Общая теория выпуклых множеств гарантирует существование такого J, что любой соленоид может быть разложен на его элементы. Действительно, рассмотрим в Sol единичный шар B_{Sol}. Он (в $\mathcal{D}$-топологии) метризуем, как ограниченное множество в пространстве Ch, сопряженном к сепарабельному. Поэтому множество $\operatorname{extr} B_{Sol}$ его крайних точек — борелевское, непустое по теореме Крейна–Мильмана, и можно применить теорему Шоке (см. [5]). Значит, для любого $T \in Sol$ существует представляющая мера, сосредоточенная на $\operatorname{extr} B_{Sol}$. Для такой меры верны утверждения (1.9), (1.10′). Следовательно, в качестве J заведомо можно взять $\operatorname{extr} B_{Sol}$ и задача поиска J сводится к задаче описания $\operatorname{extr} B_{Sol}$.

Вследствие замечания 3 элементы $\operatorname{extr} B_{Sol}$ являются естественными „элементарными“ соленоидами. Мы (частично) опишем их и получим „конкретную“ формулу разложения. С этой же точки зрения мы опишем структуру нормальных зарядов.

1.3. Примеры и результаты. Мы начнем с нескольких важных примеров соленоидов, а потом сформулируем полученные результаты.

Пример 1. Замкнутая кривая. Простейшим примером одномерного соленоидального заряда (в не более чем счетную сумму которых разлагаются все целочисленные заряды с нулевой границей — см. [1],4.2.18) является уже упомянутая *ориентированная простая замкнутая кривая T конечной длины* $\operatorname{var}(T)$. Так мы называем заряд $T \in \mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$, для которого существует такая функция $f : [0; \operatorname{var}(T)] \to \mathbb{R}^n$, что

$$\operatorname{Lip}(f) \leqslant 1, \tag{1.12}$$

$$T = f_\sharp \overrightarrow{[0; \operatorname{var}(T)]}, \tag{1.13}$$

$$f \text{ однолистна на промежутке } \big[0; \operatorname{var}(T)\big), \tag{1.14}$$

$$f(0) = f(\operatorname{var}(T)). \tag{1.15}$$

Равенство (1.13) означает, что

$$T(\varphi) = \int_0^{\operatorname{var}(T)} \big\langle f'(t), \varphi(f(t)) \big\rangle\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^n).$$

Если (1.14) или (1.15) не выполняется, то мы будем опускать соответственно слова простая или замкнутая. Напомним, что из замкнутости кривой следует равенство нулю дивергенции соответствующего заряда.

Пример 2. Иррациональная обмотка тора. Идея этого классического примера (см., например, [6], с. 92–94) следующая: возьмем в $\mathbb{R}^3$ заряд $e_1\mathcal{H}^2\llcorner Cyl$, где $Cyl = [0;1]\times\{x_2^2+x_3^2=1\}$ — поверхность цилиндра. Его дивергенция сосредоточена на $\{0;1\}\times\{x_2^2+x_3^2=1\}$. Чтобы она „самосократилась" и стала равной нулю, мы „склеим" цилиндр в тор, предварительно „повернув" одну из граничных окружностей на π-иррациональный угол. Точно это выглядит так: пусть $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ — отображение класса C^∞, 1-периодичное по x_1 и x_2, биективно переводящее квадрат $Sq=[0;1]\times[0;1]$ в поверхность тора. Рассмотрим заряд

$$T := f_\sharp(e_\theta\mathcal{L}^2\llcorner Sq),$$

где $e_\theta = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, а θ — угол с иррациональным синусом. Нетрудно проверить, что $\operatorname{div} T = 0$. Если же мы попробуем разложить T на кривые, „склеивая" локальные разложения (которые, очевидно, существуют), то вместо замкнутых кривых будем получать бесконечные кривые, делающие виток за витком — *„иррациональную" обмотку тора*. Напоследок заметим, что из этого примера нетрудно сконструировать C^∞-гладкий заряд, неразложимый на кривые.

Пример 3. Соленоид Смейла–Вильямса. Данный пример основан на конструкции известного аттрактора. Подробное обсуждение подобного метода построения зарядов, связанных с устойчивыми или неустойчивыми многообразиями некоторых диффеоморфизмов, можно найти в [3] (см. также [7] и обсуждение фрактальной структуры Tor_∞ в [8]). Поэтому мы ограничимся лишь коротким интуитивным описанием.

Пусть f — такой диффеоморфизм полнотория Tor в себя, что $f(Tor)$ „делает" два оборота внутри Tor. Объект $Tor_\infty := \bigcap_{k=1}^\infty f^k(Tor)$ известен в теории динамических систем, как соленоид Смейла–Вильямса. Tor_∞ локально устроен (топологически), как декартово произведение канторова множества и отрезка (совершая оборот вокруг оси полнотория, мы „перемешиваем" эти отрезки и „склеиваем" их в другом порядке). Ориентировав эти отрезки (задав направление „вращения" Tor_∞ вокруг оси Tor) и задав на канторовом множестве диадическую меру μ, мы получим соленоидальный заряд T, локально устроенный (с точностью до липшицева отображения), как $\mu\times\overrightarrow{[a;b]}$. Поэтому локально T разложим на кривые, но глобальному разложению препятствует „перемешивание" отрезков при „склеивании" (в силу которого, например, соленоид Смейла–Вильямса не содержит никакой замкнутой простой кривой).

Пример 4. Почти-периодический соленоид. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ — равномерно почти-периодическая функция. Положим для простоты, что вектор-функция f' равномерно непрерывна и всюду по модулю не превосходит единицы. Рассмотрим тогда заряд T, определенный так:

$$\text{для } \varphi\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n) \qquad T(\varphi) := \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s}\big\langle f'(t),\varphi(f(t))\big\rangle\,dt.$$

Предел в правой части существует, так как функция

$$\big\langle f'(t),\varphi(f(t))\big\rangle,$$

будучи почти-периодической, допускает усреднение. Далее, для $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\left|T(\varphi)\right| &\leqslant \limsup_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} \left|\left\langle f'(t), \varphi(f(t))\right\rangle\right| dt \\
&\leqslant \limsup_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} \|\varphi(f(t))\|\, dt \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty,
\end{aligned}$$

из чего следует, что $\operatorname{var}(T) \leqslant 1$. Наконец, для $u \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div} T(u) &= T(\nabla u) \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} \langle f'(t), \nabla u(f(t))\rangle\, dt \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} \frac{d}{dt} u(f(t))\, dt \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\big(u(f(s)) - u(f(-s))\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Итак, построенный заряд T нормален, имеет нулевую дивергенцию и $\operatorname{var}(T) \leqslant 1$. Нетрудно заметить, что таким способом можно описать все предыдущие примеры: в примере 1 (для кривой длины 1) функция f будет периодической с периодом 1, в примерах 2 и 3 она естественно строится при „склеивании" локальных разложений.

Это наводит на мысль рассматривать в качестве „базовых" заряды из примера 4. Естественно при этом не ограничиваться почти-периодическими функциями f, а брать те, для которых усреднение существует. Это приводит к следующему определению:

Определение. Заряд T называется *элементарным соленоидом*, если существует такая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, что

$$\operatorname{Lip}(f) \leqslant 1, \tag{1.16}$$

$$T = \mathcal{D}-\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} F_\sharp \overrightarrow{[-k;k]}, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{var}(T) = 1, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{spt} T. \tag{1.19}$$

Замечание 4. Условия (1.16)–(1.17) аналогичны первым двум условиям из определения кривой, (1.17) означает, что для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ существует среднее

$$T(\varphi) := \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2s} \int_{-s}^{s} \langle f'(t), \varphi(f(t)) \rangle \, dt. \tag{1.20}$$

Условие (1.18) гарантирует, что при переходе в (1.17) к пределу соленоид не „самосократится", а (1.19) — что при разложении на соленоиды мы не покидаем носитель.

Сформулируем теперь основные результаты, обозначая символом $\mathfrak{C}_l$ множество ориентированных кривых длины l с $\mathcal{D}$-топологией.

Теорема А. *Пусть $T \in Sol$, $l > 0$. Тогда T разложим на элементы $\mathfrak{C}_l$, т. е. найдется такая конечная борелевская мера μ на $\mathfrak{C}_l$, что $\operatorname{var}\mu = \frac{\operatorname{var}(T)}{l}$, выполняются тождества* (1.9) *и* (1.10) *для $J = \mathfrak{C}_l$ и*

$$\frac{2}{l}\|T\| \geqslant \int_{\mathfrak{C}_l} \|\operatorname{div} R\| \, d\mu(R), \tag{1.21}$$

$$\frac{\|T\|}{l} = \int_{\mathfrak{C}_l} \delta_{b(R)} \, d\mu(R) = \int_{\mathfrak{C}_l} \delta_{e(R)} \, d\mu(R), \tag{1.22}$$

($b(R)$ и $e(R)$ — начало и конец кривой R соответственно, обе части (1.21) — меры).

Теорема В. *Любой соленоид разложим на элементарные соленоиды.*

В силу замечания 3 теорема В равносильна теореме В′:

Теорема В′. $\operatorname{extr} B_{Sol} \subset \operatorname{elem}$, *где* elem — *множество элементарных соленоидов.*

Теорема С. *Любой заряд $T \in \mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$ полностью разложим в сумму таких двух зарядов P, Q, что $\operatorname{div} P = 0$ (и к P можно применить теорему A), а Q полностью разложим на простые ориентированные кривые конечной длины* (на самом деле мы доказываем теорему С для $T \in \mathbb{N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ с конечной вариацией).

Замечание 5. Отметим еще раз очень важный для приложений факт, что *носители μ-почти всех кривых, участвующих в разложении в теореме A, лежат в* $\operatorname{spt} T$. Аналогичное утверждение справедливо и для теорем В, С.

Замечание 6. Теорема А дает лишь „неполное" разложение (1.9)–(1.10), но часто она удобнее для практического применения, так как получаются заряды простой структуры — кривые и при больших l есть хорошая оценка (1.22) вариации дивергенции.

1.4. Потоки произвольной размерности. Интересующие нас вопросы могут быть поставлены и для нормальных потоков произвольной размерности m (теоремы A–C соответствуют случаю $m = 1$). При этом роль нормальных зарядов переходит к пространству $\mathbb{N}_m(\mathbb{R}^n)$ m-мерных нормальных потоков (т. е. функционалов на дифференциальных формах степени m). Вариация заряда становится массой потока, дивергенция — границей (см. точные определения в [1]):

$$\operatorname{div} T(\varphi) = \pm T(d\varphi),$$

где d обозначает внешний дифференциал формы φ. Роль простейших зарядов (кривых при $m = 1$) играют целочисленные потоки (т. е. такие спрямляемые потоки, у которых граница тоже спрямляема — точное определение дано в [1],4.1.24; а в [1],4.1.28 доказана его равносильность нескольким другим). Пространство всех целочисленных m-мерных потоков обозначается $\mathbb{I}_m(\mathbb{R}^n)$.

В изучаемом нами случае $m = 1$, согласно [1], 4.2.18, любой поток $T \in \mathbb{I}_1(\mathbb{R}^n)$ можно полностью разложить в не более чем счетную сумму простых ориентированных кривых R_j, $j \in \mathbb{N}$ конечной длины

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} R_j,$$

$$\operatorname{var}(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{var}(R_j),$$

$$\operatorname{var}(\operatorname{div} R) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{var}(\operatorname{div} R_j).$$

Поэтому вопрос о разложении одномерного потока на целочисленные (см. далее) равносилен вопросу о разложении его на кривые.

Обсудим кратко проблемы разложения при произвольном m.

Нас интересует вопрос, разлагается ли произвольный поток $T \in \mathbb{N}_m(\mathbb{R}^n)$ ($T \in Sol_m$) на потоки из некоторого $J \subset \mathbb{I}_m(\mathbb{R}^n)$ (т. е. верно ли, что $\operatorname{extr} B_N \subset \mathbb{I}_m(\mathbb{R}^n)$ или $\operatorname{extr} B_{Sol} \subset \mathbb{I}_m(\mathbb{R}^n)$). Если же ответ отрицательный, хочется найти описание допустимого J.

Вырожденные случаи $m = 0$ и $m = n$, $\partial T = 0$ неинтересны (при $m = 0$ искомое разложение совпадает с тривиальным разложением скалярного заряда по δ-мерам, в другом случае $T = 0$).

Если $m = n - 1$, $\operatorname{div} T = 0$, то $T = \operatorname{div} S$, где S — некоторый поток с конечной массой, что позволяет свести этот случай к случаю $m = n$. Конечность массы $\operatorname{div} S = T$ позволяет отождествить S с некоторой (скалярной) локально суммируемой функцией, а T — с ее обобщенным градиентом (S оказывается так называемой функцией класса BV — с ограниченной вариацией, см. [9]). Искомое представление следует из формулы Флеминга–Ришеля (см. [9, 10] и [1],4.5.9(13)):

$$\nabla S = \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \chi_{E_t}\, dt,$$

$$\|\nabla S\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\nabla \chi_{E_t}\|\, dt,$$

которая дает разложение потока S (а с ним и T) на потоки, соответствующие характеристическим функциям множеств Лебега E_t функции S.

В случае $m = n-1$, $\operatorname{div} T \neq 0$ поток разложим на целочисленные (см. [11]) при условии спрямляемости его границы: $\operatorname{div} T \in \mathbb{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$. Если же $\operatorname{div} T \notin \mathbb{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$, то, вообще говоря, T неразложим на целочисленные и, по всей видимости, простого описания $\operatorname{extr} B_N$ не существует. Контрпример (подробное описание см. в [12]) основан на том, что при рассмотрении потока

$$T \;=\; dx \wedge dz \wedge \mathcal{L}^3 + dy \wedge dz \wedge \mathcal{L}^3 \llcorner \{z > 0\} \;\in \mathbb{N}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$$

естественно возникающие в полупространствах $\{z < 0\}$ и $\{z > 0\}$ разложения на целочисленные потоки (представимые „полуплоскостями") „не склеиваются" на границе (плоскости $\{z = 0\}$).

В случае $1 \leqslant m \leqslant n-2$ даже при $\operatorname{div} T = 0$ разложение на целочисленные может не существовать. Уже при $m = 1$, $n = 3$ легко строятся контрпримеры, даже для C^∞-гладких потоков (см. примеры 2,3). „Склеивая" в $\mathbb{R}^4$ два расположенных под углом примера из предыдущего абзаца, мы получим поток из $\mathbb{N}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$ с нулевой границей, у которого нет даже локального разложения в окрестностях точек подпространства размерности два. К тому же, как показал Зварски, в случае $2 \leqslant m \leqslant n-2$ при локальном разложении C^∞-гладких потоков добавляются условия „совместности" (как в теореме Фробениуса, к которой и сводится этот вопрос), а потому и C^∞-гладкий поток может даже локально не разлагаться на целочисленные.

1.5. Набросок доказательства. Хорошо известно соответствие между векторными полями с нулевой дивергенцией (гладкими соленоидальными зарядами) и несжимаемыми течениями (их также называют потоками, но мы во избежание путаницы оставим термин течение). Если дан гладкий соленоидальный заряд, то функции, задающие элементарные соленоиды, на которые он разложим, — это траектории точки, движущейся в соответствующем течении с единичной скоростью.

Поэтому хочется научиться „отслеживать траектории" для произвольных $T \in Sol$. Если мы просто сгладим заряд T, то у нас возникнут проблемы с особыми точками соответствующего векторного поля, в которых траектории проследить трудно. Чтобы избавиться от этих неприятностей, мы продолжаем T до заряда T' в $\mathbb{R}^{n+1}$, как бы добавляя к соответствующему течению (о существовании которого мы пока ничего сказать не можем) время, чтобы движущаяся точка равномерно меняла свою $(n+1)$-ю координату. При надлежащем сглаживании полученного заряда особых точек не будет ($(n+1)$-я компонента соответствующего векторного поля всегда будет положительна) и с его разложением на „траектории" проблем не возникнет. Более того, угол, образуемый векторами и $(n+1)$-й осью, будет не превосходить 45°, что сразу повлечет существование *глобального разложения* T' на траектории, „почти параллельные" $(n+1)$-й оси. После этого, приближая T' сглаженными зарядами, мы получим разложение самого T', которое остается спроектировать на $\mathbb{R}^n$ в разложение заряда T (на самом деле все несколько сложнее — так мы докажем теорему А, а потом с помощью эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина получим элементарные соленоиды).

В случае $\operatorname{div} T \neq 0$ (теорема С) у течения появляются „источник“ и „сток“ (граница T), и мы доказываем теорему С, с помощью несложных оценок проверяя, что почти любая точка, вытекшая из „источника“, рано или поздно попадет в „сток“(такие кривые и дадут в сумме второй заряд). Делаем мы это с помощью теоремы А, предварительно добавив к T, вложенному в $\mathbb{R}^{n+1}$, заряд простой структуры, чтобы обеспечить равенство нулю границы.

Напоследок скажем несколько слов о возможности формализации интуитивных рассуждений о течении. В случае гладкого соленоидального заряда T ему действительно соответствует течение (группа преобразований $\mathbb{R}^n$ в себя), сохраняющее меру $\|T\|$. Генератор этой группы в комплексном пространстве $L_2(\|T\|)$ есть некоторое самосопряженное расширение симметричного оператора A,

$$Af(x) = \frac{1}{i}\langle \nabla f, \mathbb{T}\rangle(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Это определение сохраняет смысл для любого соленоида T. Естественно попытаться построить соответствующую унитарную группу и получить „течение“ в общем случае, решив нашу основную задачу. К сожалению, в случае произвольного соленоидального заряда T оператор A, определенный на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, вообще говоря, будет лишь симметричным, а не самосопряженным (что необходимо для построения группы). Однако после доказательства теоремы В к проблеме существования группы или полугруппы можно вернуться, связав со всяким соленоидальным зарядом T некоторый марковский процесс с инвариантной мерой $\|T\|$ (аналог течения) и сопряженную с ним полугруппу операторов.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить моего научного руководителя В. П. Хавина за постоянную помощь и поддержку, а также М. Ю. Любича и Д. Салливана за заочную консультацию.

§2. Доказательство теорем А и В

2.1. Обозначения. Мы будем работать с двумя пространствами $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, обозначая точки $\mathbb{R}^{n+1}$ большими латинскими буквами $(X, Y, Z, \dots)$, а $\mathbb{R}^n$ — малыми $(x, y, z, \dots)$. Мы отождествляем $\mathbb{R}^{n+1}$ с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, считая, что равенство $X = (x, t)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ означает, что

$$X = (X_1, \dots, X_{n+1}), \ X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = t,$$

и не отличая вектор $v \in \mathbb{R}^n$ от вектора $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Аналогично под множеством (мерой, зарядом) $E \times F$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ мы понимаем декартово произведение множеств (мер, зарядов) E, F в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ соответственно. Символами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ мы обозначаем ортогональные проекции $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ (последнее множество обычно интерпретируется как ось времени).

2.2. Класс $\mathcal{A}$. Мы будем говорить, что локальный заряд R в $\mathbb{R}^{n+1}$ *почти параллелен* $\mathbb{R}$, если для $\|R\|$-почти всех $X \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|\mathcal{P}\overrightarrow{R}(X)| \leqslant \mathcal{Q}\overrightarrow{R}(X) \tag{2.1}$$

($|\cdot|$ означает евклидову норму в $\mathbb{R}^{n+1}$).

Если R — кривая (см. (1.3), пример 1), то (2.1) означает, что угол между касательным ортом $\overrightarrow{R}(X)$ и $\mathbb{R}$ не больше 45°.

Мы говорим, что заряд $R \in \mathbb{N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ принадлежит классу $\mathcal{A}$, если он почти параллелен $\mathbb{R}$ и существует такая липшицева вектор-функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, что

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } \|F'(u)\| = 1,\\
&\text{(b) } R = F_{\#}\overrightarrow{(-\infty, +\infty)},\\
&\text{(c) } \lim_{u\to+\infty} \mathcal{Q}F(u) = +\infty, \qquad \lim_{u\to-\infty} \mathcal{Q}F(u) = -\infty.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Равенство (b) означает, что для любого $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$

$$R(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big\langle F'(u), \varphi(F(u))\big\rangle\, du. \tag{2.3}$$

Положим $N(= N(\varphi)) := \max\{\|\mathcal{Q}X\| : X \in \operatorname{spt}\varphi\}$, $R_N := F_{\#}\overrightarrow{[-N;N]}$. Тогда (2.3) может быть переписано как

$$R(\varphi) = R_N(\varphi).$$

Значит, R *локально* ведет себя, как кривая. Очевидно, что $\mathcal{A} \subset Sol_{loc}$, поскольку для любой C^∞-функции $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ с компактным носителем

$$R(\nabla G) = \int_{-N}^{N} \frac{dG(F(t))}{dt}\, dt = G(F(N)) - G(F(-N)) = 0,$$

если N достаточно большое положительное число.

Если $R \in \mathcal{A}$ и F — соответствующая параметризация R, то

$$F'_{n+1}(u)(= (\mathcal{Q}F(u)')) \geqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(F'_j(u))^2}$$

почти всюду на $\mathbb{R}$(так как R почти параллелен $\mathbb{R}$). Следовательно, $F'_{n+1} > 0$ почти всюду, и $F_{n+1}(v) = F_{n+1}(0) + \int_0^v F'_{n+1}(t)\,dt$ — строго возрастающая функция, отображающая $\mathbb{R}$ на себя (см. (2.2c)). Взяв $t = F_{n+1}(u)$ в качестве нового параметра, легко проверить существование такой липшицевой вектор-функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, что

$$\operatorname{Lip}(f) \leqslant 1, \quad R = \varphi_{\#}\overrightarrow{(-\infty; +\infty)}, \text{ где } \varphi := (f(t), t). \tag{2.4}$$

И, наоборот, любая липшицева функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с $\mathrm{Lip}(f) \leqslant 1$ (т. е. любая $f \in \mathrm{Lip}_1$) порождает локальный заряд.

Попробуем формально спроектировать $r \in \mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^n$, положив

$$(\mathcal{P}_{\#}R)(\varphi) = R(\mathcal{P}^{\#}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}).$$

Последнее равенство бессмысленно, поскольку $\mathcal{P}^{\#}\varphi \notin \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ и R *локальный* заряд в $\mathbb{R}^n$. Чтобы преодолеть эту трудность, мы рассматриваем „части" R_Δ заряда R, соответствующие замкнутым отрезкам $\Delta = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Точнее, положим

$$R_\Delta := \chi_{S_\Delta} R \ (= R \llcorner S_\Delta),$$

где S_Δ обозначает полосу $\mathbb{R}^n \times \Delta$. Если R определено равенством (2.4), то $R_\Delta = \varphi_{\#}\overrightarrow{[a; b]}$. Очевидно, R_Δ является кривой; $\mathcal{P}_{\#}R_\Delta$ также кривая:

$$\mathcal{P}_{\#}R_\Delta = f_{\#}\overrightarrow{[a; b]}.$$

Сделаем также несколько важных замечаний:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } \operatorname{var} R_\Delta \leqslant \sqrt{2}(b-a); \\ \text{(b) } \operatorname{var} \mathcal{P}_{\#}R_\Delta \leqslant (b-a); \\ \text{(c) если } \operatorname{var} \mathcal{P}_{\#}R_\Delta = b-a, \quad \text{то } \mathcal{P}_{\#}R_\Delta \text{ — кривая длины } (b-a). \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

$\Box \operatorname{var} R_\Delta = \operatorname{var} g_{\#}\overrightarrow{[a; b]}$, и мы получаем (a) (см. (1.7)); та же оценка дает (b), поскольку $f \in \mathrm{Lip}_1$; (c) следует из нашего определения кривой заданной длины (см. пример 1 в 1.3). $\bullet$

2.3. Медленные движения в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через Lip_C^n класс всех липшицевых вектор-функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с $\mathrm{Lip}(f) \leqslant C$. Возьмем $f \in \mathrm{Lip}_1^n$ и рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi : t \mapsto (f(t), t).$$

Мы называем ее ***медленным движением в*** $\mathbb{R}^{n+1}$ и пишем $\phi \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$. Термин „медленное" означает, что скорость $|\dot\phi(t)|$ не превосходит абсолютной константы $(= \sqrt{2})$ и не слишком сильно отклоняется от оси $\mathbb{R}$ (поскольку вектор $\dot\phi(t)$ остается почти параллельным $\mathbb{R}$). Любая функция $\phi \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$ порождает элемент $R_\phi \in \mathcal{A}$:

$$R_\phi := \phi_{\#}\overrightarrow{(-\infty; +\infty)}.$$

Отображение $\phi \mapsto R_\phi (\phi \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1}))$ есть параметризация $\mathcal{A}$: вследствие (2.4) оно — сюръекция. Наша цель — превратить $\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$ в компактное метрическое пространство.

2.3.1. Рассмотрим компактификацию Александрова пространства $\mathbb{R}^m$:

$$\hat{\mathbb{R}}^m = \mathbb{R}^m \bigcup \infty$$

($\hat{\mathbb{R}}^m$ топологически есть $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$). Перенеся естественную метрику $\mathbb{S}^m$ на $\mathbb{R}^m$, мы получим метрику d на $\hat{\mathbb{R}}^m$, превращающую его в компактное метрическое пространство.

Нам понадобится также множество $\hat{C}_m$ таких непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}^m$, что $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^m$ или $f(\mathbb{R}) = \{\infty\}$. Положим

$$\Delta_j(f,g) = \max\{d(f(t),g(t)) : t \in [-j,j]\},$$

$$\Delta(f,g) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\Delta_j(f,g)/(1+\Delta_j(f,g)), \quad f,g \in \hat{C}_m.$$

Сходимость, соответствующая метрике Δ, есть равномерная сходимость на всех компактных подмножествах $\mathbb{R}$. Обозначим символом $\mathrm{Lip}^{\wedge}_{C,n}$ множество $\mathrm{Lip}^n_C \cup \{f_\infty\}$ (под f_∞ мы понимаем постоянную функцию $f_\infty \equiv \infty$); $C_n := \hat{C}_n \backslash \{f_\infty\}$.

2.3.2. $\mathrm{Lip}^{\wedge}_{C,n}$ *есть компактное подмножество пространства* $\hat{C}_m$. Действительно, предположим, что $f_k \in \mathrm{Lip}^{\wedge}_{C,m}$, $f \in \hat{C}_m$, $f_k \overset{\hat{C}_m}{\to} f$. Если $f \neq f_\infty$, то f есть непрерывная $\mathbb{R}^m$-значная вектор-функция, $f_k(t) \overset{\mathbb{R}^m}{\to} f(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f \in \mathrm{Lip}^m_C$ и $\mathrm{Lip}^{\wedge}_{C,m}$ замкнуто в $\hat{C}_m$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{f_k\}, f_k \in \mathrm{Lip}^m_C$, и покажем, что найдется подпоследовательность $\{f_{k_l}\}$, сходящаяся в $\hat{C}_m$. Не умаляя общности, $f_k \neq f_\infty$ для всех k. Если (f_k) равномерно ограничена на всех сегментах (т. е. $\sup\{|f_k(t)| : |t| \leqslant j,\ k = 1,2,\dots\} < +\infty,\ j = 1,2,\dots$), то мы можем применить теорему Арцела–Асколи к каждому из сегментов $[-j,j], j = 1,2,\dots$, и стандартный диагональный процесс дает нужную последовательность (k_l). Пусть, напротив, f_k неограничены на сегменте $[-j^*,j^*]$. Тогда найдется последовательность натуральных чисел (k_l) и последовательность $(t_l), |t_l| < j^*$ такие, что $f_k(t_l) > l$. Значит, если $j > j^*, t \in [-j,j]$, то

$$|f_{k_l}(t)| \geqslant |f_{k_l}(t_l)| - |f_{k_l}(t) - f_{k_l}(t_l)| > l - 2C_j$$

и $\Delta_j(f_{k_l}, f_\infty) \underset{l\to\infty}{\to} 0$, а $\Delta(f_{k_l}, f_\infty) \underset{l\to\infty}{\to} 0$. •

2.3.3. Рассмотрим „несобственное медленное движение“ ϕ_∞ в $\hat{\mathbb{R}}^n \times \mathbb{R}$

$$\phi_\infty(t) \equiv (\infty, t)$$

и положим $\hat{S} := \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1}) \cup \{\phi_\infty\}$, $\hat{\mathcal{P}}(\phi) := \mathcal{P}(\phi)$, если $\phi \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1}), \hat{\mathcal{P}}(\phi_\infty) := f_\infty$. Теперь мы можем определить метрику $\hat{\Delta}$ на $\hat{S}$:

$$\hat{\Delta}(\phi,\psi) := \Delta(\hat{\mathcal{P}}\phi, \hat{\mathcal{P}}\psi), \qquad \phi,\psi \in \hat{S}.$$

Отображение $\hat{\mathcal{P}}$ превращается в изометрию пространства $\hat{S}$ на пространство $\mathrm{Lip}^{\wedge}_{1,n}$. Поэтому вследствие 2.3.2, $\hat{S}$ *есть компактное метрическое пространство.*

2.4. Непрерывность отображения $\phi \mapsto R_\phi$. Сейчас мы наделим класс $\mathcal{A}$ $\mathcal{D}$-топологией и покажем, что упомянутое выше отображение непрерывно.

2.4.1. Положим $\hat{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{0\}$ и превратим $\hat{\mathcal{A}}$ в топологическое пространство, взяв $\mathcal{D}$-топологию из $\mathrm{Ch}_{\mathrm{loc}}$. Пространство $\hat{\mathcal{A}}$ метризуемо. Действительно, рассмотрим счетное множество $\Gamma \subset \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$, равномерно плотное в $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Более того, мы можем предположить, что для любой тройки $(N, \varphi, \varepsilon)$ с натуральным $N > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{spt}\varphi \subset S_{[-N,N]} = \mathbb{R}^n \times [-N, N]$ и $\varepsilon > 0$, существует $\gamma \in \Gamma$ с носителем в $S_{[-N,N]}$ такой, что $\max_{\mathbb{R}^{n+1}} |\varphi - \gamma| < \varepsilon$. Рассмотрим $T_0 \in \hat{\mathcal{A}}$. Любая окрестность T_0 содержит его окрестность вида

$$\nu(T_0, A, \varepsilon) := \big\{T \in \hat{\mathcal{A}} : \max_{\phi \in A} |(T - T_0)(\varphi)| < \varepsilon\big\},$$

где $A \subset \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ конечно, $\varepsilon > 0$. Возьмем такое натуральное $N = N_A$, что $\cup_{\varphi \in A} \operatorname{spt}\varphi \subset S_{[-N,N]}$. Для любой $\varphi \in A$ мы можем выбрать $\gamma_\varphi \in \Gamma$ так, что $\operatorname{spt}\gamma_\varphi \subset S_{[-N,N]}$, $\max|\varphi - \gamma_\varphi| < \varepsilon/8N\sqrt{2}$.

Пусть $\Gamma'(= \Gamma'(A, \varepsilon))$ — множество всех функций $\gamma_\varphi, \varphi \in A$. Тогда

$$\nu_0 := \nu(T_0, \Gamma', \varepsilon/2) \subset \nu(T_0, A, \varepsilon).$$

Чтобы доказать это включение, выберем $T \in \nu_0$ и положим $R := T - T_0$; очевидно, любая $\varphi \in A$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |R(\varphi)| &\leqslant |R(\gamma_\varphi)| + |R(\varphi) - R(\gamma_\varphi)| \\ &< \varepsilon/2 + (\operatorname{var} T_{[-N,N]} + \operatorname{var}(T_0)_{[-N,N]}) \max|\varphi - \gamma_\varphi| \\ &< \varepsilon/2 + 4\sqrt{2}N \cdot \max|\varphi - \gamma_\varphi| < \varepsilon \end{aligned}$$

(мы используем (2.5a)). Значит, $\mathcal{D}$-топология на $\hat{\mathcal{A}}$ совпадает с Γ-топологией, которая задается метрикой

$$d(T, T_0) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} |R(\gamma_j)|/(1 + |R(\gamma_j)|),$$

где $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$.

2.4.2. Теперь мы рассмотрим отображение

$$B : \hat{S} \to \hat{\mathcal{A}}, \quad B(\phi) := R_\phi(\phi \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})), \ B(\phi_\infty) := 0$$

(см. 2.3.3.) и докажем его непрерывность. Поскольку пространства $\hat{S}$ и $\hat{\mathcal{A}}$ метрические, достаточно доказать секвенциальную непрерывность. Возьмем $\Phi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$, $\phi \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$, и последовательность $\{\phi_i\}$ медленных движений, стремящуюся к ϕ (в $\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$, т. е. в C_{n+1}). Чтобы доказать, что $R_{\phi_i}(\Phi) \to R_\phi(\varphi)$, мы выберем произвольную последовательность $j_1 < j_2 < \dots$ и найдем такую последовательность $k_1 < k_2 < \dots$, что

$$R_{\phi_{J(l)}}(\varphi) \to R_\phi(\varphi),$$

где $J(l) = j_{k_l}$. Для этого положим $f_j = \mathcal{P}(\phi_j)$, т. е. $\phi_j(t) \equiv (f_j(t), t)$. Очевидно, что $\phi(t) = (f(t), t)$, где $f_n \overset{C_n}{\to} 0$. Обозначим $N_\varphi = \max\{|QX| : X \in \operatorname{spt}(\varphi)\}$ и выберем

(k_l) таким образом, что f_{J_l} сходится слабо в $L^2[-N_\varphi, N_\varphi]$ к вектор-функции λ. Это возможно, поскольку $|f'| \leqslant 1$ почти всюду. Переходя к пределу в тождестве

$$f_{J_l}(v) = f_{J_l}(0) + \int\limits_0^v f'_{J_l}(t)\,dt, \qquad v \in [-N_\varphi, N_\varphi],$$

мы видим, что $f(v) = f(0) + \int_0^v \lambda(t)\,dt, \qquad v \in [-N_\varphi, N_\varphi]$, так что $\lambda = f'$ почти всюду. Итак,

$$R_{\Phi_{J(l)}}(\varphi) = \int\limits_{-N_\varphi}^{N_\varphi} \langle \mathcal{P} f'_{J_{(l)}}(t), \varphi(f_{J_{(l)}}(t), t)\rangle dt + \int\limits_{-N_\varphi}^{N_\varphi} \varphi_{n+1}(f_{J_{(l)}}(t), t) dt.$$

Предположим теперь, что $\phi_j \to \phi_\infty$ в $\hat{S}$ и $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда

$$d(\mathcal{P}(\varphi_j(t)), \infty) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

равномерно на $[-N_\varphi, N_\varphi]$. Следовательно, $\operatorname{spt}\varphi \cap \operatorname{spt} R_{\phi_j} = \emptyset$ для достаточно больших j, и $B(\phi_j)(\varphi) = 0$. Но это означает, что $B(\phi_j) \to B(\phi_\infty) = 0$. •

2.4.3. Будучи образом компактного пространства $\hat{S}$ под действием непрерывного отображения B, пространство $\hat{\mathcal{A}}$ компактно (в $\mathcal{D}$-топологии). В дальнейшем нам понадобятся сужения медленных движений на компактные временны́е интервалы $\Delta = [a, b]$. Для $R \in \mathcal{A}$ мы положим $r_\Delta(R) = R \llcorner S_\Delta$, $S_\Delta := \mathbb{R} \times \Delta$; и $r_\Delta(\phi_\infty) := 0$. Нетрудно проверить, что r_Δ непрерывно на $\hat{\mathcal{A}}$. Значит, $\hat{\mathcal{A}}_\Delta := r_\Delta(\hat{\mathcal{A}})$ есть $\mathcal{D}$-компактное множество. Множество $\mathcal{A}_\Delta := r_\Delta(\mathcal{A})$ состоит из кривых. Если $R \in \mathcal{A}_\Delta$, то $\operatorname{spt}(R) \subset S_\Delta$, $\mathcal{Q}b(R) = a$, $\mathcal{Q}e(R) = b$.

Вернемся теперь к доказательству теорем A и B.

2.5. Первый шаг: „продолжение“ заряда T в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $T \in Sol(\mathbb{R}^n)$ — данный невырожденный соленоид.

Определим локальный заряд T' в $\mathbb{R}^{n+1}$ („продолжение“ T):

$$\begin{aligned} T' :&= T \times \mathcal{L}^1 + \|T\| \times e_{n+1}\mathcal{L}^1 \\ &= (\mathbb{T} + e_{n+1})(\|T\| \times \mathcal{L}^1) = (T_1 \times \mathcal{L}^1, \dots, T_n \times \mathcal{L}^1, \mathbb{T} \times \mathcal{L}^1). \end{aligned}$$

Другими словами,

$$T'(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(\varphi^t)\,dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,t)\,d\mathbb{T}(x)\Big), \qquad \varphi \in D^1(\mathbb{R}^{n+1}), \qquad \varphi^t(x) := \varphi(x,t). \tag{2.8}$$

Так как $\|T\| \times \mathcal{L}^1$ - почти всюду вектора $\mathbb{T}$ и e_{n+1} ортогональны и по модулю равны 1, мы получаем

$$\begin{aligned} \|T'\| &= \sqrt{2}\, \|T\| \times \mathcal{L}^1, \\ \vec{T}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{T} + e_{n+1}). \end{aligned} \tag{2.8$'$}$$

Кроме этих соотношений, нам понадобятся следующие свойства заряда T':

1) $T' \in Sol_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$;
2) T' *почти параллелен* $\mathbb{R}$;
3) *положим* $\Delta := [a,b]$, $S_\Delta := \mathbb{R}^n \times \Delta$, $T'_\Delta := T' \llcorner S_\Delta$, *тогда* $\operatorname{div} T'_\Delta = \|T\| \times (\delta_a - \delta_b)$, $\operatorname{var} T'_\Delta = l\sqrt{2}\operatorname{var} T$;
4) $\mathcal{P}_\sharp T'_\Delta = (b-a)T$.

Доказательство. Свойство 1) следует из (2.8) для $\varphi = \nabla u$, где u — C^∞-функция в $\mathbb{R}^{n+1}$ с компактным носителем (можно также использовать (1.3), (1.4)).

Свойство 2) очевидно (заметим, что $\mathcal{P}\overrightarrow{T}' = \overrightarrow{T}/\sqrt{2}, \mathcal{Q}\overrightarrow{T}' = e_{n+1}/\sqrt{2}$). Легко проверить 3):

$$\operatorname{div} T'_\Delta = \operatorname{div} T \times \mathcal{L}^1 + \|T\| \times \operatorname{div} \overrightarrow{[a;b]} = \|T\| \times (\delta_b - \delta_a);$$

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(T'_\Delta) &= \|T'\|(\mathcal{S}_\Delta) \\ &= (\sqrt{2}\|T\| \times \mathcal{L}^1)(\mathcal{S}_\Delta) \\ &= \sqrt{2}\|T\|(\mathbb{R}^n)\mathcal{L}^1[a,b] \\ &= \sqrt{2}\operatorname{var}(T)(b-a) \\ &= l\sqrt{2}\operatorname{var}(T). \end{aligned}$$

Для доказательства свойства 4) вспомним, что

$$(\mathcal{P}^\sharp\varphi)(X_1,\dots,X_n,X_{n+1}) = \varphi(X_1,\dots,X_n), \ \ \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n),$$

поэтому для заряда $R \in \mathbb{N}_1(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\sharp R)(\varphi) &= R(\mathcal{P}^\sharp\varphi) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \big\langle \mathbb{R}(X_1,\dots,X_n,X_{n+1}), \varphi(X_1,\dots,X_n)\big\rangle \, d\|R\|(X). \end{aligned}$$

Подставляя сюда заряд T'_Δ, получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\sharp T'_\Delta)(\varphi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n \times [a;b]} \big\langle \mathbb{T}', \varphi(\mathcal{P}X)\big\rangle \, d\|T'\| \times \mathcal{L}^1(X) \\ &= \int\limits_a^b \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big\langle \mathbb{T}, \varphi(\mathcal{P}X)\big\rangle \, d\|T\|(X)\, dt \\ &= l\ T(\varphi), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. •

2.6. Второй шаг: сглаживание заряда T'. Мы будем сглаживать по отдельности векторный заряд T и скалярную меру $\|T\|$. Выберем функцию $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, положительную всюду и такую, что $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = 1$. Положим

$$\Phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Стандартными рассуждениями доказывается, что для любого векторного заряда T конечной вариации

$$\operatorname{var}(T * \Phi_\varepsilon) \leqslant \operatorname{var}(T),$$

$$T * \Phi = \sigma\mathcal{L}^n, \text{ где } \sigma \text{ — векторное поле класса } C^\infty,$$

$$T * \Phi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} T \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Положим

$$\|T\|_\varepsilon := \|T\| * \Phi_\varepsilon = t_\varepsilon \mathcal{L}^n,$$

$$T_\varepsilon := T * \Phi_\varepsilon = \tau'_\varepsilon \mathcal{L}^n,$$

где t_ε — всюду положительная (так как $\|T\| \neq 0$, а Φ_ε всюду положительна) функция класса C^∞, а τ'_ε — C^∞-гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^n$. Введем, наконец, заряд T'_ε в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} T'_\varepsilon : &= T_\varepsilon \times \mathcal{L}^1 + \|T\|_\varepsilon \times e_{n+1}\mathcal{L}^1 \\ &= \left((T_1)_\varepsilon \times \mathcal{L}^1, \dots, (T_n)_\varepsilon \times \mathcal{L}^1, \|T\|_\varepsilon \times \mathcal{L}^1\right) \\ &= (\tau'_\varepsilon, t_\varepsilon)\mathcal{L}^{n+1}. \end{aligned}$$

Его мы и будем рассматривать как результат сглаживания зарядаT'.

Нам понадобятся следующие свойства заряда T'_ε:

1) $T'_\varepsilon \in Sol_{\mathrm{loc}}$;
2) $T'_\varepsilon = \tau_\varepsilon$, *где* τ_ε — *векторное поле класса* $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$;
3) *при любом* $X \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\tau_\varepsilon(X) \neq 0, \qquad |\mathcal{P}\tau_\varepsilon(X)| \leqslant \mathcal{Q}\tau_\varepsilon(X).$$

Свойство 3) означает, что поле τ_ε почти параллельно $(n+1)$-оси. Обозначив символом $T'_{\varepsilon,\Delta}$ заряд $T'_\varepsilon \llcorner \mathcal{S}_\Delta$, имеем далее

4) $T'_{\varepsilon,\Delta} \in \mathbb{N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{var}\left(T'_{\varepsilon,\Delta}\right) \leqslant l\sqrt{2}\operatorname{var}(T)$, $\operatorname{var}\left(\operatorname{div} T'_{\varepsilon,\Delta}\right) \leqslant 2\operatorname{var}(T)$;
5) *при* $\varepsilon \to 0 \qquad T'_{\varepsilon,\Delta} \xrightarrow{\mathcal{D}} T'_\Delta$.

Доказательство. С учетом того, что $\operatorname{div} T_\varepsilon = \operatorname{div}(T * \Phi_\varepsilon) = (\operatorname{div} T) * \Phi_\varepsilon = 0$, свойство 1) доказывается аналогично свойству 1) заряда T'. В качестве τ_ε (свойство 2)) можно взять вектор $(\tau'_\varepsilon, t_\varepsilon)$; ясно, что $\tau_\varepsilon(X) \neq 0$, так как $t_\varepsilon(X) > 0$. Кроме того, $\|\mathcal{P}\tau_\varepsilon\| = \|\tau'_\varepsilon\| \leqslant t_\varepsilon = \mathcal{Q}\tau_\varepsilon$, и свойство 3) доказано. Первая часть свойства 4) очевидна. Далее,

$$\|\tau_\varepsilon\| = \sqrt{\|\tau'_\varepsilon\|^2 + {t_\varepsilon}^2} \leqslant \sqrt{2}\, t_\varepsilon,$$

и потому

$$\operatorname{var} T'_{\varepsilon,\Delta} = \|T'_\varepsilon\|(S_\Delta) = \int\limits_{S_\Delta} |\tau_\varepsilon| d\mathcal{L}^{n+1} \leqslant \sqrt{2} \int\limits_{S_\Delta} t_\varepsilon(x) d\mathcal{L}^{n+1}(X)$$

$$= l\sqrt{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} t_\varepsilon(x) d\mathcal{L}^n(x) = l\sqrt{2} \operatorname{var} \|T\|_\varepsilon \leqslant l\sqrt{2} \operatorname{var} T.$$

Чтобы закончить доказательство утверждения 4), заметим, что

$$\operatorname{div} T'_{\varepsilon,\Delta} = \|T\|_\varepsilon \times (\delta_a - \delta_b).$$

Чтобы доказать 5), отметим, что

$$T'_{\varepsilon,\Delta} = T_\varepsilon \times (\mathcal{L}^1 \llcorner \Delta) + \|T\|_\varepsilon \times \overrightarrow{[a;b]},$$

$$T'_\Delta = T \times (\mathcal{L}^1 \llcorner \Delta) + \|T\| \times \overrightarrow{[a;b]}.$$

Но $T_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} T$, $\|T_\varepsilon\| \xrightarrow{\mathcal{D}} \|T\|$, следовательно, $T'_{\varepsilon,\Delta} \xrightarrow{\mathcal{D}} T'_\Delta$. •

2.7. Третий шаг: разложение гладкого заряда T'_ε на элементы множества $\mathcal{A}$. Поле τ_ε почти параллельно $(n+1)$-й оси и соленоидально. Начнем его анализ со следующего очевидного замечания. Если C^∞-гладкое векторное поле σ соленоидально и параллельно $(n+1)$-й оси (т. е., если $\mathcal{P}\sigma(X) = 0$), то σ постоянно на каждой прямой $z \times \mathbb{R}$. В самом деле, $\operatorname{div}\sigma = \dfrac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial x_{n+1}}$, так что $\sigma(X) = (0, \dots, 0, \sigma_{n+1}(X))$ зависит лишь от X_{n+1}. Поэтому отвечающий полю σ соленоидальный заряд $\sigma\mathcal{L}^{n+1}$ разлагается на ориентированные прямые, параллельные $(n+1)$-й оси (если каждой прямой сопоставить точку, в которой она пересекает $\mathbb{R}^n$, то соответствующая мера μ будет равна $\sigma_{n+1}\mathcal{L}^n$).

2.7.1. Вернемся к соленоидальному полю τ_ε, почти параллельному $(n+1)$-й оси, и проверим, что после надлежащего выпрямления G оно станет параллельным этой оси, сохранив соленоидальность. Применяя обратное преобразование $H = G^{-1}$, мы разложим заряд T'_ε на кривые — образы прямых, параллельных $(n+1)$-й оси.

Из почти параллельности поля τ_ε $(n+1)$-й оси (свойство 3) заряда T'_ε) следует возможность глобального выпрямления, т. е. *наличие такого сохраняющего $(n+1)$-ю координату отображения G класса C^∞, что поле $\sigma = \mathbb{D}G \cdot \tau_\varepsilon$ параллельно $(n+1)$-й оси ($\mathbb{D}G$ — матрица Якоби отображения G).*

Доказательство. Задача Коши

$$\begin{cases} Y(t_\circ) = Y^\circ, & t_\circ \in \mathbb{R},\ Y^\circ \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \dot{Y} = \tilde{\tau}_\varepsilon(Y), & \tilde{\tau}_\varepsilon := \dfrac{\tau_\varepsilon}{(\tau_\varepsilon)_{n+1}} \end{cases} \tag{2.6}$$

равносильна задаче Коши

$$\begin{cases} Y_j(t_\circ) = Y_j^\circ, \\ \frac{dY_j}{dt}(t) = (\tilde{\tau}_\varepsilon)_j(Y_1, \dots, Y_n, t), & j = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{2.7}$$

так как (2.6) влечет $\dot{Y}_{n+1} = 1$. Из очевидной оценки

$$\sum_{j=1}^{n} (\tilde{\tau_\varepsilon})_j^2 = \|\tilde{\tau_\varepsilon}\|^2 \leqslant 1$$

и теоремы Пикара следует, что любая задача Коши (2.7) имеет единственное решение класса C^∞, заданное на всей оси. То же верно и для любой задачи (2.6). Обозначим символом $Y_{t_\circ,Y^\circ}$ ее решение.

Отображение

$$G:\ Y \longmapsto \Big(\mathcal{P}Y_{Y_{n+1},Y}(0), Y_{n+1}\Big)\ \in\ \mathbb{R}^{n+1}$$

есть C^∞-гладкий диффеоморфизм, сохраняющий $(n+1)$-ю координату и преобразующий траектории решений задачи Коши (2.6) в прямые, параллельные $(n+1)$-й оси: при любом $Y^\circ \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathcal{P}G\big(Y_{t_\circ,Y^\circ}(t)\big) \equiv \mathcal{P}Y_{t_\circ,Y^\circ}(0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя это тождество по t, а затем полагая $t = t_\circ$, получим

$$\mathcal{P}\Big(\mathbb{D}G(Y^\circ)\cdot\tilde{\tau_\varepsilon}(Y^\circ)\Big) = 0$$

при любом $Y^\circ \in \mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, поле $\tilde{\sigma} := \mathbb{D}G \cdot \tilde{\tau_\varepsilon}$ всюду ортогонально гиперплоскости $\mathbb{R}^n$. Тем же свойством обладает и поле $\sigma := \mathbb{D}G \cdot \tau_\varepsilon$.

2.7.2. Напишем, подставив G и $T'_\varepsilon = \tau_\varepsilon\mathcal{L}^{n+1}$ в (1.5) и заменив переменную под знаком интеграла,

$$\begin{aligned}(G_\sharp T'_\varepsilon)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbb{D}G\cdot\tau_\varepsilon, \varphi(G)\rangle\, d\mathcal{L}^{n+1}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbb{D}G(H)\cdot\tau_\varepsilon(H), \varphi\rangle |\mathbb{J}H|\, d\mathcal{L}^{n+1},\end{aligned}$$

т. е. (мы обозначили $H := G^{-1}$, под $\mathbb{J}H$ понимается якобиан H)

$$G_\sharp T'_\varepsilon = \mathbb{D}G(H)\cdot\tau_\varepsilon(H)\cdot|\mathbb{J}H|\mathcal{L}^{n+1}.$$

Поле в правой части параллельно $(n+1)$-й оси (мы доказали это для аналогичного поля без множителя $\mathbb{J}H$). Кроме того, согласно (1.8),

$$\operatorname{div} G_\sharp T'_\varepsilon = G_\sharp \operatorname{div} T'_\varepsilon = G_\sharp 0 = 0,$$

и это поле соленоидально. Следовательно, по сказанному в начале этого пункта, оно не зависит от X_{n+1}:

$$\mathbb{D}G(H)\cdot\tau_\varepsilon(H)\cdot\mathbb{J}H = \rho(z)dX_{n+1},\ z \in \mathbb{R}^n,$$

и заряд $G_\sharp T'_\varepsilon$ можно разложить на вертикальные прямые:

$$G_\sharp T'_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_z \times \overrightarrow{(-\infty;\infty)}\cdot\rho(z)\, d\mathcal{L}^n(z). \tag{2.9}$$

2.7.3. Вспомним, что (см. (1.6))

$$H_\sharp G_\sharp T'_\varepsilon = (HG)_\sharp T'_\varepsilon = (Id)_\sharp T'_\varepsilon = T'_\varepsilon,$$

и применим к (2.9) преобразование H:

$$T'_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_z \rho(z)\, d\mathcal{L}^n(z), \ \ \rho = \rho_\varepsilon. \tag{2.9'}$$

В последней формуле $h_z := H_\# \left(\delta_z \overrightarrow{(-\infty; +\infty)}\right) \in \mathcal{A}$ — локальный заряд, соответствующий медленному движению ϕ_z,

$$\phi_z(t) := H(z,t) = (f(z,t), t). \tag{2.10}$$

Точка $f(z,t) = \mathcal{P}H(z,t)$ определена следующими условиями:

$$\dot{f}(z,t) \equiv \tau^*(f(z,t)), ((z,t) \in \mathbb{R}^{n+1}), f(z,0) = z, \tag{2.11}$$

где $\tau^* := \mathcal{P}\tau = (\frac{\tau_1}{\tau_{n+1}}, \frac{\tau_2}{\tau_{n+1}}, \ldots, \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}})$ (см. (2.6) и (2.7)).

2.7.4. Мы „вкладываем“ теперь разложение (2.9′) в пространство медленных движений $\hat{S}$(см. (2.3.3)).

Отображение $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})(\subset \hat{S})$, определенное как

$$z \mapsto \phi_z \qquad (z \in \mathbb{R}^n)$$

непрерывно, поскольку $f(z,t) \to f(z_0,t)$ равномерно по $t \in [a,b]$, когда $z \to z_0$ (для любого сегмента $[a,b]$). Положив $\Phi(\infty) := \Phi_\infty$, мы видим, что Φ становится непрерывным отображением из $\hat{\mathbb{R}}^n$ в $\hat{S}$. Оно инъективно и потому является гомеоморфизмом.

Рассмотрим теперь образ $\nu(= \nu_\varepsilon)$ меры $\rho\mathcal{L}^{n+1}$ под действием Φ. Другими словами,

$$\nu_\varepsilon(\mathcal{E}) := \int\limits_{\Phi^{-1}(\mathcal{E})} \rho\, d\mathcal{L}^{n+1}, \qquad \mathcal{E} \in \mathcal{B}(\hat{S}). \tag{2.10'}$$

Очевидно, $\nu(= \nu_\varepsilon)$ есть борелевская мера на $\hat{S}$ с носителем в конечномерном компактном подмножестве $\Phi(\mathbb{R}^n) \subset \hat{S}$ (параметризованном посредством Φ).

Мы можем теперь переписать (2.9′) следующим образом:

$$T'_\varepsilon = \int\limits_{\hat{S}} R_\gamma d\nu_\varepsilon(\gamma), \tag{2.11'}$$

где $R_\gamma =: B(\gamma) \in \mathcal{A}$ обозначает локальный заряд в $\mathbb{R}^{n+1}$, соответствующий $\gamma \in \hat{S}$ (см. (2.4.2)).

2.7.5. Вспомним, что наша мера $\nu(=\nu_\varepsilon)$ зависит от ε, и покажем, что *вариация* ν_ε *равномерно ограничена:*

$$\operatorname{var}\nu_\varepsilon \leqslant \operatorname{var}T \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{2.12}$$

Пусть σ — локальный заряд в $\mathbb{R}^{n+1}$, положим $\sigma_+ := \sigma\llcorner(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty))$ (см. (2.6.2)). Сопоставляя медленному движению ϕ_z локальный заряд $B(\phi_z)$ (см. 2.4.2), мы получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\nu_\varepsilon &= \operatorname{var}\Phi_\#(\rho_\varepsilon,\mathcal{L}^n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho_\varepsilon d\mathcal{L}^n \\ &= \operatorname{var}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\delta_z\rho_\varepsilon(z)d\mathcal{L}^n(z) = \operatorname{var}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div}(\phi_z)+\rho_\varepsilon(z)d\mathcal{L}^n(z) \\ &= \operatorname{var}\operatorname{div}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\phi_z)+\rho_\varepsilon(z)d\mathcal{L}^n(z) = \operatorname{var}\operatorname{div}(T'_\varepsilon)_+ \leqslant \operatorname{var}T\end{aligned}$$

(последнее неравенство было доказано в 2.6.2). •

2.7.6. Любому $a\in\mathbb{R}$ соответствует сдвиг $\tau_a : \hat{S}\to\hat{S}$, а именно $(\tau_a\Phi)(t) := (f(t+a),t)(t\in\mathbb{R})$, где $\Phi\in\operatorname{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\Phi(t)\equiv(f(t),t)$ и $\tau_a\Phi_\infty := \phi_\infty$. Докажем, что *мера* λ_ε, *определенная в* (2.15), *инвариантна относительно сдвига.*

Прежде всего если $\dot f(t)\equiv\tau^*(f(t))$, то $\dot f(t+a)\equiv\tau^*(f(t+a))$ (определение τ^* дано в (2.11)), так что множество $\Phi(\mathbb{R}^n)\subset\operatorname{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$ инвариантно относительно сдвига. Положим

$$g^a(z) := f(z,a)$$

и возьмем борелевское множество $\mathcal{E}\subset\Phi(\mathbb{R}^n)$. Оно состоит из движений ϕ_f, $\phi_f(t)\equiv(f(t),t)$, где $\dot f=\tau^*(f)$(см. (2.11)). Положим

$$E := \Phi^{-1}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{P}\phi(0) : \phi\in\mathcal{E}\} = \{f(0) : \dot f=\tau^*(f),\phi_f\in\mathcal{E}\}.$$

Тогда $\nu(\mathcal{E}) = \int_E\rho d\mathcal{L}^n$. Очевидно, $\Phi^{-1}(\tau_a(E)) = \{f(a) : \dot f=\tau^*(f),\Phi_f\in\mathcal{E}\} = g^a(E)$ и $\nu(\tau_a(\mathcal{E})) = \int_{g^aE}\rho d\mathcal{L}^n =: I(a,E)$. Следовательно, наша задача — доказать, что $I(a,E)$ не зависит от a. Для этого рассмотрим $\rho(=\rho_\varepsilon)$ внимательнее. Имеем

$$\rho(z) = [(\mathbb{D}G)(H(z,t))\cdot\tau(H(z,t))]_{n+1}\cdot|(\mathbb{J}H)(z,t)| \qquad (z\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}), \tag{2.13}$$

где $[w]_{n+1}$ есть $(n+1)$-я координата вектора $w\in\mathbb{R}^{n+1}$. Поскольку G сохраняет $(n+1)$-ю координату, квадратная скобка в последнем тождестве есть просто $[\tau(H(z,t))]_{n+1}$, и $\tau(H(z,0))\equiv\tau(z)$ (так как $H(z,0)\equiv z$). Далее, $H(z,t)=(f(z,t),t)$,

$$\mathbb{D}H(z,t) = \begin{pmatrix} f'_z(z,t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbb{J}H(z,t)\equiv\det f'_z(z,t).$$

Но $f(z,0)=z$ и $\mathbb{J}H(z,0)=1$. Взяв $t=0$ в (2.13), мы видим, что $\rho=\tau_{n+1}$. Умножая поле τ^* (которое определяет группу g) на τ_{n+1}, мы получаем $\mathcal{P}\tau$, соленоидальное поле в $\mathbb{R}^n$. Значит, $\operatorname{div}\tau_{n+1}\tau^*=0$, и по теореме Лиувилля (см. [13] или [14]) функция $a\mapsto I(a,E)$ постоянна.

2.8. Последний шаг: слабый предел мер ν_ε. Теперь у нас есть семейство $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ борелевских мер на $\hat{S}$, которые инвариантны относительно сдвига и равномерно ограничены (см. 2.7.5 и 2.7.6). Наша цель здесь — перейти к пределу в (2.11′), когда ε стремится к нулю соответствующим образом.

2.8.1. Возьмем $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j \to 0, \varepsilon > 0$ и положим $\nu_j := \nu_{\varepsilon_j}$. Вследствие слабой компактности единичного шара в пространстве вещественных борелевских мер на $\hat{S}$, мы можем предположить, что

$$\nu_j \to \nu \text{ слабо,} \tag{2.14}$$

где ν — борелевская мера на $\hat{S}$ (ее носитель лежит в $\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$, поскольку $\nu_\varepsilon(\{\phi_\infty\}) \equiv 0$). Формула (2.14) означает, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\hat{S}} \alpha d\nu_j = \int\limits_{\hat{S}} \alpha d\nu \text{ для любого } \alpha \in C(\hat{S}).$$

Поскольку ν_j инвариантны относительно сдвига, то

$$\int\limits_{\hat{S}} \alpha(\tau_a\gamma) d\nu_j(\gamma) = \int\limits_{\hat{S}} \alpha d\nu_j, j = 1, 2, \ldots, \alpha \in C(\hat{S}).$$

По (2.14)

$$\int\limits_{\hat{S}} \alpha(\tau_a\gamma) d\nu(\gamma) = \int\limits_{\hat{S}} \alpha d\nu, \quad \alpha \in C(\hat{S}).$$

Значит, ν тоже инвариантна относительно сдвига. В соответствии с (2.12)

$$\operatorname{var}\nu \leqslant \liminf_{j\to\infty} \operatorname{var}\nu_j \leqslant \operatorname{var} T. \tag{2.15}$$

Перейдем теперь к пределу в (2.11′). Возьмем векторное поле $\phi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ и положим $\alpha(\gamma) := R_\gamma(\varphi)(= B_\gamma(\varphi)), \alpha(\varphi_\infty) = 0$. Очевидно, $\alpha \in C(\hat{S})$ и по (2.14) и (2.11′)

$$T'_{\varepsilon_j}(\varphi) = \int\limits_{\hat{S}} \alpha d\nu_j \underset{j\to\infty}{\to} \int\limits_{\hat{S}} \alpha d\nu, \tag{2.16}$$

но в 2.6.1 мы доказали, что $T'_{\varepsilon_j,\Delta} \xrightarrow{\mathcal{D}} T'_\Delta$ для любого сегмента $\Delta = [a, b]$, откуда $T'_{\varepsilon_j} \xrightarrow{\mathcal{D}} T'$. Вместе с (2.15) это дает

$$T' = \int\limits_{\hat{S}} R_\gamma d\nu(\gamma). \tag{2.17}$$

2.8.2. Закончим теперь доказательство теоремы A.

Возьмем $l > 0$ и зафиксируем сегмент $[a, b] = \Delta$ длины l. Положим $T'_\Delta := T' \llcorner S_\Delta; S_\Delta := \mathbb{R}^n \times \Delta$. Равенство (2.17) означает, что

$$T'(\varphi) = \int\limits_{\hat{S}} R_\gamma(\varphi) d\nu(\gamma) \tag{2.18}$$

для любого поля $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Но T' — локальный заряд, значит, (2.18) верно для любого борелевского ограниченного векторного поля φ в $\mathbb{R}^n$. Значит, мы можем применить (2.18) к $\chi_\Delta \cdot \varphi$ (вместо $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{n+1})$), где χ_Δ — характеристическая функция полосы S_Δ. Мы получим

$$T'_\Delta = \int\limits_{\hat{S}} (R_\gamma)_\Delta \, d\nu(\gamma) = \int\limits_{\hat{S}} R_{\gamma_\Delta} \, d\nu(\gamma). \tag{2.19}$$

где $(R_\gamma)_\Delta := R_\gamma \llcorner \Delta$, $\gamma_\Delta = \gamma\,|_\Delta$; R_{γ_Δ} — кривая $\gamma_\# \overrightarrow{[a; b]}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим следующее отображение $\xi_\Delta : \hat{S} \to \hat{\mathcal{A}}_\Delta$:

$$\xi_\Delta(\gamma) = R_{\gamma_\Delta}(\gamma \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})), \;\; \xi_\Delta(\varphi_\infty) = 0.$$

Тогда $\xi_\Delta(\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})) = \mathcal{A}_\Delta$(см. 2.4.3). Это отображение непрерывно и переводит ν в борелевскую меру $\lambda_\Delta := (\xi_\Delta)_\# \nu$ на $\hat{\mathcal{A}}_\Delta$, $(\lambda_\Delta(\{\phi_\infty\}) = 0, \;\mathrm{var}\,\lambda_\Delta = \mathrm{var}\,\nu \leqslant \mathrm{var}\,T)$. Теперь (2.19) превращается в

$$T'_\Delta = \int\limits_{\mathcal{A}_\Delta} R \, d\lambda_\Delta(R). \tag{2.20}$$

Вспомнив свойство 5) в 2.5, получаем

$$lT = \mathcal{P}_\# T'_\Delta = \int\limits_{\mathcal{A}_\Delta} \mathcal{P}_\# R \, d\lambda_\Delta(R). \tag{2.21}$$

Положим $\mu (= \mu_\Delta) := l^{-1}(\mathcal{P}_\#)_\# \lambda_\Delta$ (т.е. μ есть образ меры $l^{-1}\lambda_\Delta$ при отображении $\mathcal{P}_\# : \mathcal{A}_\Delta \to B_l$, где $B_l := \{U \in \mathrm{Ch}(\mathbb{R}^n) : \mathrm{var}\,U \leqslant l\}; \mathcal{P}_\# \mathcal{A}_\Delta \subset B_l$ в соответствии с (b) в (2.5)). Теперь ясно, что

$$T = \int\limits_{B_l} R d\mu(R), \;\; l\,\mathrm{var}\,\mu = \mathrm{var}\,\lambda_\Delta = \mathrm{var}\,\lambda \leqslant \mathrm{var}\,T. \tag{2.22}$$

Но тогда

$$\mathrm{var}\,T \leqslant \int\limits_{B_l} \mathrm{var}\,R d\mu(R) \leqslant \int\limits_{B_l} l d\mu(R) = l\,\mathrm{var}\,\mu \leqslant \mathrm{var}\,T,$$

значит, $\int_{B_l} \mathrm{var}\,R d\mu(R) = \int_{B_l} l d\mu(R)$, $l\,\mathrm{var}\,\mu = \mathrm{var}\,T$ и

$$\mathrm{var}\,R = l, \quad \nu - \text{почти всюду на} \;\; B_l.$$

Это означает, что носитель μ_Δ лежит в $\mathfrak{C}_l$ (последнее множество всех кривых длины l — борелевское).

Таким образом,

$$T = \int_{\mathfrak{C}_l} R d\mu(R), \quad \operatorname{var} T = \int_{\mathfrak{C}_l} \operatorname{var} R d\mu(R),$$

и мы доказали (1.9) и (1.10) (см. формулировку теоремы A). Осталось лишь доказать (1.21) и (1.22).

В соответствии со свойствами заряда T'_Δ (см. 3 в 2.5)

$$\|\operatorname{div} T'_\Delta\| = \|T\| \times \delta_a + \|T\| \times \delta_b, \quad \mathcal{P}_\# \|\operatorname{div} T'_\Delta\| = 2\|T\|.$$

Но по (2.20)

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} T'_\Delta\| &= \left\| \int_{\mathcal{A}_\Delta} \operatorname{div} R \, d\lambda(R) \right\| \\ &= \left\| \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{b(R)} \, d\lambda(R) - \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{e(R)} \, d\lambda(R) \right\| \\ &= \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{b(R)} d\lambda(R) + \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{e(R)} d\lambda(R) \end{aligned} \tag{2.23}$$

(мы используем тот факт, что меры $\int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{b(R)} d\lambda(R)$ и $\int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{e(R)} d\lambda(R)$ сосредоточены на непересекающихся гиперплоскостях в $\mathbb{R}^{n+1}$, поскольку $\mathcal{Q}b(R) \equiv a$, $\mathcal{Q}e(R) \equiv b$ для $R \in \mathcal{A}_\Delta$).

Применяя $\mathcal{P}_\#$, мы находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\# \|\operatorname{div} T'_\Delta\| &= \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{\mathcal{P}b(R)} \, d\lambda(R) + \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{\mathcal{P}e(R)} \, d\lambda(R) \\ &= l \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{b(R)} \, d\lambda(R) + l \int_{\mathcal{A}_\Delta} \delta_{e(R)} \, d\lambda(R). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Теперь мы используем тождество $\operatorname{div} T = 0$ и (2.23):

$$0 = \operatorname{div} T = \int_{C_l} (\delta_{b(R)} - \delta_{e(R)}) d\mu(R).$$

Значит (по (2.23) и (2.24)),

$$\|T\| = l \int_{\mathfrak{C}_l} \delta_{b(R)} d\mu(R) = l \int_{\mathfrak{C}_l} \delta_{e(R)} d\mu(R),$$

и мы имеем (1.22). Наконец,

$$l\int\limits_{\mathfrak{C}_l}\|\operatorname{div}R\|d\mu(R)=\int\limits_{\mathcal{A}_\Delta}\|\operatorname{div}\mathcal{P}_\#R\|d\lambda(R)\leqslant\int\limits_{\mathcal{A}_\Delta}\|\mathcal{P}_\#\operatorname{div}R\|d\lambda(R)=$$

$$\int\limits_{\mathcal{A}_\Delta}\delta_{\mathcal{P}e(R)}+\delta_{\mathcal{P}b(R)}d\lambda(R)=\int\limits_{\mathfrak{C}_l}\delta_{e(R)}+\delta_{b(R)}d\lambda(R)=2\|T\|,\tag{2.25}$$

и (1.21) также верно (неравенство в (2.25) означает, что $\mathcal{P}_\#R$ может быть замкнутой кривой, и тогда $\operatorname{div}\mathcal{P}_\#R=0$; если же $\mathcal{P}_\#R$ не замкнута, то $\operatorname{div}\mathcal{P}_\#R=\mathcal{P}_\#\operatorname{div}R$).

Теорема A доказана.

2.9. Доказательство теорем B и B′. Рассмотрим связанную с соленоидом $T\in Sol(\mathbb{R}^n)$ инвариантную относительно сдвига меру $\nu=\nu_T$, определенную в 2.8 (см. (2.13)). Наше доказательство будет основано на эргодической теореме Биркгофа–Хинчина (см. [15]). Мы применим ее к пространству с мерой (S,ν), где $S:=\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$. Обозначим через τ сдвиг $\tau:S\to S$:

$$\tau(\gamma)(t):=(f_\gamma(t+1),t),\qquad \text{где }\gamma(t)\equiv(f_\gamma(t),t),\ \gamma\in S.\quad .$$

Поскольку τ является автоморфизмом пространства с мерой (S,ν), то по эргодической теореме для любой $\theta\in L^1(S,\nu)$ и для ν-почти всех $\gamma\in S$ существует следующий предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\sum_{j=-k}^{k-1}\theta(\tau^j\gamma)=:\overline{\theta(\gamma)},\tag{2.26}$$

причем

$$\int\limits_S\overline{\theta}d\nu=\int\limits_S\theta d\nu.\tag{2.27}$$

2.9.1. Мы сопоставим каждому движению $\gamma\in\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$ его „первый час“ $\gamma_0:=\gamma\mid S_{[0,1]}$ (см. 2.8.2) и соответствующий заряд $R_0=B(\gamma_0)\in\mathcal{A}_{[0,1]}$. Возьмем пробное векторное поле $\varphi\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ и положим $\theta_\varphi(\gamma)=(\mathcal{P}_\#R_0)(\varphi)$ (циркуляция поля φ вдоль кривой $\mathcal{P}_\#R_0$).

Функция θ_φ непрерывна и ограничена на $\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$. Значит, $\theta_\varphi\in L^1(S,\nu)$, и мы можем применить эргодическую теорему к $\theta=\theta_\varphi$. Рассмотрим медленное движение γ, $\gamma(t)\equiv(f_\gamma(t),t), f_\gamma\in\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\theta_\varphi(\tau^j\gamma)=(f_\gamma)_\#\overrightarrow{[j;j+1]}(\varphi),$$

и выражение под знаком предела в (2.26) превращается в $(2k)^{-1}f_\#(\overrightarrow{[-k;k]})(\varphi)=:\overline{R_{\gamma_k}}(\varphi)$. Следовательно, для *всех* $\gamma\in S$, кроме $\gamma\in N_\varphi,\nu(N_\varphi)=0$, существует предел $\overline{R_\gamma}(\varphi):=\lim_{k\to\infty}\overline{R_{\gamma_k}}(\varphi)$.

Выберем теперь счетное, всюду плотное множество $\mathbb{D}^*\subset\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ и положим $N=\cup_{\varphi\in\mathbb{D}^*}N_\varphi$. Тогда $\nu(N)=0$ и для $\gamma\in S\setminus N$ $\overline{R_\gamma}(\varphi)$ существует для всех $\varphi\in\mathbb{D}^*$. Но для фиксированного $k=1,2,\ldots$

$$\operatorname{var}\overline{R_{\gamma_k}}\leqslant\frac{1}{2k}\mathrm{Lip}(f_\gamma)\cdot 2k\leqslant 1$$

(см. (1.7)). Таким образом, по теореме Банаха–Штейнгауза для фиксированного $\gamma \in S$ существование $\overline{R_\gamma}(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbb{D}^*$ влечет его существование для *всех* $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$; в этом случае $\overline{R_\gamma}$ есть заряд в $\mathbb{R}^n$, и $\operatorname{var} \overline{R_\gamma} \leqslant 1$.

Мы доказали следующий факт: для ν-почти всех $\gamma \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$ предел $\overline{R_\gamma}(\varphi)$ существует для всех $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$.

2.9.2. Вспомним теперь формулу (2.21):

$$T(\varphi) = (\mathcal{P}_\# T'_{[0,1]})(\varphi) = \int\limits_S (\mathcal{P}_\# R_{\gamma_0})(\varphi) d\nu(\gamma) = \int\limits_S (\theta_\varphi) d\nu.$$

Вместе с (2.27) она дает

$$T = \int\limits_S \overline{R_\gamma}\, d\nu(\gamma), \;\; \nu = \nu_T. \tag{2.28}$$

Покажем, что это разложение заряда T: действительно,

$$\operatorname{var} T \leqslant \int\limits_S \operatorname{var} \overline{R_\gamma}\, d\nu(\gamma) \leqslant \int\limits_S d\nu = \operatorname{var} \nu = \operatorname{var} T,$$

значит, $\operatorname{var} \overline{R_\gamma} = 1$ для ν-почти всех γ и $\operatorname{var} T = \int_S \operatorname{var} \overline{R_\gamma}\, d\nu(\gamma)$.

2.9.3. Предположим теперь, что T — крайняя точка единичного шара B_{Sol}. Мы получим разложение T на заряды R_γ, которые, очевидно, также являются соленоидами. Следовательно (см. [5]), для ν-почти всех γ $R_\gamma = T$.

2.9.4. Последнее утверждение влечет теорему B′.

Действительно, если $T \in Sol(\mathbb{R}^n)$, то ν_T-почти всюду движения $\gamma \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяют

$$f_\gamma(\mathbb{R}) \subset \operatorname{spt} T, \;\; f_\gamma := \mathcal{P}\gamma.$$

Это следует из (2.19) и (2.21), где мы можем взять $\Delta = [-k, k]$ (исключив потом из рассмотрения счетное объединение исключительных множеств меры нуль). Для фиксированного k равенства $\operatorname{var} \lambda_\Delta = \operatorname{var} T$, (2.21) и (2.19) влекут включение $f_{\gamma_\Delta} \subset \operatorname{spt} T$ для ν-почти всех $\gamma \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$; см. 1.2.

Таким образом, если $T \in extr\,\mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$, то вследствие 2.9.3 $T = \overline{R_{f_\gamma}}$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Slow}(\mathbb{R}^{n+1})$. Но мы также можем предположить, что верно (2.29), т. е. все условия (1.16)–(1.19) выполняются, и $T \in extr B_{Sol} \Rightarrow T \in \mathrm{elem}$. Теорема B′, а вместе с ней и теорема B, доказана.

§3. Доказательство теоремы C

3.1. Сведение к лемме о приближенном разложении. Теорему C мы выведем из следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $T \in \mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* T *полностью разложим в сумму зарядов* $P, Q \in \mathbb{N}_1(\mathbb{R}^n)$ *таких, что* Q *полностью разложим на простые ориентированные кривые и*

$$\operatorname{var}(\operatorname{div} Q) \geqslant \frac{1}{10}\operatorname{var}(\operatorname{div} T).$$

Предположим, что лемма уже доказана, и применим ее к T; полученные заряды обозначим через P_1 и Q_1; применим лемму к P_1, получим P_2 и Q_2; применим ее к P_2 и так далее. В итоге появятся две последовательности нормальных зарядов: $\{P_k\}$ и $\{Q_k\}$, причем при любом натуральном k

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k + P_k = T, \tag{3.1}$$

$$\|Q_1\| + \|Q_2\| + \dots + \|Q_k\| + \|P_k\| = \|T\|, \tag{3.2}$$

$$\|\operatorname{div} Q_1\| + \|\operatorname{div} Q_2\| + \dots + \|\operatorname{div} Q_k\| + \|\operatorname{div} P_k\| = \|\operatorname{div} T\|, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{var}(\operatorname{div} P_k) \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^k \operatorname{var}(\operatorname{div} T). \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что ряд $Q_1 + Q_2 + \dots$ сходится по вариации к какому-то нормальному заряду Q, а последовательность P_k стремится по вариации к такому нормальному заряду P, что

$$P + Q = T, \quad \|P\| + \|Q\| = \|T\|. \tag{3.5}$$

По неравенству (3.4) $\operatorname{var}(\operatorname{div} P_k) \to 0$ при $k \to \infty$, и, следовательно,

$$\operatorname{div} P = 0, \quad \operatorname{div} Q = \operatorname{div} T. \tag{3.6}$$

Осталось вспомнить, что вследствие (3.1), (3.2), (3.3) заряд Q разлагается в бесконечную сумму зарядов Q_k и, так как при любом k заряд Q_k полностью разложим на ориентированные простые кривые, то тем же свойством обладает и Q. Вместе с (3.5) и (3.6) это доказывает теорему C. Осталось доказать лемму.

3.2. Доказательство леммы. Если $\operatorname{var}(\operatorname{div} T) = 0$, то лемма очевидна: $P = T$ и $Q = 0$; поэтому можно считать, что $\operatorname{var}(\operatorname{div} T) > 0$. Зафиксируем число $l > \dfrac{20\operatorname{var}(T)}{\operatorname{var}(\operatorname{div} T)}$ и применим теорему A при таком l к заряду $S \in \mathbb{N}(\mathbb{R}^{n+1})$, определенному так:

$$S := T \times (\delta_0 - \delta_l) + \operatorname{div} T \times \overrightarrow{[0; l]},$$

— легко проверяется, что его дивергенция нулевая. Мы получим разложение

$$S = \int\limits_{\mathfrak{C}_l} R \, d\mu(R), \tag{3.7}$$

$$\|S\| = \int\limits_{\mathfrak{C}_l} \|R\| \, d\mu(R), \tag{3.8}$$

$$\|S\| = l \int_{\mathfrak{C}_l} \delta_{b(R)}\, d\mu(R) = l \int_{\mathfrak{C}_l} \delta_{e(R)}\, d\mu(R). \tag{3.9}$$

Разобьем с точностью до множества $\|\operatorname{div} T\|$ меры нуль носитель заряда $\operatorname{div} T$ в $\mathbb{R}^n$ в зависимости от того, равен ли $\overrightarrow{\operatorname{div}} T$ плюс или минус единице, на два множества: E_+ и E_-. Тогда для $\|S\|$-почти всех $X \in E_\pm \times (0; l)$ имеем $\mathbb{S}(X) = \pm dX_{n+1}$, и с точностью до $\|S\|$ меры нуль

$$\operatorname{spt} S \bigcap \mathbb{R}^n \times (0; l) \subset \big(E_+ \cup E_-\big) \times (0; l).$$

Из этого следует, что сужение μ-почти любой кривой R на „полосу“ $\mathbb{R}^n \times (0; l)$ представимо как „вертикальный ориентированный отрезок“

$$\pm\delta_z \times \overrightarrow{[a; b]}$$

(где $z \in E_\pm$ и $a = 0$ или $b = l$), или как объединение двух таких отрезков. В частности, если мы обозначим

$$\mathfrak{N} := \big\{R \in \mathfrak{C}_l : b(R) \in E_- \times (0; l)\big\},$$

$$\mathfrak{M} := \big\{R \in \mathfrak{C}_l : b(R) \in E_- \times (0; l), e(R) \in \mathbb{R}^n \times (0; l)\big\},$$

то для μ-почти всех $R \in \mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}$ будет

$$R \llcorner \mathbb{R}^n \times (0; l) = \delta_{\mathcal{P}b(R)} \times \overrightarrow{[\mathcal{Q}b(R); 0]},$$

что влечет (так как $R \in \mathfrak{N}$, $\mathcal{P}b(R) < \frac{l}{2}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\big(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\big) &= \operatorname{var}(R) - \operatorname{var}\big(R \llcorner \mathbb{R}^n \times (0; l]\big) \\ &= l - \mathcal{Q}b(R) \\ &\geqslant l - \frac{l}{2} \\ &\geqslant \frac{l}{2} \end{aligned}$$

для μ-почти всех $R \in \mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}$. Значит,

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(T) &= \operatorname{var}\big(S \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\big) \\ &= \int_{\mathfrak{C}_l} \operatorname{var}\big(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\big)\, d\mu(R) \\ &\geqslant \int_{\mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}} \operatorname{var}\big(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\big)\, d\mu(R) \\ &\geqslant \int_{\mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}} \frac{l}{2}\, d\mu(R) \\ &= \frac{l}{2} \mu(\mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mu(\mathfrak{N}\backslash\mathfrak{M}) &\leqslant \frac{2}{l}\operatorname{var}(T)\\ &< \frac{2}{\frac{20\operatorname{var}(T)}{\operatorname{var}(\operatorname{div}T)}}\operatorname{var}(T)\\ &= \frac{1}{10}\operatorname{var}(T)\end{aligned}\tag{3.10}$$

— здесь мы использовали предусмотренную в начале доказательства нижнюю оценку числа l. С другой стороны, из (3.9) следует

$$\begin{aligned}\frac{l}{4}\operatorname{var}(\operatorname{div}T) &= \frac{l}{2}\operatorname{var}(\operatorname{div}T\llcorner E_-)\\ &= \operatorname{var}\left(S\llcorner E_- \times (0;\frac{l}{2})\right)\\ &= l\int\limits_{\mathfrak{N}}\operatorname{var}\left(\delta_{\mathfrak{b}(R)}\right)d\mu(R)\\ &= l\ \mu(\mathfrak{N}),\end{aligned}$$

т. е. $\mu(\mathfrak{N}) = \frac{1}{4}\operatorname{var}(\operatorname{div}T)$. Вычитая из этого тождества неравенство (3.10), имеем

$$\mu(\mathfrak{N}) \geqslant \mu(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}) = \mu(\mathfrak{N}) - \mu(\mathfrak{N}\backslash\mathfrak{M}) > \frac{1}{4}\operatorname{var}(\operatorname{div}T) - \frac{1}{10}\operatorname{var}(\operatorname{div}T) > \frac{1}{10}\operatorname{var}(\operatorname{div}T).$$

Таким образом,

$$\mu(\mathfrak{N}) > \frac{1}{10}\operatorname{var}(\operatorname{div}T).\tag{3.11}$$

Положим теперь

$$P := \int\limits_{\mathfrak{C}_l\backslash\mathfrak{M}} (R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\, d\mu(R),$$

$$Q := \int\limits_{\mathfrak{M}} (R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\, d\mu(R)$$

и проверим требуемые свойства. Очевидно, $P, Q \in \mathrm{N}_1(\mathbb{R}^n)$. Сужая (3.7) и (3.8) на $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, получаем

$$T = S \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\} = \int\limits_{\mathfrak{C}_l} R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\, d\mu(R),$$

$$\|T\| = \|S \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\| = \int\limits_{\mathfrak{C}_l} \|R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}\|\, d\mu(R).$$

Из чего следует,что $\|T\| = \|P\| + \|Q\|$ и $T = P + Q$, а Q разложим на кривые $R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (они не обязательно простые, но, не умаляя общности, можно считать их простыми — иначе потом разложим каждую на простые и „перекинем" „лишние" замкнутые кривые в заряд P). При μ-почти всех R заряд $R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}$ есть кривая с началом и концом в $\mathcal{P}b(R) \in E_-$ и $\mathcal{P}e(R) \in E_+$ соответственно. Это влечет тождество

$$\|\operatorname{div} R\| = \operatorname{div} R \llcorner E_+ - \operatorname{div} R \llcorner E_-$$

для μ-почти всех $R \in \mathfrak{M}$, а значит,

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{div} Q\| &= \left\| \int\limits_{\mathfrak{M}} \operatorname{div}(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\, d\mu(R) \right\| \\
&= \Big(\int\limits_{\mathfrak{M}} \operatorname{div}(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\, d\mu(R) \Big) \llcorner E_+ \\
&- \Big(\int\limits_{\mathfrak{M}} \operatorname{div}(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\, d\mu(R) \Big) \llcorner E_- \\
&= \int\limits_{\mathfrak{M}} \Big(\operatorname{div}(R \llcorner E_+ \times \{0\}) - \operatorname{div}(R \llcorner E_- \times \{0\}) \Big)\, d\mu(R) \\
&= \int\limits_{\mathfrak{M}} \|\operatorname{div}(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\|\, d\mu(R),
\end{aligned}$$

т. е. указанное разложение Q будет полным (мы использовали, что E_+ и E_- не пересекаются, вследствие чего „отрицательная" и „положительная" части дивергенции кривых $R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\}$ не могут сократиться).

Итак, осталось доказать, что

$$\|\operatorname{div} T\| = \|\operatorname{div} P\| + \|\operatorname{div} Q\|,$$

$$\operatorname{var}(\operatorname{div} Q) \geqslant \frac{1}{10} \operatorname{var}(\operatorname{div} T).$$

Последнее следует из (3.11)

$$\operatorname{var}(\operatorname{div} Q) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \operatorname{var}\big(\operatorname{div}(R \llcorner \mathbb{R}^n \times \{0\})\big)\, d\mu(R).$$

Для доказательства первого обозначим

$$\mathfrak{M}_- := \big\{ R \in \mathfrak{C}_l : b(R) \in E_- \times (0;l) \big\} ,$$

$$\mathfrak{M}_+ := \big\{ R \in \mathfrak{C}_l : e(R) \in E_+ \times (0;l) \big\} .$$

Очевидно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_- \cap \mathfrak{M}_+$. Введем заряд $P' \in \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^n)$:

$$P' := \mathcal{P}_\sharp \Big(\int\limits_{\mathfrak{M}_+ \setminus \mathfrak{M}} \delta_{e(R)}\, d\mu(R) - \int\limits_{\mathfrak{M}_- \setminus \mathfrak{M}} \delta_{b(R)}\, d\mu(R) \Big).$$

По определению заряда Q будет

$$\operatorname{div} Q = \mathcal{P}_\sharp \int_{\mathfrak{M}} (\delta_{e(R)} - \delta_{b(R)})\, d\mu(R).$$

Суммируя два последних равенства, применяя (3.10) и (3.11), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} Q + P' &= \mathcal{P}_\sharp\Big(\int_{\mathfrak{M}_+} \delta_{e(R)}\, d\mu(R) - \int_{\mathfrak{M}_-} \delta_{b(R)}\, d\mu(R)\Big)\\ &= \frac{1}{l}\mathcal{P}_\sharp\big(\|S\| \llcorner E_+ \times (0;l) - \|S\| \llcorner E_- \times (0;l)\big)\\ &= \|\operatorname{div} T\| \llcorner E_+ - \|\operatorname{div} T\| \llcorner E_-\\ &= \operatorname{div} T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом, $\operatorname{div} Q + P' = \operatorname{div} T$, что вместе с $Q + P = T$ влечет $P' = \operatorname{div} T$. Написав аналогичное (3.12) тождество для норм, получим

$$\|\operatorname{div} Q\| + \|P'\| = \|\operatorname{div} T\|$$

или

$$\|\operatorname{div} Q\| + \|\operatorname{div} P\| = \|\operatorname{div} T\|,$$

что доказывает лемму, а вместе с ней и теорему C.

Список литературы

[1] Federer H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
[2] Brothers J. B., *Some open problems in geometric measure theory*, Geometric Measure Theory and the Calculus of Variations (W. K. Allard and F. J. Almgren, eds.), AMS, Providence, R.I., 1986.
[3] Ruelle D., Sullivan D., *Currents, flows and diffeomorphisms*, Topology **14** (1975), 319–327.
[4] Смирнов С. К., Хавин В. П., *Аппроксимация и продолжение некоторых классов векторных полей*, (готовится к печати).
[5] Фелпс Р., *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968.
[6] Арнольд В. И., *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
[7] Ruelle D., *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*, Acad.Press, 1989.
[8] Falconer K., *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
[9] Мазья В. Г., *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985.
[10] Fleming W. H., Rishel R., *An integral formula for total gradient variation*, Arch. Math. **11** (1960), 218–222.
[11] Hardt R., Pitts J. T., *Solving Plateau problem for hypersyrfaces without compactness theorem for integral currents*, Geometric Measure Theory and the Calculus of Variations (W. K. Allard and F. J. Almgren, eds.), AMS, Providence, R.I., 1986.
[12] Zwarski M., *Decomposition for normal currents*, Proc. of the AMS **102** (1988), 831–839.
[13] Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1949.
[14] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
[15] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.

Поступило 19 июня 1992 г.