Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 3

ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

© С. К. Смирнов, В. П. Хавин

Изучаются возможности равномерного приближения произвольного векторного поля, непрерывного на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, безвихревыми, соленоидальными и гармоническими полями. Показано, что метрическая несвязность множества K обеспечивает „свободную аппроксимацию“ безвихревыми полями. Получено полное геометрическое описание множеств K, на которых любое непрерывное поле совпадает с градиентом гладкой функции. Рассмотрена „свободная аппроксимация“ джетами первого порядка. Построен пример неприменимости принципа локальности Бишопа к гармоническим полям в $\mathbb{R}^3$. Дано прямое доказательство присутствия спрямляемых дуг в носителе соленоидального заряда, установленного ранее другим методом в [4].

Векторным полем в $\mathbb{R}^n$ мы будем называть отображение $v : E \to \mathbb{R}^n$, где множество E есть *область определения поля* v, обозначаемая $\operatorname{dom} v$. Мы будем также обозначать k-ую координату поля v_k (т.е. $v = (v_1, \dots, v_k)$).

Предположим, что любому $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ есть класс всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, сопоставлен некоторый класс $X(U)$ непрерывных векторных полей с $\operatorname{dom} v = U$. Обозначим через X семейство $\{X(U)\}_{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)}$ („предпучок векторных полей“).

Рассмотрим теперь компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ и обозначим через $\vec{C}(K)$ множество всех непрерывных векторных полей[1] v, определенных на K ($\operatorname{dom} v = K$). Если $v \in X(U)$ и $K \subset U$, то мы можем рассмотреть сужение $v|K$. Предположим, что множество всех таких сужений (соответствующих всевозможным $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $U \supset K$), равномерно плотно в $\vec{C}(K)$. Тогда K будем называть *X-множеством*. Если множество $X(\mathbb{R}^n)|K$ всех сужений $v|K$ для $v \in X(\mathbb{R}^n)$ равномерно плотно

Ключевые слова: гармонические поля, равномерная рациональная аппроксимация, соленоид.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 96-01-00541, NSERC и ФЦП „Интеграция“, регистр. номер 326.53.

[1] Стрелка показывает, что мы рассматриваем пространство *векторных* полей. Символы $C(K)$, $C^m(K)$ обозначают обычные классы скалярных функций.

в $\vec{C}(K)$, то мы будем говорить, что K — *сильное X-множество*. В свою очередь, такое K, что

$$X(\mathbb{R}^n)|K = \vec{C}(K),$$

будет называться *совершенным X-множеством*. Эти определения подсказаны практикой решения (для многих конкретных семейств X) следующих хорошо известных задач: описать все X-множества (сильные X-множества, совершенные X-множества).

Перечислим предпучки X, которые будут с этой точки зрения рассмотрены в настоящей работе.

1) $X(U) = \operatorname{grad} U$, где $\operatorname{grad} U$ — множество всех безвихревых непрерывных векторных полей на U:

$$\begin{aligned} X(U) &:= \{v \in \vec{C}(U) : \operatorname{rot} v = 0\} \\ &= \left\{v \in \vec{C}(U) : \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \text{ в } U, j, k = 1, \dots, n\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

(производные понимаются как распределения). Такие векторные поля локально точны. Обозначив через $B(p, r)$ открытый шар радиуса r с центром p, мы можем переопределить $\operatorname{grad} U$ следующим образом:

$$v \in \operatorname{grad} U \Leftrightarrow \forall p \in U \, \exists \varepsilon_p > 0, f_p \in C^1(B) \colon v|B = \nabla f_p \quad (B = B(p, \varepsilon_p)).$$

В этом случае мы называем X-множество *градиентным*. Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является *сильно градиентным* тогда и только тогда, когда

$$\forall v \in \vec{C}(K) \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), f \in C^1(U) \colon \max_K |v - \nabla f| < \varepsilon$$

(очевидно, U можно заменить здесь на $\mathbb{R}^n$).

Совершенное градиентное множество характеризуется следующим свойством: любое поле $v \in \vec{C}(K)$ совпадает на K с градиентом некоторой функции класса $C^1(\mathbb{R}^n)$. Заменяя $\vec{C}(U)$ на $\vec{C}^1(U)$ или $\vec{C}^\infty(U)$ в (1), мы получаем эквивалентные определения градиентного и сильно градиентного множества. Но для того, чтобы понятие *совершенного* градиентного множества представляло интерес, нужен именно класс $\vec{C}(U)$.

2) $X(U) = \operatorname{rot}(U)$, где $\operatorname{rot}(U)$ — множество всех непрерывных векторных полей с нулевой дивергенцией:

$$\begin{aligned} X(U) &:= \{v \in \vec{C}(U) : \operatorname{div} v = 0\} \\ &= \left\{v \in \vec{C}(U) : \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ в } U\right\}. \end{aligned}$$

Соответствующие X-множества (сильные и совершенные X-множества) будут называться *вихревыми* (*сильно вихревыми и совершенными вихревыми множествами*). Нетрудно заметить, что K есть вихревое множество тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $\vec{v} \in \vec{C}(K)$ существуют открытое множество $O \supset K$ и поле $\vec{w} \in \vec{C}^{\infty}(O)$ такие, что $\operatorname{div} \vec{w}| = 0$ и $\max\limits_{K} |\vec{v} - \vec{w}| < \varepsilon$; $\vec{w}$ локально совпадает в O с вихрем некоторого $\vec{C}^{\infty}$ векторного поля. Заменяя здесь O на $\mathbb{R}^n$ и $\vec{w}$ на $\operatorname{rot} \vec{w}$, мы получаем эквивалентное определение *сильно вихревого множества*.

3) Нашим основным стимулом был следующий пример. Положим

$$h(U) := \operatorname{grad}(U) \cap \operatorname{rot}(U), \quad U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n).$$

Мы называем элементы множества $h(U)$ *гармоническими векторными полями* (в U). Такое поле локально совпадает с градиентом гармонической функции, т.е.

$$\begin{aligned}&\forall p \in U \, \exists \, \varepsilon_p > 0, f_p \in C^{\infty}(B): \\ &\qquad\qquad \Delta f_p = 0 \text{ в } B, \; v = \nabla f_p | B \quad (B = B(p, \varepsilon_p)).\end{aligned}$$

Иными словами, $v \in h(U)$ тогда и только тогда, когда $v \in \vec{C}^1(U)$, и матрица Якоби отображения $v \colon U \to \mathbb{R}^n$ симметрична, а ее след — нулевой.

Еще один (эквивалентный) вариант этого определения можно дать на языке дифференциальных форм, отождествляя поле v с формой $\omega = v_1 dx_1 + \cdots + v_n dx_n$:

$$v \in h(U) \Leftrightarrow d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0 \text{ в } U,$$

где $d\omega$ — внешний дифференциал формы ω, а $\delta\omega$ — ее кодифференциал. В такой форме определение имеет смысл для любого риманова многообразия (вместо $\mathbb{R}^n$) и дифференциальной формы ω любой степени. В этой статье мы ограничимся рассмотрением векторных полей в $\mathbb{R}^n$.

Понятие гармонического векторного поля или гармонической дифференциальной формы играет фундаментальную роль во многих областях математики. В частности, одномерный комплексный анализ можно рассматривать как раздел теории гармонических векторных полей, поскольку $h(U)$ для $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ $(= \mathcal{O}(\mathbb{C}))$ совпадает с множеством комплекснозначных функций в U, комплексно сопряженные которых голоморфны. В самом деле, $v \in h(U)$ тогда и только тогда, когда $v_1 - iv_2$ удовлетворяет уравнениям Коши–Римана в U.

Если $X = (h(U))_{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)}$, то X-множество мы будем называть *h-множеством*; аналогично понимаются *сильные h-множества* (совершенные h-множества — это просто *конечные* множества). Предположим, что K — компактное подмножество плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $R(K)$ равномерное замыкание в $C(K)$ (пространство комплекснозначных непрерывных функций на K)

множества всех рациональных функций с полюсами вне K. Тогда h-множества K суть в точности те компакты $K \subset \mathbb{C}$, для которых

$$R(K) = C(K).$$

Их природа теперь понята довольно хорошо. Теорема Витушкина полностью описывает такие компакты в терминах аналитической емкости (см., например, [1] и [2]). В то же время совсем мало известно про h-множества для $n \geqslant 3$ (см. [3], в [4] и [5] содержатся некоторые результаты о сильных n-множествах). Известно много результатов, обобщающих теорию рациональной аппроксимации (в частности, теорему Витушкина) в различных направлениях. Очень общая теория, включающая много частных примеров, содержится в [5]. Эти результаты относятся к случаю, когда роль $X(U)$ играет пространство решений (в $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$) однородной эллиптической системы с постоянными коэффициентами. Но символ такой системы предполагается сюръективным — условие, которому система $\operatorname{rot} v = 0$, $\operatorname{div} v = 0$ не удовлетворяет (кроме случая $n = 2$).

Предположим, что (U_i) — открытое покрытие компакта K в $\mathbb{R}^2$. Если $\overline{U_i \cap K}$ есть h-множество для любого i, то K также есть h-множество (теорема Бишопа, см. [1, 2]). Таким образом, свойство быть h-множеством *на плоскости* есть свойство *локальное*. В настоящей статье мы, в частности, покажем, что это перестает быть верным в $\mathbb{R}^3$. Мы начинаем в §1 с сильных и совершенных вихревых множеств и получаем некоторые их геометрические характеристики. На практике эти результаты не слишком полезны (при $n \geqslant 3$). Однако они легко доказываются и хорошо иллюстрируют наш подход: разложение ортогональных векторных мер в интеграл простых геометрических объектов. Разложение такого типа, используемое нами в §1, хорошо известно — это формула Флеминга–Ришеля для градиента функции ограниченной вариации (BV-функции). Полученные в §1 результаты формулируются совсем просто для $n = 2$. Например, мы показываем, что плоское компактное множество является сильно вихревым в том и только в том случае, когда оно не содержит нетривиальных замкнутых спрямляемых кривых. Однако случай $n = 2$ в известном смысле вырожденный, поскольку на плоскости вихревые множества *совпадают* с градиентными. Природу градиентных множеств гораздо труднее понять при $n \geqslant 3$. Векторные меры $\vec{\mu}$, ортогональные градиентам, суть *соленоиды* (т.е. удовлетворяют уравнению $\operatorname{div} \vec{\mu} = 0$). „Простейшие“ векторные меры, на которые соленоиды естественным образом разлагаются, устроены довольно сложно (при $n \geqslant 3$ для этих целей в отличие от плоского случая, простые замкнутые ориентированные кривые не достаточны). Мы используем разложение соленоидов, построенное в [4], а также более элементарный результат, прямое доказательство которого приводится в §2. Это доказательство, по нашему мнению, представляет самостоятельный интерес. Результат §2, в частности, гарантирует, что носитель любого соленоида в $\mathbb{R}^n$ содержит невырожденную спрямляемую дугу (не обязательно замкнутую).

В §3 мы обсуждаем сильно градиентные множества. Из §2 сразу следует, что компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, не содержащий (невырожденных) спрямляемых кривых, есть сильно градиентное множество. Более того, мы покажем, что отсутствие (невырожденных) спрямляемых кривых в K равносильно следующему аппроксимационному свойству множества K: для любой пары $(\varphi, \vec{v}) \in C(K) \times \vec{C}(K)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\max_K |\varphi - u| + \max_K |\vec{v} - \nabla u| < \varepsilon$$

(„равномерное приближение джетами“). Мы также дадим в §3 простое и полное геометрическое описание совершенных градиентных множеств. В §4 мы построим контрпример, показывающий что „наивная“ трехмерная версия принципа Бишопа (локальность h-множеств) неверна.

Благодарности. Оператор A (см. ниже п. 2.2) появился в нашей работе после беседы с А. М. Вершиком; исследование этого оператора привело к теореме 2.1.

Короткая конструкция „дикой“ поверхности в 4.5 следует идее Ф. Л. Назарова и В. А. Залгаллера.

Мы также благодарны Ж.-П. Кахану за полезное обсуждение условия (2) в §3.

§1. Соленоидальные поля и вихри

Обозначения. $\mathcal{B}_n$ будет обозначать борелевскую σ-алгебру в $\mathbb{R}^n$; $\vec{M}(\mathbb{R}^n)$ $(= \vec{M})$ — множество всех счетно аддитивных функций на $\mathcal{B}_n$ со значениями в $\mathbb{R}^n$; мы называем $\vec{\mu} \in \vec{M}$ *векторным зарядом*. Термин *мера* будет означать неотрицательную (возможно, бесконечную) счетно аддитивную функцию множества. Замкнутый носитель распределения T будет обозначать через $\operatorname{spt} T$; $\vec{M}(K) := \{\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{spt} \vec{\mu} \subset K\}$. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ будет обозначаться символом $\mathcal{L}^n$.

1.1. Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ есть вихревое множество (сильно вихревое множество) тогда и только тогда, когда не существует ненулевого линейного функционала, непрерывного на $\vec{C}(K)$ и равного нулю на сужении любого соленоидального C^1-векторного поля (соответственно вихря) на K. Мы отождествляем с $\vec{M}(K)$ сопряженное с $\vec{C}(K)$ пространство $(\vec{C}(K))^*$. Любой элемент $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ порождает функционал $f_{\vec{\mu}} \in (\vec{C}(K))^*$:

$$f_{\vec{\mu}}(\vec{v}) = \int\limits_K \langle \vec{v}, d\vec{\mu} \rangle$$
$$= \int v_1 d\mu_1 + \cdots + v_n d\mu_n, \quad \vec{v} \in \vec{C}(K),$$

где μ_i — скалярные заряды (координаты векторного заряда $\vec{\mu}$). Соответствие $\vec{\mu} \mapsto f_{\vec{\mu}}$ есть изометрический изоморфизм пространства $\vec{M}(K)$ на $(\vec{C}(K))^*$ (т.е. $\|f_{\vec{\mu}}\| = \operatorname{var} \vec{\mu}$; норма поля $\vec{v} \in \vec{C}(K)$ равна по определению $\max_K \|\vec{v}\|$). Иногда мы не будем различать $f_{\vec{\mu}}$ и $\vec{\mu}$ и вместо $f_{\vec{\mu}}(\vec{v})$ будем писать $\vec{\mu}[\vec{v}]$.

Чтобы описать сильно вихревые множества, нам нужно понять строение векторных зарядов $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, ортогональных вихрям.

1.2. Напомним, что функция $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ называется *функцией ограниченной вариации* ($f \in BV(\mathbb{R}^n)$), если ее градиент (в смысле теории распределений) принадлежит $\vec{M}(\mathbb{R}^n)$. Другими словами, $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, и существует заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div} \vec{\varphi} d\mathcal{L}^n = -\vec{\mu}[\vec{\varphi}] \tag{1}$$

для любого „пробного поля“ $\vec{\varphi} \in \vec{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Легко видеть, что если $f \in BV$, и $\operatorname{spt} \nabla f$ компактен, то (1) имеет место для любого поля $\vec{\varphi} \in \vec{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Теория функций ограниченной вариации изложена в книгах [6–8].

1.3. Обозначим через χ_E характеристическую функцию множества $E \in \mathcal{B}_n$. Если $\chi_E \in BV$, то говорят, что E имеет *конечный периметр*, а $\operatorname{var}(\nabla \chi_E)$ называют *периметром множества* E и обозначают через $\mathcal{P}_n(E)$. Вместо $\nabla \chi_E$ мы часто будем писать ∂E.

1.4. Предположим, что $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$ $(= \vec{M})$. Положим $\|\vec{\mu}\|(E) = \sup \sum_{e \in \tau} |\vec{\mu}(e)|$, где $E \in \mathcal{B}_n$, а supremum берется по всем конечным борелевским разбиениям τ множества E. Отметим, что для областей E с „хорошей“ границей $\operatorname{Fr} E$ можно написать $\| \partial E\|(B) = \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \operatorname{Fr} E)$, где $B \in \mathcal{B}_n$ и $\mathcal{H}^{n-1}$ есть $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа.

1.5. Работая с $\nabla \chi_E$ и $\mathcal{P}_n(E)$, мы можем предположить, не умаляя общности, что граница $\operatorname{Fr} E$ множества E удовлетворяет следующему условию:

$$0 < \mathcal{L}^n(B(x, \rho) \cap E) < \mathcal{L}^n(B(x, \rho)), \quad x \in \operatorname{Fr} E, \ \rho > 0. \tag{2}$$

Действительно, для любого $F \in \mathcal{B}_n$ существует $E \in \mathcal{B}_n$, удовлетворяющее условию (2) и такое, что $\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E - \chi_F| d\mathcal{L}^n = 0$; очевидно, что $\nabla\chi_E$ и $\nabla\chi_F$ совпадают, как распределения (см. [7]).

Предположим, что $C \subset \mathbb{R}^n$. Если существует $E \in \mathcal{B}_n$, удовлетворяющее условию (2), и такое, что $\mathcal{L}^n(E) > 0$, $\mathcal{P}_n(E) < +\infty$, $C = \operatorname{Fr} E$, то мы называем C *обобщенным краем*. Такое множество C совпадает с $\operatorname{spt} \| \partial E\|$ и с замыканием множества $\operatorname{Fr}^* E$, так называемой приведенной границы множества E. За определением и геометрическим анализом множества $\operatorname{Fr}^* E$ мы отсылаем к [7] и [8], где показано, что

$$\| \partial E\|(B) = \| \partial E\|(B \cap \operatorname{Fr}^* E) = \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \operatorname{Fr}^* E), \quad B \in \mathcal{B}_n,$$

и $\operatorname{Fr}^* E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \cup N$, где $\| \partial E\|(N) = 0$, а C_k суть компактные подмножества C^1-гладких гиперповерхностей (точнее, существуют такие вещественные функции $\phi_k \in C^1(O_k)$, заданные на открытых $O_k \subset \mathbb{R}^n$, что $C_k \subset \{x \in O_k : \phi_k(x) = 0, \nabla\phi_k(x) \neq 0\}$), см. [7, гл. 3–4].

1.6. Предположим, что f есть вещественная функция, заданная на $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathcal{E}_t^f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Если $f \in BV$, то $\mathcal{P}_n(\mathcal{E}_t^f) < \infty$ для $\mathcal{L}^1$-почти всех $t \in \mathbb{R}$, и

$$(a)\ \nabla f = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial\, \mathcal{E}_t^f\, dt, \qquad (b)\ \|\nabla f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \| \partial\, \mathcal{E}_t^f \| dt \tag{3}$$

(см. [6, 7]). Равенство (3a) означает, что $\nabla f[\vec{\varphi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial\, \mathcal{E}_t^f)[\vec{\varphi}] dt$ для любого пробного поля $\vec{\varphi}$, а (3b) — что $\|\nabla f\|(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \| \partial\, \mathcal{E}_t^f \|(B) dt$ для $B \in \mathcal{B}_n$. Из (3), очевидно, следует (детали можно найти в [4]), что $\operatorname{spt} \partial\, \mathcal{E}_t^f \subset \operatorname{spt} \nabla f$ для $\mathcal{L}^1$-почти всех $t \in \mathbb{R}$.

1.7. Теперь мы можем описать векторные заряды, ортогональные вихрям. Пусть $\vec{\mu} \in \vec{M}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(a) $\vec{\mu}[\operatorname{rot} \vec{\varphi}] = 0$ *для любого пробного поля* $\vec{\varphi}$;

(b) $\vec{\mu} = \nabla f$, *где* $f \in BV$.

Очевидно, что (в смысле теории распределений) $\vec{\mu}[\operatorname{rot} \vec{\varphi}] = -(\operatorname{rot} \vec{\mu})[\vec{\varphi}]$. Следовательно, из (a) следует, что $\operatorname{rot} \vec{\mu} = 0$, и $\vec{\mu} = \nabla f$ для некоторого распределения f. Легко видеть ([7, гл.1]), что $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, и импликация $(a) \Rightarrow (b)$ доказана. Обратная импликация следует из тождества

$$\nabla f[\operatorname{rot} \vec{\varphi}] = -\int f \cdot \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\varphi} d\mathcal{L}^n = 0.$$

1.8. Мы также нуждаемся в описании векторных зарядов $\vec{\mu} \in M(K)$ (для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$), ортогональных всем C^∞-полям, соленоидальным вблизи K.

Для $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ *следующие утверждения равносильны*:

(a) $\vec{\varphi} \in \vec{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div}\vec{\varphi} = 0$ *в окрестности компакта* $K \Rightarrow \vec{\mu}[\vec{\varphi}] = 0$;

(b) $\vec{\mu} = \nabla f$, *где* $f \in BV$, *и* $f \equiv 0$ *вне* K.

Импликация $(b) \Rightarrow (a)$ уже доказана в 1.7. Если $\vec{\mu}$ обладает свойством (a), то $\vec{\mu}$ ортогонален вихрю любого пробного поля, и (по 1.7) $\vec{\mu} = \nabla f$, $f \in BV$. Возьмем функцию $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{spt}\alpha \cap K = \varnothing$ и положим $\vec{\varphi}(x) = c\nabla_x \int \Delta\alpha(y) \cdot |y-x|^{2-n} d\mathcal{L}^n(y)$. Тогда $\vec{\varphi} \in \vec{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, и (при подходящем выборе константы c) $\operatorname{div}\vec{\varphi} = \alpha$, т.е. $\operatorname{div}\vec{\varphi} = 0$ вблизи K,

$$0 = \vec{\mu}[\vec{\varphi}] = \nabla f[\vec{\varphi}] = -f[\operatorname{div}\vec{\varphi}] = -f[\alpha] = -\int f \cdot \alpha d\mathcal{L}^n.$$

Следовательно, $f = 0$ $\mathcal{L}^n$-почти всюду вне K, и мы можем изменить f на множестве $\mathcal{L}^n$-меры нуль, получив $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Очевидно, в (a) пространство $\vec{C}^\infty$ можно заменить на $\vec{C}^1$.

1.9. Теперь мы можем полностью описать вихревые и сильно вихревые множества. Обозначим через $\operatorname{sol} K$ множество всех сужений на K C^∞-полей, соленоидальных вблизи K.

Теорема. *Пусть* K *— компактное множество в* $\mathbb{R}^n$

(a) K *есть вихревое множество тогда и только тогда, когда не существует борелевского подмножества* $E \subset K$ *с*

$$\mathcal{L}^n(E) > 0, \qquad \mathcal{P}_n(E) < +\infty. \tag{4}$$

(b) K *есть сильно вихревое множество тогда и только тогда, когда оно не содержит никакого обобщенного края.*

Доказательство. (a) Предположим, что $E \in \mathcal{B}_n$ удовлетворяет условию (4), и $E \subset K$. Очевидно, $\operatorname{spt}\partial E \subset \operatorname{Fr} E \subset K$, и $\partial E \in \vec{M}(K)$. Более того, $\partial E[\vec{\varphi}] = -\int_E \operatorname{div}\vec{\varphi} d\mathcal{L}^n = 0$ для пробного поля $\vec{\varphi} \in \operatorname{sol} K$. В то же время $\partial E \neq 0$, поскольку для пробной функции $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равной единице вблизи K, мы можем найти поле $\vec{\varphi} \in \vec{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{div}\vec{\varphi} = \alpha$. Тогда $\partial E[\vec{\varphi}] = -\int_E \operatorname{div}\vec{\varphi} d\mathcal{L}^n = -\mathcal{L}^n(E) \neq 0$. Следовательно, ненулевой линейный функционал $f_{\partial E}$ (см. 1.1) обращается в нуль на $\operatorname{sol} K$, и K не есть вихревое множество.

Допустим теперь, что никакое борелевское множество $E \subset K$ не удовлетворяет условию (4). Рассмотрим заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, ортогональный $\operatorname{sol} K$, и покажем, что $\vec{\mu} = 0$. Согласно 1.6, $\vec{\mu} = \nabla f$, где

$$f \in BV, \qquad f = 0 \text{ на } \mathbb{R}^n \setminus K. \tag{5}$$

Докажем, что (5) влечет $f^+ := \max(f,0) = 0$ $\mathcal{L}^n$-почти всюду. Как было отмечено в 1.6, $\mathcal{P}(\mathcal{E}_t^f) = \mathcal{P}(\mathcal{E}_t^{f^+}) < +\infty$ для $\mathcal{L}^1$-почти всех положительных t, и $\int_{\mathbb{R}^n} f^+ d\mathcal{L}^n = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^n(\mathcal{E}_t^{f^+})dt$. Значит, найдется $t > 0$ такое, что $E := \mathcal{E}_t^{f^+}$ удовлетворяет условию (4), если $\int_{\mathbb{R}^n} f^+ d\mathcal{L}^n > 0$. Но $\mathcal{E}_t^{f^+} \subset K$, и мы приходим к противоречию. Рассматривая $(-f)$ вместо f, мы заключаем, что $f = 0$ $\mathcal{L}^n$-почти всюду, и $\vec{\mu} = 0$.

1.10. Докажем (b). Предположим, что K содержит обобщенный край C. Тогда $\operatorname{spt} \partial E \subset C \subset K$ (см. 1.5), и $(\partial E)(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$ для любого пробного $\vec{v} \in \vec{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Значит, ∂E — ненулевой векторный заряд, сосредоточенный на K и ортогональный всем вихрям. Поэтому K не является сильно вихревым множеством.

Если же K не содержит никакого обобщенного края, и $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ ортогонален всем вихрям, то, следуя 1.7, мы можем написать $\vec{\mu} = \nabla f$, $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Применив (3) к $\vec{\mu}$, мы получаем, что

$$\operatorname{spt} \partial \mathcal{E}_t^f \subset \operatorname{spt} \vec{\mu} \subset K, \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(\mathcal{E}_t^f) < +\infty \tag{6}$$

для $\mathcal{L}^1$-почти всех t. Согласно (3), если $\vec{\mu} \neq 0$, то для всех t из некоторого множества положительной $\mathcal{L}^1$-меры $\partial \mathcal{E}_t^f \neq 0$. Тогда $\partial \mathcal{E}_t^f$ для одного из таких значений t есть обобщенный край, содержащийся в K (см. 1.5), и мы пришли к противоречию. •

1.11. Этот же путь приводит к описанию совершенных вихревых множеств. Согласно 1.5, любому обобщенному краю $C = \operatorname{Fr} E$ соответствует „приведенная часть“ $\operatorname{Fr}^* E$, которую мы обозначаем через C^*. Через $\vec{\mu}\angle A$, где $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$, $A \in \mathcal{B}_n$, мы обозначаем векторный заряд $\chi_A \vec{\mu}$.

Теорема. *Компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ есть совершенное вихревое множество тогда и только тогда, когда существует положительное число $\lambda(K)$ такое, что*

$$\mathcal{H}^{n-1}(C^* \setminus K) \geqslant \lambda(K)\mathcal{H}^{n-1}(C^* \cap K) \tag{7}$$

для любого обобщенного края C.

Доказательство. Пусть $\vec{C}_0(\mathbb{R}^n)$ обозначает множество всех непрерывных векторных полей в $\mathbb{R}^n$, равных нулю в бесконечности (с обычной нормой $\|\vec{\varphi}\| = \max|\vec{\varphi}|$). Положим $\mathrm{sol} := \{\vec{\varphi} \in \vec{C}_0(\mathbb{R}^n) : \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0\}$. Очевидно, sol есть замкнутое подпространство в $\vec{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим оператор $r_K : \mathrm{sol} \to \vec{C}(K)$ сужения на K: $r_K(\vec{\varphi}) := \vec{\varphi}|K$. Очевидно, K есть совершенное вихревое множество тогда и только тогда, когда оператор r_K сюръективен. По теореме Банаха это означает, что $r_K^*(\vec{C}(K))^* \to (\mathrm{sol})^*$ допускает нижнюю оценку:

$$\exists \lambda(K) > 0 : \|r_K^*(\vec{\mu})\|_{(\mathrm{sol})^*} \geqslant \lambda(K) \operatorname{var} \vec{\mu}, \quad \vec{\mu} \in \vec{M}(K). \tag{8}$$

Рассуждения п. 1.7 показывают, что множество

$$\mathrm{sol}^{\perp} := \{\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n) : \vec{\mu}[\vec{\varphi}] = 0,\ \vec{\varphi} \in \mathrm{sol}\}$$

совпадает с $\{\nabla f : f \in BV(\mathbb{R}^n)\}$ (отметим, что, если $\vec{\varphi} \in \mathrm{sol}$, $f \in BV$, то $\nabla f[\vec{\varphi}] = \lim\limits_{j \to \infty} \nabla f[\vec{\varphi}_j]$, где $\vec{\varphi}_j$ — пробные поля с нулевой дивергенцией, равномерно сходящиеся к $\vec{\varphi}$ на $\mathbb{R}^n$; поэтому $\nabla f[\vec{\varphi}] = 0$). Используя стандартную изометрию $(\mathrm{sol})^* \simeq M/(\mathrm{sol})^{\perp}$, утверждение (8) можно записать так:

$$\exists \lambda(K) > 0 \colon\ \mathrm{var}(\vec{\mu} - \nabla f) \geqslant \lambda(K)\,\mathrm{var}\,\vec{\mu}, \quad \vec{\mu} \in M(K),\ f \in BV(\mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Рассмотрим обобщенный край C и положим $\vec{\mu} := \partial E \angle K$, где E связано с C соотношением $C = \mathrm{Fr}\, E$ (см. 1.5). Тогда $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, и если K является совершенным вихревым множеством, то (9) влечет неравенство

$$\lambda(K)\,\mathrm{var}\,\vec{\mu} \leqslant \mathrm{var}(\vec{\mu} - \nabla \chi_E). \tag{10}$$

Но

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\vec{\mu} - \nabla \chi_E) &= \mathrm{var}(\partial E \angle K^c) = \|\,\partial E\|(K^c \cap C^*) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(C^* \setminus K)\end{aligned}$$

— см. 1.5; здесь $K^c := \mathbb{R}^n \setminus K$. С другой стороны, $\mathrm{var}\,\mu = \|\,\partial E\|(K) = \mathcal{H}^{n-1}(K \cap C^*)$. Таким образом, (10) влечет (7).

Чтобы закончить доказательство, допустим, что K удовлетворяет условию (7). Возьмем $f \in BV$ и положим $\mathrm{spt}\,\partial\,\mathcal{E}_t^t =: C_t$; очевидно, что C_t есть обобщенный край (для $\mathcal{L}^1$-почти всех t). Из (7) следует, что

$$\begin{aligned}\|\,\partial\,\mathcal{E}_t^f\|(K^c) &= \|\,\partial\,\mathcal{E}_t^f\|(K^c \cap C_t^*) = \mathcal{H}^{n-1}(K^c \cap C_t^*) \\ &\geqslant \lambda(K)\mathcal{H}^{n-1}(K^c \cap C_t^*) = \lambda(K)\|\,\partial\,\mathcal{E}_t^f\|(K).\end{aligned}$$

Интегрируя по $t \in \mathbb{R}$ и применяя (3), мы получаем

$$\|\nabla f\|(K^c) \geqslant \lambda(K)\|\nabla f\|(K).$$

Рассмотрим векторный заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\vec{\mu} - \nabla f) &= \mathrm{var}((\vec{\mu} - \nabla f)\angle K) + \mathrm{var}(\nabla f \angle K^c) \\ &\geqslant \mathrm{var}((\vec{\mu} - \nabla f)\angle K) + \lambda(K)\,\mathrm{var}(\nabla f \angle K) \\ &\geqslant \lambda(K)\,\mathrm{var}((\vec{\mu} - \nabla f)\angle K) + \lambda(K)\,\mathrm{var}(\nabla f \angle K) \\ &\geqslant \lambda(K)\,\mathrm{var}((\vec{\mu} - \nabla f + \nabla f)\angle K) = \lambda(K)\,\mathrm{var}(\vec{\mu})\end{aligned}$$

— не умаляя общности, мы можем предположить, что $\lambda(K) < 1$. Значит, K обладает свойством (9), а это значит, что K — совершенное вихревое множество. •

1.12. Следующее замечание следует из 1.11.

Предположим, что множество $K \subset \mathbb{R}^n$ *компактно, и*

$$\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \Gamma) = 0 \quad \text{для любой } C^1\text{-гиперповерхности в } \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Тогда K *есть совершенное вихревое множество.* Рассмотрим обобщенный край C. Имеем

$$C^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \cup N,$$

где C_j суть компактные подмножества C^1-гиперповерхностей, и $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$ (см. 1.5). Согласно (11), $\mathcal{H}^{n-1}(C_j \cap K) = 0$ для любого j, и потому $\mathcal{H}^{n-1}(C^* \cap K) \leqslant \sum_j \mathcal{H}^{n-1}(C_j \cap K) + \mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$, т.е. K удовлетворяет условию (7). •

1.13. Критерии, доказанные в 1.9–1.11, сводят интересующие нас свойства приближения и продолжения полей с нулевой дивергенцией к *геометрическим* свойствам изучаемого множества K. К сожалению, проверять их совсем не просто, поскольку применяемые „пробные объекты“ (т.е. обобщенные края и множества, удовлетворяющие условию (4)) очень сложны. Тем не менее для $n = 2$ описание сильных и совершенных вихревых множеств может быть упрощено; „пробные объекты“ становятся простыми спрямляемыми замкнутыми кривыми. Заключительные пункты этого параграфа посвящены обсуждению „плоского“ случая.

1.14. Для векторного заряда $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2) \in \vec{M}(\mathbb{R}^2)$ положим $\vec{\mu}^{\perp} := (-\mu_2, \mu_1)$. Очевидно, $(\vec{\mu}^{\perp})^{\perp} = -\vec{\mu}$, и

$$\operatorname{rot} \vec{\mu} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{\mu}^{\perp} = 0. \tag{12}$$

Поэтому (при $n = 2$) (сильные, совершенные) вихревые множества совпадают с (сильными, совершенными соответственно) градиентными множествами.

1.15. Мы называем векторный заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$ *спрямляемой кривой*, если существует вектор-функция $\vec{f} : [0, S] \to \mathbb{R}^n$ такая, что

(a) $|\vec{f}(s) - \vec{f}(s')| \leqslant |s - s'|$, $s, s' \in [0, S]$;

(b) $\vec{\mu}[\vec{\varphi}] = \int_0^s \langle \vec{\varphi}(\vec{f}(s)), \vec{f}'(s) \rangle ds$ для любого пробного поля $\vec{\varphi}$.

Если $\vec{f}(0) = \vec{f}(S)$, то кривая $\vec{\mu}$ называется *замкнутой*, а если функция $f|_{(0,S)}$ инъективна, то *простой*.

Если кривая $\vec{\mu}$ проста и замкнута, то мы будем говорить, что множество $\operatorname{spt} \vec{\mu} = \vec{f}([0, S])$ есть *спрямляемая петля*. Легко видеть, что если $\vec{\mu}$ — спрямляемая замкнутая кривая, то $\operatorname{div} \vec{\mu} = 0$; если же $n = 2$, то $\operatorname{rot}(\vec{\mu}^{\perp}) = 0$.

1.16. Предположим, что C есть обобщенный край множества E в $\mathbb{R}^2 (C = \mathrm{Fr}^* E$, см. 1.5). Следующее разложение объясняет, почему теоремы 1.9 и 1.11 упрощаются для $n = 2$:

$$(\partial E)^{\perp} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j; \qquad \|\partial E\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|c_j\|, \tag{13}$$

где c_j — простые замкнутые спрямляемые кривые. Действительно, $(\partial E)^{\perp}$ есть соленоид (поскольку заряд $\partial E = \nabla \chi_E$ — безвихревой), и его можно интерпретировать как целочисленный одномерный поток в смысле [6, с. 405]; тогда (13) следует из [6, с. 445–446].

1.17. Любой соленоид в $\mathbb{R}^2$ можно разложить на простые замкнутые спрямляемые кривые. В самом деле, если $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^2)$ и $\operatorname{div} \vec{\mu} = 0$, то $\operatorname{rot} \vec{\mu}^{\perp} = 0$, и

$$\vec{\mu} = \nabla f^{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial \mathcal{E}_t^f)^{\perp} dt, \qquad \|\vec{\mu}\| = \|\nabla f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial \mathcal{E}_t^f\| dt \tag{14}$$

для некоторой $f \in BV$ (см. (3)). Комбинируя (14) с (13), мы получаем следующее представление:

$$\vec{\mu} = \int_J c\, d\rho(c), \qquad \|\mu\| = \int_J \|c\| d\rho(c),$$

где J — пространство простых замкнутых спрямляемых кривых, а ρ — положительная мера на J. Такое представление соленоида, вообще говоря, невозможно при $n \geqslant 3$, см. [4].

1.18. Следующее утверждение упрощает теорему 1.9 в случае $n = 2$.

Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ есть сильно вихревое множество тогда и только тогда, когда оно не содержит невырожденных спрямляемых петель.

Такая же теорема верна для сильно градиентных множеств: см. 1.14.

Доказательство. Если K содержит невырожденную спрямляемую петлю, и C — соответствующая замкнутая простая спрямляемая кривая, то $C^{\perp} \neq 0$ есть векторный заряд, ортогональный непрерывным полям с нулевой дивергенцией, $C^{\perp} \in \vec{M}(K)$, и K не является сильно вихревым множеством. Наоборот, если K не есть сильно вихревое множество, то, согласно 1.9, найдется обобщенный край $C \subset K$. Применяя (13), мы получаем простую замкнутую кривую c_j с $\operatorname{var} c_j > 0$, $\operatorname{spt} c_j \subset C \subset K$ (включение следует из (13) для всех j); поэтому $\operatorname{spt} c_j \subset C$ есть невырожденная замкнутая петля. •

1.19. Описание совершенных вихревых множеств (они же совершенные градиентные множества при $n = 2$), полученное в 1.11, может быть записано следующим образом:

Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ *есть совершенное вихревое множество тогда и только тогда, когда существует положительное число* $\lambda(K)$ *такое, что*

$$\mathcal{H}^1(l \setminus K) \geqslant \lambda(K)\mathcal{H}^1(l \cap K) \tag{15}$$

для любой спрямляемой петли l.

Доказательство. (7) $\Rightarrow$ (15): любая невырожденная спрямляемая петля есть обобщенный край, и $\mathcal{H}^1(l^*) = \mathcal{H}^1(l)$.

(15) $\Rightarrow$ (7): если C есть обобщенный край, то согласно (13),

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{n-1}(C^* \setminus K) &= \| \partial E\|(K^c) = \sum \|c_j\|(K^c) \\
&= \sum \mathcal{H}^1(K^c \cap c_j) \geqslant \lambda(K) \sum \mathcal{H}^1(K \cap c_j) \\
&= \lambda(K) \sum \|c_j\|(K) = \lambda(K)\| \partial E\|(K) \\
&= \lambda(K)\mathcal{H}^{n-1}(C^* \cap K). \quad \bullet
\end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, (15) характеризует совершенные градиентные множества во *всех* размерностях (не только при $n = 2$).

§2. Носитель соленоида содержит простую спрямляемую дугу

2.1. Чтобы применить схему §1 к градиентным множествам, мы нуждаемся в аналоге разложения (3) для векторных зарядов без дивергенции (т.е. соленоидов). Нужные нам (и более сильные) теоремы доказаны в [4] (одна из них упоминается в конце этого параграфа). Ниже мы предлагаем другой подход к этой задаче, интересный сам по себе и достаточный для доказательства утверждения, вынесенного в заголовок. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Предположим, что*

(a) $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt} \vec{\mu}$ *компактен*, $\vec{\mu} \neq 0$;

(b) $\operatorname{div} \vec{\mu} \in M(\mathbb{R}^n)$ (*т.е.* $\operatorname{div} \vec{\mu}$ — *конечный скалярный заряд*).

Тогда $\operatorname{spt} \vec{\mu}$ *содержит невырожденную простую спрямляемую дугу* (*т.е.* $\operatorname{spt} c$, *где* c — *простая спрямляемая кривая положительной длины — см.* 1.15).

2.2. Любой заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$ может быть записан в следующем виде:

$$\vec{\mu} = \vec{\nu} m, \quad m := \|\vec{\mu}\|, \tag{16}$$

где $\vec{\nu}$ есть борелевское векторное поле в $\mathbb{R}^n$, и $|\vec{\nu}| = 1$ m-почти всюду. Поле $\vec{\nu}$ единичных векторов порождает дифференциальный оператор A:

$$(Af)(x) := \langle \nabla f(x), \vec{\nu}(x) \rangle = \frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}(x)}(x) \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^n)). \tag{17}$$

Правая часть в (17) определена m-почти везде (там, где $|\vec{\nu}| = 1$). Мы можем рассматривать A как (алгебраически) линейное отображение пространства $C^1(\mathbb{R}^n)$ в $L^\infty(m)$; ess sup-норма в $L^\infty(m)$ будет обозначаться через $\|\cdot\|_\infty$. Доказательство теоремы 2.1 основано на изучении оператора A.

2.3.1. Положим

$$\mathcal{A} := \{f \in C^1(\mathbb{R}^n) : \|A(f)\|_\infty \leqslant 1\}.$$

Если $f \in \mathcal{A}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\sup|\varphi'| \leqslant 1$, *то* $\varphi \circ f \in \mathcal{A}$.

Действительно, $|\langle \nabla(\varphi \circ f), \nu \rangle| = |\langle (\varphi' \circ f)\nabla f, \nu \rangle| \leqslant |\langle \nabla f, \nu \rangle|$. •

2.3.2. *Для любых* $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}$ *и* $\delta > 0$ *существует* $h \in \mathcal{A}$ *такая, что* $\|h - \max(f_1, \dots, f_n)\|_\infty < \delta$ ($\max$ *можно заменить на* $\min$).

Доказательство. Достаточно рассмотреть $n = 2$. Пусть $g := f_1 - f_2$; тогда $\max(f_1, f_2) = g^+ + f_2$. Возьмем $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $\varphi(t) = t^+$ при $|t| \geqslant \delta$, и $0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant 1$ при $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, $|t^+ - \varphi(t)| < \delta$ всюду на $\mathbb{R}$. Положим $h := \varphi \circ g + f_2$; легко видеть, что $\|h - \max(f_1, f_2)\|_\infty = \|\varphi \circ g - g^+\|_\infty \leqslant \delta$, и

$$\begin{aligned}|(Ah)(x)| &= |\varphi'(g(x))(Af_1)(x) - \varphi'(g(x))(Af_2)(x) + (Af_2)(x)| \\ &\leqslant \varphi'(g(x)) + (-\varphi'(g(x)) + 1) = 1\end{aligned}$$

для m-почти всех x. •

2.4. Теперь мы определим квазиметрику ρ в $\mathbb{R}^n$, связанную с A:

$$\rho(x, y) := \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in \mathcal{A}\} \tag{18}$$

(„квази“ означает, что $\rho(x, y)$ может обращаться в бесконечность). Неравенство треугольника и симметричность функции ρ очевидны; кроме того, $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — см. 2.4.3 ниже.

2.4.1. Зафиксируем $x, y \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим множество

$$\mathcal{A}_{x,y} = \{f \in \mathcal{A} : f(x) \leqslant f(u) \leqslant f(y), u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Положим $\tilde{\rho}(x,y) := \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in \mathcal{A}_{x,y}\}$ и докажем, что $\tilde{\rho} \equiv \rho$. Действительно, достаточно показать, что $\tilde{\rho} \geqslant \rho$. Последняя оценка, очевидно, вытекает из следующего факта:

$$\begin{aligned} &\forall f \in \mathcal{A} \, \forall \varepsilon \in (0, |f(y) - f(x)|) \, \exists g \in \mathcal{A}_{x,y} : \\ &\qquad |g(y) - g(x)| \geqslant |f(y) - f(x)| - \varepsilon \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Доказывая (19), мы можем предположить, что $f(y) \neq f(x)$ и, более того, $f(y) > f(x)$ (иначе рассмотрим $-f$). Возьмем $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant 1$ $(t \in \mathbb{R})$, $\varphi(t) \equiv 0$ $(t \in (-\infty, f(x)])$, $\varphi(t) \equiv f(y) - f(x) - \varepsilon$ $(t \in [f(y), +\infty))$. Тогда $g := \varphi \circ f$ удовлетворяет (19), поскольку $g \in \mathcal{A}$ по (2.3.1), и $f(y) - f(x) - \varepsilon = g(y) \geqslant g(u) \geqslant g(x) = 0$, $u \in \mathbb{R}^n$; значит, $g \in \mathcal{A}_{x,y}$. Кроме того, $|g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| - \varepsilon$. Заметим, что $f \in \mathcal{A}_{x,y} \Rightarrow f + \mathrm{const} \in \mathcal{A}_{x,y}$. Поэтому мы можем предписать любое значение $f(x)$ в определении $\mathcal{A}_{x,y}$.

2.4.2. *Если* $x \notin \operatorname{spt}\mu$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq x$, *то* $\rho(x,y) = +\infty$. Действительно, для любого $N > 0$ существует $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, обращающаяся в нуль на $\operatorname{spt}\mu$ и в y и такая, что $f(x) > N$. Очевидно, $f \in \mathcal{A}$.

2.4.3. *Евклидова метрика не превосходит* ρ:

$$|x - y| \leqslant \rho(x,y) \quad \text{для } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $x \neq y$; положим $f(z) := \langle z, \frac{x-y}{|x-y|}\rangle$. Тогда $|\nabla f| \equiv 1$, и $f \in \mathcal{A}$, причем $|f(x) - f(y)| = (x - y)$.

2.4.4. *Функция* $z \mapsto \rho(x,z)$ *полунепрерывна снизу при любом* $x \in \mathbb{R}^n$, *т.е.* $\rho(x,y) \leqslant \varliminf\limits_{|z-y|\to 0} \rho(x,z)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Действительно, $|f(x) - f(z)| \leqslant \rho(x,z)$ для любой $f \in \mathcal{A}$ и, тем самым, $\lim\limits_{|z-y|\to 0} \rho(x,z) \geqslant \lim\limits_{|z-y|\to 0} |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y)|$. Аналогичное рассуждение показывает, что

$$\rho(x,y) \leqslant \varliminf_{|z'-x|\to 0, |z''-y|\to 0} \rho(z', z'').$$

Следствие. *Любой замкнутый* ρ*-шар* $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x,a) \leqslant T\}$, *где* $a \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$, *замкнут в евклидовой топологии пространства* $\mathbb{R}^n$.

2.5. *Пусть* K_1, K_2 — *компактные множества в* $\mathbb{R}^n$, *и* $0 < T < \rho\ (K_1, K_2) := \inf\{\rho(x_1, x_2) : x_j \in K_j\}$. *Тогда найдется* $f \in \mathcal{A}$ *такая, что* $0 \leqslant f \leqslant T$, $f|_{K_1} = 0$, $f|_{K_2} = T$.

Доказательство. Возьмем положительное ε, удовлетворяющее неравенству $T + 8\,\varepsilon < \rho(K_1, K_2)$, и зафиксируем $y \in K_2$. Тогда $\rho(x, y) > T + 8\,\varepsilon$ для любой точки $x \in K_1$, и потому существует функция $h_x \in \mathcal{A}$ такая, что $0 = h_x(x) \leqslant h_x(u) \leqslant h_x(y)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $h_x(y) > T + 8\,\varepsilon$ (см. 2.4.1). Положим $U_x := \{u \in \mathbb{R}^n : h_x(u) < \varepsilon\}$. Найдется конечное множество $\{x_1, \dots, x_N\}$, для которого $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{x_k}$. Значит, $0 \leqslant h(z) := \min_{1 \leqslant j \leqslant N} h_{x_j}(z) < \varepsilon$ для $z \in K_1$, и $h(y) > T + 8\,\varepsilon$. Согласно 2.3.2, существует функция $g_y \in \mathcal{A}$, удовлетворяющая неравенству $|g_y - h| \leqslant \varepsilon$ всюду в $\mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$g_y < 2\,\varepsilon \ \text{ на } K_1, \qquad g_y(y) > T + 7\,\varepsilon\,.$$

Для $V_y := \{u \in \mathbb{R}^n : g_y(u) > T + 6\,\varepsilon\}$ найдем конечное множество $\{y_1, \dots, y_M\}$ такое, что $K_2 \subset \bigcup_{k=1}^{M} V_{y_k}$. Положим $g := \max_{1 \leqslant k \leqslant M} g_{y_k}$; тогда $g(z) < 2\,\varepsilon$ для $z \in K_1$, $g(z) > T + 6\,\varepsilon$ для $z \in K_2$. Вновь используя 2.3.2, мы можем найти $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ такую, что $|\tilde{f} - g| < \varepsilon$ везде в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\tilde{f} < 3\,\varepsilon$ на K_1 и $\tilde{f} > T + 5\,\varepsilon$ на K_2. Возьмем $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leqslant \varphi' \leqslant 1$, $\varphi|_{(-\infty, 3\,\varepsilon]} = 0$, $\varphi|_{[T + 5\,\varepsilon, +\infty)} = T$. Функция $f := \varphi \circ \tilde{f}$ — искомая . •

2.6. Для любой пары точек x, y существует точка z, лежащая „посередине“ между ними. Точнее: *если* $\rho(x, y) < \infty$, *то найдется точка* $z \in \mathbb{R}^n$ *такая, что* $\rho(x, z) = \rho(z, y) = \rho(x, y)/2$.

Доказательство. Положим $T := \rho(x, y)$. Нам достаточно найти точку z, удовлетворяющую неравенствам $\rho(x, z) \leqslant T/2$, $\rho(z, y) \leqslant T/2$ (остальные свойства следуют из неравенства треугольника). Положим $B_\rho(x, a) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) \leqslant a\}$. Мы хотим показать, что

$$B_\rho(x, T/2) \cap B_\rho(y, T/2) \neq \varnothing.$$

Предположим противное. Согласно 2.4.2 и 2.4.4, $B^x := B_\rho(x, T/2)$ и $B^y := B_\rho(y, T/2)$ — замкнутые подмножества множества $K := \operatorname{spt}\mu$; следовательно, они компактны. Поскольку они не пересекаются, то найдется такое число Δ, что $0 < \Delta < \inf\{|u - v| : u \in B^x, v \in B^y\}$. Обозначим через E_σ открытую (евклидову) σ-окрестность множества $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$E_\sigma := \{p \in \mathbb{R}^n : \exists q \in E, |p - q| < \sigma\},$$

и положим

$$B'_x := \overline{K_{\Delta/3} \setminus (B^x)_{\Delta/3}}, \qquad B'_y := \overline{K_{\Delta/3} \setminus (B^y)_{\Delta/3}}.$$

Оба множества B'_x и B'_y компактны, и

(a) $K \subset \operatorname{Int} B'_x \cup \operatorname{Int} B'_y$;

(b) $d(B^x, B'_x) \geqslant \Delta/3$, $d(B^y, B'_y) \geqslant \Delta/3$ (d обозначает евклидово расстояние между множествами);

(c) $B^x \subset B'_y$, $B^y \subset B'_x$.

Поскольку функция $z \mapsto \rho(x,z)$ полунепрерывна снизу (см. 2.4.4), то $\inf\{\rho(x,t) : t \in B'_x\} =: J$ достигается в некоторой точке $x' \in B'_x$. Из (b) следует, что $x' \notin B^x$, а потому $J = \rho(x, x') > T/2 + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Положив $K_1 := B'_x$, $K_2 := \{x\}$, заметим, что $\rho(K_1, K_2) = \rho(x, B'_x) > T/2 + \varepsilon$. Значит, применив 2.5, мы получаем функцию $f \in \mathcal{A}$, равную нулю на B'_x и $T/2+\varepsilon$ в точке x. Заменив B'_x на B'_y, мы получаем другую функцию $g \in \mathcal{A}$ такую, что $g|_{B'_y} = 0$ и $g(y) = T/2 + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $h = f - g$. Тогда $h(z) = f(z)$ для $z \in B'_y$, и $h(z) = -g(z)$ для $z \in B'_x$. Следовательно, $(Ah)(z) = (Af)(z)$ m-почти всюду на B'_y, $(Ah)(z) = -(Ag)(z)$ m-почти всюду на B'_x, и из свойства (a) следует, что $|(Ah)(z)| \leqslant 1$ m-почти всюду, так что $h \in \mathcal{A}$. Но

$$\begin{aligned} T = \rho(x,y) &\geqslant |h(x) - h(y)| = |f(x) + g(y)| \\ &= (T/2 + \varepsilon) + (T/2 + \delta) = T + \varepsilon + \delta \\ &> T \end{aligned}$$

—противоречие. •

2.7. Метрика ρ — геодезическая:

пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \rho(x,y) < +\infty$; *тогда найдется такое отображение* $\psi : [0, \rho(x,y)] \to \mathbb{R}^n$, *что*

(a) $\psi(0) = x$, $\psi(\rho(x,y)) = y$;

(b) *для любых* $a, b \in [0, \rho(x,y)]$ $|a-b| = \rho(\psi(a), \psi(b))$.

Согласно 2.5.3 и 2.4.2, ψ есть сжимающее отображение ($|\psi(a) - \psi(b)| \leqslant |a-b|$), и все значения ψ принадлежат $\operatorname{spt}\mu$. Следовательно, x и y можно соединить внутри $\operatorname{spt}\mu$ простой спрямляемой дугой длины $\leqslant \rho(x,y)$.

Доказательство. Положим $T := \rho(x,y)$. Достаточно построить отображение ψ, удовлетворяющее условию (a) и

$$(b')|a - b| \geqslant \rho(\psi(a), \psi(b)) \quad \text{для любых } a, b \in [0, T].$$

(Действительно, тогда $T \leqslant \rho(x,(a)) + \rho(\psi(a),\psi(b)) + \rho(\psi(b), y) \leqslant |0-a| + |a-b| + |b-T| = T$ и мы получаем (b)). Положим $\psi(0) := x$, $\psi(T) := y$. Согласно 2.6, найдется точка $z \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\rho(\psi(0), z) = \rho(z, \psi(T)) = T/2$. Пусть $\psi(T/2) := z$. Таким образом, функция ψ уже определена на множестве

$E_1 := \{0, T/2, T\}$. Обозначим $c_{j,k} := jT \cdot 2^{-k}$ для $j = 0, 1, \dots, 2^k$. Продолжая по индукции эту процедуру, на k-ом шаге мы получаем функцию ψ, определенную на $E_k := \{c_{j,k}\}_{j=0}^{2^k}$ и удовлетворяющую условию (b′) там, где она определена: $\rho(C_{j,k},\ C_{j+1,k}) = T/2^k (C_{j,k} := \psi(c_{j,k}))$. Используя 2.6, мы можем продолжить ψ на E_{k+1} так, что

$$\rho(C_{j,k}, C_{2j+1,k+1}) = \rho(C_{2j+1,k+1}, C_{j+1,k}) = T/2^{k+1},$$

и ψ удовлетворяет условию (b′) на E_{k+1} по неравенству треугольника:

$$\begin{aligned}&\rho(C_{p,k+1}, C_{q,k+1})\\ &\quad\leqslant \sum_{j=p}^{q-1} \rho(C_{j,k+1}, C_{j+1,k+1}) = (q-p)T/2^{k+1} = |c_{p,k+1} - c_{q,k+1}|,\\ &\hspace{20em} 0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2^{k+1}.\end{aligned}$$

Этот процесс порождает отображение $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, где $E = UE_k = \{jT/2^k\}_{j,k}$, удовлетворяющее условиям (a) и (b′). По непрерывности его можно продолжить на $[0, T]$ с сохранением свойства (b′) (вследствие 2.4.4).

2.7.1. До настоящего момента мы не использовали свойство (b) в теореме 2.1, оно нам понадобится только сейчас. Допустим, что $\vec{\mu}$ удовлетворяет обоим условиям (a) и (b) теоремы 2.1 и положим $\lambda := \operatorname{div} \vec{\mu}$; λ — *скалярный* заряд ($\lambda \in M(\mathbb{R}^n)$).

2.7.2. Очевидно, $L^\infty(m) \subset L^2(m)$. Обозначая через $[,]$ скалярное произведение в $L^2(m)$, отметим следующие свойства оператора A:

(a) $A(uv) = (Au) \cdot v + u \cdot (Av)$ m-почти всюду,

(b) $[Au, v] + [u, Av] = -\int uv d\lambda$ для $u, v \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, (a) выполняется в любой точке x, где $|\vec{\nu}(x)| = 1$; (b) следует из определения заряда λ.

2.7.3. Пусть $K := \operatorname{spt} \vec{\mu}$, $\mathbb{N}(K) := \{\vec{\xi} \in \vec{M}(K) : \operatorname{div} \vec{\xi} \in M(K)\}$, $\mathbb{N}_1(K) := \{\vec{\xi} \in \mathbb{N}(K) : \operatorname{var} \vec{\xi} \leqslant 1,\ \operatorname{var}(\operatorname{div} \vec{\xi}) \leqslant 1\}$, $\vec{M}_1(K) := \{\zeta \in \vec{M}(K) : \operatorname{var} \zeta \leqslant 1\}$. *Множество* $\mathbb{N}_1(K)$ *слабо компактно* (т.е. компактно в слабой топологии, порождаемой спариванием $(\vec{f}, \vec{\xi}) \mapsto \vec{\xi}[\vec{f}]$ для $\vec{f} \in \vec{C}(K)$, $\vec{\xi} \in \vec{M}(K)$).

Доказательство. Множество $\mathbb{N}_1(K) \subset \vec{M}_1(K)$; последнее множество (наделенное слабой топологией) метризуемо, поэтому для доказательства слабой компактности множества $\mathbb{N}_1(K)$ нам достаточно из произвольной последовательности $\{\vec{\xi}_k\}$ его элементов выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу множества $\mathbb{N}_1(K)$. Имеем

$$\vec{\xi}_k[\nabla u] = -\int u d\lambda_k, \quad \lambda_k := \operatorname{div} \vec{\xi}_k,\ \ u \in C^1(\mathbb{R}^n),\ \ k \geqslant 1. \tag{20}$$

Поскольку $\operatorname{var}\xi_k \leqslant 1$, $\operatorname{var}\lambda_k \leqslant 1$, то мы можем выбрать последовательность $k_j \nearrow +\infty$ такую, что $\vec{\xi}_{k_j} \to \vec{\xi}$, $\lambda_{k_j} \to \lambda$ слабо. Переходя к пределу в (20) (для $k = k_j$), мы получаем $\vec{\xi}[\nabla u] = -\int u d\lambda$ $(u \in C^1(\mathbb{R}^n))$. Значит, $\operatorname{div}\vec{\xi} = \lambda \in M_1(K)$, и $\vec{\xi} \in \mathbb{N}(K)$. •

2.7.4. Теорема Крейна–Мильмана, примененная к выпуклому множеству $\mathbb{N}_1(K) \subset \vec{M}(K)$, гарантирует существование крайней точки в $\mathbb{N}_1(K)$. Значит, при доказательстве нашей теоремы можно предполагать, что

$$\vec{\mu} \quad \text{есть крайняя точка выпуклого множества } \mathbb{N}_1(K). \tag{21}$$

2.7.5. *Если* $\vec{\mu}$ *— удовлетворяет условию* (21), *то не существует борелевской функции* w *на* $\mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$m\{w = 0\} > 0,\ m\{w = 1\} > 0,\ 0 \leqslant w \leqslant 1 \quad m\text{-почти везде}, \tag{22}$$

$$[Au, w] = -\int uw d\lambda \quad \text{для любой } u \in C^1(\mathbb{R}^n). \tag{23}$$

Действительно, левая часть равенства (23) равна $\int\langle\nabla u, \vec{\nu}\rangle w dm = (w\vec{\mu})[\nabla u]$, поэтому (23) означает, что $\operatorname{div}(w\vec{\mu}) = w \operatorname{div}\vec{\mu}$, и $w\vec{\mu} \in \mathbb{N}_1(K)$. Положим $\vec{\mu}_1 := w\vec{\mu}$, $\vec{\mu}_2 := (1-w)\vec{\mu}$. Тогда $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$, $\operatorname{var}\vec{\mu}_1 + \operatorname{var}\vec{\mu}_2 = \int w dm + \int(1-w)dm = \operatorname{var}\vec{\mu}$, и в то же время $\vec{\mu} \neq \operatorname{const}\vec{\mu}$, $\vec{\mu}_2 \neq \operatorname{const}\vec{\mu}$, что невозможно вследствие (21).

2.7.6. Обозначим через $\operatorname{sol}_1(K)$ множество $\{\vec{\mu} \in M(K) : \operatorname{div}\vec{\mu} = 0,\ \operatorname{var}\vec{\mu} \leqslant 1\}$ и предположим, что

$$\vec{\mu} \quad \text{есть крайняя точка множества } \operatorname{sol}_1(K). \tag{21$'$}$$

Тогда рассуждения в 2.7.5 можно повторить, считая, что $\lambda = 0$.

2.8. Следующее утверждение — ключевое в нашем доказательстве.

Допустим, что $\vec{\mu}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и условию* (21). *Если* K_1, K_2 *— компактные множества в* $\mathbb{R}^n$ *положительной* m*-меры, то* $\rho(K_1, K_2) < +\infty$ (*т.е. найдутся* $x_j \in K_j$ *с* $\rho(x_1, x_2) < +\infty$).

Доказательство. Будем рассуждать от противного: если $\rho(K_1, K_2) = +\infty$, то $\rho(K_1, K_2) > N$ для любого $N > 0$, и по 2.5 найдется такая функция $u_N \in \mathcal{A}$, что $u_N|_{K_1} = 0$, $u_N|_{K_2} = N$, $0 \leqslant u_N \leqslant N$ везде в $\mathbb{R}^n$. Пусть $w_N = N^{-1}u_N$, тогда $w_N \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $w_N|_{K_1} = 0$, $w_N|_{K_2} = 1$, $0 \leqslant w_N \leqslant 1$, $\|Aw_N\|_\infty \leqslant 1/N$ (где $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{\infty,m}$). Положим $l = \|\lambda\|$ (см. 1.3). Замкнутые единичные шары в $L^\infty(m)$ и $L^\infty(l)$ компактны в слабых топологиях, определенных естественными спариваниями $(L^1(m), L^\infty(m))$ и $(L^1(l), L^\infty(l))$. Значит, найдутся последовательность натуральных чисел $N_j \uparrow +\infty$ и функция $w \in L^\infty(m)$ такие, что

$$\int w_{N_j} U dm \xrightarrow[j\to\infty]{} \int wU dm, \qquad \int w_{N_j} U d\lambda \xrightarrow[j\to\infty]{} \int wU d\lambda$$

для любой функции $U \in L^1(m) \cap L^1(l)$. Очевидно, $0 \leqslant w \leqslant 1$, и $w = 0$ m-почти всюду на K_1, $w = 1$ m-почти всюду на K_2. Согласно 2.7.2,

$$[Au, w_{N_j}] + [u, Aw_{N_j}] = -\int w_{N_j} u d\lambda \quad (u \in C^1(\mathbb{R}^n)). \tag{24}$$

Вспоминая оценку $|[u, Aw_{N_j}]| \leqslant N_j^{-1} \cdot \int |u| dm$ и переходя к пределу в (24), мы получаем равенство

$$[Au, w] = -\int wud\lambda \quad (u \in C'(\mathbb{R}^n)),$$

невозможное по 2.7.5. •

2.9. Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 2.1. А именно, мы докажем, что

Если векторный заряд $\vec{\mu}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 *и условию* (21), *то для любых точек $x, y \in \operatorname{spt}\vec{\mu}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $x', y' \in \operatorname{spt}\vec{\mu}$, которые можно соединить простой спрямляемой дугой, лежащей в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$, причем $|x - x'| < \varepsilon$ и $|y - y'| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 — непересекающиеся замкнутые (евклидовы) шары радиуса, меньшего ε и с центрами x и y соответственно. Поскольку $x, y \in \operatorname{spt}\mu$, то $m(K_j) > 0$ $(j = 1, 2)$, и мы можем применить 2.8 и найти $x' \in K_1$, $y' \in K_2$, удовлетворяющие неравенству $0 < \rho(x', y') < +\infty$. Существование искомой дуги следует из 2.7, и теорема 2.1 доказана. •

2.9.1. Используя 2.7.5, полагая $\lambda = 0$ и повторяя рассуждения п. 2.8–2.9, приходим к следующему заключению:

утверждение 2.9 остается в силе при замене (21) на (21′).

2.10. Предположим снова, что $\vec{\mu}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и условию (21) (или (21′)). Вышеприведенные рассуждения влекут следующую дихотомию:

либо любые две точки $x, y \in \operatorname{spt}\vec{\mu}$ можно соединить простой спрямляемой дугой, лежащей в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$, либо $\operatorname{spt}\vec{\mu}$ содержит сколь угодно длинные спрямляемые дуги.

Доказательство. Пусть C := supremum длин простых спрямляемых дуг, лежащих в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$, и предположим, что $C < +\infty$. Возьмем любую пару точек $x, y \in \operatorname{spt}\vec{\mu}$. Следуя п. 2.9, мы можем выбрать последовательность $\{\gamma_j\}$ простых спрямляемых дуг, содержащихся в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$ с концами x_j, y_j, причем $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ и $y_j \xrightarrow[j\to\infty]{} y$. Поскольку длины $\mathcal{H}^1(\gamma_j)$ равномерно ограничены, то по соображениям компактности, найдется спрямляемая дуга $\gamma \subset \operatorname{spt}\mu$, соединяющая x и y (но не обязательно простая). Нетрудно видеть, что γ содержит простую дугу с теми же концами. •

2.11. Более глубокий анализ структуры векторных зарядов класса $\mathbb{N}(K)$ (в частности, соленоидов) содержится в [4]. Нам понадобится следующий результат из этой статьи.

Пусть $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$, $S > 0$. *Тогда*

$$\vec{\mu} = \int\limits_{C_S} R\,d\gamma_S(R), \qquad \|\vec{\mu}\| = \int\limits_{C_S} \|R\|\,d\gamma_S(R), \qquad \frac{2}{S}\|\vec{\mu}\| \geqslant \int\limits_{C_S} \|\operatorname{div} R\|\,d\gamma_S(R),$$

где C_S — *обозначает множество всех спрямляемых кривых длины* S (*см. п.* 1.15), *а* γ_S *есть положительная мера на* C_S (*борелевская относительно естественной топологии в* C_S).

§3. Теоремы о продолжении и приближении для градиентов. Приближение джетами

3.1. Мы будем называть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *метрически несвязным*, если оно не содержит ни одной невырожденной простой спрямляемой дуги. Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы 2.1:

любое компактное метрически несвязное множество в $\mathbb{R}^n$ *сильно градиентно.*

Действительно, пусть компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ метрически несвязен. Достаточно показать, что любой заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, ортогональный всем градиентам C^1-функций, равен нулю. Но тождество $\vec{\mu}[\nabla u] = 0$ ($u \in C^1(\mathbb{R}^n)$) означает, что $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$; если же $\vec{\mu} \neq 0$, то $\operatorname{spt}\vec{\mu} \subset K$ содержит невырожденную простую спрямляемую дугу по теореме 2.1.

3.1.1. Следующее замечание будет использовано в §4. Векторное поле $\vec{v}$, заданное на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *квазиградиентом* (на E), если $\vec{v} = \lim\limits_{j\to\infty} \nabla u_j$ равномерно на E для некоторой последовательности $\{u_j\}$, $u_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Пусть K_0 *и* K — *компактные множества в* $\mathbb{R}^n$, $K_0 \subset K$, $\vec{v} \in \vec{C}(K)$. *Если*

$$\vec{v}|_{K_0} \quad \text{является квазиградиентом на } K_0 \tag{26}$$

и $K \setminus K_0$ метрически несвязно, то $\vec{v}$ есть квазиградиент на K.

Доказательство. Предположим, что $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, $\vec{\mu}[\nabla u] = 0$ для любой функции $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме Хана–Банаха нам достаточно показать, что (26) влечет равенство $\vec{\mu}[\vec{v}] = 0$. Очевидно, $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$, так что $\vec{\mu} \in \mathbb{N}(K)$. По теореме Крейна–Мильмана мы можем предположить, что $\vec{\mu}$ есть крайняя точка в $\mathrm{sol}_1(K)$. Докажем, что $\operatorname{spt}\vec{\mu} \subset K_0$. Допустим, что $x \in \operatorname{spt}\vec{\mu} \setminus K_0$. Поскольку $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$, то носитель $\vec{\mu}$ должен содержать больше одной точки, и мы можем взять $y \in \operatorname{spt}\vec{\mu}$, $y \neq x$. Согласно 2.9.1, найдутся точки $x', y' \in \operatorname{spt}\mu$, сколь угодно близкие к x, y, которые можно соединить простой спрямляемой кривой в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$. Можно выбрать x', y' так, что $x' \in \operatorname{spt}\vec{\mu} \setminus K_0$ (поскольку $x \in \operatorname{spt}\vec{\mu} \setminus K_0$, и последнее множество относительно открыто в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$) и $y' \neq x'$. Тогда простая спрямляемая дуга, соединяющая x' и y', имеет невырожденное пересечение с $K \setminus K_0$, и мы пришли к противоречию. Значит, $\operatorname{spt}\vec{\mu} \setminus K_0 = \varnothing$, и мы получаем равенство $\vec{\mu}[\vec{v}] = 0$, так как $v|_{K_0}$-квазиградиент. •

3.1.2. Ниже мы докажем теорему, *полностью* описывающую метрически несвязные множества через их аппроксимационные свойства. Назовем компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ *джет-множеством*, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любой пары $(\varphi, \vec{\psi}) \in C(K) \times \vec{C}(K) =: \vec{c}(K)$ найдется функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\max_K |\varphi - u| + \max_K |\vec{\psi} - \nabla u| < \varepsilon\,.$$

Теорема. *Класс всех джет-множеств совпадает с классом всех компактных метрически несвязных множеств в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Обозначим через $J(K)$ множество всех джетов (первого порядка), суженных на K:

$$J(K) := \{(\varphi, \vec{\psi}) \in \vec{c}(K) : \exists u \in C^1(\mathbb{R}^n), \varphi = u|_K, \vec{\psi} = \nabla u|_K\}.$$

Если K не есть метрически несвязное множество, то найдется невырожденная простая спрямляемая кривая R с $\operatorname{spt} R \subset K$. Рассмотрим линейный функционал $F_R \in (\vec{c}(K))^*$, заданный формулой

$$F_R(\varphi, \vec{\psi}) = \varphi(e(R)) - \varphi(b(R)) - R[\vec{\psi}], \quad (\varphi, \vec{\varphi}) \in \vec{c}(K)$$

($e(R)$ и $b(R)$ обозначают конец и начало кривой R соответственно). Тогда $F_R|_{J(K)} = 0$, т.е. существует ненулевой линейный функционал, ортогональный $J(K)$, и K не есть джет-множество.

Допустим теперь, что K метрически несвязен, и

$$(a)\ F \in (\vec{c}(K))^*, \qquad (b)\ F|_{J(K)} = 0. \tag{27}$$

Согласно (2.7a), найдется пара $(\mu_1, \vec{\mu}_2) \in M(K) \times \vec{M}(K)$ такая, что

$$F(\varphi, \vec{\psi}) = \int \varphi d\mu_1 + \int \langle \vec{\varphi}, d\vec{\mu}_2 \rangle, \quad (\varphi, \vec{\psi}) \in \vec{c}(K).$$

Из (2.7b) следует, что $\int u d\mu_1 = -\int \langle \nabla u, d\mu_2 \rangle = \operatorname{div} \vec{\mu}_2[u]$ для любой пробной функции $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Значит, $\operatorname{div} \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_1$, т.е. $\mu_2 \in \mathbb{N}(K)$. Если $F \neq 0$, то и $\mu_2 \neq 0$, и, по теореме 2.1, K должно содержать невырожденную простую спрямляемую дугу. •

3.1.3. Используя 2.11, мы можем сформулировать „индивидуальную“ теорему, описывающую квазиградиенты на данном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\vec{\varphi} \in \vec{C}(K)$.

Следующие утверждения равносильны:

(a) $\vec{\varphi}$ *является квазиградиентом на* K;

(b) *любому* $\varepsilon > 0$ *соответствует* $M(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$\vec{R}[\vec{\varphi}] \leqslant M(\varepsilon) + \varepsilon\, l(\vec{R}) \quad \text{для любой кривой } \vec{R},\ \operatorname{spt} \vec{R} \subset K. \tag{28}$$

Здесь $l(\vec{R})$ обозначает длину кривой $\vec{R}$ (см. 1.15).

Действительно, предположим, что $\vec{\varphi}$ — квазиградиент. Пусть $M(\varepsilon) := 2\max_K |\vec{\varphi} - \nabla u| < \varepsilon$, где $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\max_K |\vec{\varphi} - \nabla u| < \varepsilon$. Тогда (28) следует из тождества

$$\vec{R}[\vec{\varphi}] = u(e_R) - u(b_R) + \vec{R}[\vec{\varphi} - \nabla u]$$

(b_R и e_R суть начало и конец кривой R). Чтобы доказать, что $(b) \Rightarrow (a)$, возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $S := M(\varepsilon)/\varepsilon$. Применив 2.11 к произвольному заряду $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ с нулевой дивергенцией, мы получаем:

$$\begin{aligned}\vec{\mu}[\vec{\varphi}] &= \int\limits_{\vec{R} \in C_S} \vec{R}[\vec{\varphi}] d\gamma_S(\vec{R}) \\ &\leqslant (M(\varepsilon) + \varepsilon\, S) \operatorname{var} \gamma_S = (M(\varepsilon) + \varepsilon\, S) \frac{\operatorname{var} \vec{\mu}}{S} = 2\,\varepsilon \operatorname{var} \vec{\mu}\end{aligned}$$

(мы использовали тождество $\operatorname{var} \vec{\mu} = S \operatorname{var} \gamma_S$ и включение $\operatorname{spt} \vec{R} \subset \operatorname{spt} \vec{\mu} \subset K$ для γ_S-почти всех $\vec{R}$, см. (25) в 2.11). Значит, $\vec{\mu}[\vec{\varphi}] \leqslant 0$. Рассматривая $-\vec{\mu}$, мы заключаем, что $\vec{\mu}[\vec{\varphi}] = 0$ для любого соленоидального заряда $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$. Таким образом, $\vec{\varphi}$ есть квазиградиент. •

Напрашивается вопрос о чисто геометрическом описании компактов в $\mathbb{R}$, на которых возможно „свободное“ (в духе теоремы 3.1.2) равномерное приближение джетами высшего порядка (скажем, второго). Такое описание нам неизвестно.

3.3. Обобщается ли теорема 1.18 на размерности $n \geqslant 3$? Ответ отрицателен (см., например, [4]). Существуют компактные множества $K \subset \mathbb{R}^n$, которые не содержат невырожденных спрямляемых петель, и в то же время не являются сильно градиентными множествами. Тем не менее, теорема 1.19 обобщается на любую размерность.

Теорема. *Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Следующие утверждения равносильны*:

(a) K — *совершенное градиентное множество*;

(b) *найдется такое положительное число $\lambda(K)$, что*

$$\lambda(K)\mathcal{H}^1(l \cap K) \leqslant \mathcal{H}^1(l \setminus K) \tag{29}$$

для любой спрямляемой петли l.

Добавляя $\lambda(K) \cdot \mathcal{H}^1(l \setminus K)$ к обеим частям неравенства (29), мы получаем эквивалентную переформулировку:

$$\lambda'(K)\mathcal{H}^1(l) \leqslant \mathcal{H}^1(l \setminus K), \tag{29'}$$

где $\lambda'(K) = \lambda(K)/(1 + \lambda(K))$.

Доказательство. Зафиксируем большой замкнутый шар B, внутренность которого содержит K. Обозначим через $\operatorname{Grad} B$ множество

$$\{\nabla u : u \in C^1(B)\} = \{\vec{v} \in \vec{C}(B) : \operatorname{rot} \vec{v} = 0|_{\operatorname{Int} B}\}.$$

Утверждение (a) означает, что $r(\operatorname{Grad} B) = \vec{C}(K)$, где r — оператор сужения: $r(\vec{v}) := \vec{v}|_K$ $(\vec{v} \in \vec{C}(B))$. Очевидно, $\operatorname{Grad} B$ — замкнутое подпространство в $\vec{C}(B)$. Отождествляя $(\vec{C}(B))^*$ с $\vec{M}(B)$, имеем:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Grad} B)^{\perp} &:= \{\vec{\sigma} \in \vec{M}(B) : \vec{\sigma}[\nabla u] = 0,\ u \in C^1(B)\}\\ &= \{\vec{\sigma} \in \vec{M}(B) : \operatorname{div} \vec{\sigma} = 0\} =: s(B).\end{aligned}$$

Поэтому по теореме Банаха $(a) \Leftrightarrow (c) : \exists \lambda(K) > 0$ такое, что

$$\operatorname{var}(\vec{\mu} - \vec{\sigma}) \leqslant \lambda(K) \operatorname{var} \vec{\mu}, \quad \vec{\mu} \in \vec{M}(K),\ \ \vec{\sigma} \in s(B).$$

Импликацию $(a) \Rightarrow (b)$ доказать несложно. Возьмем простую спрямляемую замкнутую кривую $\vec{\sigma}$, содержащуюся в B. Очевидно, $\vec{\sigma} \in s(B)$. Положив $\vec{\mu} = \chi_K \vec{\sigma}$ и применив (c), мы получим (29), поскольку $\|\vec{\sigma}(E)\| \equiv \mathcal{H}^1(E \cap \operatorname{spt} \vec{\sigma})$ для любого $E \in \mathcal{B}_n$. Остается заметить, что для любой простой спрямляемой кривой l найдется простая спрямляемая кривая $l^* \subset B$ такая, что $l \cap K = l^* \cap K$ и $\mathcal{H}^1(l^* \setminus K) \leqslant \mathcal{H}^1(l \setminus K)$.

3.4. Чтобы доказать, что $(b) \Rightarrow (a)$, начнем со следующего замечания. *Пусть K удовлетворяет условию* (b), *а C есть замкнутая (не обязательно простая) спрямляемая кривая. Тогда*

$$\|C\|(K^c) \geqslant \lambda(K) \cdot \|C\|(K). \tag{30}$$

Как мы уже отмечали (см. ссылки в 1.1.6),

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} C_j, \qquad \|C\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|C_j\|,$$

где C_j — простые замкнутые спрямляемые кривые. Положим $l_j =:= \operatorname{spt} C_j$, и заметим, что $\|C_j\|(E) = \mathcal{H}^1(l_j \cap E)$ $(E \in \mathcal{B}_n)$, а значит

$$\begin{aligned} \|C\|(K^c) &= \sum_{j=1}^{\infty} \|C_j\|(K^c) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(l_j \setminus K) \\ &\geqslant \lambda(K) \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(l_j \cap K) = \lambda(K) \sum_{j=1}^{\infty} \|C_j\|(K) \\ &= \lambda(K)\|C\|(K). \quad \bullet \end{aligned}$$

3.5. Возьмем очень большое число $S > 0$ и рассмотрим множество $C_{S,B}$ всех кривых длины S, содержащихся в B. Сначала мы проверим, что

(30) *выполняется (возможно, с меньшей константой $\lambda(K) > 0$) для любой $R \in C_{S,B}$.*

Если $R \in C_{S,B}$ не замкнута, то, соединив ее концы $b(R)$ и $e(R)$ подходящим образом ориентированным сегментом j, мы получим замкнутую спрямляемую кривую R^*. Заметим, что

$$\operatorname{var}(R - R^*) \leqslant |b(R) - e(R)| \leqslant \operatorname{diam} B =: d.$$

Согласно 3.4, $\|R^*\|(K^c) \geqslant \lambda'(K) \operatorname{var}(R^*)$ (этот аналог оценки (29′) следует из (30)). Значит, для любой $R \in C_{S,B}$

$$\begin{aligned} &\|R\|(K^c) \geqslant \|R^*\|(K^c) - \|j\|(K^c) \geqslant \lambda'(K) \operatorname{var} R^* - d \\ &\quad \geqslant \lambda'(K)(\operatorname{var} R - \operatorname{var} j) - d = \lambda'(K)(S - d) - d = \lambda'(K)S(1 - S^{-1}d(1 + \lambda^1(K))) \\ &\quad \geqslant \frac{\lambda'(K)}{2} S = \frac{\lambda'(K)}{2} \operatorname{var} R \\ &\quad \geqslant \frac{\lambda'(K)}{2} \|R\|(K), \end{aligned}$$

если $S > 2d(1 + \lambda'(K))$.

3.6. Чтобы закончить доказательство, возьмем $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ и $\vec{\sigma} \in s(B)$. Применяя 3.5 и теорему 2.11, мы получаем:

$$\begin{aligned}\|\vec{\sigma}\|(K^c) &= \int\limits_{C_{S,B}} \|R\|(K^c)d\gamma_S(R) \\ &\geqslant \frac{\lambda'(K)}{2} \int\limits_{C_{S,B}} \|R\|(K)d\gamma_S(R) = \frac{\lambda'(K)}{2}\|\vec{\sigma}\|(K)\end{aligned}$$

(напомним, что γ_S-почти все кривые в разложении (25) содержатся в $\operatorname{spt}\vec{\mu}$). Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\vec{\mu} - \vec{\sigma}) &= \operatorname{var}(\vec{\mu} - \chi_K\vec{\sigma} + \|\vec{\sigma}\|(K^c) \\ &\geqslant \frac{\lambda'(K)}{2}(\operatorname{var}(\vec{\mu} - \chi_K\vec{\sigma}) + \operatorname{var}(\chi_K\vec{\sigma})) = \frac{\lambda'(K)}{2}\operatorname{var}(\vec{\mu}),\end{aligned}$$

что доказывает (с), а вместе с тем и теорему 3.3.

3.7. Применим теорему 3.3 к графику $K = K_f \subset \mathbb{R}^2$ непрерывной функции $f \in C[0;1] : K_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0;1]\}$. Очевидно, что K_f является совершенным градиентным множеством при достаточно гладких f, например, $f \in C^1([0;1])$. Это можно показать конструктивно, „руками“ продолжая данное поле $\vec{v} \in \vec{C}(K_f)$ до градиента, или же применяя теорему 3.3. Оба пути несложны, но и не столь уж просты, даже если $f \equiv 0$. Однако если функция f не очень правильна, то K_f может и не быть совершенным градиентным множеством. Предположим, например, что существует последовательность $\{\Delta_j\}$ непересекающихся интервалов $\Delta_j = [a_j, b_j] \subset (0,1)$ таких, что

$$\begin{gathered}f(a_j) = f(b_j) = 0, \\ f(c_j) = h_j > 0 \quad \text{для } c_j = \frac{a_j + b_j}{2}, \\ f|_{[a_j,c_j]} \text{ и } f|_{[c_j,b_j]} \text{ линейны}, \\ \lim a_j = \lim b_j = 0.\end{gathered}$$

Тогда $\lim h_j = 0$. Если $b_j - a_j = o(h_j)$, то условие (29) не выполняется (достаточно рассмотреть треугольники, образованные графиками функции $f|_{\Delta_j}$ и Δ_j). В этой ситуации несложно предъявить векторное поле $\vec{v} \in \vec{C}(K_f)$, не совпадающее ни с одним градиентом на K_f. А именно, рассмотрим очень маленькие круги $B = B(p_j, \varepsilon_j)$, $B = B(q_j, \varepsilon_j)$, и $B = B(r_j, \varepsilon_j)$ (здесь $p_j = (c_j, h_j)$, $q_j = (a_j, 0)$ и $r_j = (b_j, 0)$), где $\varepsilon_j \ll b_j - a_j$. Допустим, что $\vec{v} \in \vec{C}(K_f)$, $\vec{v}(0) = 0$, $\vec{v} = \delta_j\vec{\tau}$ на

$K_f \setminus \{0 \cup \bigcup B\}$, где δ_j — положительные константы и $\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор к K_f. Обозначим через Γ_j ориентированный график функции $f|_{\Delta_j}$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_j} \langle \vec{v}, \vec{\tau} \rangle ds \asymp \delta_j h_j. \tag{31}$$

Но если $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, то

$$\left| \int\limits_{\Gamma_j} \langle \nabla u, \vec{\tau} \rangle ds \right| = \left| \int\limits_{\Delta_j} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right| = O(b_j - a_j) \tag{32}$$

Оценки (31) и (32) противоречат друг другу, если δ_j стремится к нулю достаточно медленно.

Этот пример показывает, что понятия совершенного градиентного множества и сильно градиентного множества различаются: любой график K_f не содержит спрямляемых петель и потому сильно градиентен.

3.8. Отметим одно следствие теоремы 3.3.

Площадь плоского совершенного градиентного множества равна нулю.

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество, и $\mathcal{L}^2(K) > 0$. Тогда K содержит точку плотности p. Обозначим через γ_R окружность радиуса R с центром p. Легко видеть, что

$$\varliminf_{R \to 0} \mathcal{H}^1(\gamma_R \setminus K) / \mathcal{H}^1(\gamma_R) = 0,$$

так что K не есть совершенное градиентное множество (по теореме 3.3).

Пусть, в частности, $K \subset \mathbb{R}^2$ — всюду разрывный компакт положительной площади. Любое векторное поле, непрерывное на K, допускает равномерное на K приближение полями, локально постоянными вблизи K. Значит, такое K доставляет еще один пример сильно градиентного, но не совершенно градиентного множества.

§4. Нелокальность h-множеств в $\mathbb{R}^3$

4.1. Нам понадобится следующий результат.

Пусть K — компактное множество в $\mathbb{R}^3$ нулевого объема (т.е. трехмерная лебегова мера множества K равна нулю). Тогда для любой функции $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция H, гармоническая в некоторой окрестности множества K и такая, что $|\nabla u - \nabla H| < \varepsilon$.

Этот факт был доказан в [9] и обобщен на гармонические дифференциальные формы в [3] (см. также [10, 11]).

4.2. Обозначим через U замкнутый единичный круг в $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Положим $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, и рассмотрим функцию $F \in C(U)$, обладающую следующими свойствами:

(a) $F = 0$ на C;

(b) график функции $F|_{U\setminus C}$ метрически несвязен.

(Метод построения таких функций будет описан ниже в 4.6). Зафиксируем число $\sigma \in (0, 1)$ и положим

$$K := \text{график функции } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = F(x, y)\},$$
$$K_- = K \cap \{x \leqslant \sigma\}, \qquad K_+ := K \cap \{x \geqslant -\sigma\}.$$

Очевидно, $K_\pm$ суть замыкания открытых (в K) подмножеств множества K, объединение которых совпадает с K. Мы докажем, что

(a) K не есть h-множество, хотя

(b) K_+ и K — суть сильные h-множества.

Поэтому аналог принципа локализации Бишопа для $R(K)$ (см. Введение) не имеет места в $\mathbb{R}^3$.

4.3. Докажем сначала (a). Предположим, что K есть h-множество. Тогда любое поле $\vec{v} \in \vec{C}(K)$ есть равномерный предел (на K) полей $\vec{v}_j \in h(O_j)$ для окрестностей O_j компакта K. Не умаляя общности можно считать, что окрестности O_j односвязны. В этом случае $\vec{v}_j = \nabla H_j$ (вспомним, что $\operatorname{rot} \vec{v}_j = 0$), так что K есть сильно градиентное множество, что невозможно в силу присутствия в K спрямляемой петли C.

4.4. Теперь докажем (b). Достаточно показать, что множества K_+ и K_- сильно градиентны. Действительно, объем K (т.е. графика непрерывной функции) равен нулю. Согласно 4.1, любое поле $\vec{v} \in \vec{C}(K)$, которое можно приблизить в $\vec{C}(K)$ градиентами C^1-функций, можно приблизить в $\vec{C}(K)$ градиентами функций, гармонических в окрестности множества K. Эту окрестность можно считать односвязной, и стандартное применение теоремы Рунге (см. [3]) дает последовательность функций h_j, гармонических в $\mathbb{R}^3$ и таких, что $\nabla h_j \to \vec{v}$ в $\vec{C}(K)$.

4.5. Чтобы показать, что множество K_+ сильно градиентно, применим 3.1.1 к паре K'_+, K_+, где $K'_+ := K_+ \cap C$. Возьмем $\vec{v} \in \vec{C}(K_+)$ и покажем, что $\vec{v}$ есть квазиградиент (на K_+). Поскольку множество $K_+ \setminus K'_+$ метрически несвязно, то достаточно доказать, что $\vec{v}|_{K'_+}$ есть квазиградиент. Последнее очевидно, ведь K'_+ есть сильное (и даже совершенное, по теореме 3.3) градиентное множество.

4.6. Чтобы построить функцию F, удовлетворяющую условиям (a) и (b) (см. 4.2), возьмем функцию Вейерштрасса $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (т.е. W непрерывна и нигде не дифференцируема). Очевидно, полная вариация $\overset{b}{\underset{a}{V}} W$ бесконечна для любых a, b $(a < b)$. Мы можем предположить, что $|W| < 1$. Пусть

$$F_1(x, y) := W(W(x) - y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Мы докажем, что

график функции F_1 метрически несвязен.

Пусть γ — непрерывная кривая в $\mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \ \ t \in [0, 1], \quad \text{где } \gamma_j \in C([0; 1]).$$

Положим $g(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t), F_1(\gamma(t)))$.

Достаточно доказать, что $\overset{1}{\underset{0}{V}} g = +\infty$, если $\gamma(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Есть две возможности:

1) $w := w(\gamma_1) - \gamma_2 \not\equiv \mathrm{const}$, 2) $w \equiv \mathrm{const}$.

В первом случае найдутся такие α, β, что $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, и $w(\alpha) \neq w(\beta)$. Обозначая через J интервал с концами $w(\alpha)$ и $w(\beta)$, мы получаем:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} g \geqslant \overset{1}{\underset{0}{V}} F_1(\gamma) = \overset{1}{\underset{0}{V}} W(w) \geqslant \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} W(w) \geqslant \underset{J}{V} W = +\infty.$$

Во втором случае $\gamma_1 \equiv \mathrm{const}$ (и, значит, $\gamma \equiv \mathrm{const}$). Действительно, если $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, $\gamma_1(\alpha) \neq \gamma_1(\beta)$, то

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} g \geqslant \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \gamma_2 = \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} W(\gamma_1) \geqslant V_I W = +\infty,$$

где I — интервал с концами $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_1(\beta)$. Таким образом, мы построили метрически несвязный график Γ над $\mathbb{R}^2$.

4.6.1. Рассмотрим цилиндр $\mathbf{Z} = U \times [-2, 2]$, содержащий график Γ_1 функции $F_1|_U$. Нетрудно построить непрерывное отображение $T : Z \to B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ такое, что $T(C \times [-2, 2]) = C$, и $T_{\mathbf{Z} \setminus (C \times [-2,2])}$ есть диффеоморфизм множества $\mathbf{Z} \setminus (Cx[-2, 2])$ на $B \setminus C$, сохраняющий проекцию на плоскость (x, y). Тогда $T(\Gamma_1)$ есть график функции F, удовлетворяющий условиям (a) и (b) из 4.2.

4.7. В заключение остановимся на вопросе о взаимоотношениях градиентных, вихревых и h-множеств. Ф. Л. Назаров построил изящный пример плоского компакта K, обладающего следующими свойствами: 1) K есть вихревое (а, значит, и градиентное) множество; 2) K не есть h-множество (личное сообщение).

Заметим, что, заменив равномерную сходимость на сходимость в среднем, мы получаем совершенно иную ситуацию. А именно, пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество, $p > 1$. *Следующие утверждения равносильны*: а) *любое поле класса* $\vec{L}^p(K)$ *допускает приближение в* $\vec{L}^p(K)$ *полями, соленоидальными вблизи* K; б) *любое поле класса* $\vec{L}^p(K)$ *допускает приближение в* $\vec{L}^p(K)$ *полями, гармоническими вблизи* K [12].

О приближении векторными полями в $\vec{L}^p$ см. также [13, 14].

Список литературы

[1] Гамелин Т., *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973.

[2] Гайер Д., *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, М., 1986.

[3] Khavin V. P., Presa Sagué A., *Approximation properties of harmonic vector fields and differential forms*, Methods of Approximation Theory in Complex Analysis and Mathematical Physics (Leningrad, 1991), Lecture Notes in Math., vol. 1550, Springer, Berlin, 1993, pp. 149–156.

[4] Смирнов С. К., *Разложение соленоидальных векторных зарядов на элементарные соленоиды и структура нормальных одномерных потоков*, Алгебра и анализ **5** (1993), № 4, 206–238.

[5] Тарханов Н. Н., *Аппроксимация на компактах решениями систем с сюръективным символом*, Успехи мат. наук **48** (1993), № 5, 107–146.

[6] Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.

[7] Джусти Э., *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, Мир, М., 1989.

[8] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, Ленингр. ун-т, Л., 1985.

[9] Rao N. V., *Approximation by gradients*, J. Approx. Theory **12** (1974), no. 1, 52–60.

[10] Преса Саге А., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 6, 104–152.

[11] Малинникова Е. В., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами. Конструктивный подход*, Алгебра и анализ **9** (1997), № 6, 156–196.

[12] Хавин В. П., *Аппроксимация аналитическими функциями в среднем*, Докл. АН СССР **178** (1968), № 5, 1025–1028.

[13] Хавин В. П., *Об аппроксимации в L^p решениями некоторых систем линейных дифференциальных уравнений*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астроном. **1975**, вып. 1, 150–158.

[14] Чебанов В. И., *Аппроксимационные свойства некоторых классов векторных полей*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астроном. **1979**, вып. 2, 50–53.

Yale University,
Dept. of Mathematics,
10 Hillhouse Av.,

Поступило 20 июня 1997 г.

New Haven, CT 06520
U.S.A.
E-mail: stas@math.yale.edu

198904, Санкт-Петербург,
Старый Петергоф,
Библиотечная пл. 2,
математико-механический ф-т СПБГУ
E-mail: havin@havin.usr.pu.ru

Dept. of Mathematics and Statistics,
McGill University,
805, Sherbrooke str. W,
Montreal, H3A 2K6, Canada
E-mail: havin@math.mcgill.ca