“Wer liebt schon Mathematik ?”

(In der Braunschweiger Touristeninformation, auf die absolut ungewohnte Frage, wo denn Gauss’ Geburtshaus stehe.)

Erfahrungen mit Einführungsvorlesungen :

Analysis

Erfahrungen mit Einführungsvorlesungen :

Geometrie

Analysis

Erfahrungen mit Einführungsvorlesungen :

Geometrie

Analysis

"Die Lehrart, die man schon in dem ältesten auf unsere Zeit gekommenen Lehrbuche der Mathematik (den Elementen des Euklides) antrifft, hat einen so hohen Grad der Vollkommenheit, dass sie von jeher ein Gegenstand der Bewunderung, zuweilen auch einer mehr oder weniger glücklichen Nachahmung ....

(B. Bolzano, *Grössenlehre*, p. 18r, 1848)

Euklid’s Elemente ; Buch I, Beginn.

[1.] Σημεῖόν ἐστιν, οὑ μέρος οὐθέν.

Euklid's Elemente ; Buch I, Beginn.

[1.] Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
(Un point est ce dont il n'y a aucune partie.)

Euklid’s Elemente ; Buch I, Beginn.

[1.] Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
(Un point est ce dont il n’y a aucune partie.)

[2.] Une ligne est une longueur sans largeur.

[3.] Les limites d’une ligne sont des points.

[4.] Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

[5.] Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

[6.] Les limites d’une surface sont des lignes.

[7.] Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.

[8.] Un angle plan est l’inclinaison, l’une sur l’autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l’une l’autre et ne sont pas placées en ligne droite.

[9.] Et quand les lignes contenant l’angle sont droites, l’angle est appelé rectiligne.

[10.] Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.

[11.] Un angle obtus est celui qui est plus grand qu’un droit.

[12.] Un angle aigu celui qui est plus petit qu’un droit.

[13.] Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.

[14.] Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).

[15.] Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d’un unique point parmi ceux qui sont placés à l’intérieur de la figure, sont (jusqu’à la circonférence du cercle) égales entre elles.

[16.] Et le point est appelé centre du cercle.

[17.] Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

[18.] Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

[19.] Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites; trilatères (triangles) : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre; multilatères par plus de quatre.

[20.] Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.

[21.] De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit; obtusangle, celle qui a un angle obtus; acutangle, celle qui a les trois angles aigus.

[22.] Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle; un rhomboïde (parallélogramme), celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.

[23.] Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

“Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avoüer cependant que les difficultés qu’éprouvent ceux qui commencent à s’y appliquer, viennent le plus souvent de la maniére dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toûjours par un grand nombre de définitions, de demandes, d’axiomes, & de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur”.

(Clairaut, *Elemens de Geometrie*, 1741)

Euklid’s Elemente ; Bd. 1, Beginn.

[1.] Un point est ce dont il n’y a aucune partie.
(Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν)

[2.] Une ligne est une longueur sans largeur.

[3.] Les limites d’une ligne sont des points.

[4.] Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

[5.] Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

[6.] Les limites d’une surface sont des lignes.

[7.] Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.

[8.] Un angle plan est l’inclinaison, l’une sur l’autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l’une l’autre et ne sont pas placées en ligne droite.

[9.] Et quand les lignes contenant l’angle sont droites, l’angle est appelé rectiligne.

[10.] Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.

[11.] Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

[12.] Un angle aigu celui qui est plus petit qu'un droit.

[13.] Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.

[14.] Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).

[15.] Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

[16.] Et le point est appelé centre du cercle.

[17.] Et un diamètre du cercle est n’importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

[18.] Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

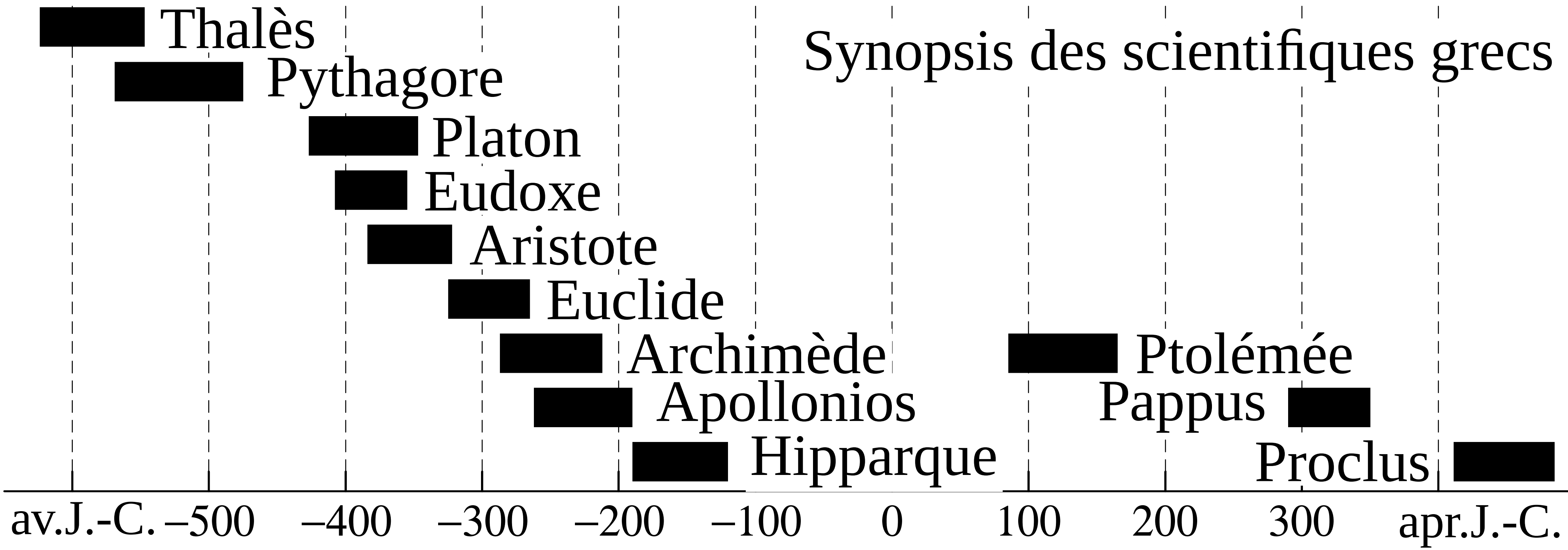
[19.] Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites; trilatères (triangles) : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre; multilatères par plus de quatre.

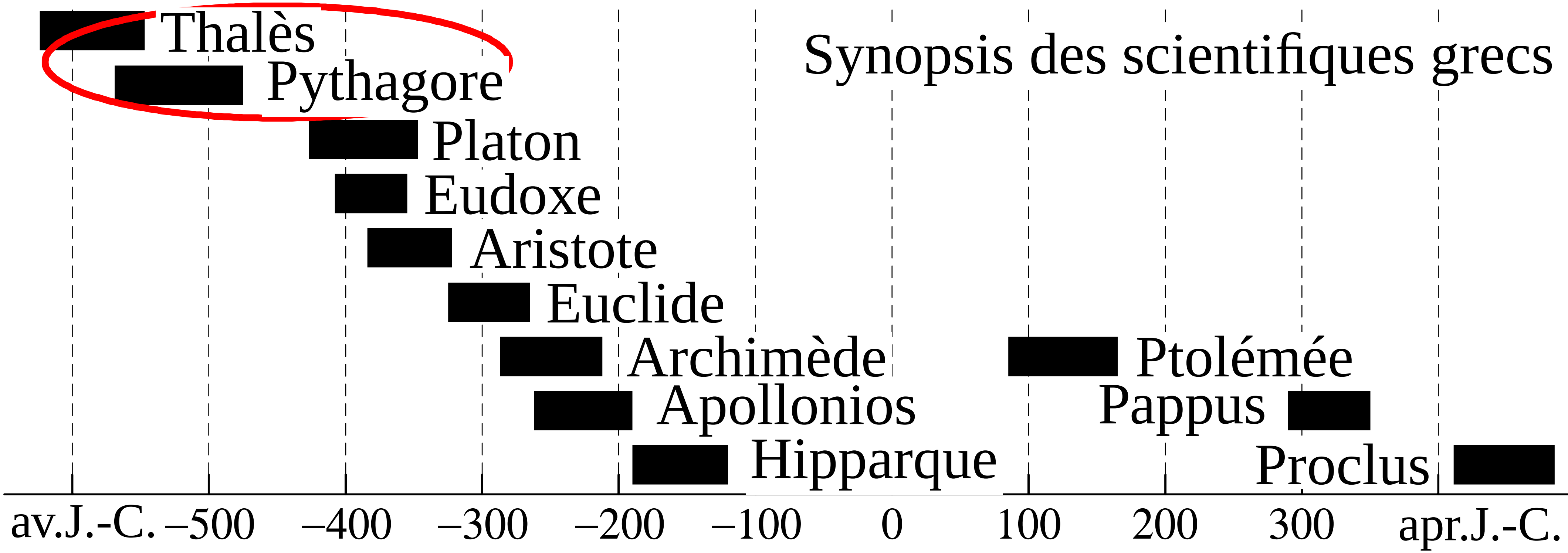
[20.] Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.

[21.] De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit; obtusangle, celle qui a un angle obtus; acutangle, celle qui a les trois angles aigus.

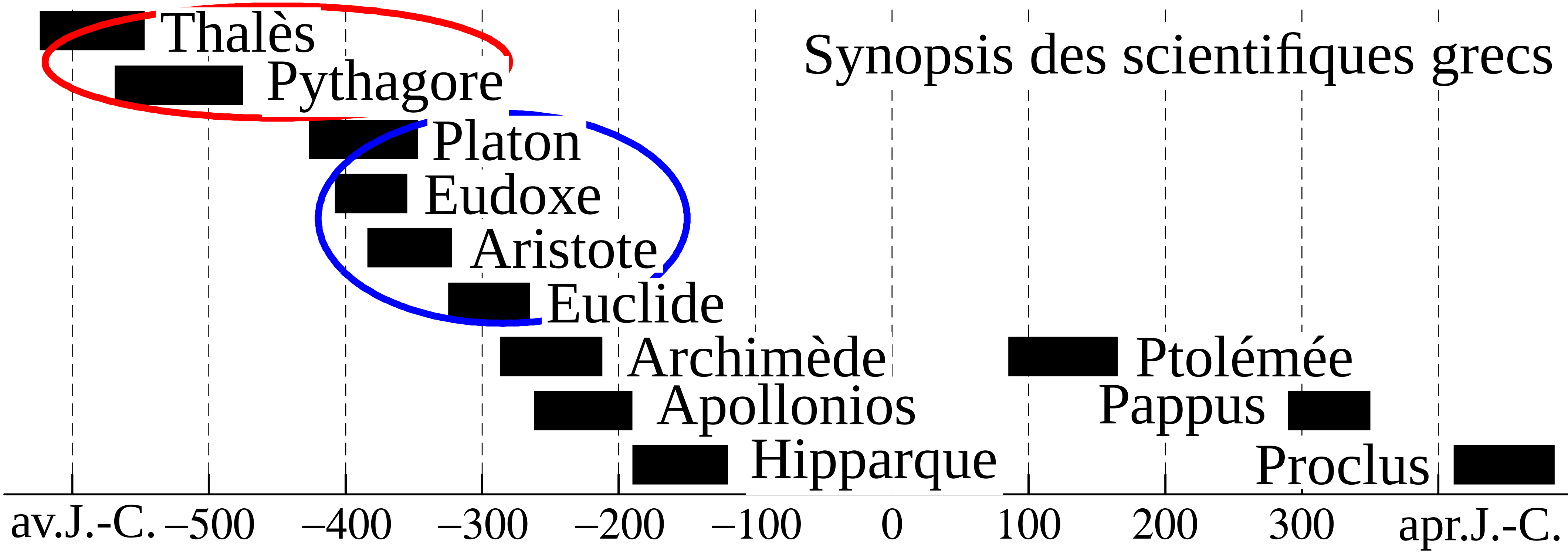
[22.] Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale
et rectangle; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle; un rhomboïde (parallélogramme), celle qui a les côtés et les angles opposés
égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.

[23.] Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.


Synopsis des scientifiques grecs
Thalès
Pythagore
Platon
Eudoxe
Aristote
Euclide
Archimède
Apollonios
Hipparque
Ptolémée
Pappus
Proclus
av.J.-C.
–500
–400
–300
–200
–100
0
100
200
300
apr.J.-C.

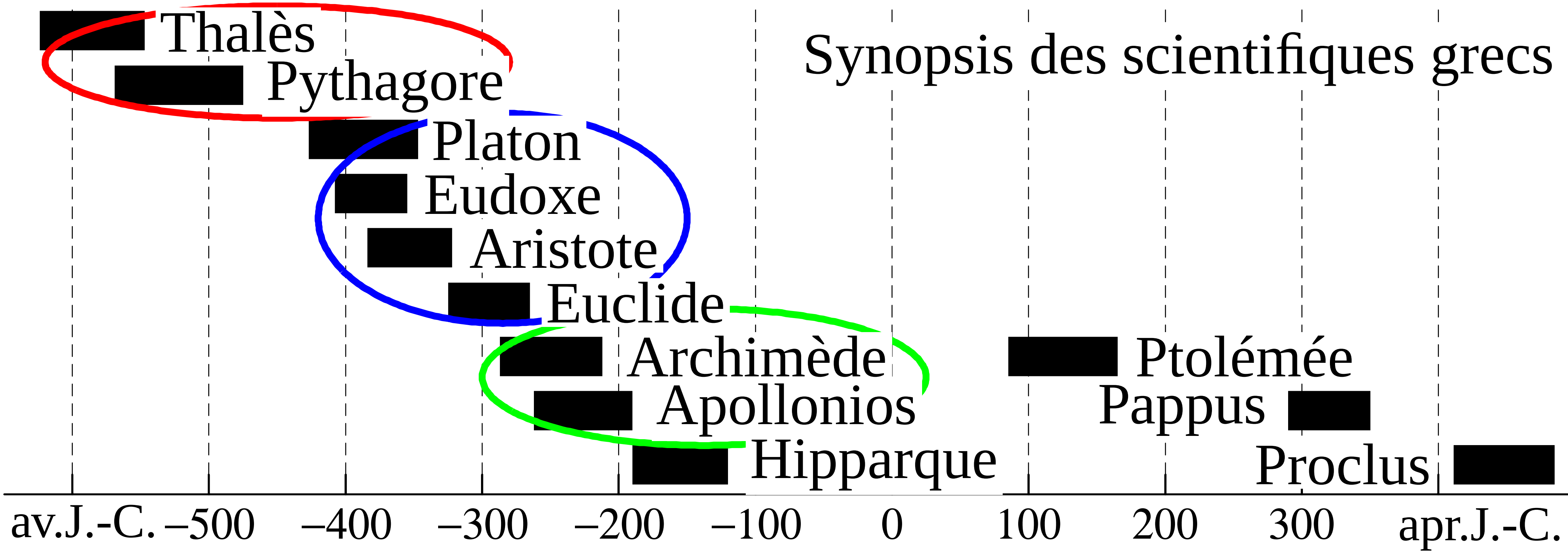


I.1 Thales und Pythagoras



I.1 Thales und Pythagoras

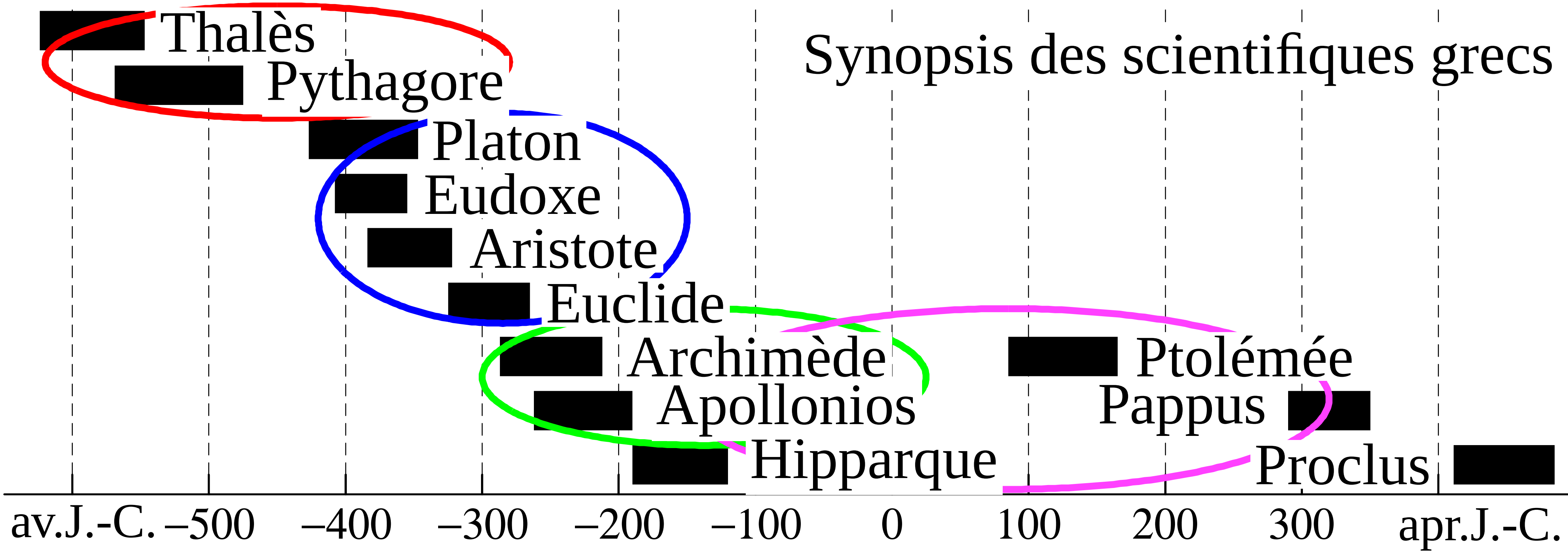
I.2 Euklid



I.1 Thales und Pythagoras

I.2 Euklid

I.3 Kegelschnitte, Archimedes



I.1 Thales und Pythagoras

I.2 Euklid

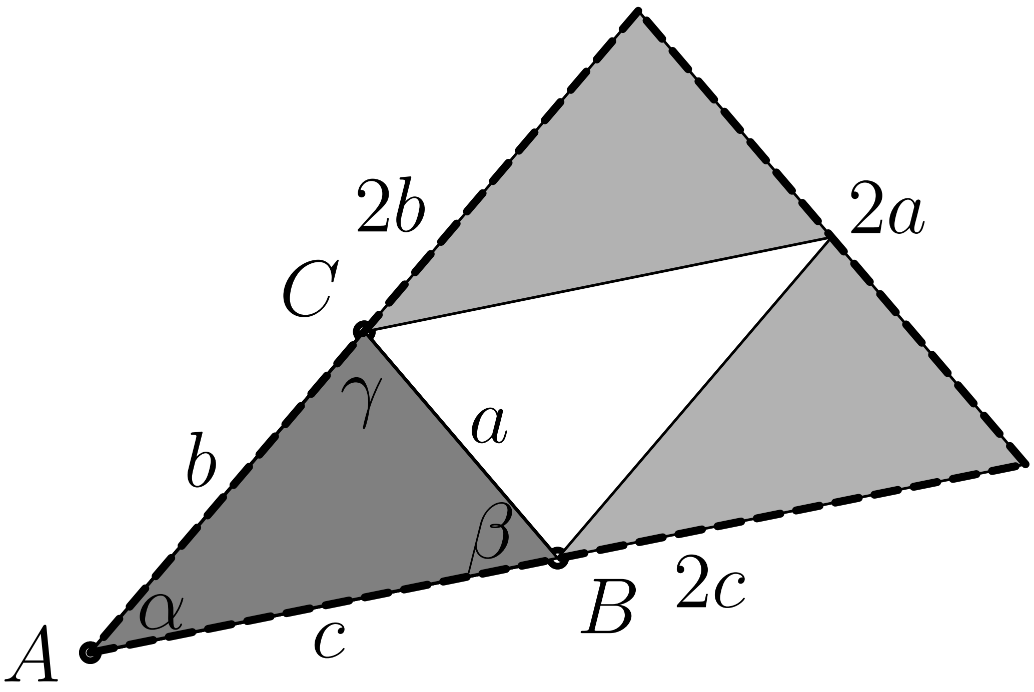
I.3 Kegelschnitte, Archimedes

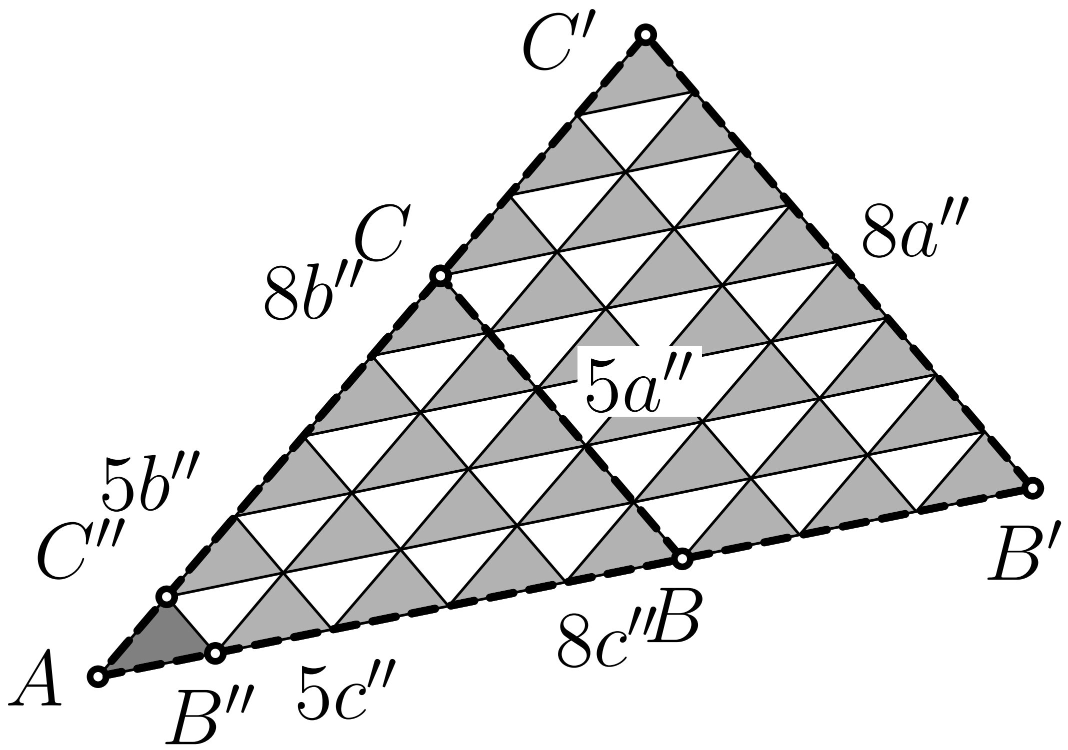
I.4 Trigonometrie

I.1 Thales und Pythagoras

"... la théorie des lignes proportionnelles et la proposition de Pythagore, qui sont les bases de la Géométrie ..."

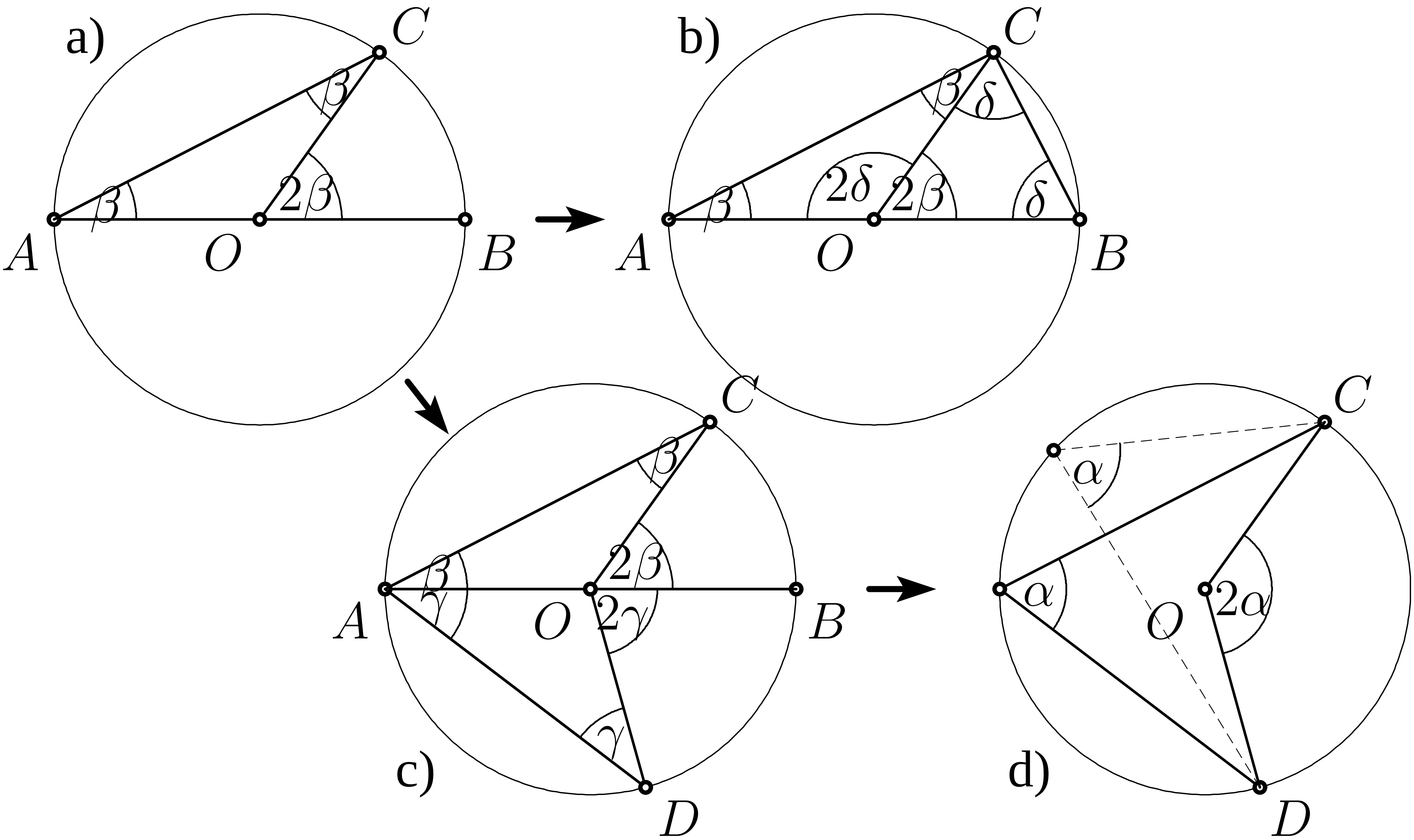
(Poncelet 1822, p. xxix)



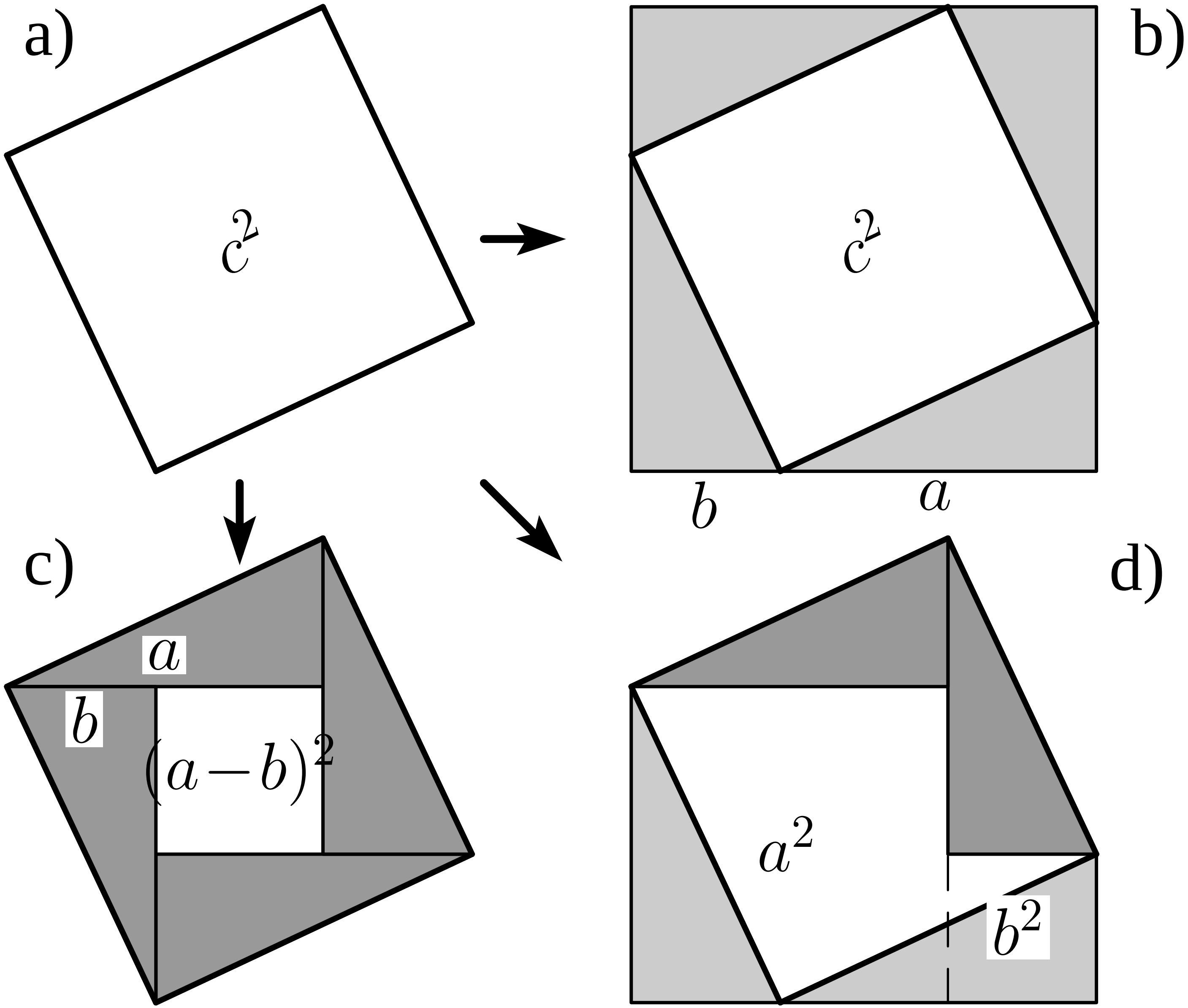


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

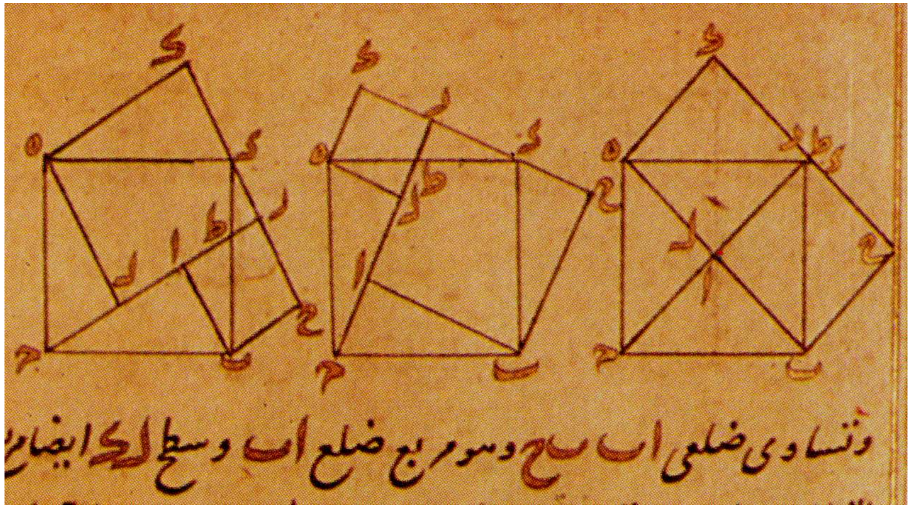
Zentriwinkel – Peripheriewinkel.

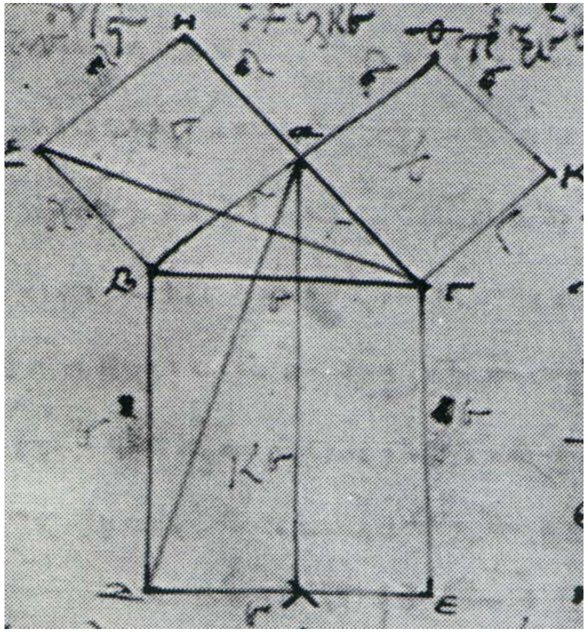


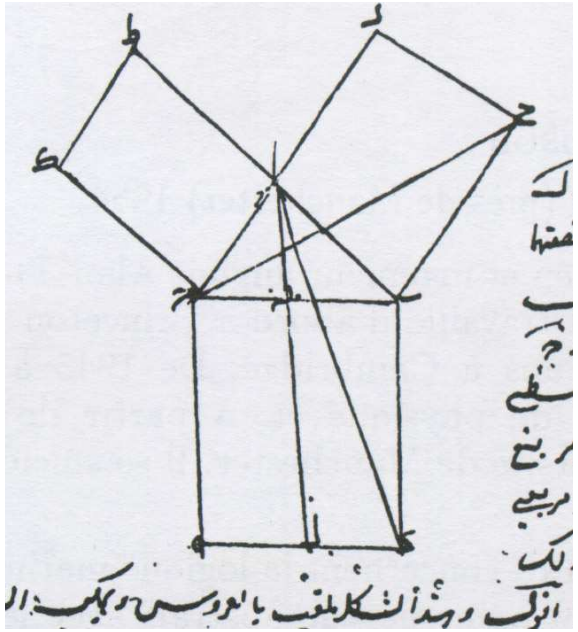
Th. Pythagoras.



Th. Pythagoras.



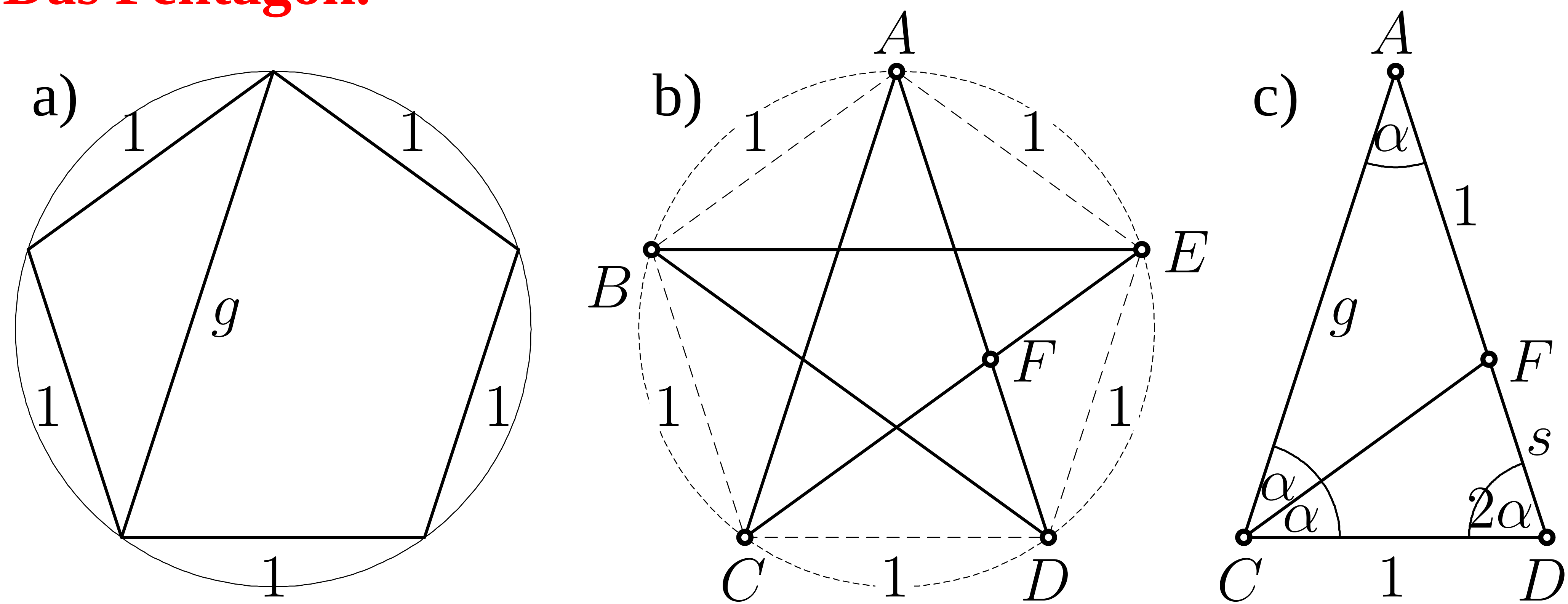




Thābit Ibn Qurra, 870 n. Chr.

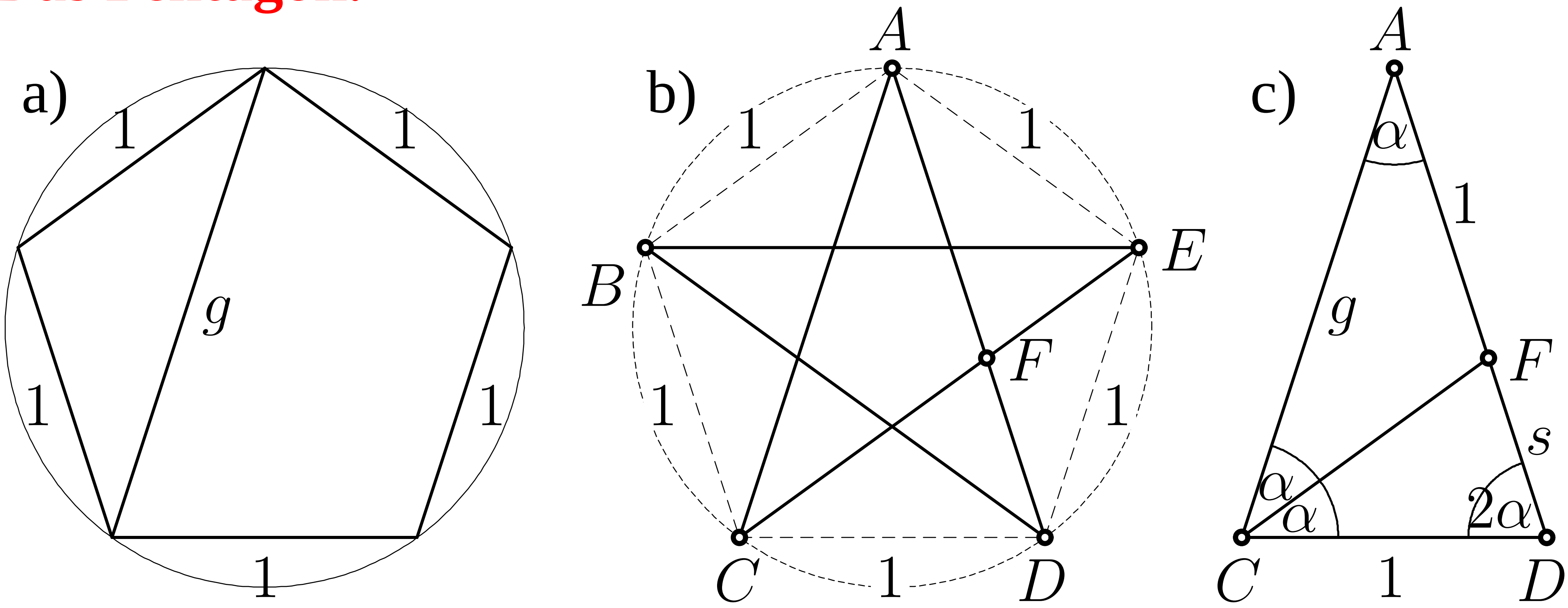
Euklid 300 v. Chr.

Das Pentagon.



$$g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

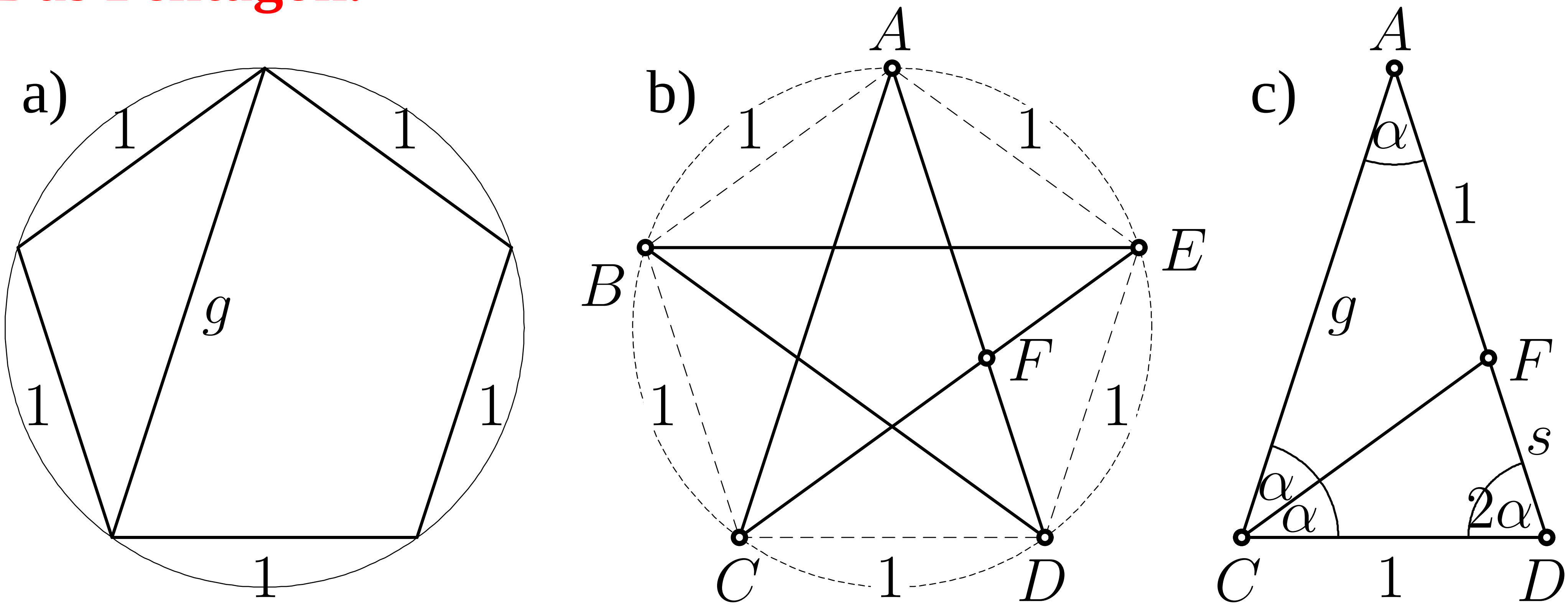
Das Pentagon.



$$g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}\,.$$

ist keine rationale Zahl !!

Das Pentagon.



$$g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}\,.$$

ist keine rationale Zahl !!

Der grosse Schock : alle Beweise ungenügend !!!

I.2 Euklid's Elemente.

"La Géométrie d'Euclide a certainement de très-grands avantages, elle accoutume l'esprit à la rigueur, à l'élégance des démonstrations et à l'enchaînement méthodique des idées ..."

(Poncelet 1822, p. xxv)

"Pemberton ... avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes et d'autres Algébristes avant d'avoir étudié et médité les Éléments d'Euclide."

(Préface de *Œuvres d'Euclide* par F. Peyrard, 1819)

"There never has been, and till we see it we never shall believe that there can be, a system of geometry worthy of the name, which has any material departures ... from the plan laid down by Euclid."

(De Morgan 1848; copied from the *Preface* of Heath.)

Euklid's Definitionen.

[1.] Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
(Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν)
[2.] Une ligne est une longueur sans largeur.
[3.] Les limites d'une ligne sont des points.
[4.] Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
[5.] Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
[6.] Les limites d'une surface sont des lignes.
[7.] Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
[8.] Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
[9.] Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne.

[10.] Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.

[11.] Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

[12.] Un angle aigu celui qui est plus petit qu'un droit.

[13.] Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.

[14.] Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).

[15.] Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

[16.] Et le point est appelé centre du cercle.

[17.] Et un diamètre du cercle est n’importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

[18.] Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

[19.] Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites; trilatères (triangles) : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre; multilatères par plus de quatre.

[20.] Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.

[21.] De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit; obtusangle, celle qui a un angle obtus; acutangle, celle qui a les trois angles aigus.

[22.] Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale
et rectangle; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle; un rhomboïde (parallélogramme), celle qui a les côtés et les angles opposés
égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.

[23.] Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

Die 5 Postulate Euklid's.

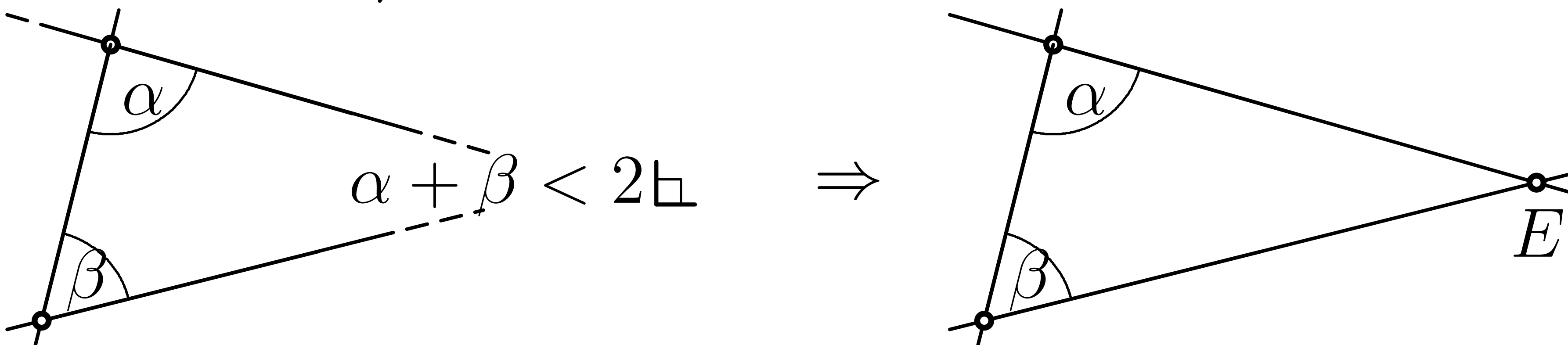
Post. 1.

Post. 2.

Post. 3.

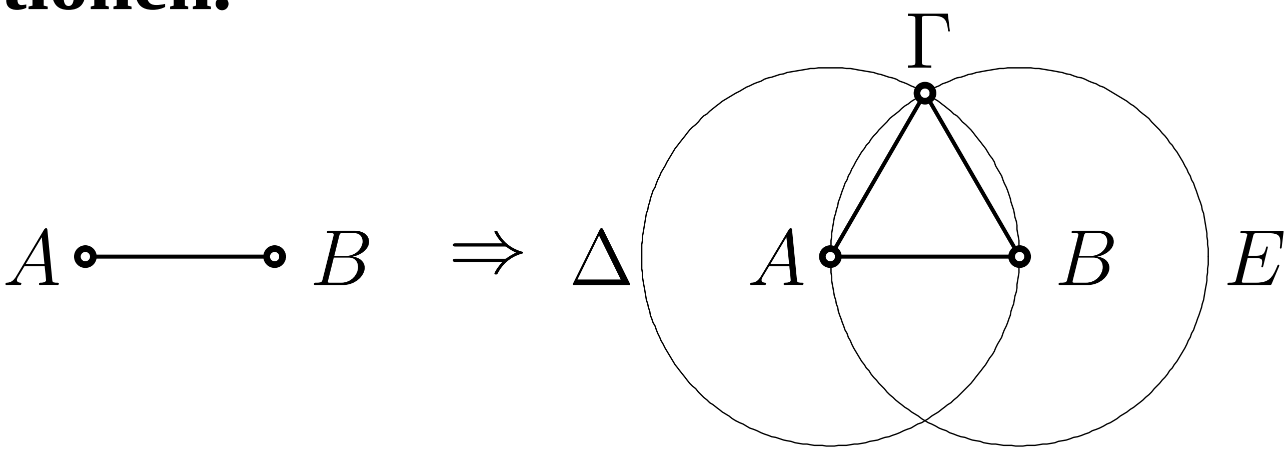
Post. 4.

Post. 5.

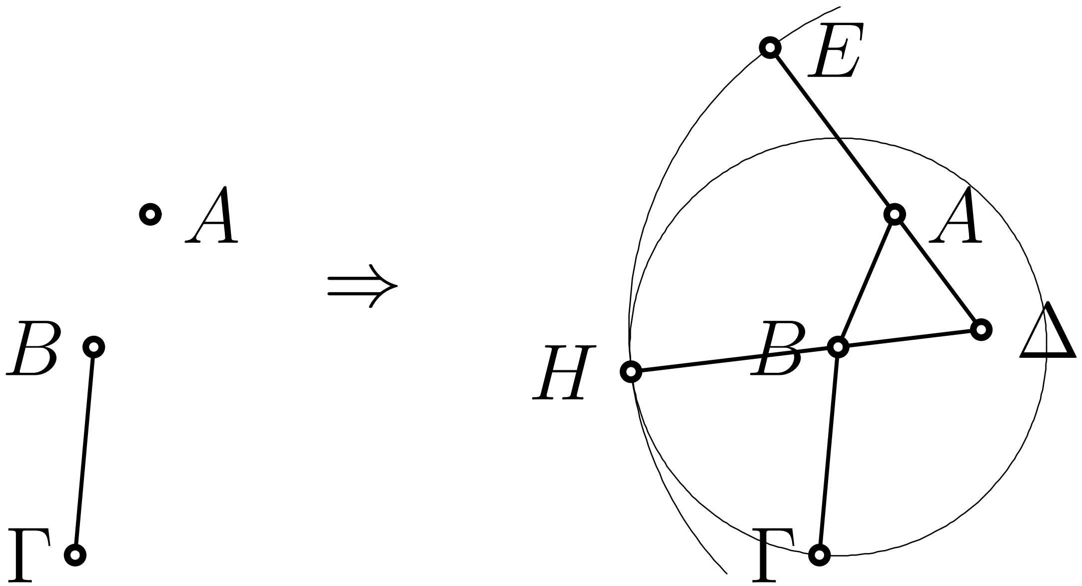


Die ersten Propositionen.

Prop. I.1.

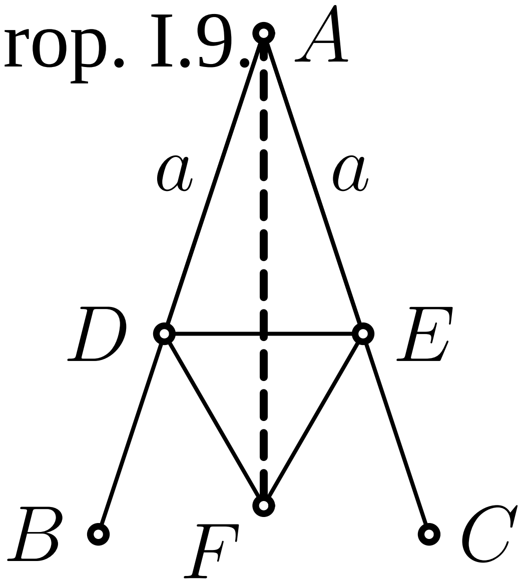


Prop. I.2.

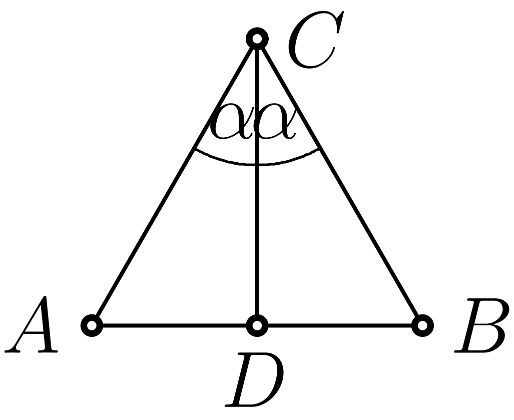


$AE = B$

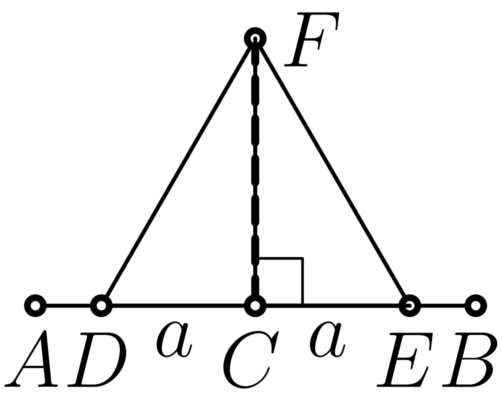
Prop. I.9.



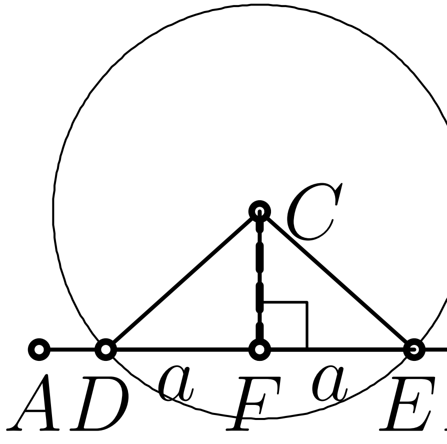
Prop. I.10.



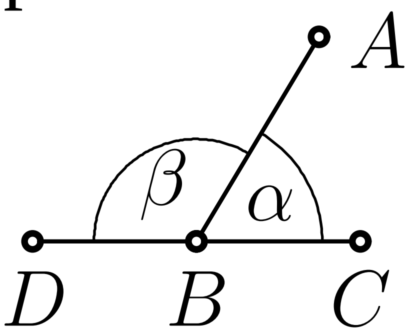
Prop. I.11.



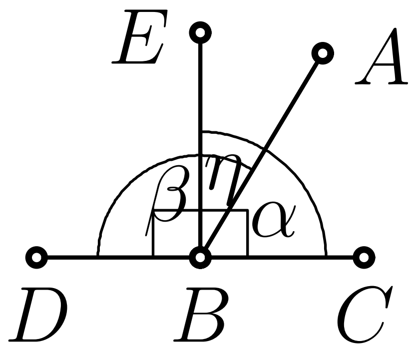
Prop. I.12.



Prop. I.13.



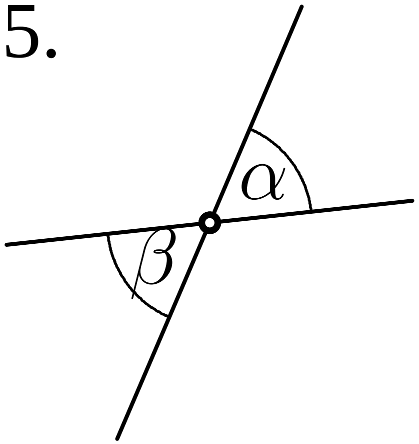
$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 2\cdot\llcorner.$ *Bew.* :



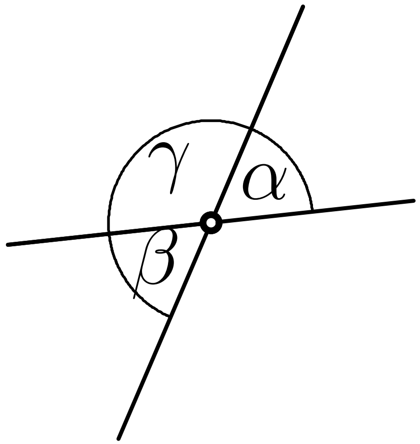
Auftritt Postulat 4 :

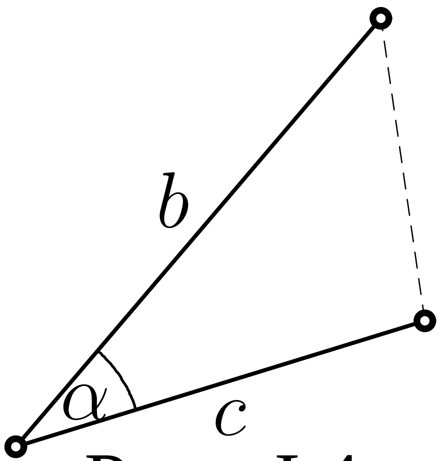
Prop. I.14. $\alpha+\beta = 2\cdot\llcorner \Rightarrow DBC$ in 1 Linie. Bew. mit Post. 4

Prop. I.15.

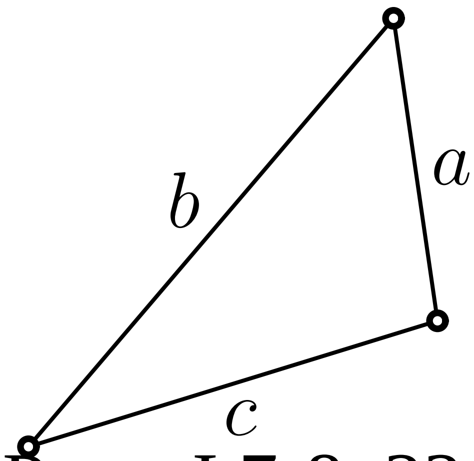


$\Rightarrow \quad \alpha = \beta.$ *Bew.:*

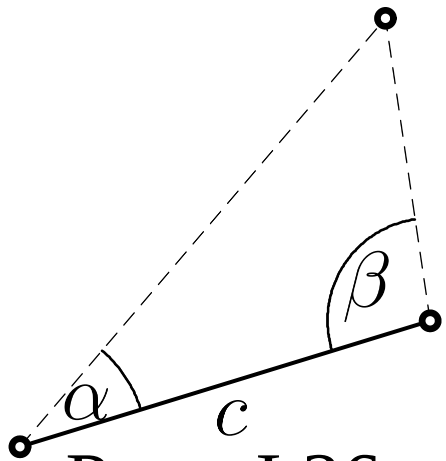




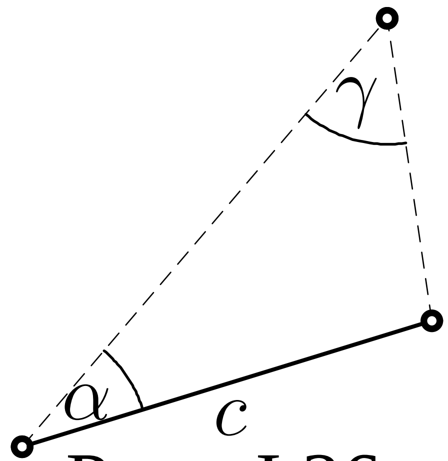
Prop. I.4
SWS



Prop. I.7-8, 22
SSS

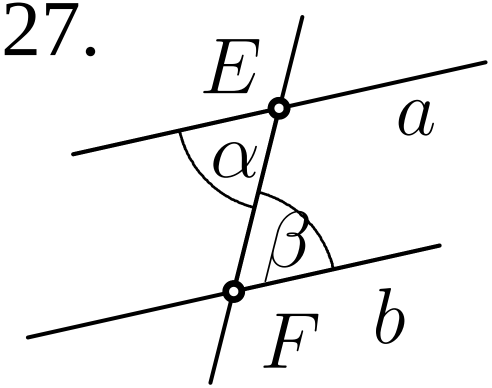


Prop. I.26
WSW

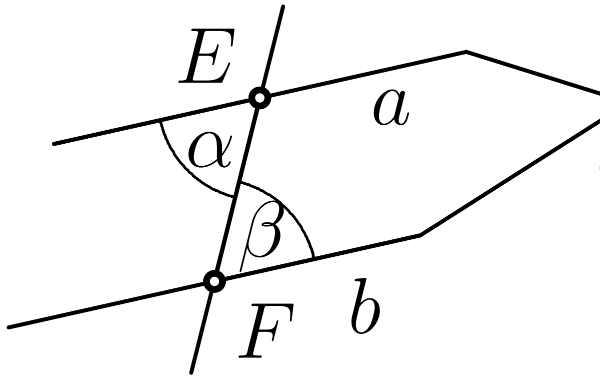


Prop. I.26
WWS

Prop. I.27.

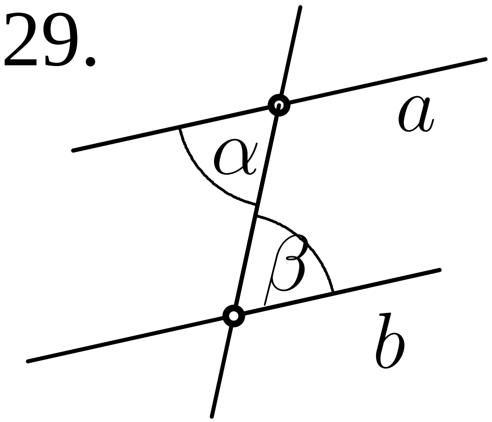


$\alpha = \beta \Rightarrow a||b.$ *Bew.* :

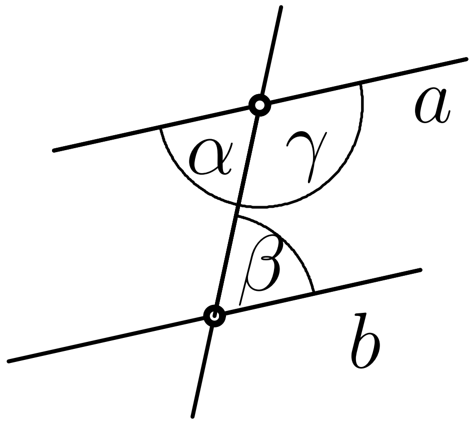


Auftritt Postulat 5 :

Prop. I.29.



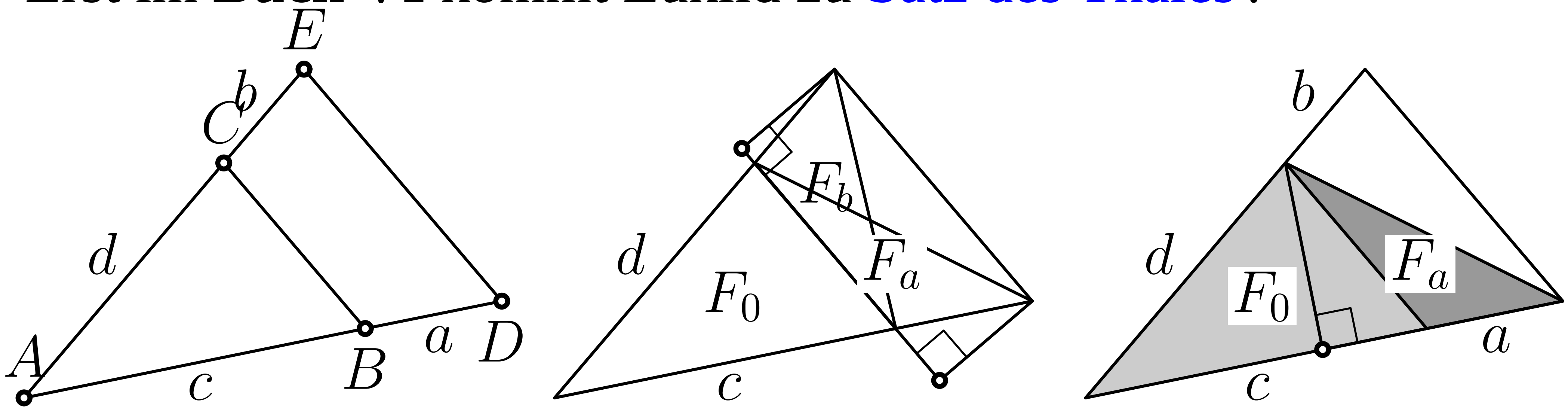
$a||b \Rightarrow \alpha = \beta.$ *Bew.* :



$\Rightarrow$ Sätze über Parallelwinkel, Winkelsumme im Dreieck (I.32), Parallelogramme, Quadrate, Pythogareischer Lehrsatz (I.47) und seine Umkehrung. Ende Buch I.

Buch II. Algebraische Identitäten.
Buch III. Kreise und Winkel ; Potenz eines Punktes.
Buch IV. Kreise und eingeschriebene Drei-, Vier-, und Fünfecke.
Buch V. Theorie der Proportionen (Irrationalzahlen, fast *à la* Dedekind).

Erst im **Buch VI** kommt Euklid zu Satz des Thales :



und erst die Proposition XIII.9 zeigt den obigen eleganten Beweis für das Pentagon.

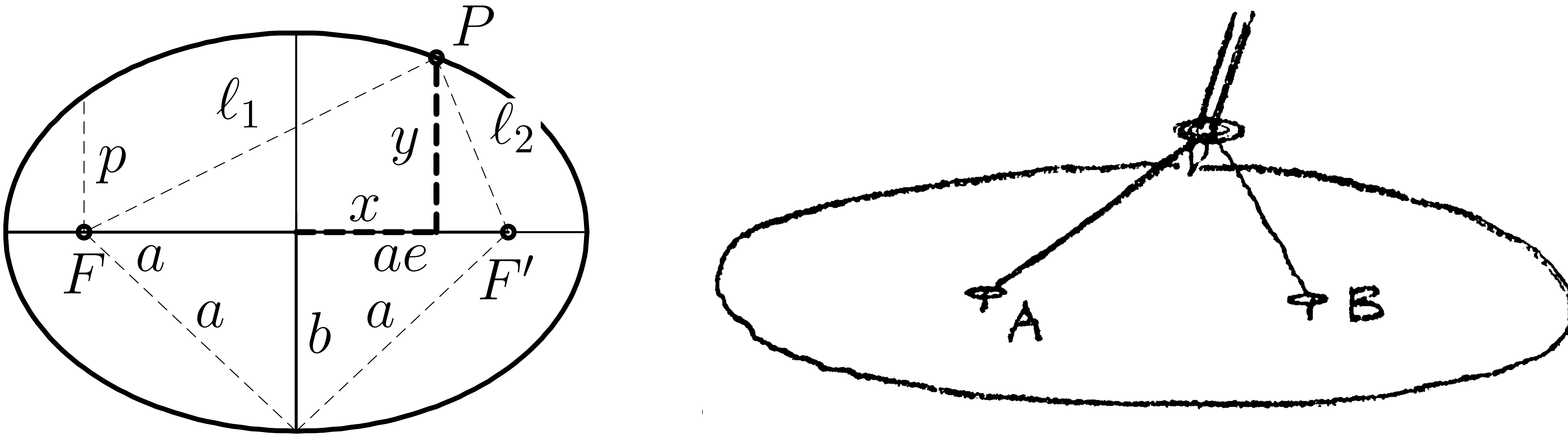
I.3 Apollonius und die Kegelschnitte.

"The cream of the classical period's contributions are Euclid's *Elements* and Apollonius' *Conic Sections*."

(M. Kline, *Mathematical Thought...*, 1972, p. 27)

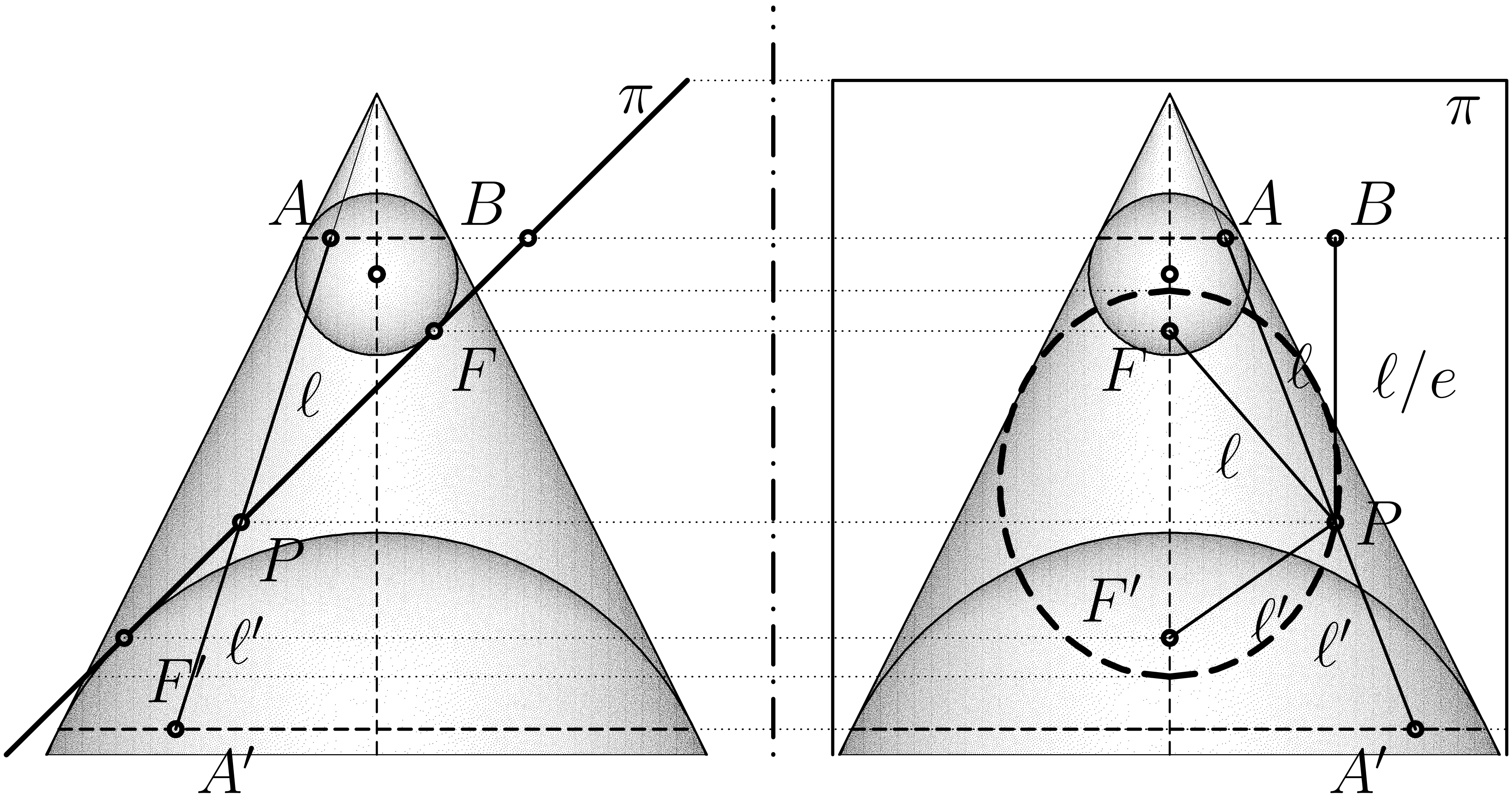
Apollonius, Buch III, Proposition LII :

$$\ell_1 + \ell_2 = 2a$$



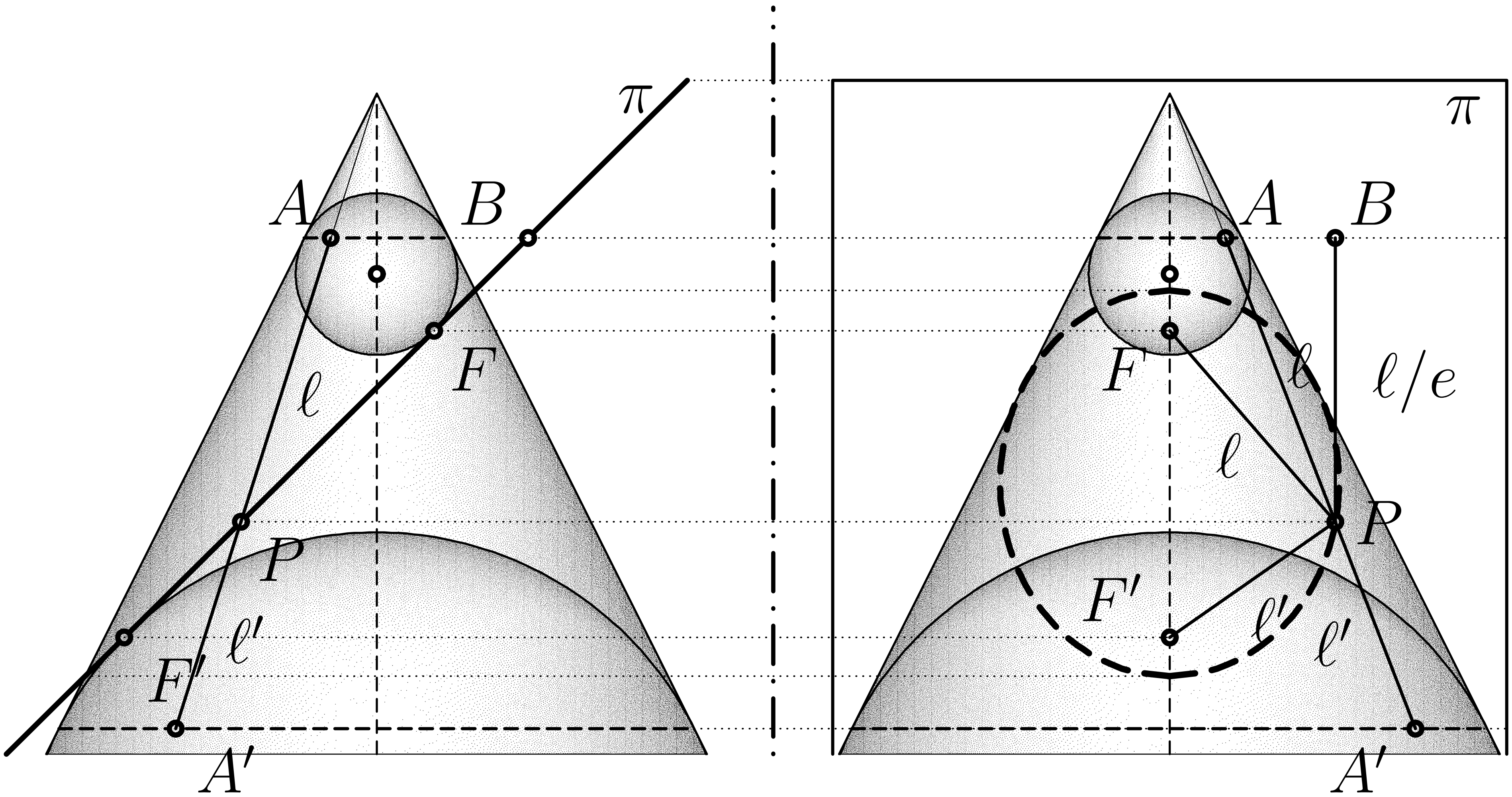
(rechts : Zeichnung von R. Feynman, 1965).

Der elegante Beweis von G.P. Dandelin (1822) :



hat an die hundert Propositionen des Apollonius überflüssig gemacht !!

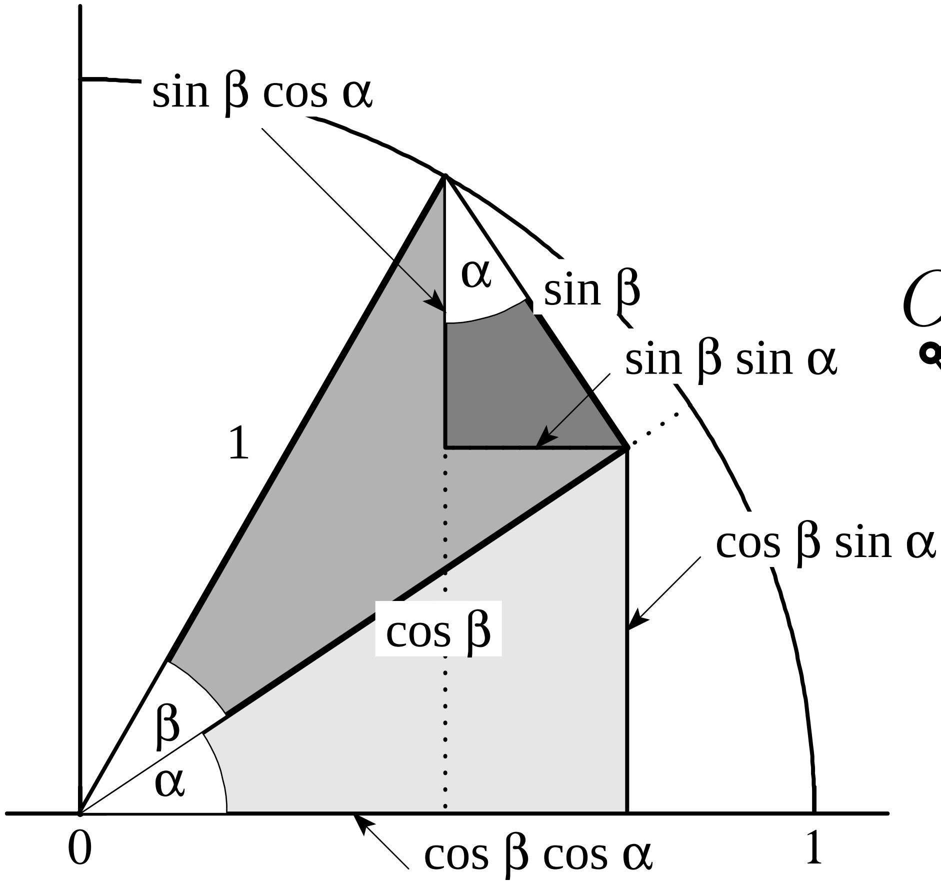
Der elegante Beweis von G.P. Dandelin (1822) :

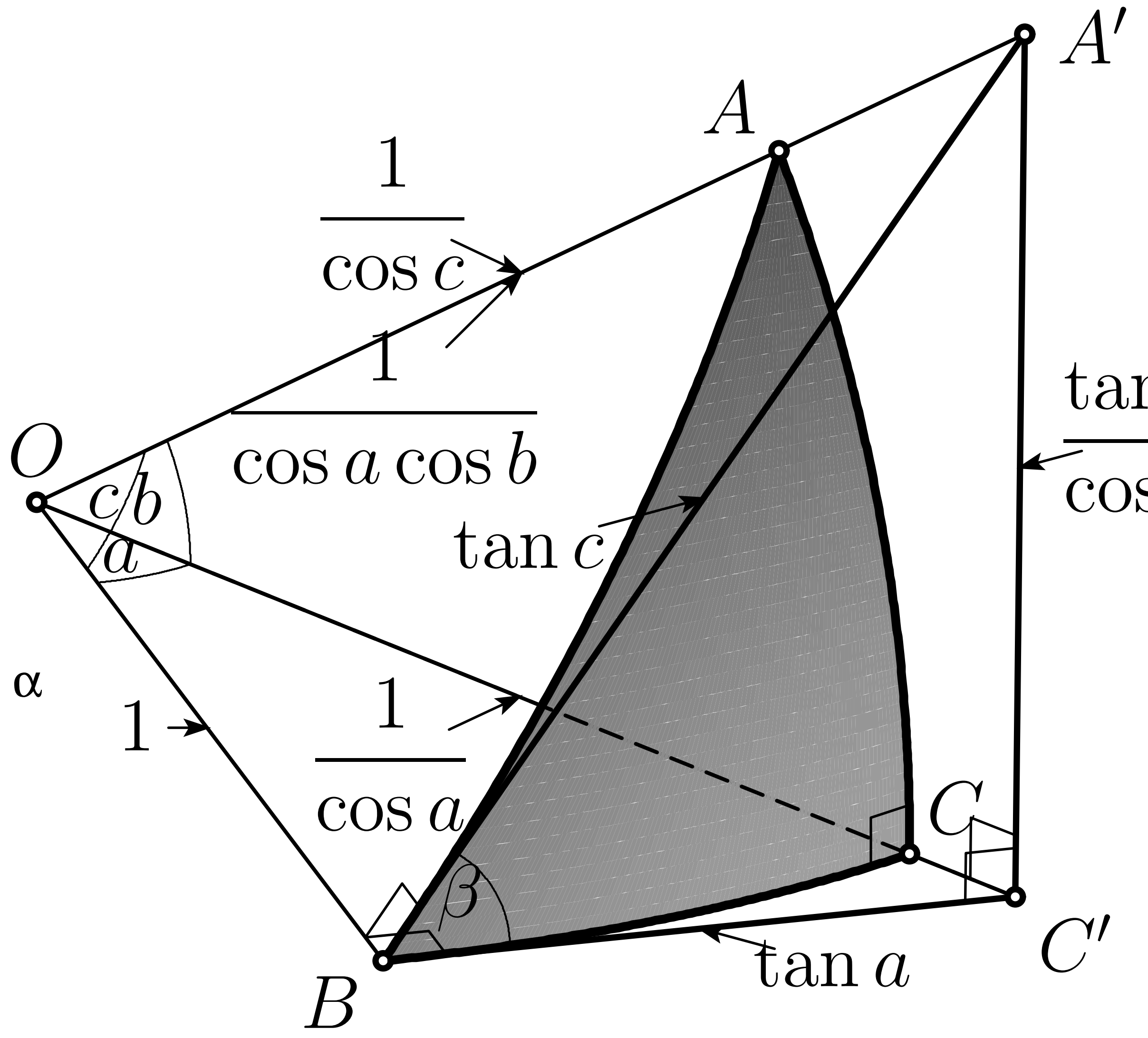


hat an die hundert Propositionen des Apollonius überflüssig gemacht !!

Die sture “historische Methode” ist nicht immer das Beste !!

Gleiches gilt für die **ebene und sphärische Trigonometrie** des Ptolemäus :





(Regiomontanus 1533)

(Euler 1782)

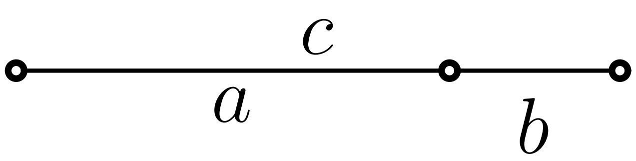
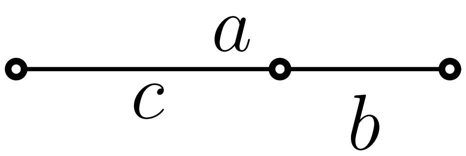
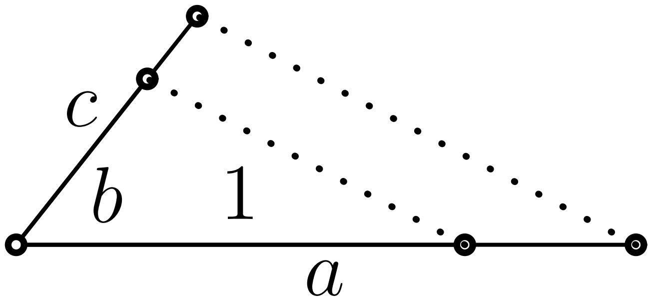
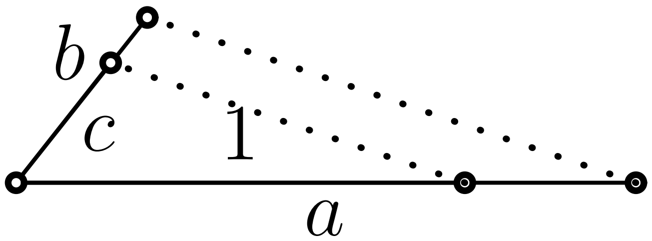
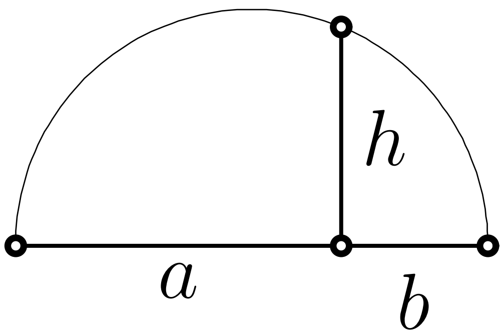
Kap. II. Analytische Geometrie (Descartes)

... en cherchant une question de géométrie ... je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que dans les triangles rectangles le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés ;

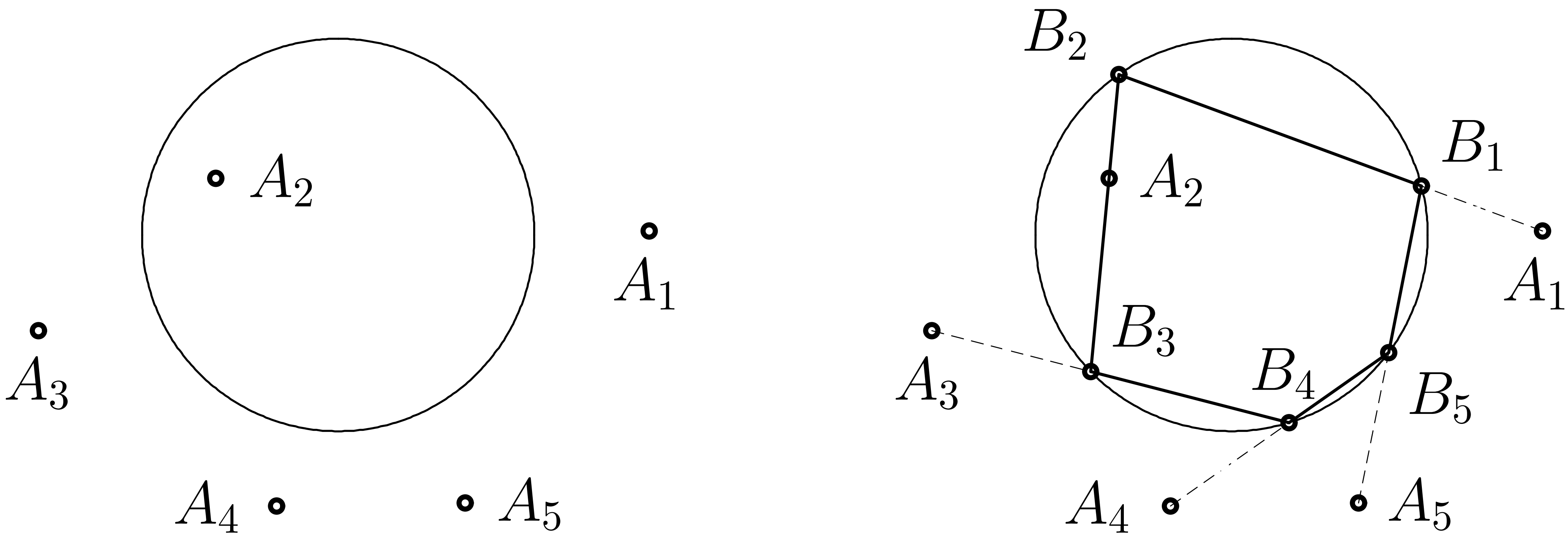
(Descartes, *Lettre à Mme La princesse Élisabeth*, 1643)

. .. affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy que les anciens ayent remarqué, car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

(R. Descartes, *La Geometrie*, 1637, p. 304)

Geometrie	Algebra
	somme $c = a + b$
	différence $c = a - b$
	produit $c = a \cdot b$
	quotient $c = \dfrac{b}{a}$
	racine $h = \sqrt{a \cdot b}$ (Eucl. II.14)

Beispiel : das Problem von Pappus–Cramer–Castillon.



Problem. Gegeben n Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und ein Kreis. Gesucht eingeschriebenes n Polygon $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sodass $(B_i B_{i+1})$ durch A_i geht.

“Dans ma jeunesse ... un vieux Géometre, pour essayer mes forces en ce genre, me proposa le Problème que je vous proposai, tentez de le résoudre et vous verrez, combien il est difficile.”

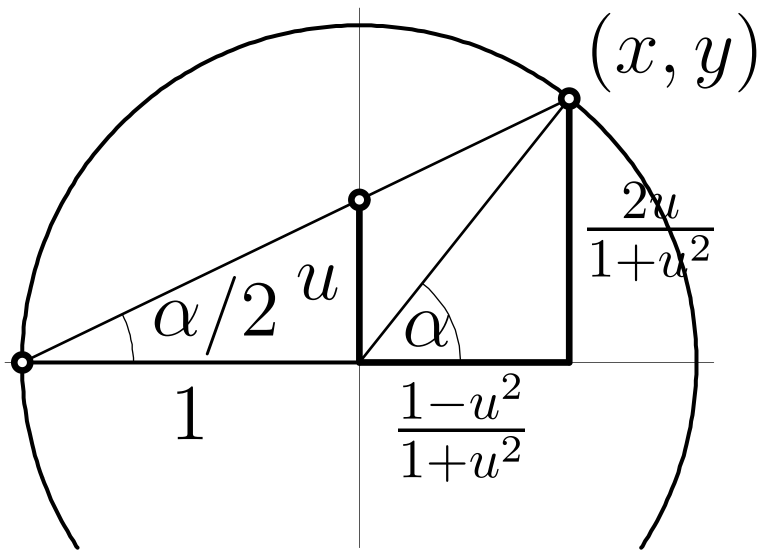
(G. Cramer in 1742 ; quoted in Euler’s *Opera*, vol. 26)

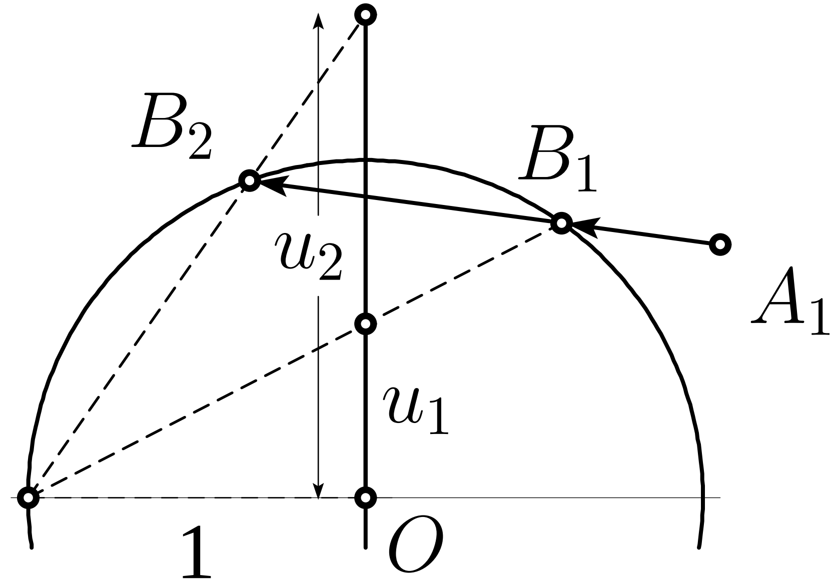
“Ce problème passe pour difficile, et il a fixé l’attention de plusieurs grands géomètres.”

(L. Carnot, *Géométrie de Position*, 1803, p. 383)

“Le lendemain du jour dans lequel je lus à l’Académie ma solution du Problème concernant le cercle et le triangle à inscrire dans ce cercle, en sorte que chaque côté passe par un de trois points donnés, M. de la Grange m’en envoya la solution algébrique suivante.”

(Castillon 1776 ; see *Oeuvres de Lagrange*, vol. 4, p. 335)



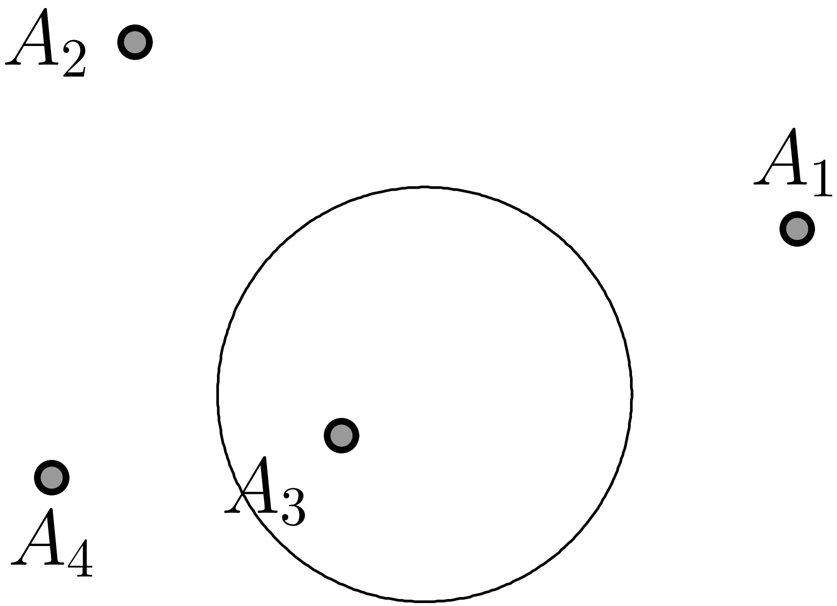


Analyt. Lösung (Lagrange 1776, Carnot 1803) : Führen pythagoreische Koordinaten auf dem Kreis ein. Dann ist die Projektion $B_1 \mapsto B_2$ durch A_1 eine *Möbius Transformation* :

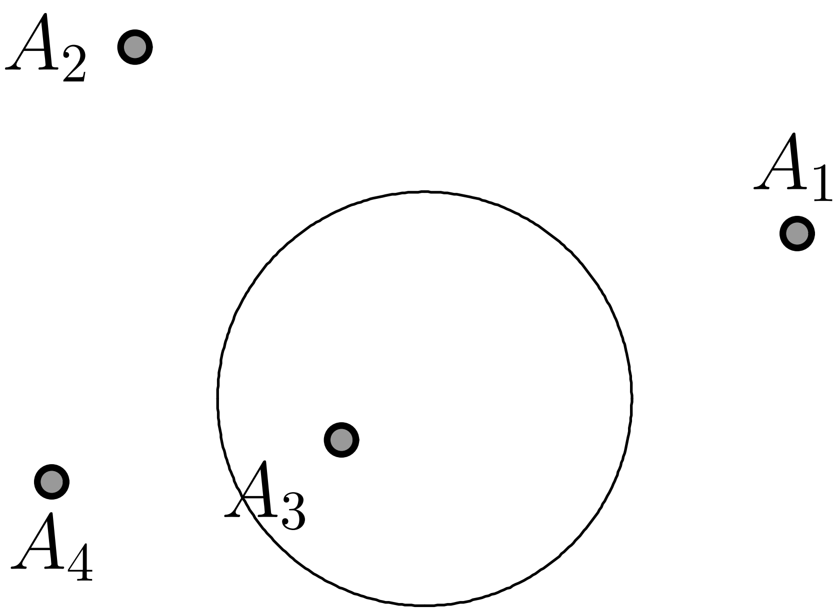
$$u_2 = \frac{-b_1 u_1 + 1 - a_1}{-(a_1+1)u_1 + b_1} \qquad \begin{pmatrix} u_2 \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -b_1 & 1 - a_1 \\ -a_1 - 1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

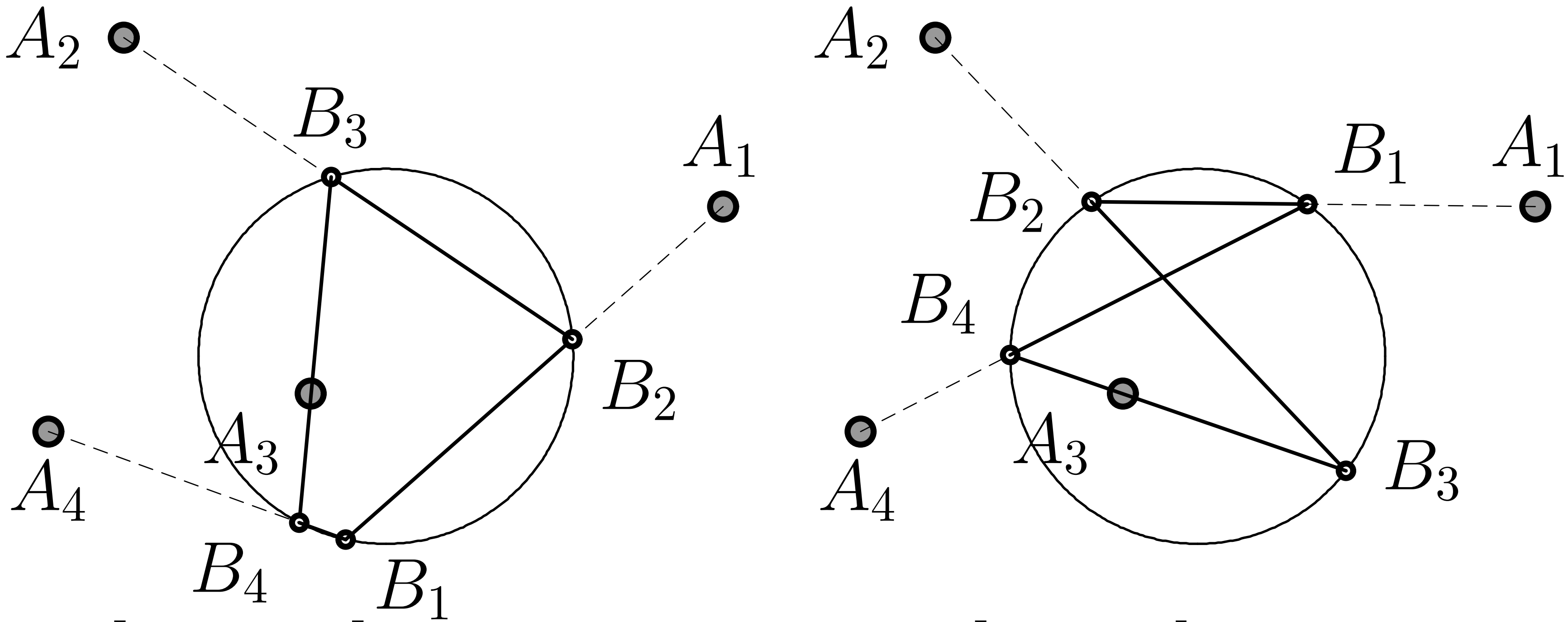
Zusammen $B_1 \mapsto B_2 \mapsto B_3 \mapsto \ldots \quad \Rightarrow \quad$ Matrizenprodukte ;
Bedingung $B_{n+1} = B_1 \quad \Rightarrow \quad$ quadratische Gleichung.

Beispiel :



Beispiel :





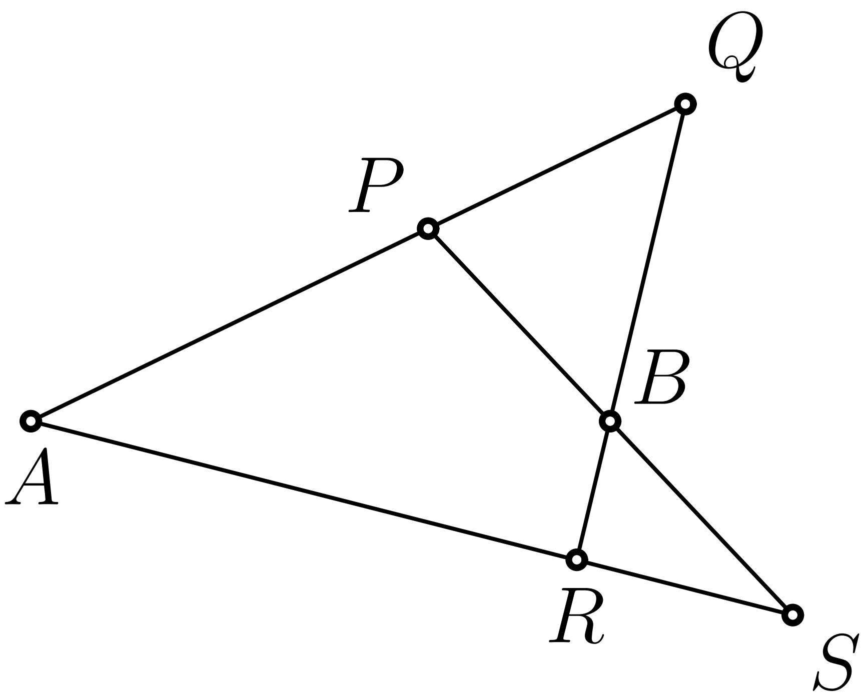
Also in der Regel zwei Lösungen ... oder gar keine.

2. Beispiel : Urquhart's 'Most Elementary Theorem of Euclidean Geometry'.

"Urquhart considered this to be the 'most elementary theorem', since it involves only the concepts of straight line and distance. The proof of this theorem by purely geometrical methods is not elementary."

(D. Elliot ; *J. Australian Math. Soc.* 1968, p. 129)

Theorem.



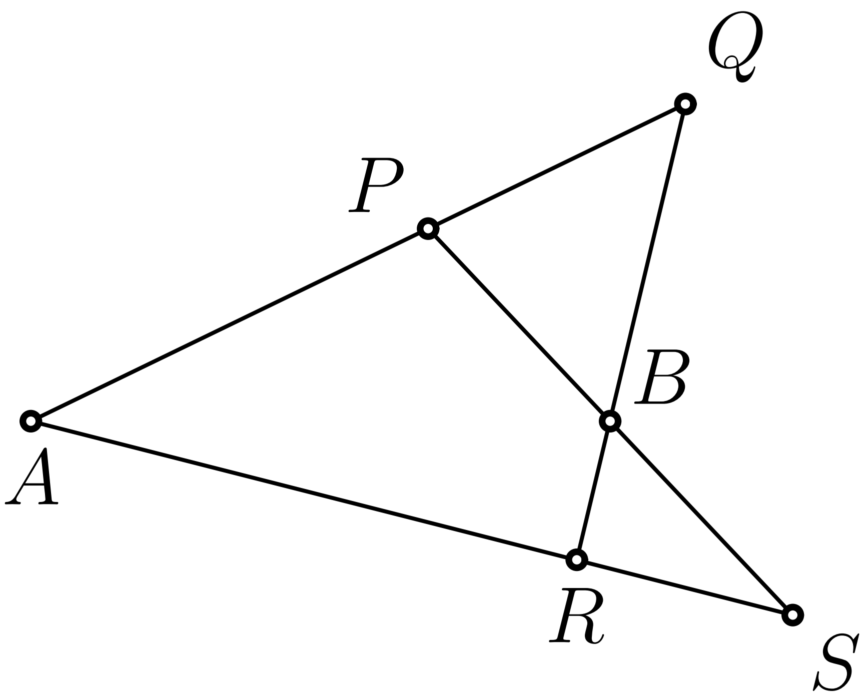
$$AP + PB = BR + RA$$

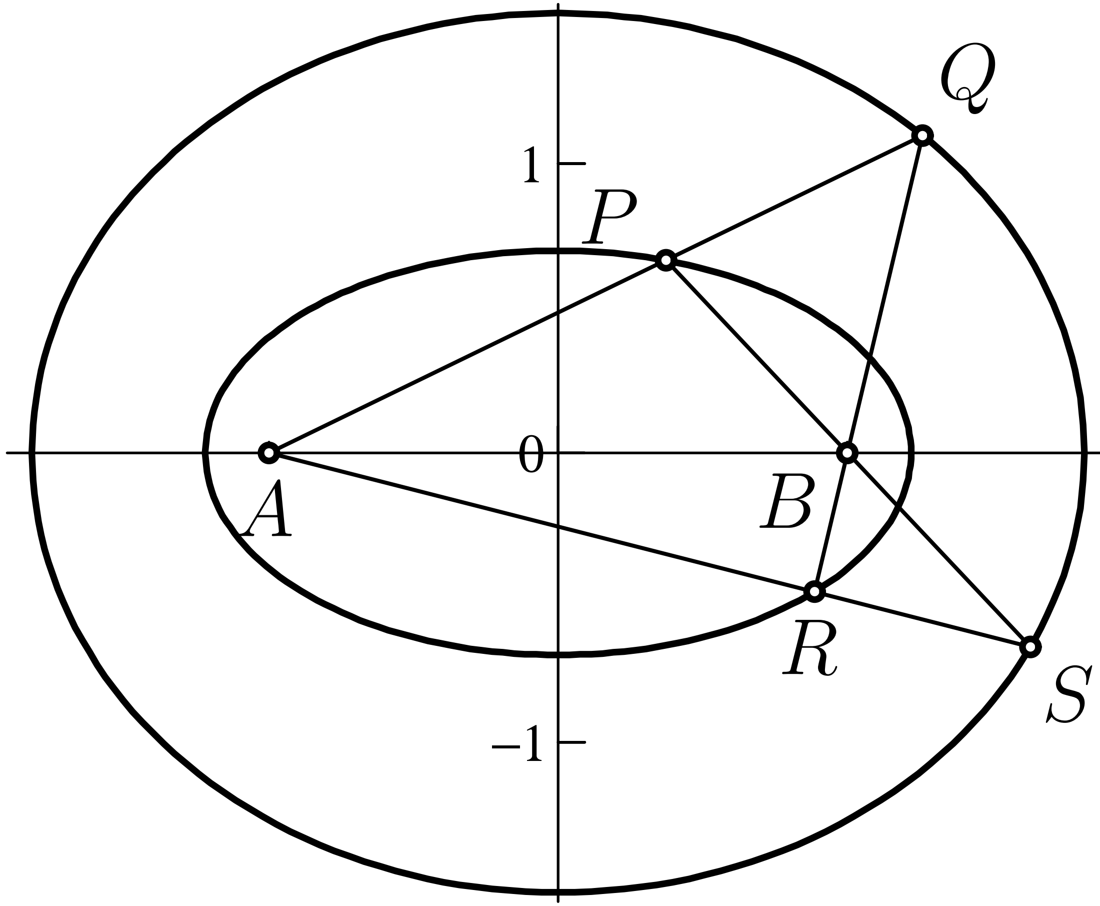
$$\Rightarrow \quad AQ + QB = BS + SA\,.$$

2. Beispiel : Urquhart's 'Most Elementary Theorem of Euclidean Geometry'.

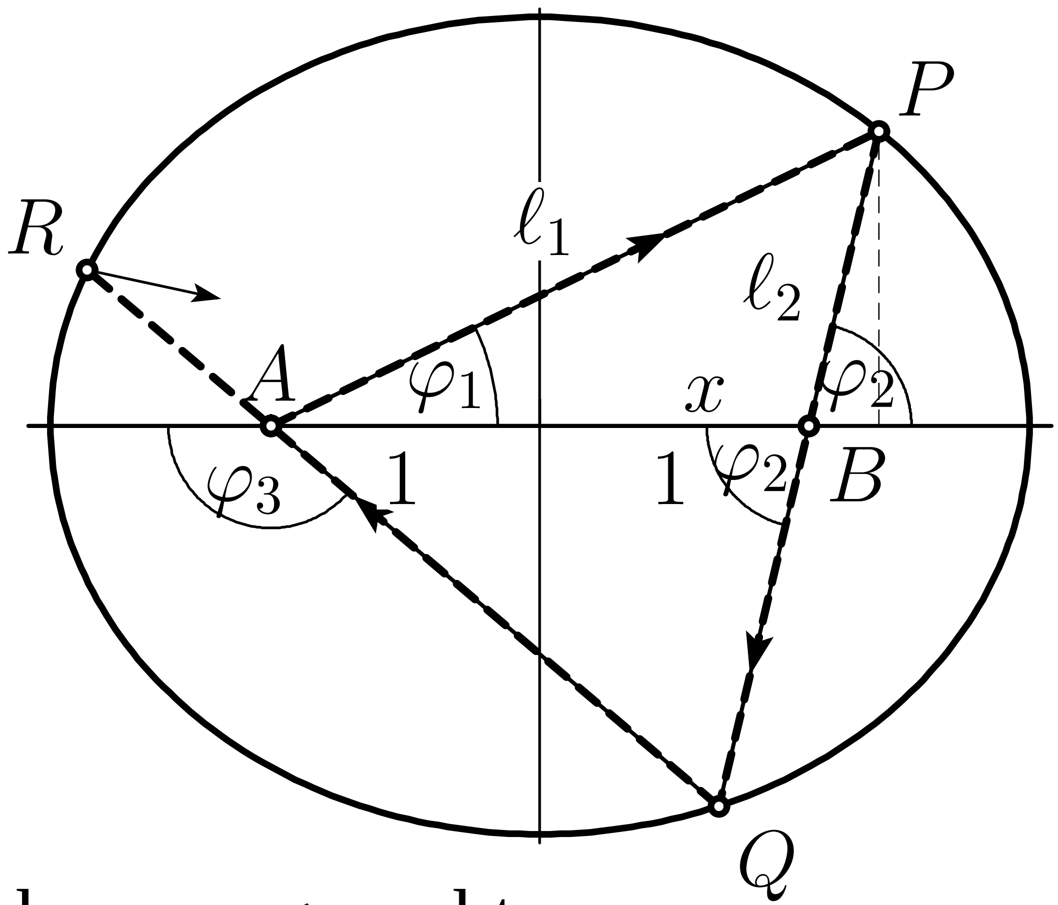
> "Urquhart considered this to be the 'most elementary theorem', since it involves only the concepts of straight line and distance. The proof of this theorem by purely geometrical methods is not elementary."
>
> (D. Elliot ; *J. Australian Math. Soc.* 1968, p. 129)

Theorem.





Zum Beweis : Billiard in einer Ellipse.

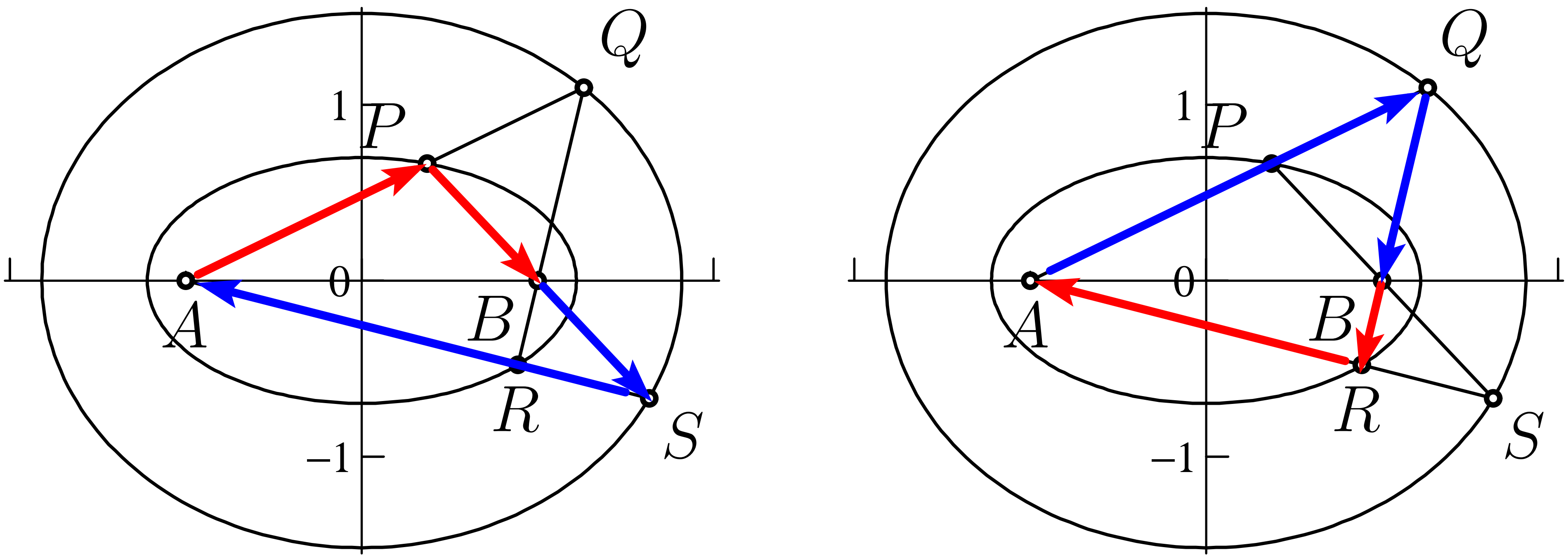


Problem. Gegeben φ_1, gesucht $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Lösung. Mit $c_i = \cos\varphi_i$ gilt

$$c_2 = \frac{c_1 - \theta}{-\theta\ c_1 + 1} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{2e}{e^2+1}$$

Nun der 'most elementary' Beweis des Satzes von Urquhart :



$$\begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -\psi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -\psi & 1 \end{pmatrix}$$

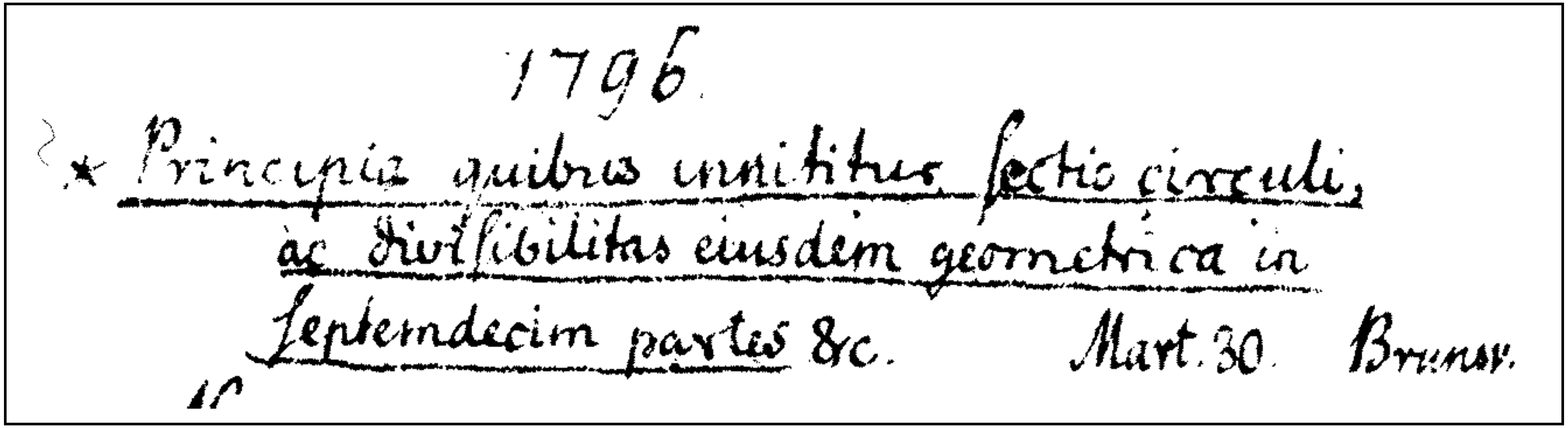
Die Matrizen sind vertauschbar

$\Rightarrow$ die beiden Wege kommen im gleichen Winkel an.

Kap. II.2. Konstr. mit Zirkel und Lineal (Gauss)

Magnopere sane est mirandum, quod, quum iam Euclidis temporibus circuli divisibilitas geometrica in tres et quinque partes nota fuerit, nihil his inventis intervallo 2000 annorum adiectum sit, ...

(C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, Art. 365)

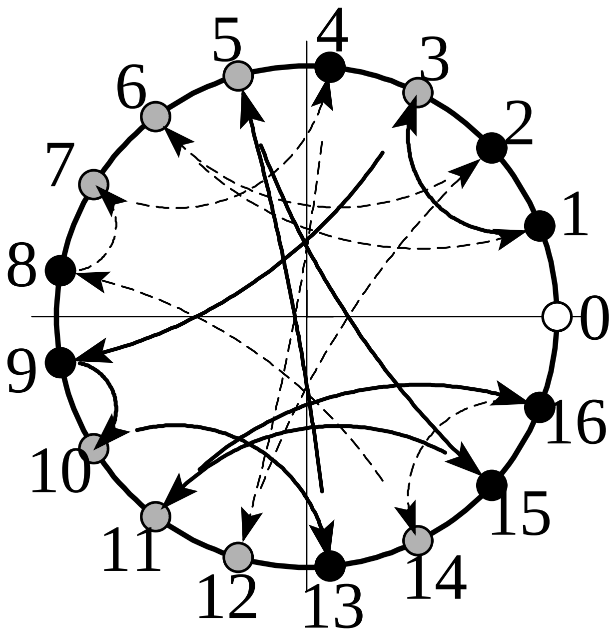


1796.

* Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

Fac-similé der ersten Eintragung des “Notizenjournals” von Gauss, 30. März 1796 in Braunschweig.

Regelmässiges 17-Eck :



Potenzen von 3 modulo 17 :

$$1 \to 3 \to 9 \to 10 \to 13 \to 5 \to 15 \to 11 \to$$
$$16 \to 14 \to 8 \to 7 \to 4 \to 12 \to 2 \to 6 \to 1$$

$$\eta_1 := \epsilon^1 + \epsilon^9 + \epsilon^{13} + \epsilon^{15} + \epsilon^{16} + \epsilon^8 + \epsilon^4 + \epsilon^2$$

$$\eta_2 := \epsilon^3 + \epsilon^{10} + \epsilon^5 + \epsilon^{11} + \epsilon^{14} + \epsilon^7 + \epsilon^{12} + \epsilon^6$$

$$\Rightarrow \eta_1 + \eta_2 = -1, \quad \eta_1 \cdot \eta_2 = -4$$

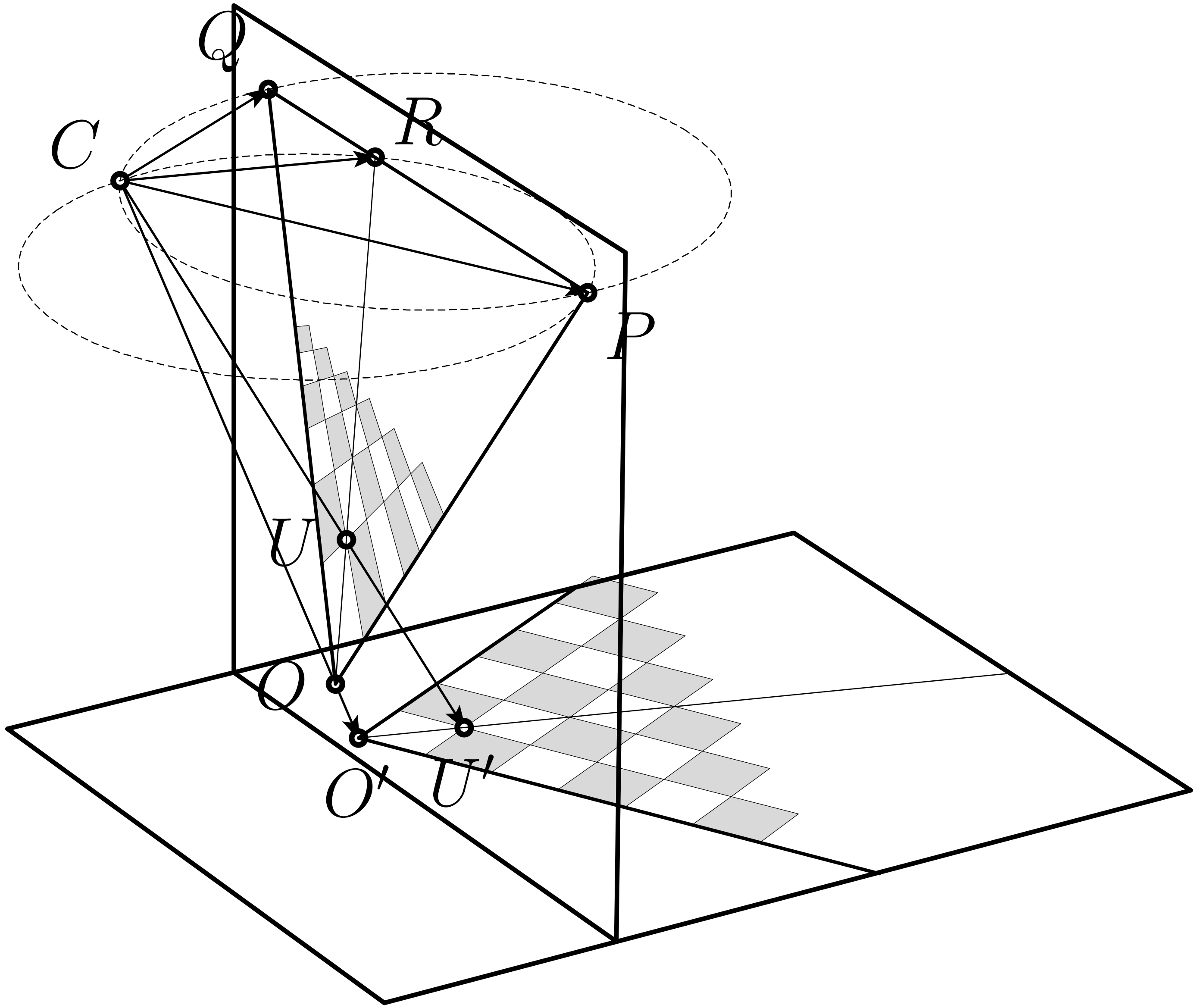
$$\Rightarrow \quad \eta^2 + \eta - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

3 mal wiederholen, fertig.

Unmöglichkeit (Heptagon, Winkeldreitlg, Würfelverdopp.) :
Gauss behauptet es, ohne Beweis.

Beweis : Wantzel 1837, Galois 1832, F. Klein 1908.

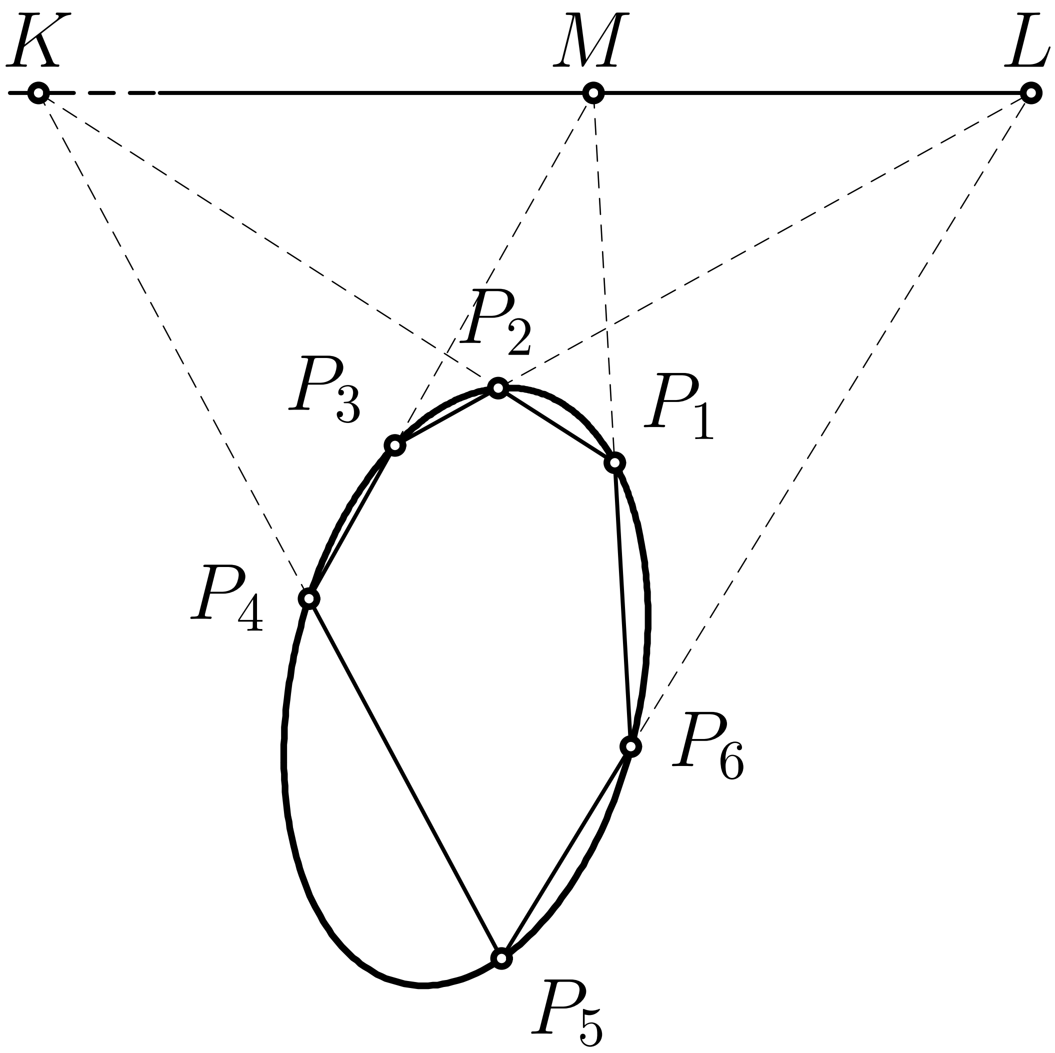
Kap. III. Projektive Geometrie (Poncelet 1822)

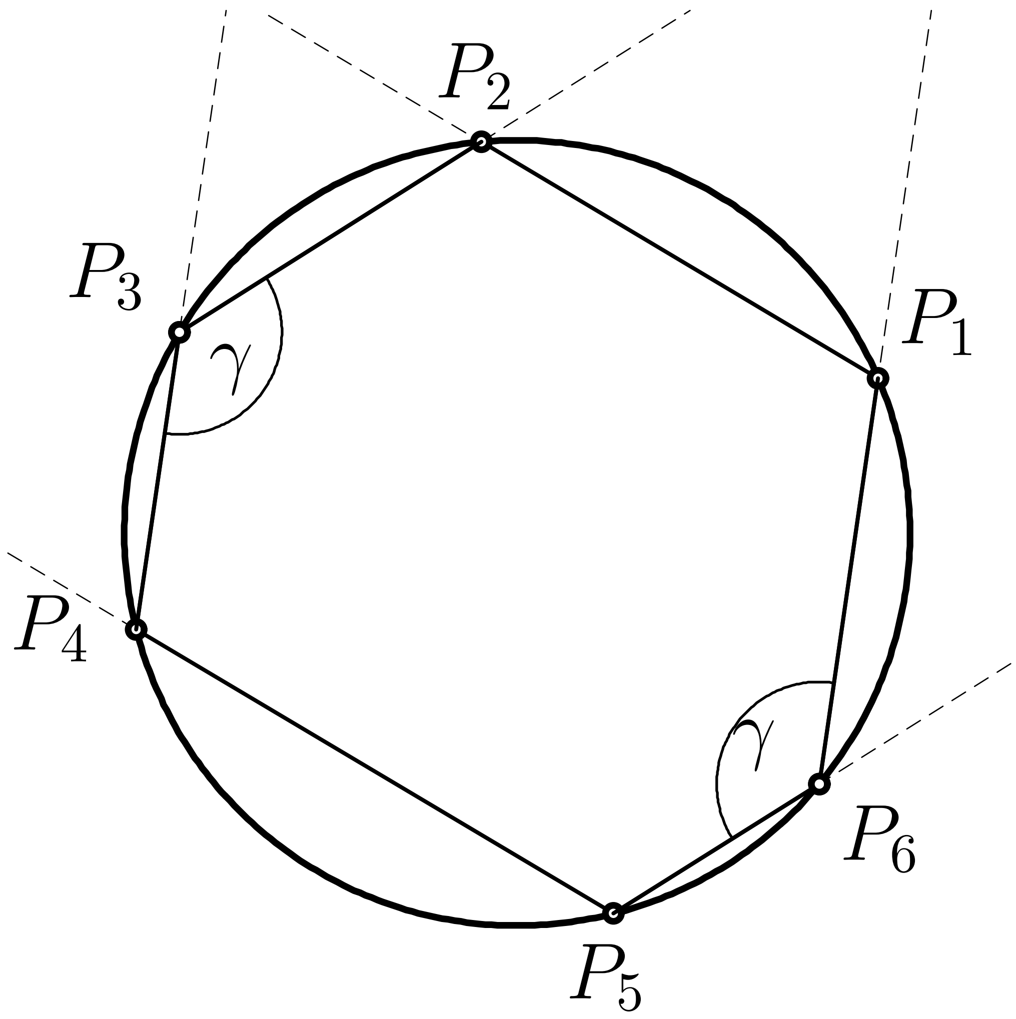


Idee : durch Zentralprojektion

komplizIertes Theorem in triviales Theorem verwandeln.

Beispiel :





Pascal (1640) $\Leftrightarrow$ Euklid III.20.

"hexagramma mysticum"

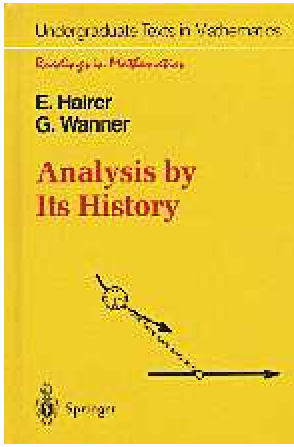
Bilanz ? “Bitte die 5 interessantesten Abschnitte ankreuzen”.

Resultat der Studentenbefragung :

	I	**Géométrie classique**
15	I.1	Thalès et Pythagore
16	I.2	Les Éléments d’Euclide
12	I.3	Période alexandrine — les coniques
11	I.4	Trigonométrie
	II	**Géométrie analytique**
14	II.1	La Géométrie de Descartes
7	II.2	Constructibilium omnium, et inconstructib
5	II.3	Géométrie de l’espace et calcul vectoriel
2	II.4	Matrices et applications linéaires
	III	**Géométrie non euclidienne**
10	III.1	Géométrie projective

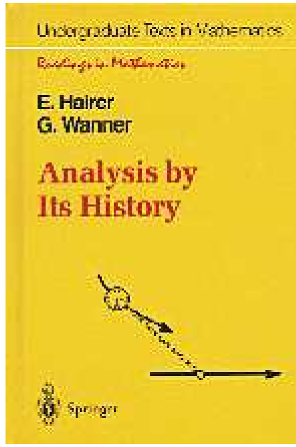
Zweiter Teil :

Analysis by Its History



Zweiter Teil :

Analysis by Its History

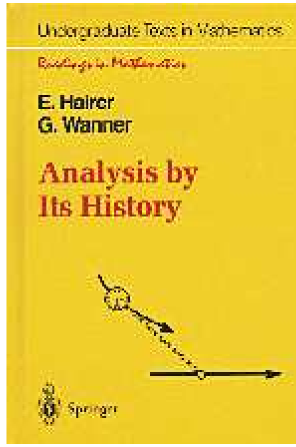


Traditionelle Vorlesung :

sets, mappings $\Rightarrow$ limits, continuous functions $\Rightarrow$ derivatives $\Rightarrow$ integration.

Zweiter Teil :

Analysis by Its History



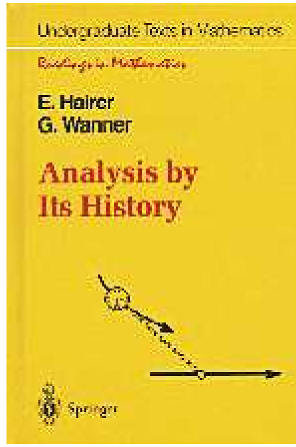
Traditionelle Vorlesung :

sets, mappings $\Rightarrow$ limits, continuous functions $\Rightarrow$ derivatives $\Rightarrow$ integration.

Historische Entwicklung :

Cantor 1875, Dedekind $\Leftarrow$ Cauchy 1821, Weierstrass $\Leftarrow$ Newton 1665, Leibniz 1675 $\Leftarrow$ Archimede, Kepler 161, Fermat 163

Zweiter Teil :



Analysis by Its History

Traditionelle Vorlesung :

sets, mappings	$\Rightarrow$	limits, continuous functions	$\Rightarrow$	derivatives	$\Rightarrow$	integration.

Historische Entwicklung :

Cantor 1875 Dedekind	$\Leftarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Leftarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Leftarrow$	Archimede Kepler 161 Fermat 163

Inhalt :

Chapter I. Introductio in Analysin Infinitorum
Chapter II. Differential and Integral Calculus
Chapter III. Foundations of Classical Analysis
Chapter IV. Calculus in Several Variables

1. Introductio in Analysin Infinitorum

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}}
$$

1. Introductio in Analysin Infinitorum

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$y = y_0 + \tfrac{x}{1}\Delta y_0 + \tfrac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 \ldots$$

Interpolation pol.

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}x + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 \ldots$$

Bin. Theorem

1. Introductio in Analysin Infinitorum

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}}
$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$y = y_0 + \tfrac{x}{1}\Delta y_0 + \tfrac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 \ldots$$

Interpolation pol.

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}x + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 .$$

Bin. Theorem

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Wallis Prod.

Taylor 1715

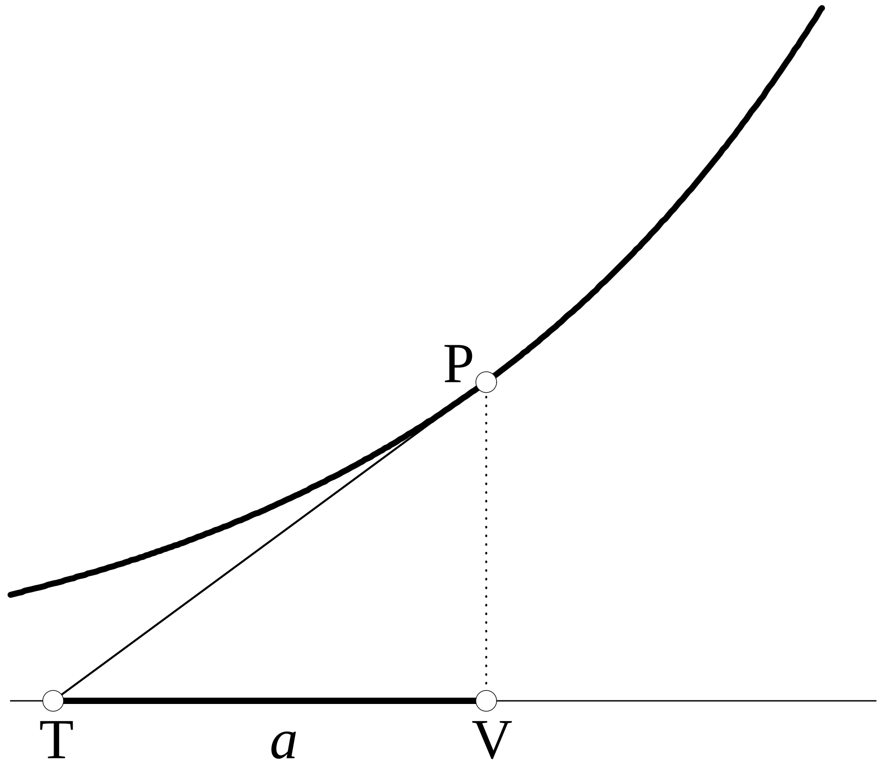
Newton, Geom. Reihe, Wurzeln

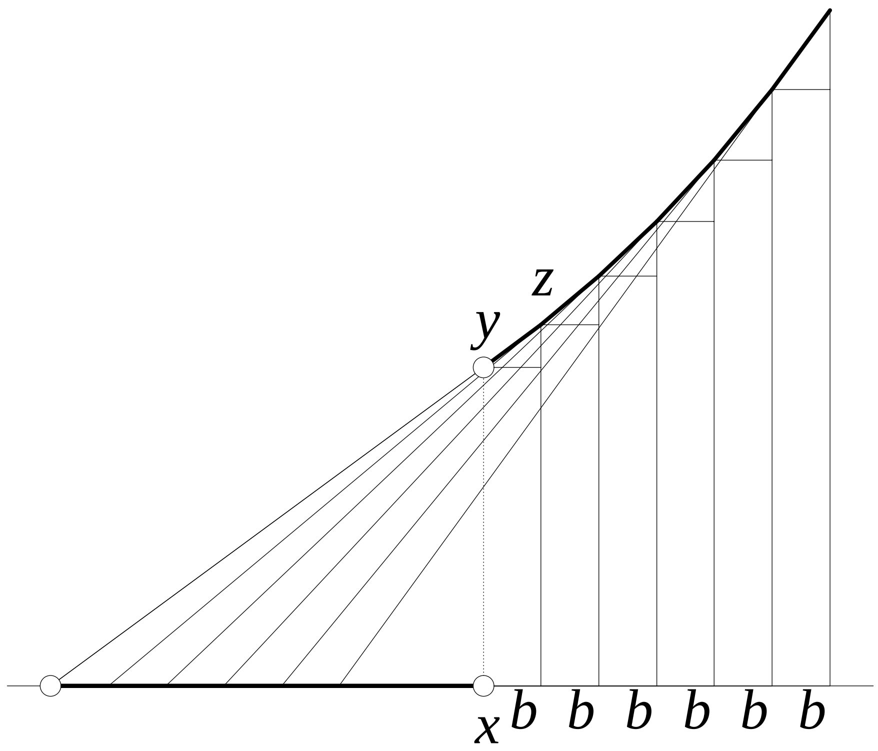
Logarithmen, Flächen, Reihen exp, si

Reihen für log, arctan

Beispiel. Exponentielles Wachstum

(Debeaune 1638, Leibniz 1684, Euler 1748)





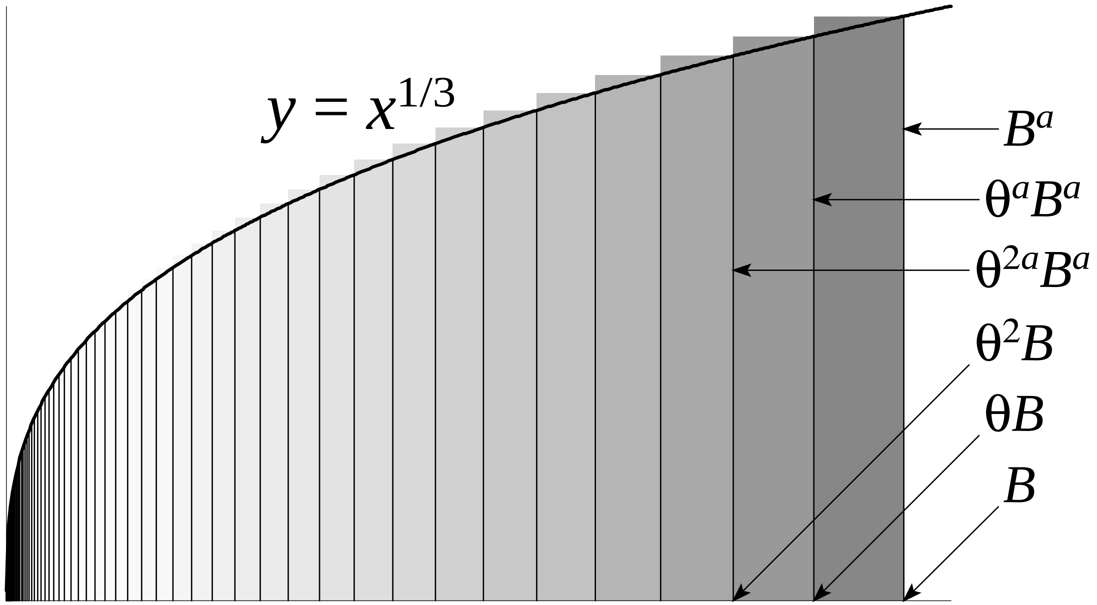
$$\left(1+\tfrac{1}{N}\right)^N = 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{N})}{1\cdot 2}+\frac{1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

$$= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots \quad = e \quad (N\to\infty)$$

ähnlich $\boxed{\left(1+\tfrac{x}{N}\right)^N = e^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots\ .}$

2. Beispiel. $\boxed{\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \ldots}$ $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \ldots}$

Berechnung der Fläche von $y = x^a$ (Fermat 1638):



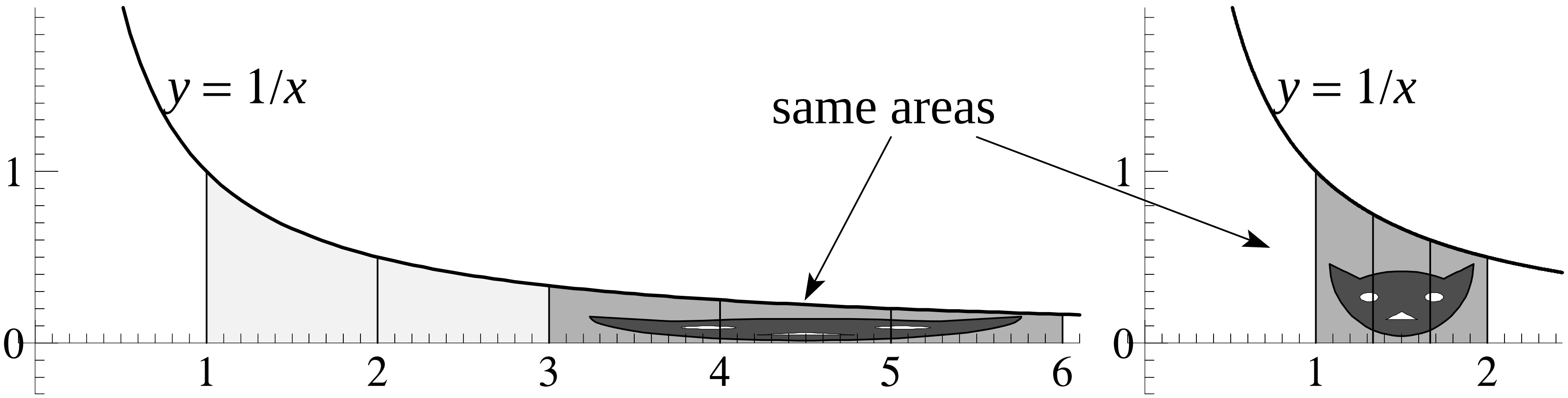
$$F = \quad \text{geom. Reihe} \quad = \frac{B^{a+1}}{a+1} \quad \text{if} \quad a > -1.$$

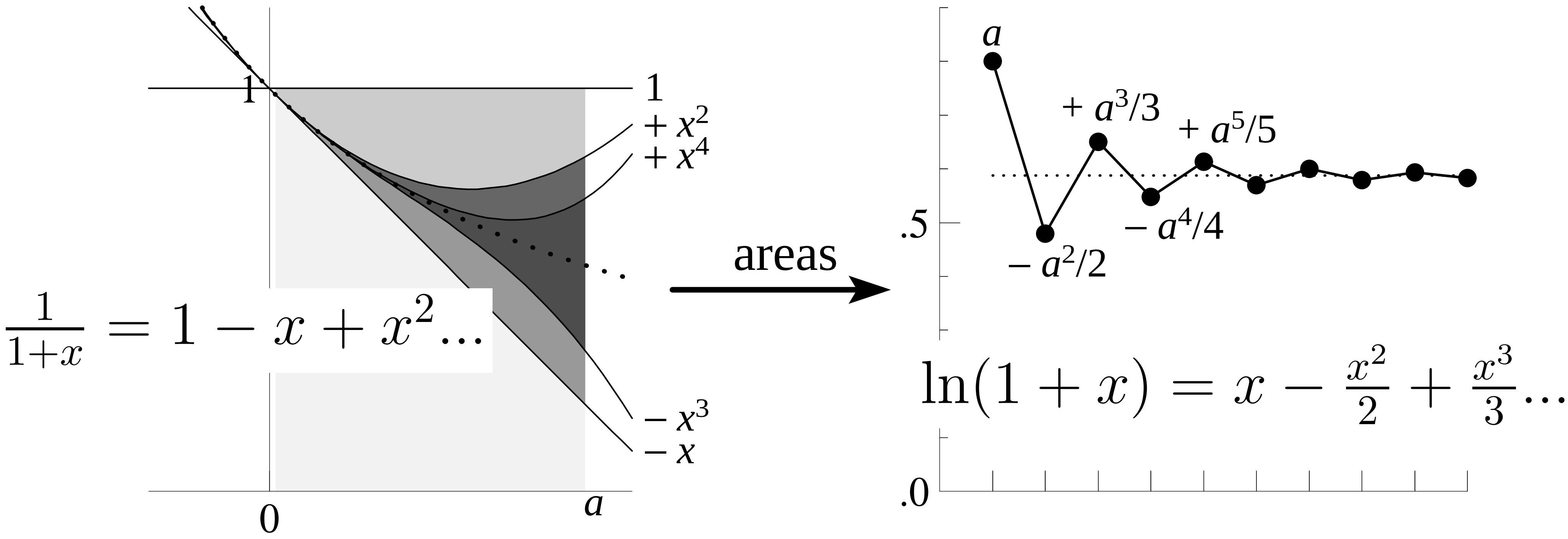
funtioniert nicht für $a = -1$ ......

Was erst verdriesslich schien,
war schliesslich gut für ihn. (W. Busch 1895)

3. Beispiel.

Logarithmen (Gregory of St. Vincent 1647, Mercator 1668) :



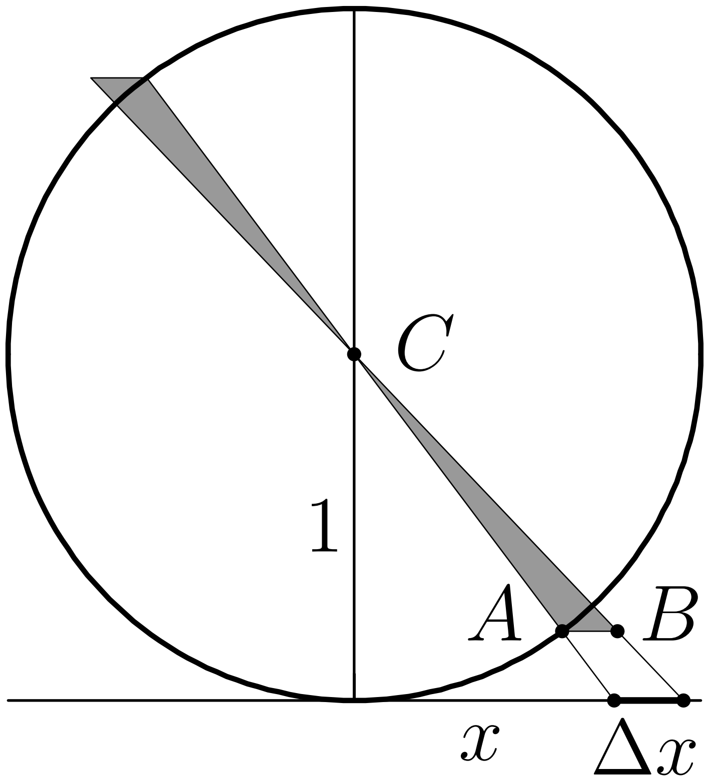


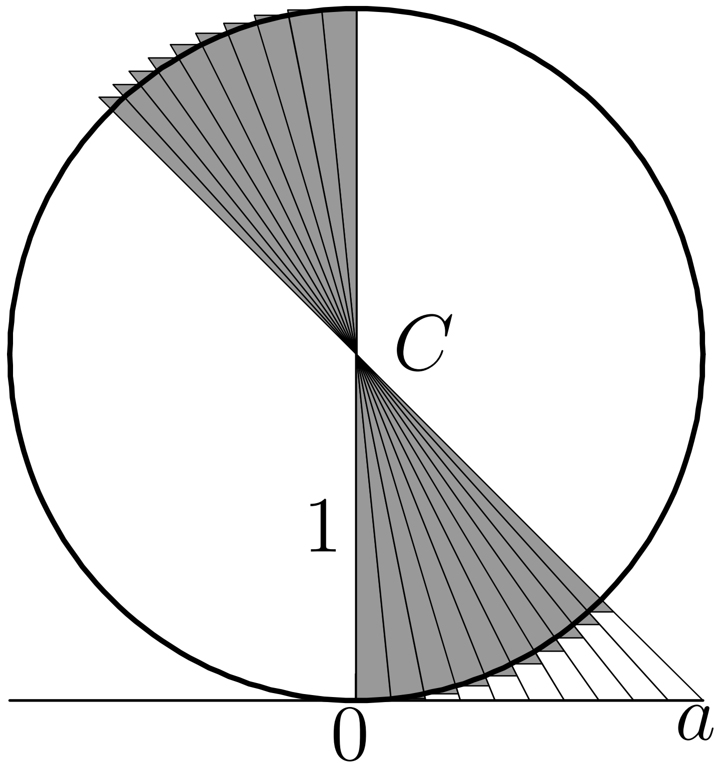
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots$$

4. Beispiel.

Arcustangens (Gregory1669, Leibniz 1675) :





Pythagoras : doppelte Fläche $ABC =$

$$F = \frac{\Delta x}{1+x^2} = (1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots) \cdot \Delta x.$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\arctan a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} \ldots}$$

2. Differential and Integral Calculus

> Et j'ose dire que c'est cecy le problésme le plus utile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie . . .
>
> (Descartes 1637, p. 342)

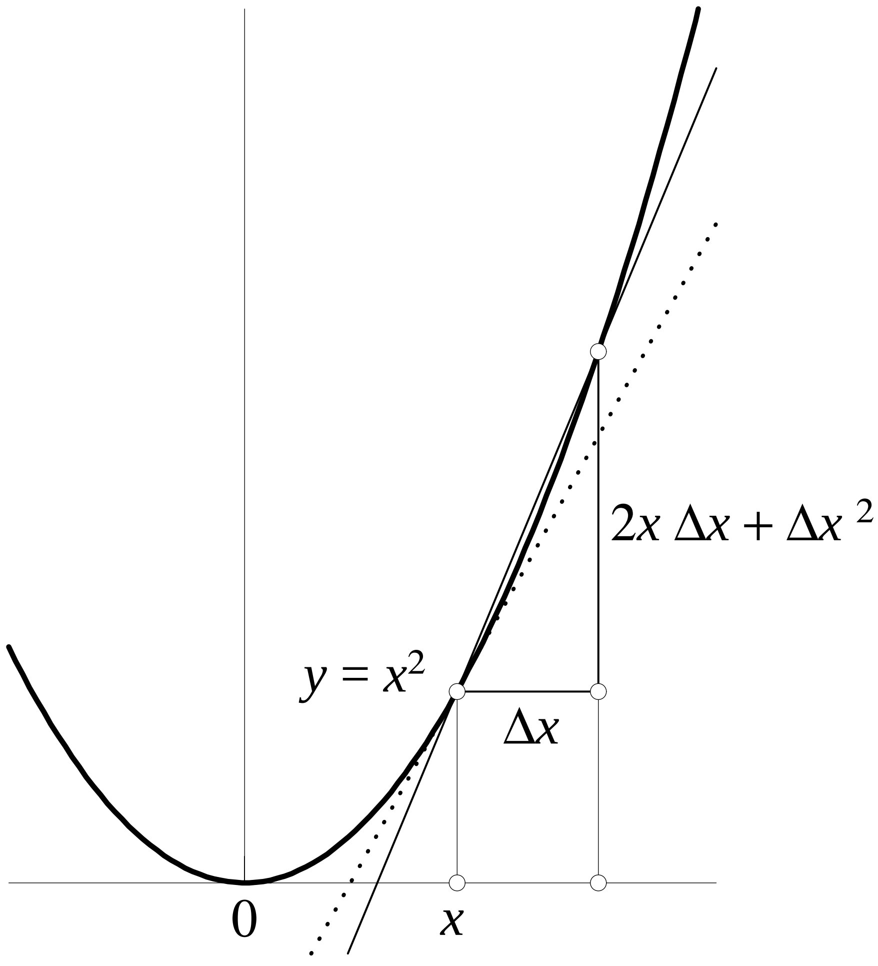
Problem. Let $y = f(x)$ be a given curve. At each point x we wish to know the *slope*, the *tangent* or the *normal*.

Motivations.
– Calculation of the angles under which two curves intersect (Descartes);
– construction of telescopes (Galilei), of clocks (Huygens 1673);
– search for the maxima, minima of a function (Fermat 1638);
– velocity and acceleration of a movement (Galilei 1638, Newton 1686);
– astronomy, verification of the Law of Gravitation (Kepler, Newton).

Beispiel : Parabel $y = x^2$ **:**

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

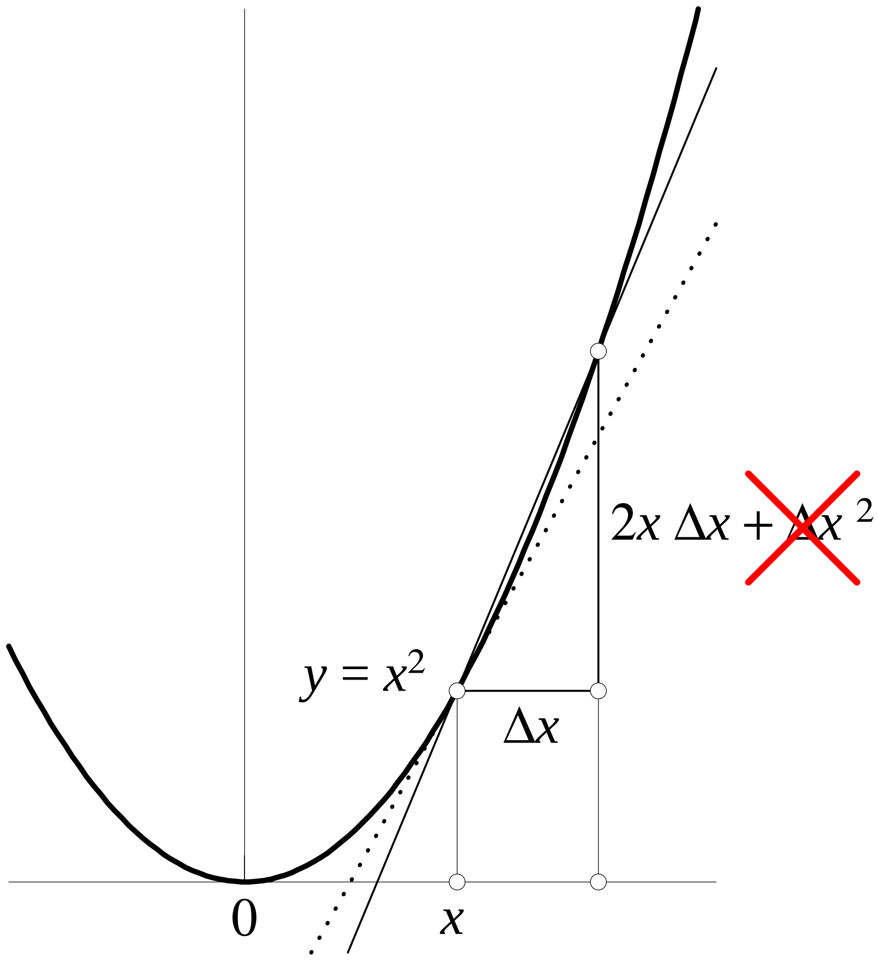
$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$



Beispiel : Parabel $y = x^2$:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

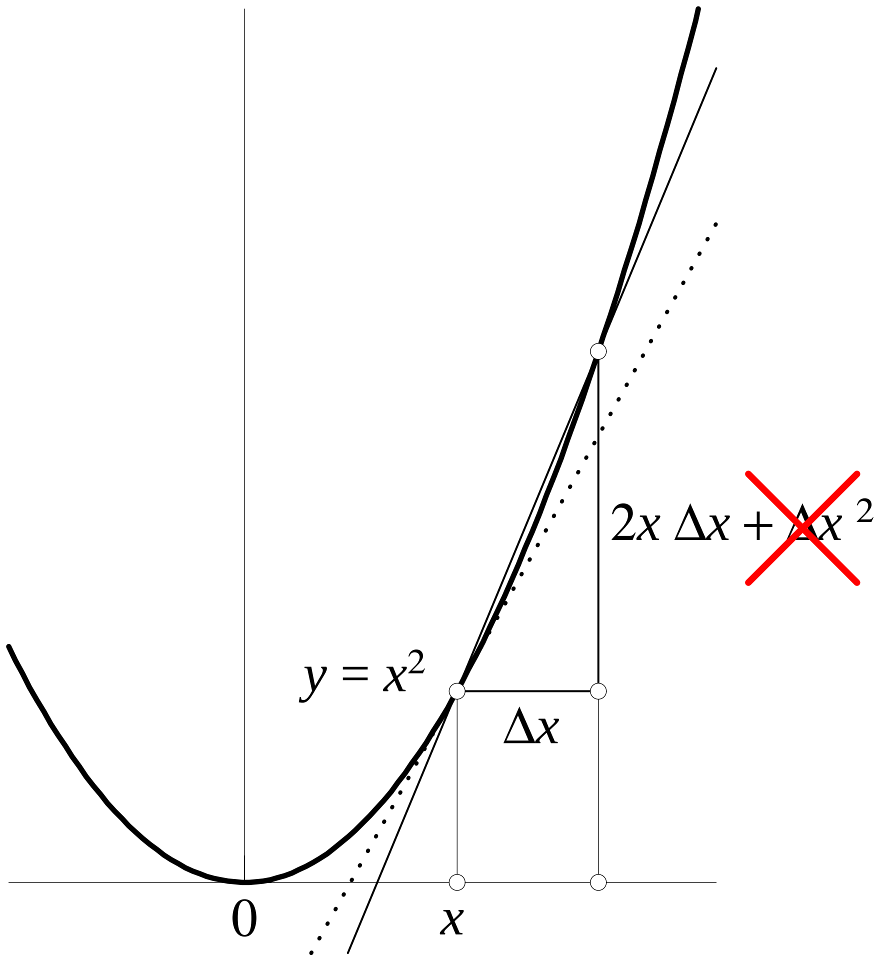
$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$



Beispiel : Parabel $y = x^2$ **:**

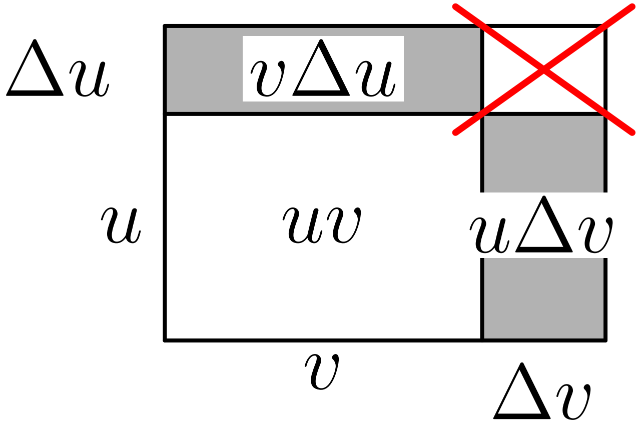
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$



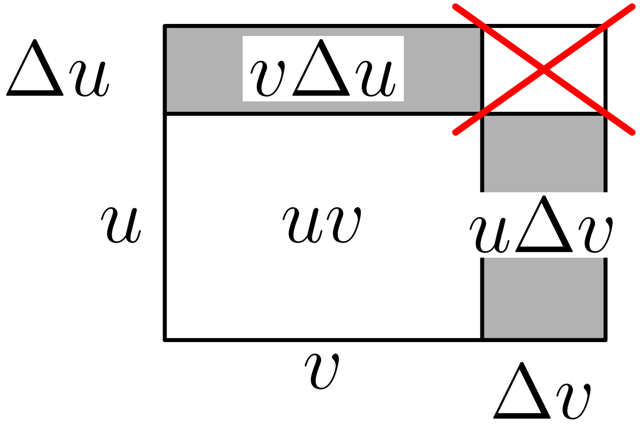
$$dy = 2x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

2. Beispiel : Produktregel.



$$\Rightarrow \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

2. Beispiel : Produktregel.

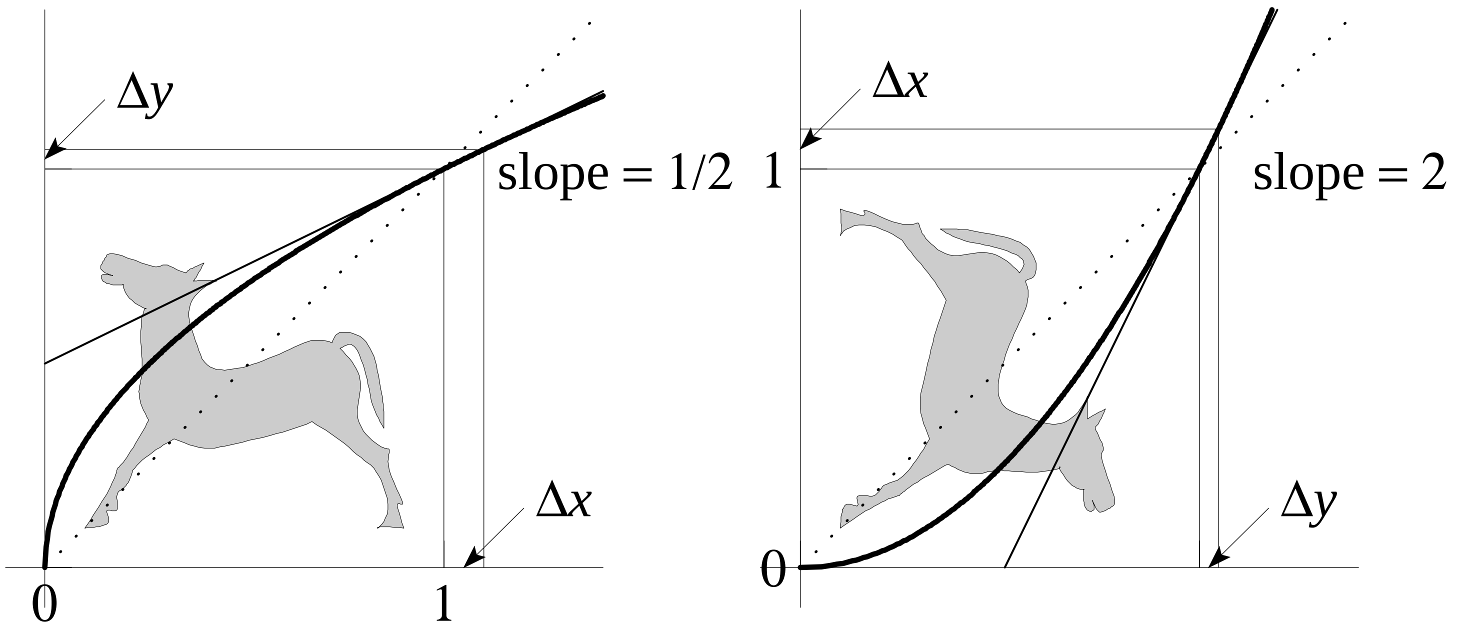


$$\Rightarrow \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

3. Beispiel : Quotientenregel.

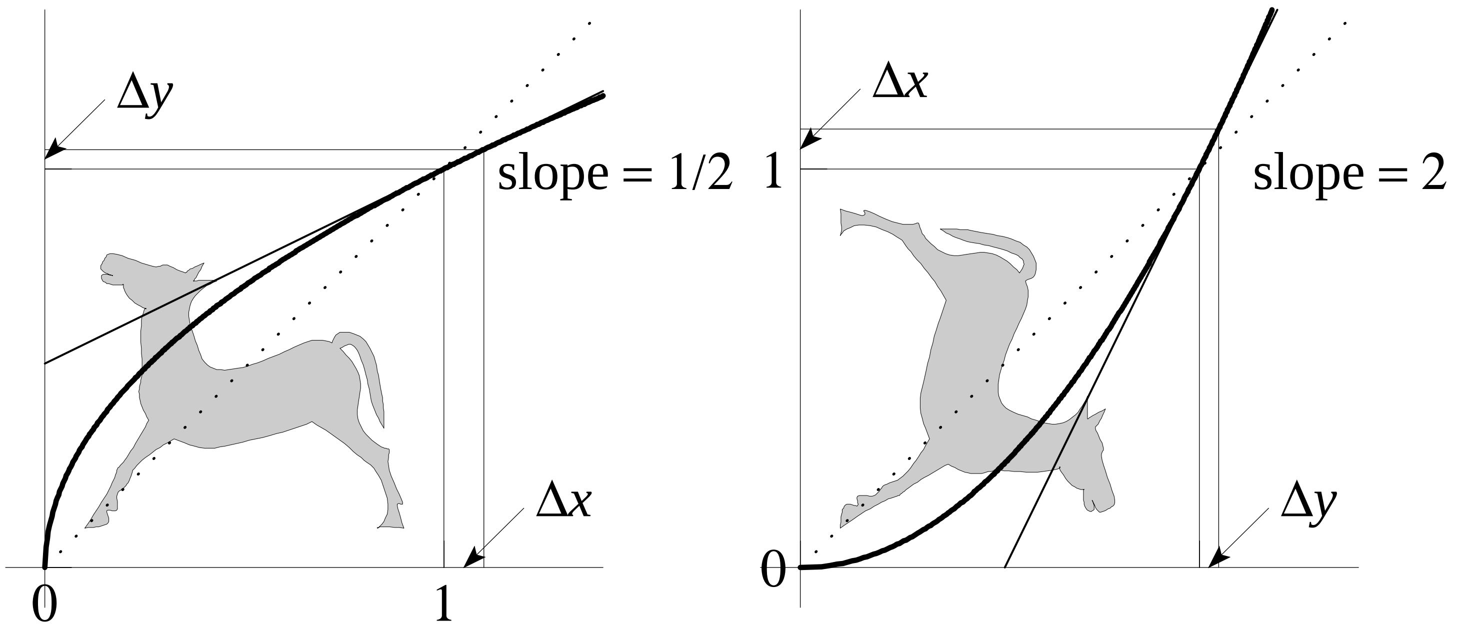
$$\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + \cancel{v\Delta v}} \qquad \Rightarrow \qquad d(\frac{u}{v}) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

4. Beispiel : Umkehrfunktion.



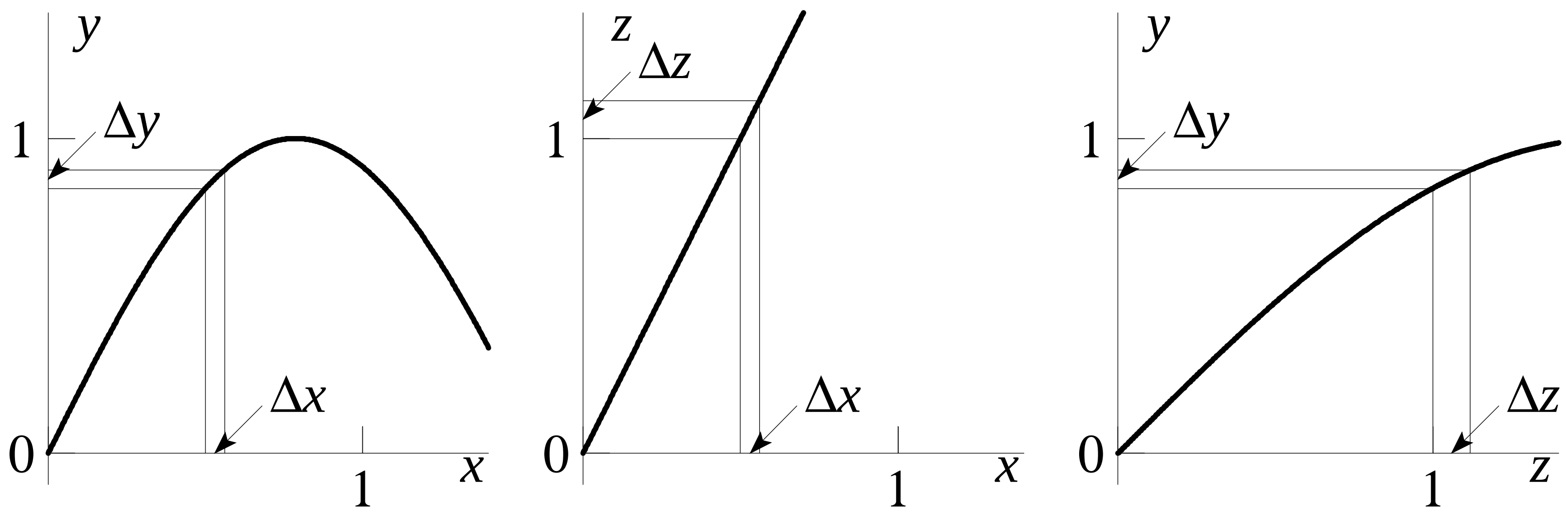
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

4. Beispiel : Umkehrfunktion.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

5. Beispiel : Kettenregel.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

6. Beispiel : Exponentialfunktion.

$$y+\Delta y = e^{x+\Delta x} = e^{x} \cdot e^{\Delta x} \;\Rightarrow\; \Delta y = e^{x}(e^{\Delta x}-1) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = e^{x}.$$

Genauso : sin, cos.

6. Beispiel : Exponentialfunktion.

$$y+\Delta y = e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x} \;\Rightarrow\; \Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Genauso : sin, cos.

7. Beispiel : Logarithmus.

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Genauso : arctan, arcsin, arccos.

6. Beispiel : Exponentialfunktion.

$$y+\Delta y = e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x} \;\Rightarrow\; \Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = e^x .$$

Genauso : sin, cos.

7. Beispiel : Logarithmus.

$$y = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

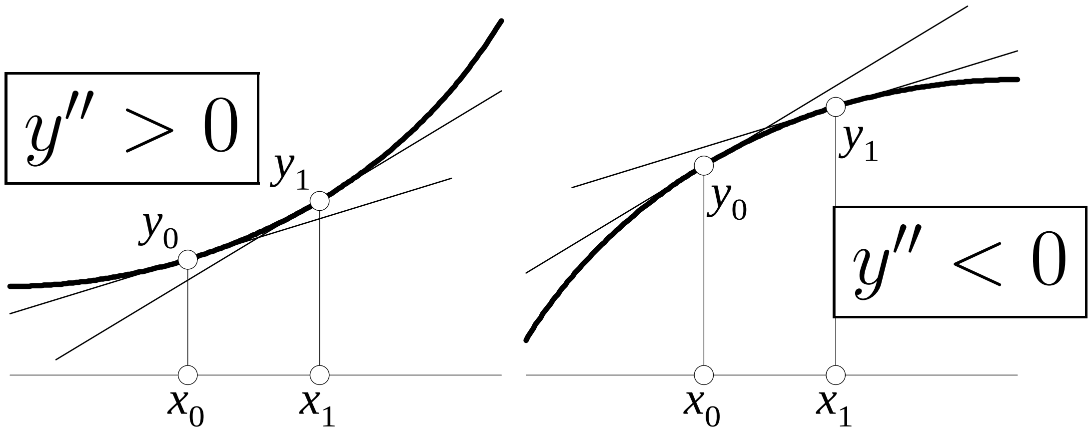
Genauso : arctan, arcsin, arccos.

Letztes Beispiel.

$$y = x^a \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = a \cdot x^{a-1} \qquad\qquad (x^a = e^{a \cdot \ln x}) \; .$$

Höhere Ableitungen

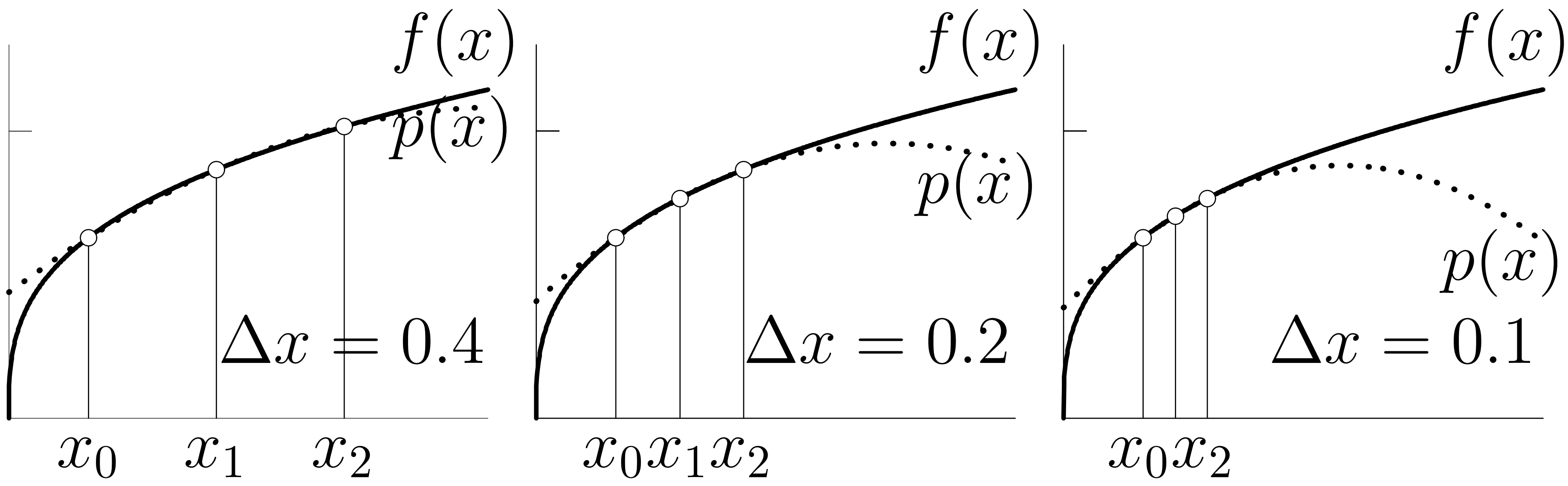
> But the velocities of the velocities, the second, third, fourth, and fifth velocities, &c., exceed, if I mistake not, all human understanding. The further the mind analyseth and pursueth these fugitive ideas the more it is lost and bewildered; . . .
>
> (Bishop Berkeley 1734, *The Analyst*)



Taylor (1715)

Hierin liegt nun tatsächlich ein *Grenzübergang von unerhörter Kühnheit.*

(F. Klein 1908, Zweite Aufl., p. 509)



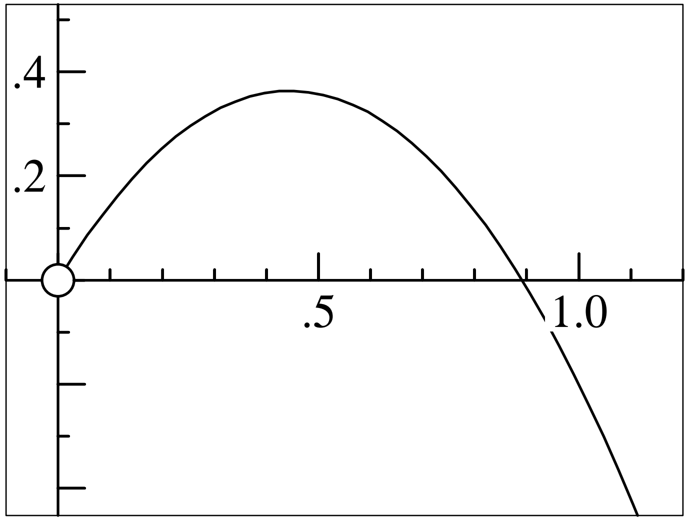
Polyn.: $p(x) = y_0 + \dfrac{x - x_0}{1} \dfrac{\Delta y_0}{\Delta x} + \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{1 \cdot 2} \dfrac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2},$

Reihe : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dfrac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$

Einhüllende (Wurfparabel)

Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux . . .

(Joh. Bernoulli 1692)

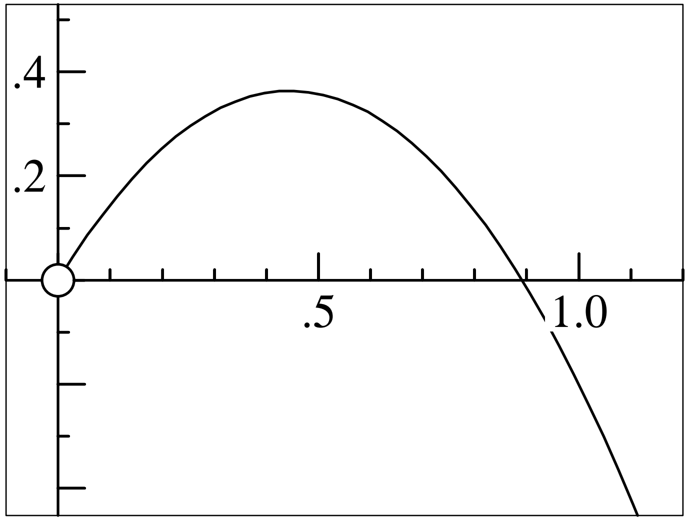


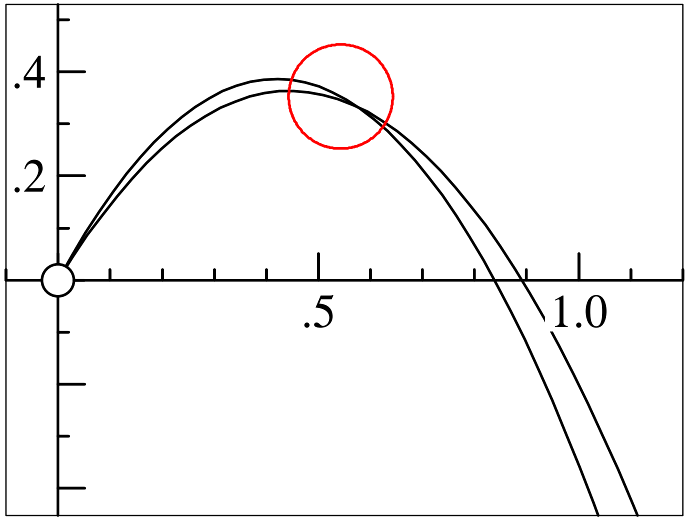
$$y = ax - \frac{x^2(1 + a^2)}{2}$$

Einhüllende (Wurfparabel)

Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux . . .

(Joh. Bernoulli 1692)





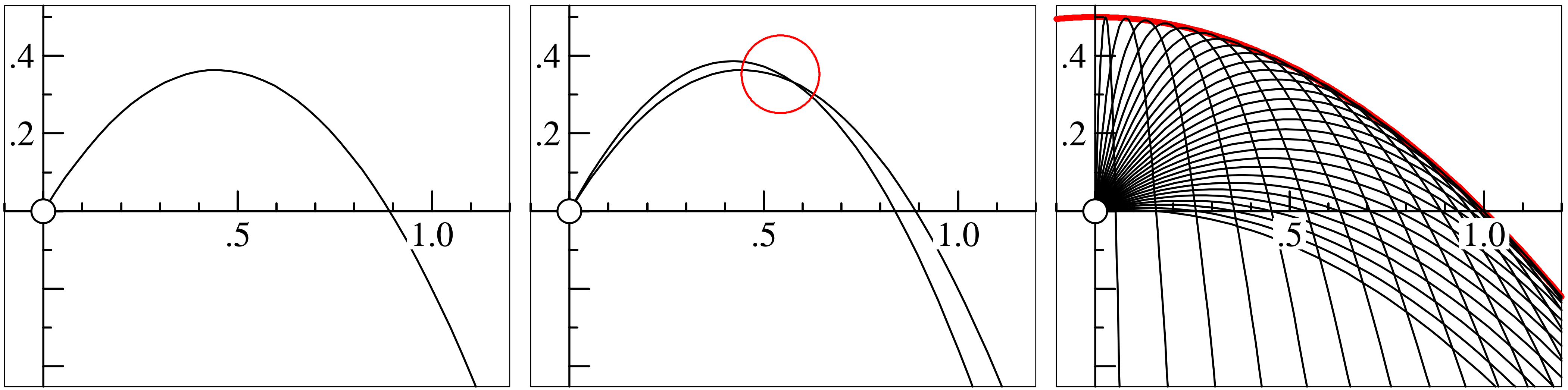
$$y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2}$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial a} = 0}$$

Einhüllende (Wurfparabel)

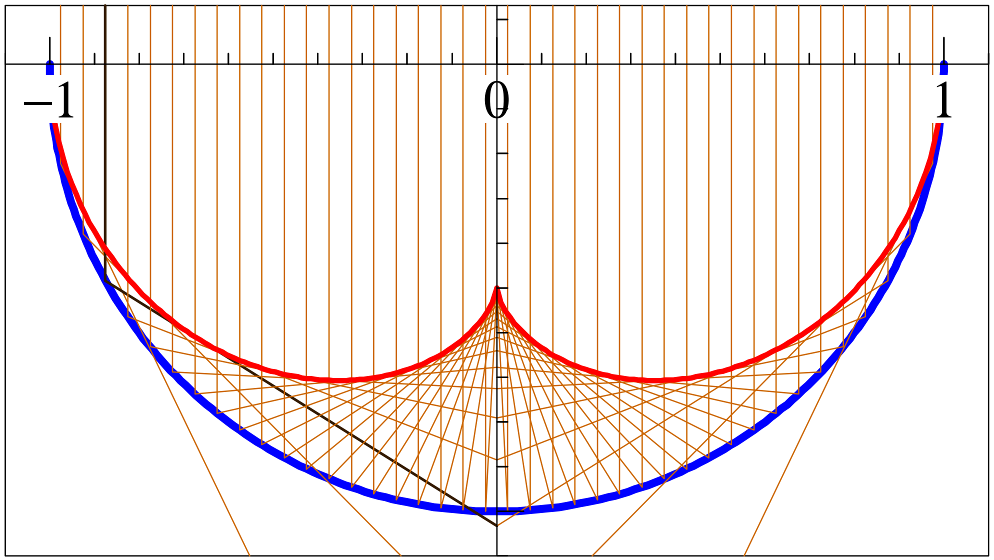
Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux . . .

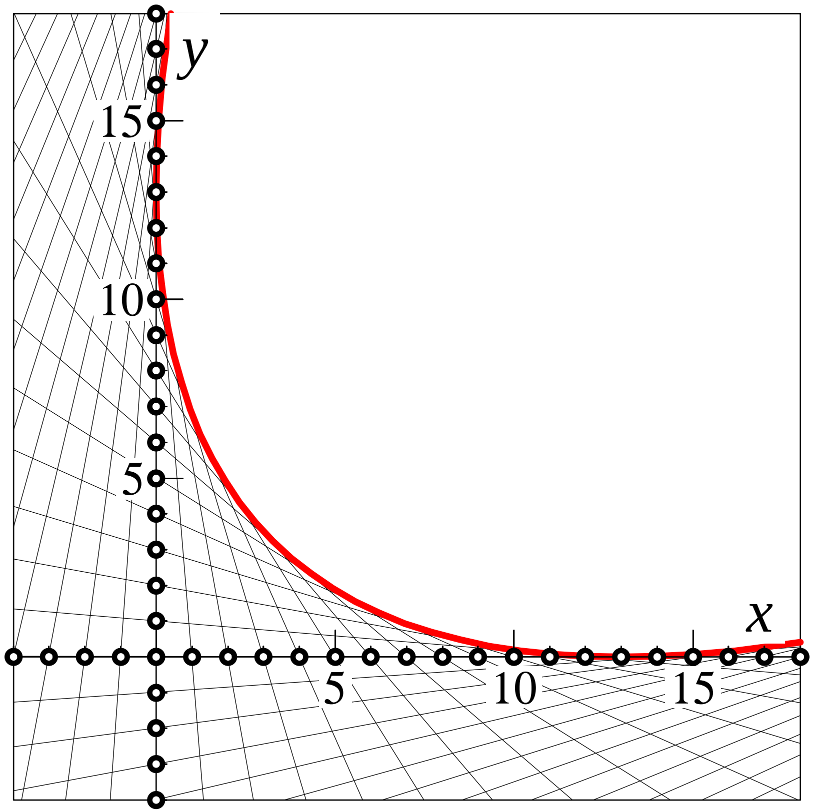
(Joh. Bernoulli 1692)



$$y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2} \qquad \boxed{\frac{\partial y}{\partial a} = 0} \qquad y = (1-x^2)/2$$

Weitere Beispiele : (Jac. und Joh. Bernoulli 1692)

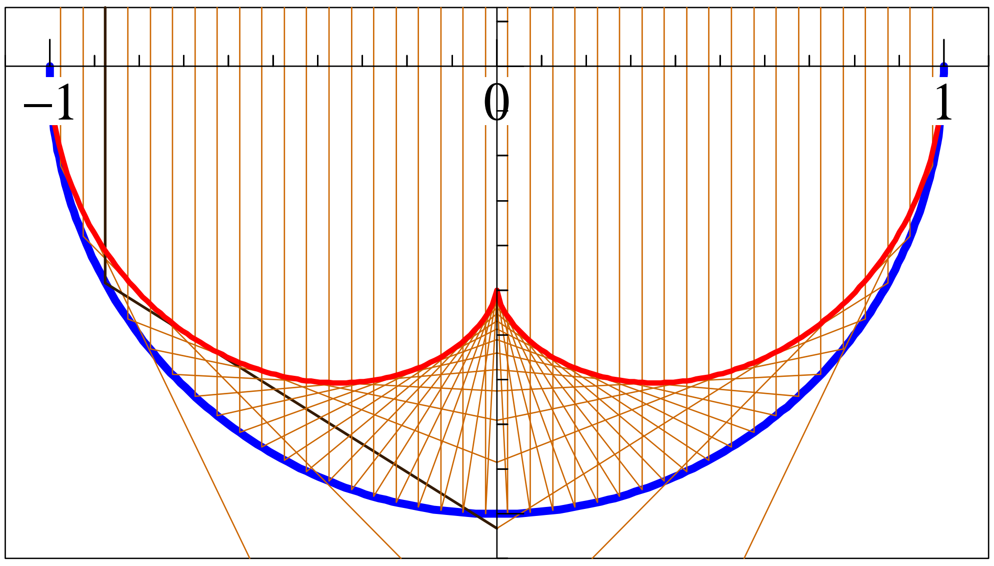


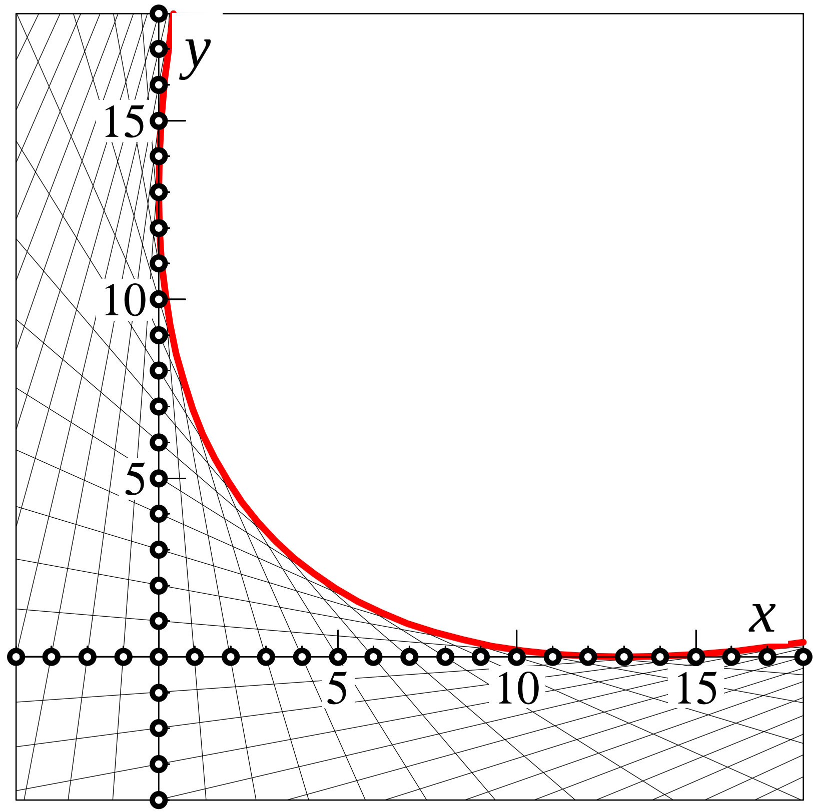


Kaustik eines Kreises

Geradenschar

Weitere Beispiele : (Jac. und Joh. Bernoulli 1692)





Kaustik eines Kreises

Geradenschar

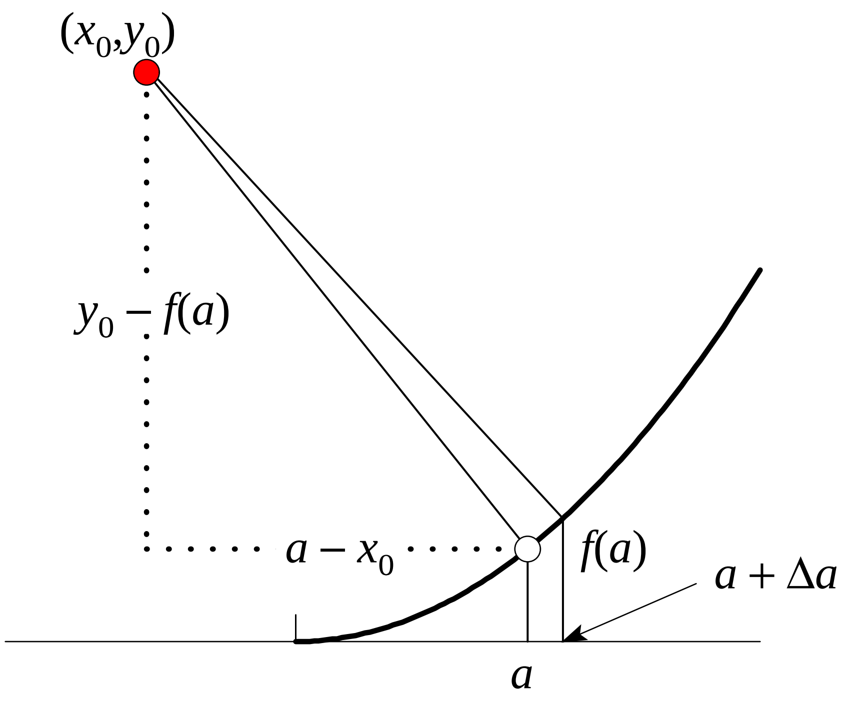
$$y = -\sqrt{1 - x^{2/3}}\left(\frac{1}{2} + x^{2/3}\right)$$

$$y = x - 2\sqrt{13x} + 13$$

Krümmungsradius

There are few Problems concerning Curves more elegant than this, or that give a greater Insight into their nature.

(Newton 1671, Engl. pub. 1736, p. 59)

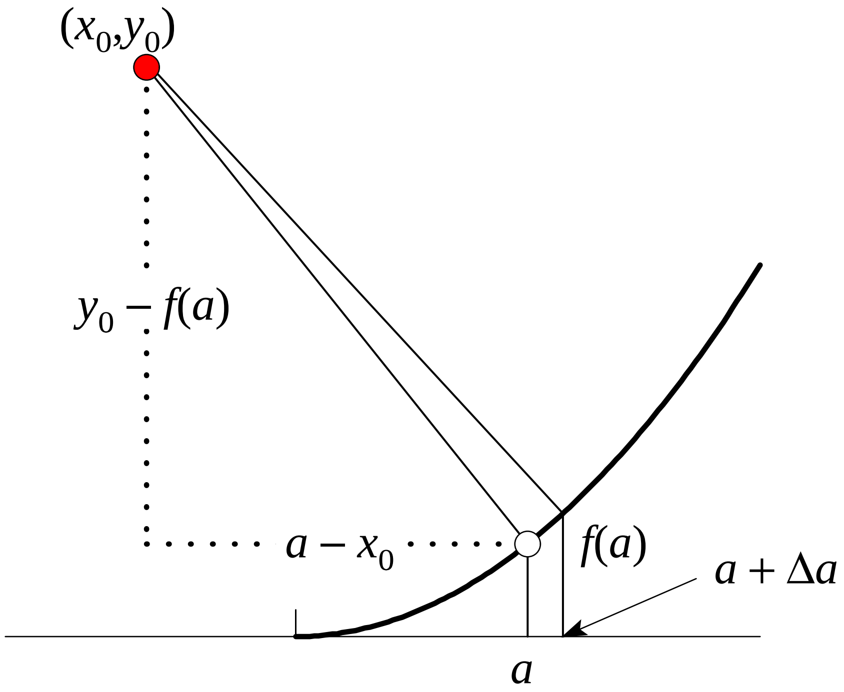


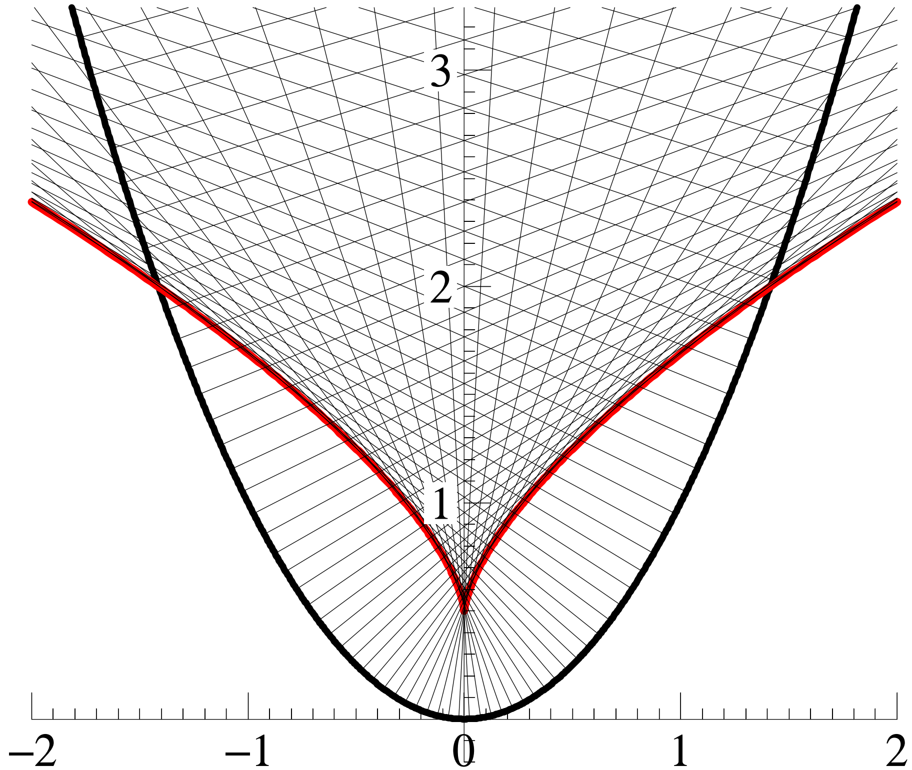
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Krümmungsradius

There are few Problems concerning Curves more elegant than this, or that give a greater Insight into their nature.

(Newton 1671, Engl. pub. 1736, p. 59)





$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$r = \frac{\left(1 + (f'(a))^2\right)^{3/2}}{|f''(a)|}$$

Integralrechnung.

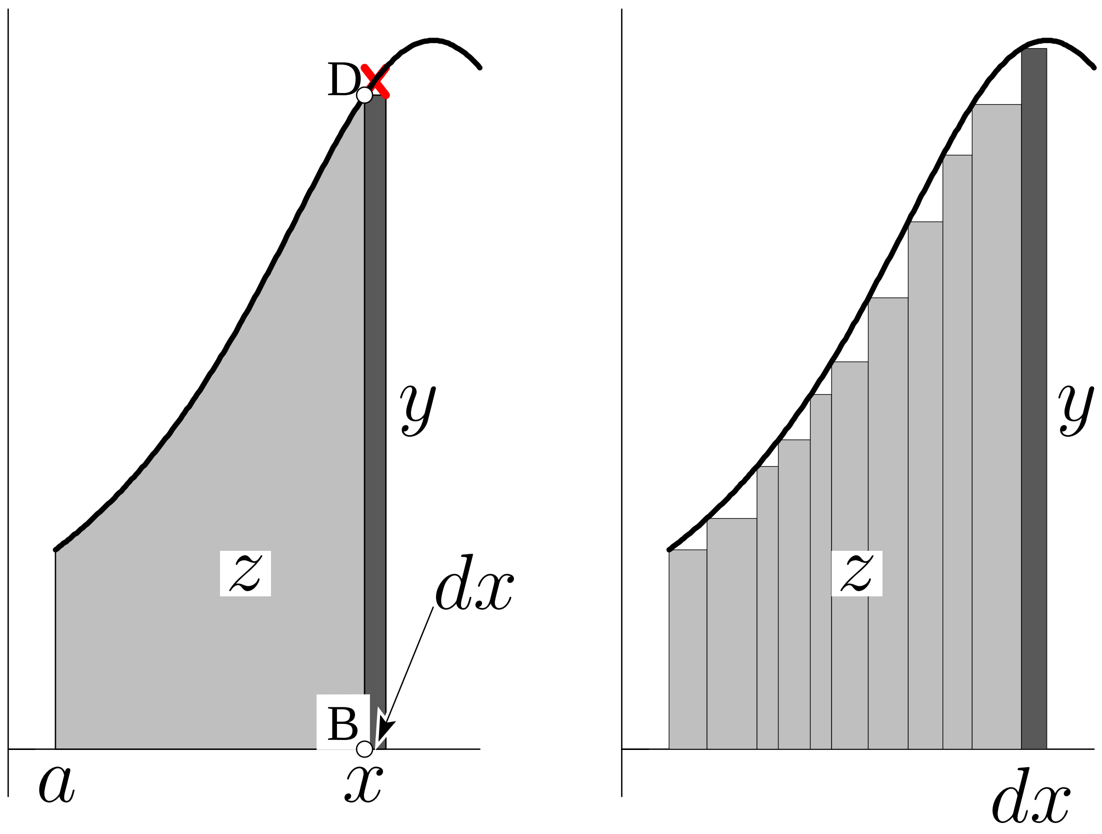
… notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis …

(Letter of Leibniz to Joh. Bernoulli, March 8/18, 1696)

… vocabulum i n t e g r a l i s etiamnum usurpaverim …

(Letter of Joh. Bernoulli to Leibniz, April 7, 1696)

$$\boxed{dz = y\,dx}$$



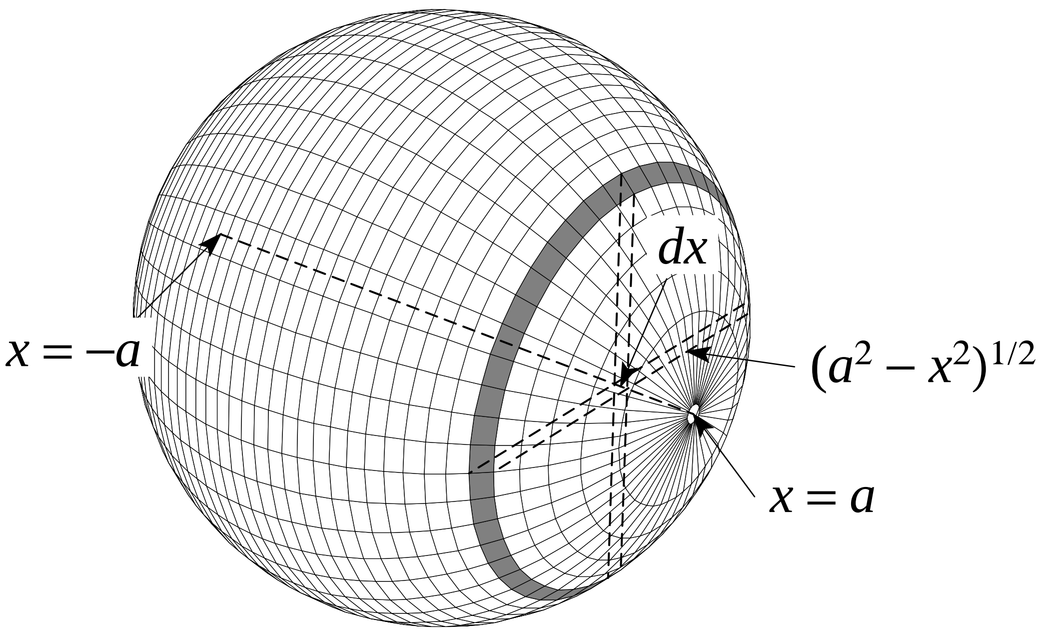
$$\boxed{z = \int y\,dx}$$

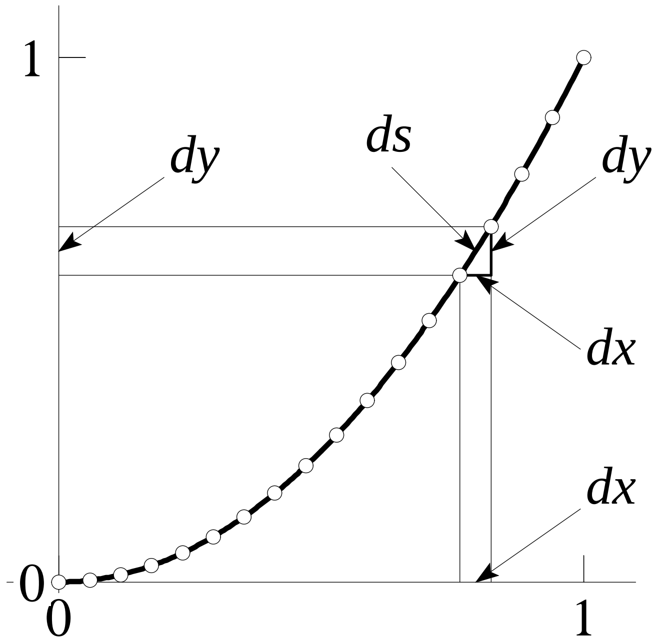
“… sic nobis summæ & differentiæ seu $\int$ & d, reciproquæ sunt.”

Beispiele. (Fermat, St. Vincent, Gregory-Leibniz, Newton, Archimedes, Newton)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

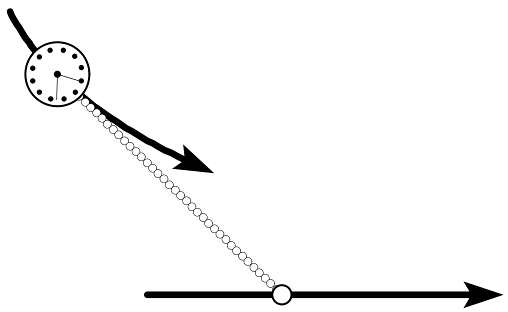


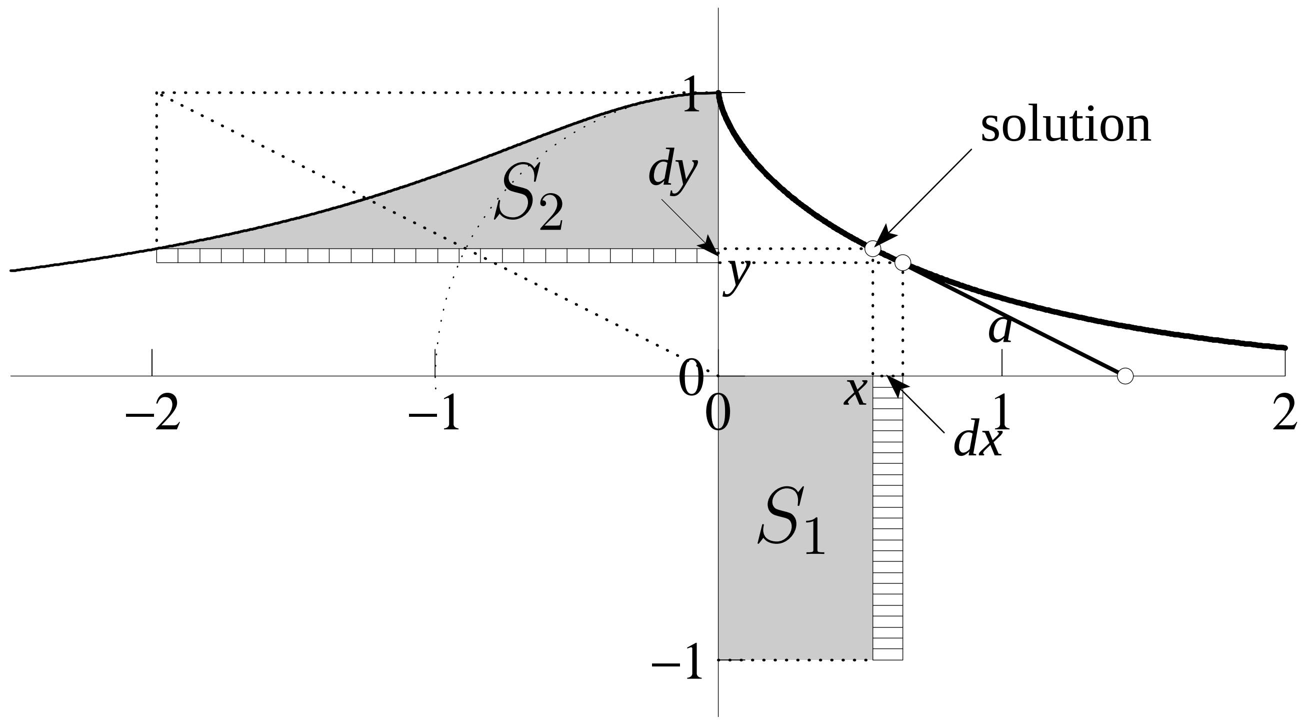


Oberfläche der Kugel

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Differentialgleichungen. Ges. Traktrix (Perrault 1674) :





Lösung (Leibniz 1693) :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad \text{i.e.,} \qquad -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy = dx,$$

$\Rightarrow$ $\boxed{S_1 = S_2}$ “Ergo & horum integralia aequantur”. (Jac. Bernoulli 1690)

3. Foundations of Classical Analysis

Doch ach ! wie bald wird uns verhunzt
die schöne Zeit naiver Kunst ;

(W. Busch, *Maler Klecksel* 1884)

– What is a derivative really? Answer: a limit.

– What is an integral really? Answer: a limit.

– What is an infinite series $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ really?
Answer: a limit.

This leads to
– What is a limit? Answer: a number.

And, finally, the last question:
– What is a number?
Answer very difficult : Euklid Book V, Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Cantor, Méray, Heine (all 1872).

Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. ... indem meine Töchter bekanntlich schon mehrere Semester studieren (Chemie), schon auf der Schule Differential- und Integralrechnung gelernt zu haben glauben und heute noch nicht wissen, warum $x \cdot y = y \cdot x$ ist.

(Landau 1930)

Für mich war damals das Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, dass ich den festen Entschluss fasste, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Principien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. ... Dies gelang mir am 24. November 1858, ... aber zu einer eigentlichen Publication konnte ich mich nicht recht entschliessen, weil erstens die Darstellung nicht ganz leicht, und weil ausserdem die Sache so wenig fruchtbar ist.

(Dedekind 1872)

... und hier beginnt der normale Cursus ...

mit ε und δ