

Chapitre VI

Méthodes Itératives – Equations Non Linéaires

En pratique, on est souvent confronté à la résolution d'un système d'équations non linéaires. C'est-à-dire pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée, on cherche un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) = 0. \quad (0.1)$$

En général, il n'y a pas d'algorithme fini pour trouver une solution. On est donc obligé d'utiliser des méthodes itératives.

Sans hypothèses supplémentaires, on ne sait rien sur l'existence d'une solution de (0.1). Par exemple, pour $f(x) = e^x$ il n'y a pas de solution, pour $f(x) = \sin x$ il y en a une infinité. Mais, le *théorème d'inversion locale* nous fournit un résultat sur l'unicité locale: si $f(a) = 0$ et si la matrice jacobienne $f'(a)$ est inversible, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de 0 tels que $f : U \rightarrow V$ soit bijective. Ceci implique que a est la seule solution de (0.1) dans le voisinage U de a .

Bibliographie sur ce chapitre

J.M. Ortega & W.C. Rheinboldt (1970): *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York.

A.M. Ostrowski (1966): *Solution of Equations and Systems of Equations*. Academic Press, New York, 2nd edition. [MA 65/27]

P. Deuffhard (2004): *Newton Methods for Nonlinear Problems; Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer Ser. Comp. Math. 35.

VI.1 Méthode des approximations successives

D'une façon générale ... je n'indique pas l'origine des théorèmes que je crois trop simples
... (S. Banach 1932; Préface)

On considère le problème du calcul d'un *point fixe* de l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; c.-à-d., on cherche $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \Phi(x). \quad (1.1)$$

Les problèmes (0.1) et (1.1) sont équivalents et il y a beaucoup de possibilités pour écrire (0.1) sous la forme (1.1). Par exemple, on peut définir Φ comme $\Phi(x) = x - f(x)$ ou $\Phi(x) = x - Bf(x)$ (ici B est soit un nombre non-nul, soit une matrice bien choisie).

Pour résoudre (1.1), on se donne une approximation initiale x_0 (arbitraire) et on considère la méthode itérative

$$x_{k+1} = \Phi(x_k). \quad (1.2)$$

Si la suite $\{x_k\}$ converge, disons vers $a \in \mathbb{R}^n$, et si la fonction $\Phi(x)$ est continue en a , la limite a est une solution de (1.1). Mais que peut-on dire sur l'erreur?

Théorème 1.1 Si $\Phi(x)$ est 2 fois continûment différentiable et si $a \in \mathbb{R}^n$ est une solution de (1.1), l'erreur $e_k = x_k - a$ satisfait

$$e_{k+1} = \Phi'(a) e_k + \mathcal{O}(\|e_k\|^2). \quad (1.3)$$

Démonstration. Comme $a = \Phi(a)$, on obtient

$$e_{k+1} = x_{k+1} - a = \Phi(x_k) - \Phi(a) = \Phi'(a)e_k + \mathcal{O}(\|e_k\|^2). \quad \square$$

On peut tirer plusieurs conclusions de la formule (1.3):

- si $\Phi'(a)$ possède une valeur propre λ_1 satisfaisant $|\lambda_1| > 1$, la composante de e_k dans la direction du vecteur propre v_1 va être agrandie – l'itération *ne converge pas* vers a .
- si toutes les valeurs propres de $\Phi'(a)$ satisfont $|\lambda_i| < 1$, on peut choisir une norme dans \mathbb{R}^n telle que pour la norme matricielle correspondante $\|\Phi'(a)\| < 1$. Ceci et (1.3) impliquent que, pour $\|e_k\|$ suffisamment petit, on a $\|e_{k+1}\| \leq \alpha \|e_k\|$ où α est un nombre entre $\|\Phi'(a)\|$ et 1. L'erreur e_k converge donc vers zéro.

Exemple. Ceux parmi vous, qui ne sont pas encore ‘fed up’ du nombre d’or du cours de Géométrie, voudraient peut-être connaître la valeur de l’expression mystérieuse

$$a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Eh bien, l’itération

$$x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k}, \quad x_0 = 1, \quad \text{donne} \quad 1.4142 \quad 1.5538 \quad 1.5981 \quad 1.6118 \quad 1.6161 \quad 1.6174 \dots$$

La convergence évidente de cette suite s’explique par la dérivée $\Phi'(a) = \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \approx 0.31$.

Estimation de l’erreur. (Banach 1922, Thèse, §2, Thm. 6, Oeuvres II, p. 330)

L’hypothèse cruciale est que Φ soit une contraction, i.e.,

$$\|x_k - x_{k-1}\| = \|\Phi(x_{k-1}) - \Phi(x_{k-2})\| \leq \alpha \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \quad \text{avec} \quad \alpha < 1. \quad (1.4)$$

En appliquant l’inégalité du triangle à l’identité

$$x_k - a = (x_k - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x_{k+2}) + \dots$$

(en cas de convergence), on obtient

$$\|x_k - a\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x_k - x_{k-1}\|. \quad (1.5)$$

Exemples. Pour les deux itérations

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.3 \begin{pmatrix} y_k \\ -\sin x_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

la norme euclidienne de l’erreur de (x_k, y_k) est dessinée dans la fig. VI.1 (à gauche pour la première itération et à droite pour la deuxième). On peut bien observer la convergence linéaire. Le rayon spectral de $\Phi'(a)$ vaut $\rho \approx 0.177$ et $\rho \approx 0.447$ respectivement. C’est la raison pour laquelle la première itération converge plus rapidement que la seconde. Le dessin à droite montre aussi que la convergence n’est pas nécessairement monotone (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Donc, le coefficient α_k de (1.4) peut être plus grand que 1 même si l’itération converge.

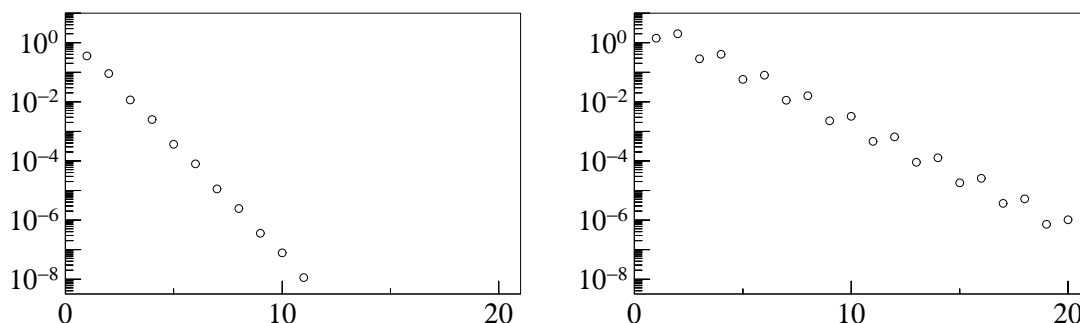


FIG. VI.1: Convergence des itérations (1.6)

VI.2 Méthode de Newton

Considérons le problème de la résolution d'un système d'équations non linéaires

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposée être au moins une fois différentiable. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est une approximation de la solution cherchée, on linéarise $f(x)$ autour de x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

et on calcule le zéro de cette linéarisation. Si l'on répète cette procédure avec la nouvelle approximation, on obtient l'algorithme suivant:

```

for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
    calculer  $f(x_k)$  et  $f'(x_k)$ 
     $f'(x_k)\Delta x_k = -f(x_k)$       (système linéaire à résoudre)
     $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ 
end for
    
```

Exemple 2.1 Pour une 'retraite dorée' choisissons

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} - x \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 \quad 1.00000000000000000000000000000000 \\ 2 \quad 1.640754482034081470401447477894 \\ 3 \quad 1.618055802179034869164626062955 \\ 4 \quad 1.618033988770214823947901085973 \\ 5 \quad 1.618033988749894848204604467361 \\ 6 \quad 1.618033988749894848204586834366 \end{array}$$

ou, un peu plus proche de nous, l'exemple original de Newton (1671, voir *Anal. Hist.*, p. 96)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x - 5 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 \quad 2.00000000000000000000000000000000 \\ 2 \quad 2.10000000000000000000000000000000 \\ 3 \quad 2.094568121104185218165627782725 \\ 4 \quad 2.094551481698199302883823703544 \\ 5 \quad 2.094551481542326591496064847154 \\ 6 \quad 2.094551481542326591482386540579 \end{array}$$

Pour étudier la convergence de la méthode de Newton, considérons un terme de plus dans la série de Taylor:

$$0 = f(a) = f(x_k) + f'(x_k)(a - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(a - x_k, a - x_k) + \mathcal{O}(\|x - x_k\|^3). \tag{2.2}$$

Si l'on soustrait

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

(définition de x_{k+1}), on obtient pour l'erreur $e_k = x_k - a$ la formule

$$0 = f'(x_k)(-e_{k+1}) + \frac{1}{2}f''(x_k)(e_k, e_k) + \mathcal{O}(\|e_k\|^3) \Rightarrow \|e_{k+1}\| \leq \frac{CD}{2}\|e_k\|^2,$$

si $\|(f')^{-1}\| \leq C$ et $\|f''\| \leq D$, ce qui explique la convergence faramineuse de cette méthode.

VI.3 Méthode de Gauss-Newton

... hat man schon Beobachtungen von 1 oder mehrern Jahren . . . , so halte ich den Gebrauch der Differential-Änderung, wobei man eine beliebige Zahl von Beobachtungen zum Grunde legen kann, für das beste Mittel. (Gauss, last sentence of the *Summarische Übersicht*, 1809)

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser à des systèmes non linéaires surdéterminés. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ où $m > n$ et on cherche une solution de $f(x) = 0$. Evidemment, comme on a plus de conditions que d'inconnues, ce problème ne possède en général pas de solution. On se contente donc de trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|f(x)\|_2 \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

Si $f(x)$ est différentiable, la fonction $F(x) = \|f(x)\|_2^2$ est aussi différentiable et une condition nécessaire pour que x soit un minimum local est d'avoir $F'(x) = 0$, c.-à-d.

$$f'(x)^T f(x) = 0. \quad (3.2)$$

Une possibilité pour résoudre (3.1) est d'appliquer une méthode itérative, par exemple la méthode de Newton, au système (3.2). Ceci nécessite le calcul de la deuxième dérivée de $f(x)$.

Une autre possibilité est de linéariser $f(x)$ dans (3.1) autour d'une approximation x_0 de la solution et de calculer x_1 de

$$\|f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)\|_2 \rightarrow \min. \quad (3.3)$$

Une répétition de cette idée donne l'algorithme suivant (méthode de Gauss-Newton)

```

for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
    calculer  $f(x_k)$  et  $f'(x_k)$ 
    déterminer  $\Delta x_k$  de  $\|f(x_k) + f'(x_k)\Delta x_k\|_2 \rightarrow \min$  (moindres carrés)
     $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ 
end for

```

Pour calculer Δx_k on peut soit résoudre les équations normales (section IV.5)

$$(f'(x_k))^T f'(x_k)\Delta x_k = -(f'(x_k))^T f(x_k) \quad (3.4)$$

soit calculer la décomposition QR de $f'(x_k)$ et appliquer l'algorithme de la section IV.6.

Exemple (Identification de paramètres). La fig. VI.2 montre une photographie de la Vallée Blanche (prise il y a quelques années par le Didaskalos en personne). On y reconnaît le Col des Grandes Jorasses, l'Aiguille du Géant, l'Aiguille Blanche de Peterey, l'Aiguille du Tacul, le Petit Rognon et l'Aiguille du Moine. La fig. VI.4 est une copie d'une carte géographique de cette

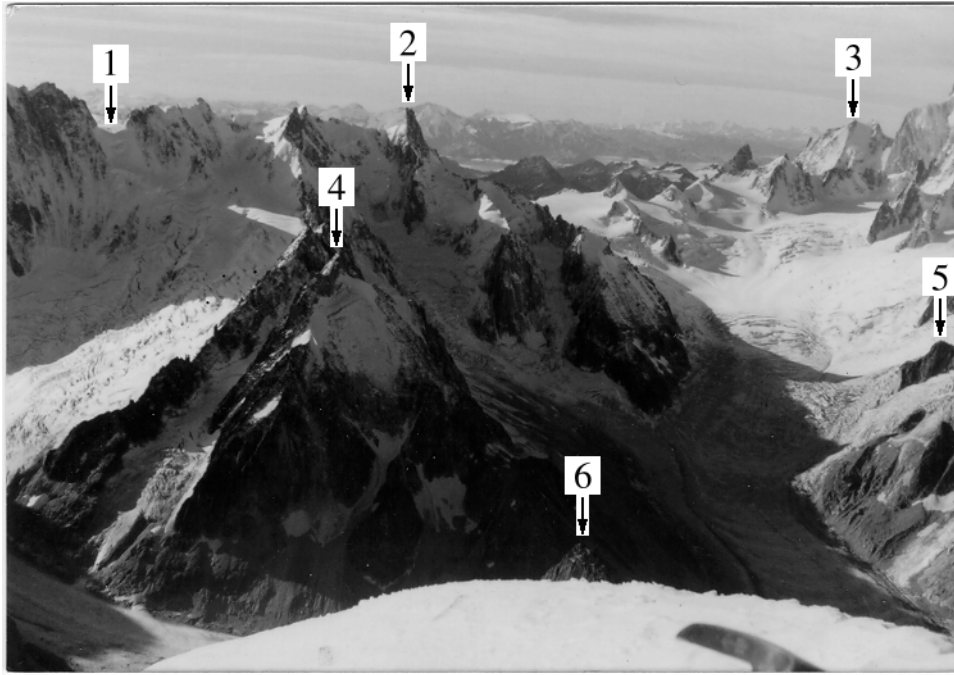


FIG. VI.2: Photographie de la Vallée Blanche

TAB. VI.1: Les données pour le problème “Vallée Blanche”

k	\hat{u}_k	\hat{v}_k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1. Col des Grandes Jorasses	-0.0480	0.0290	9855	5680	3825
2. Aiguille du Géant	-0.0100	0.0305	8170	5020	4013
3. Aig. Blanche de Peterey	0.0490	0.0285	2885	730	4107
4. Aiguille de Tacul	-0.0190	0.0115	8900	7530	3444
5. Petit Rognon	0.0600	-0.0005	5700	7025	3008
6. Aiguille du Moine	0.0125	-0.0270	8980	11120	3412

région. Le problème consiste à trouver la position de la caméra, ses caractéristiques (foyer) et les angles d'inclinaison.

Pour la formulation mathématique de ce problème, nous avons choisi des coordonnées (u, v) sur la photographie (fig. VI.2, l'origine est au centre) et des coordonnées (x_1, x_2, x_3) sur la carte (z représente l'altitude). Les valeurs mesurées pour les 6 points reconnus sont données dans le tableau VI.1.

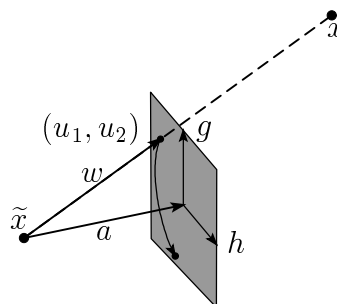


FIG. VI.3: Projection centrale

Pour fixer les *inconnues*, notons par \tilde{x} la position du foyer d'une caméra, et par un vecteur a la direction de vue et la distance du plan de projection. Pour fixer le plan, calculons deux vecteurs h et g orthogonaux entre eux et orthogonaux à a : d'abord $h = a \times (0, 0, 1)$ (ainsi il est horizontal), puis $g = a \times h$, les deux normalisés à 1 :

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} (a_2, -a_1, 0), \quad g = \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}} (-a_1 a_3, -a_2 a_3, a_1^2 + a_2^2). \quad (3.5)$$

Le vecteur w , reliant le foyer \tilde{x} au point de projection, doit être un multiple de $x - \tilde{x}$:

$$w = \lambda(x - \tilde{x}). \quad (3.6)$$

Le λ se détermine par la condition : $w - a$ doit être orthogonal à a :

$$\langle w - a, a \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle a, a \rangle}{\langle x - \tilde{x}, a \rangle}. \quad (3.7)$$

Finalement, les produits scalaires $\alpha = w \cdot h$ et $\beta = w \cdot g$ (voir Théorème 2 ci-dessus) sont les coordonnées recherchées. Au cas où notre photographe n'aurait pas tenu sa caméra horizontalement, on pourrait faire suivre une rotation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

par un angle θ . Ainsi, une image en perspective est déterminée par 7 paramètres : 3 pour a , 3 pour \tilde{x} et 1 pour θ .

Par le 'principium nostrum', nous devons chercher ces inconnues pour que

$$\sum_{k=1}^6 \left((u_k - \hat{u}_k)^2 + (v_k - \hat{v}_k)^2 \right) = \min ! \quad (3.9)$$

On doit donc écrire une sousroutine pour

$$f_k(\tilde{x}, a, \theta) = u_k - \hat{u}_k, \quad f_{6+k}(\tilde{x}, a, \theta) = v_k - \hat{v}_k,$$

et appliquer un algorithme qui calcule les dérivées partielles de f par différences finies. Ainsi, l'algorithme de Gauss-Newton donne, avec des valeurs initiales assez crues, après quelques itérations, la solution

$$\tilde{x} = 9679 \quad \tilde{y} = 13139 \quad \tilde{z} = 4131.$$

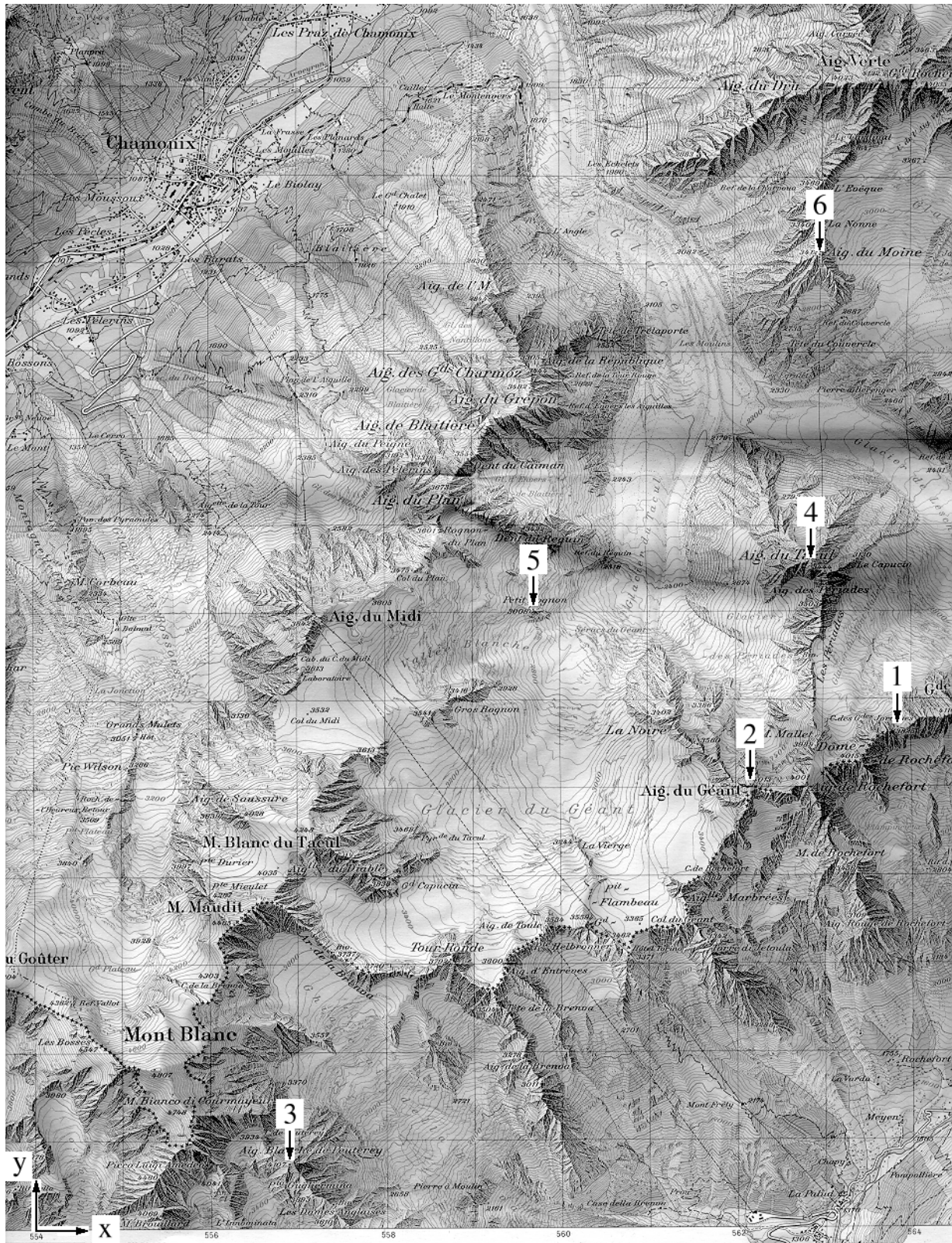


FIG. VI.4: La region de la Vallée Blanche

C'est à l'Aiguille Verte (altitude 4122) que cette photo a été prise.

BONNES VACANCES !