

## Questions et Questionnaire H06/07

Questions pour examens en analyse numérique. Prière de cocher les 6 sujets les plus difficiles (d+), les moins difficiles (d-), les plus intéressantes (i+) et les moins intéressantes (i-). Questions marqués (M) sont pour mathématiciens uniquement, questions marqués (I) sont pour informaticiens uniquement.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Formules de quadrature et leur ordre. Utiliser les Polynômes de Lagrange pour trouver les formules pour l'intervalle  $[0, 1]$ . Exemples : point milieu, trapèze, Simpson.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Formules de quadrature et leur ordre. Conditions algébriques d'ordre sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Exemples : point milieu, trapèze, Simpson.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Pourquoi l'ordre d'une formule de quadrature symétrique est-il toujours pair? Exemple : la méthode de Boole (points équidistants  $s = 5$ ).

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Discuter l'erreur d'une formule de quadrature et expliquer pourquoi les formules ayant un ordre élevé sont importantes.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Expliquer le noyau de Peano et donner des estimations rigoureuses de l'erreur d'une formule de quadrature.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] (Superconvergence). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'une formule de quadrature  $(b_i, c_i)_{i=1}^s$  satisfasse  $p \geq s + m$ . Exemple : GAUSS4 et GAUSS6

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Polynômes orthogonaux de Legendre. Donner leur définition et expliquer pourquoi leurs zéros sont toujours réels et simples (Preuve par le théorème de Rolle).

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Soit un polynôme  $P(t)$  orthogonal sur  $[a, b]$  à tous les polynômes de degré  $r - 1$ . Combien de racines de multiplicité impaire dans l'intervalle ouvert  $(a, b)$  doivent alors exister ? Appliquer le résultat aux polynômes orthogonaux de Legendre.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] (M) Pourquoi on est sûr de l'existence des formules de quadrature d'ordre  $2s$  pour chaque  $s$ ? Expliquer les formules de quadrature de Gauss, le calcul des nœuds  $c_i$  et des poids  $b_i$ .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] (M) Expliquer la localisation des racines des polynômes de Legendre à l'aide de la formule de récurrence et la propriété d'une Suite de Sturm.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] (I) Expliquer la localisation des racines des polynômes de Legendre à l'aide de la formule de récurrence et la propriété d'une Suite de Sturm. Expliquer la programmation et le fonctionnement de l'algorithme de bisection.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] (I) Discuter la programmation d'une formule de quadrature : choix de la division et estimation de l'erreur.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ I.] Expliquer le procédé  $\Delta^2$  d'Aitken et sa généralisation, l' $\varepsilon$ -algorithme.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d+	d-	i+	i-

[ II.] Expliquer et démontrer la formule de Newton pour le polynôme d'interpolation (différences divisées, Aitken-Neville).

d+ d- i+ i-

[ II.] Donner une formule pour l'erreur de l'interpolation polynomiale. La démontrer.

d+ d- i+ i-

[ II.] Expliquer les polynômes de Chebyshev. Motivation (alternante de Chebyshev), définition, propriétés. Quel est leur rôle en connection avec l'interpolation?

d+ d- i+ i-

II. (I) D'où viennent les erreurs d'arrondi? Expliquer la sensibilité du polynôme d'interpolation par rapport aux erreurs d'arrondi dans les données. Quel phénomène observe-t-on pour  $\sin x$  sur l'intervalle  $[0, 5]$  en simple précision avec  $N = 10, 20, 40$ ?

d+ d- i+ i-

II. (M) Expliquer la sensibilité du polynôme d'interpolation par rapport aux erreurs d'arrondi dans les données. Quelles  $y_i$  sont les plus dangereuses? Donner un calcul asymptotique du max de l' $\ell_i$  correspondant.

d+ d- i+ i-

[ II.] Expliquer la transformée de Fourier continue pour une fonction périodique  $f(x)$  définie sur  $[0, 2\pi]$ . Représentation complexe, orthogonalité, calcul des coefficients  $c_k$ , amplitude et phase.

d+ d- i+ i-

[ II.] Expliquer la transformée de Fourier discrète – interpolation trigonométrique correspondante, orthogonalité, calcul des coefficients  $z_k$ .

d+ d- i+ i-

[ II.] (I) Expliquer l'utilité de la transformée de Fourier pour le traitement des données (lissage, détermination de la périodicité, compression, décodage, analyse des sons).

d+ d- i+ i-

[ II.] Expliquer la transformation de Fourier rapide (FFT).

d+ d- i+ i-

[ II.] Expliquer la transformation Cosinus discrète (DCT) en une et deux dimensions et son utilité pour la compression de données photographiques (JPEG).

d+ d- i+ i-

[ II.] (M) Définition et propriétés du spline. Montrer leur relation avec le problème variationnel

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \rightarrow \min.$$

d+ d- i+ i-

[ II.] Définition et propriétés du spline. Comment obtient-on les  $B$ -splines? Expliquer le système linéaire qui permet le calcul d'un spline interpolant.

d+ d- i+ i-

[ II.] Ondelettes : motiver leur usage et expliquer la base de Haar, en particulier la propriété fondamentale que toutes ces fonctions orthogonales sont produites par une seule "ondelette mère" à l'aide de changements d'échelle et des translations.

d+ d- i+ i-

[ II.] Ondelettes : expliquer en grandes lignes la construction d'une 'ondelette mère' à partir d'un B-spline. En détail : la construction du 'spline père'  $\varphi(x)$ .

d+ d- i+ i-

[ II.] Ondelettes : expliquer en grandes lignes la construction d'une 'ondelette mère'  $\psi(x)$  à partir d'un B-spline. En détail : l'analyse multi-échelles' et la base 'fan' orthogonale de  $V^1$ .