Calculs de probabilités

Mathématiques Générales B
Université de Genève

Sylvain Sardy

13 mars 2008

1. Définitions et notations

L'origine des probabilités est l'analyse de jeux de hasard, tels que pile ou face, les dés, les cartes, etc.

Une expérience est un processus dont le résultats n'est pas connu à l'avance. On dit que le résultat est aléatoire.

A toute expérience, on associe l'ensemble des résultats possibles appelés réalisations. C'est l'ensemble fondamental noté Ω. Il est fini (ex. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) ou infini (ex. $\mathbb{R}$). On va principalement s'intéressé au cas fini dans ce cours.

Un évènement est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental. Le but des probabilités est de calculer la probabilité d'évènements.
Exemple : l'évènement qu'un dé sorte un nombre pair. Quelle est la probabilité d'un tel évènement :

$$\mathrm{P}(\{2, 4, 6\})?$$

Opérations sur les ensembles :

- $A \subset B$: l'ensemble A est un sous-ensemble de B.
  Ex. : $\{2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A \bigcup B$: l'union des ensembles A et B.
  Ex. : $\{2, 4, 6\} \bigcup \{1, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A \bigcap B$: l'intersection des ensembles A et B.
  Ex. : $\{2, 4, 6\} \bigcap \{1, 3, 5, 6\} = \{6\}$.

- $\emptyset$: l'ensemble vide ne contient aucune réalisation.
  Ex. : l'ensemble contenant les réalisations de l'expérience "somme de deux dés inférieure ou égale à 1".

- Deux ensembles sont disjoints s'ils n'ont aucune réalisation en commun.
  Ex. : $\{2,4,6\}\bigcap\{1,3,5\} = \emptyset$: les ensembles pairs et impairs sont disjoints.

- A^c : le complément de A dans Ω.
  Ex. : $\{1,6\}^c = \{2,3,4,5\}$.

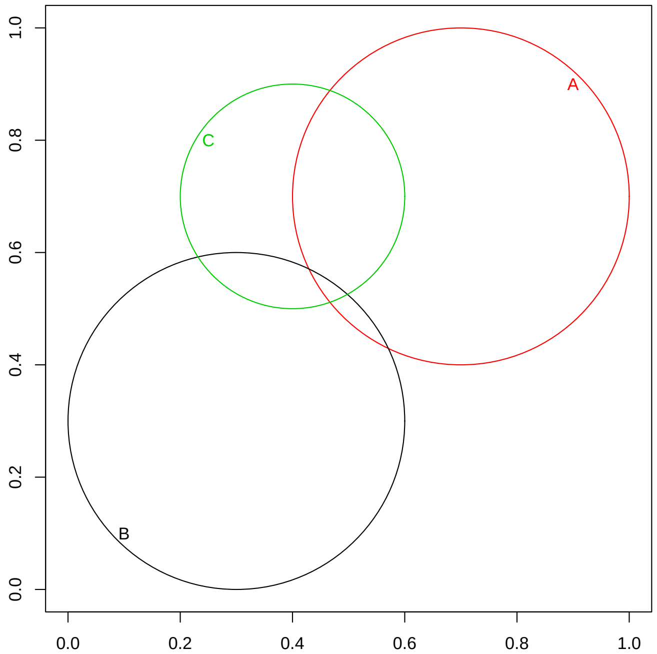
- $B - A$: l'ensemble des réalisations dans B mais pas dans A. Ou $B\bigcap A^c$.
  Ex. : $\{1,6\} - \{1\} = \{6\}$.

- Une partition de Ω est un ensemble de sous-ensembles Ω_k de Ω tels que tous les éléments de Ω sont dans exactement un de ces sous-ensembles.
  En d'autres termes :
  - $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$.
  - $\Omega_k \bigcap \Omega_{k'} = \emptyset$ pour tout $k \neq k'$: disjoints deux-à-deux.

  Ex. : $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6\}\}$ est une partition de $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Propriétés :

- $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ et $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
- $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$ et $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$.



2. Axiomes de probabilités

Définition : Une tribu sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω qui possède les trois propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- si $F \in \mathcal{F}$, alors $F^c \in \mathcal{F}$
- si $F_1, F_2, \ldots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.

Les éléments de la tribu $\mathcal{F}$ sont appelés les évènements.
Les singletons $\{\omega\}$ tels que $\omega \in \Omega$ sont appelés évènements élémentaires.
L'ensemble Ω est appelé l'évènement certain.
L'ensemble vide est appelé l'évènement impossible.

L'exemple de base d'une tribu est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω. Que vaut $|\mathcal{P}(\Omega)|$?

Axiomes des probabilités : Une fonction de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application

$$\mathrm{P}: \ \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

qui vérifie les deux axiomes :

1. Evènement certain : $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
2. σ-additivité : Si $F_1, F_2, \ldots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux-à-deux disjoints, alors

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{F_n}\right) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{F_n}).$$

Conséquences des deux axiomes, les propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
- Additivité finie : Soit $G_1, G_2, \ldots G_m$, $m < \infty$ évènements deux-à-deux disjoints. Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{G_1} \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{G_m}) = \mathrm{P}(\mathrm{G_1}) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{G_m}).$$

- $\mathrm{P}(\mathrm{G}^c) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{G})$.
- Monotonies : Si $G \subset H$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{G}) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{H})$.
- Union : $\mathrm{P}(\mathrm{G} \bigcup \mathrm{H}) = \mathrm{P}(\mathrm{G}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}) - \mathrm{P}(\mathrm{G} \bigcap \mathrm{H})$.

Démonstration.

Exemple : Soit A et B deux ensembles disjoints tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0.3$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0.5$. Que vaut $\mathrm{P}(\mathrm{A}^c \bigcap \mathrm{B}^c)$?

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A}^c \bigcap \mathrm{B}^c) &= 1 - \mathrm{P}((\mathrm{A}^c \bigcap \mathrm{B}^c)^c) \\
&= 1 - \mathrm{P}((\mathrm{A}^c)^c \bigcup (\mathrm{B}^c)^c) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \\
&= 1 - (\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B})) \\
&= 1 - (0.3 + 0.5 - 0) \\
&= 0.2
\end{aligned}
$$

Exemple : Supposons que $\Omega = \{1, 2, 3\}$ and

$$\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{p}_1 \quad \mathrm{P}(\{2\}) = \mathrm{p}_2 \quad \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{p}_3.$$

Une tribu possible est $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ de cardinalité 2^3.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{1, 2\}) &= \mathrm{P}(\{1\}) + \mathrm{P}(\{2\}) = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 \\
\mathrm{P}(\{1, 3\}) &= \mathrm{P}(\{1\}) + \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3 \\
\mathrm{P}(\{2, 3\}) &= \mathrm{P}(\{2\}) + \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 \\
\mathrm{P}\{1, 2, 3\} &= \mathrm{P}(\{1\}) + \mathrm{P}(\{2\}) + \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3.
\end{aligned}$$

La dernière équation implique que : $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Réciproquement, si on choisit $p_1, p_2, p_3 \geqslant 0$ tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, alors $\mathrm{P}(\{\mathrm{i}\}) = \mathrm{p_i}$ définit une probabilité.

3. Espaces de probabilité finis

Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}$, où $k = |\Omega| < \infty$. On définit une probabilité en choisissant $p_1, \ldots, p_k \geqslant 0$ tels que $p_1 + \cdots + p_k = 1$ et en définissant

$$p_i = \mathrm{P}(\{\mathrm{i}\}).$$

Une fois qu'une probabilité est ainsi définie, on peut calculer pour tout $G \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathrm{P(G)} = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{G}} \mathrm{P}(\{\mathrm{i}\}) = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{G}} \mathrm{p_i},$$

qui est la probabilité de réaliser un des i dans G.

Cas particulier important : quand les évènements élémentaires sont **équiprobables**

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_k =: p,$$

et la condition $p_1 + \cdots + p_k = 1$ implique que $p_1 = \ldots = p_k = \frac{1}{k} = \frac{1}{|\Omega|}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{P(G)} &= \sum_{i \in G} p_i = p \sum_{i \in G} 1 = p|G| \\ &= \frac{|G|}{|\Omega|} \\ &= \frac{\text{Nombre de cas favorables pour G}}{\text{nombre de cas possibles}}. \end{aligned}$$

Exemple : On jette 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme est 8 ?

L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, de cardinalité $|\Omega| = 36$.
Les cas favorables sont $G = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (2, 6)\}$.
Donc $\mathrm{P}(\mathrm{G}) = \frac{|\mathrm{G}|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$.

Exemple : On jette trois pièces équitables. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un pile ?

L'ensemble fondamental est $\Omega = \{P, F\}^3$, de cardinalité $|\Omega| = 8$.
Le complémentaire de l'ensemble d'évènements favorables est G^c, l'ensemble "sans pile", c'est-à-dire que $G^c = \{F, F, F\}$. Donc $\mathrm{P}(\mathrm{G}^c) = \frac{1}{8}$. Par conséquent :

$$\mathrm{P}(\mathrm{G}) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

Exemple : On jette 3 dés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$, de cardinalité $|\Omega| = 216$. Soit G_i l'ensemble des réalisations "le $i$ème dé donne 6". Clairement :

$$\mathrm{P}(\mathrm{G}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_3) = \frac{1}{6}.$$

La probabilité cherchée est

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \bigcup \mathrm{G}_2 \bigcup \mathrm{G}_3) &= \mathrm{P}(\mathrm{G}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{G}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{G}_3) \\
&\quad - \mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \bigcap \mathrm{G}_2) - \mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \bigcap \mathrm{G}_3) - \mathrm{P}(\mathrm{G}_2 \bigcap \mathrm{G}_3) \\
&\quad + \mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \bigcap \mathrm{G}_2 \bigcap \mathrm{G}_3) \\
&= 3(\frac{1}{6}) - 3(\frac{1}{36}) + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}.
\end{aligned}$$

On vérifie par le complémentaire G^c, l'ensemble des réalisations "aucun 6 parmi les 3 dés" :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{G}^c) &= \frac{5^3}{6^3} \\ &= \frac{125}{136}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{P}(\mathrm{G}) = 1 - \frac{125}{136} = \frac{91}{216}$.

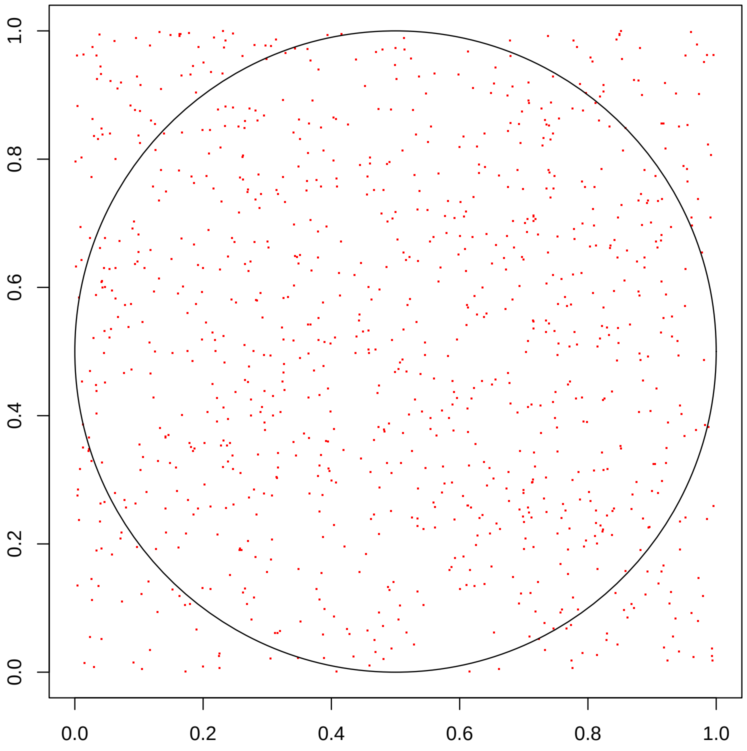
Exemple : Eve lance une pièce équitable et gagne si Pile. Sinon Adam lance la pièce et gagne si Face. Ils répètent le jeu jusqu'à ce que le premier gagne. Quelle est la probabilité que Eve gagne ? Quelle est la probabilité qu'ils y jouent encore ?

Exemple : en 1654, de Méré propose à Pascal le problème suivant : "Est-il plus probable d'obtenir au moins un 6 avec 4 dés que d'obtenir au moins un double 6 avec 24 jets de deux dés ?"' Qu'en pensez-vous ?

La première probabilité vaut $1-(\frac{5}{6})^4 \approx 0.518$.

La deuxième probabilité vaut $1-(\frac{35}{36})^{24} \approx 0.491$.

Exemple : Estimation de π par une expérience de Monte Carlo.



Par intuition, quelle est la probabilité que des points tombent dans le cercle ?

Exemple : on compte la somme S des valeurs de 3 dés simultanément. Il y a 6 configurations différentes qui permettent d'obtenir 9 et 10 :

– pour 9 : $6+2+1$, $5+3+1$, $5+2+2$, $4+4+1$, $4+3+2$ et $3+3+3$.
– pour 10 : $6+3+1$, $6+2+2$, $5+4+1$, $5+3+2$, $4+4+2$ et $4+3+3$.

Peut-on en conclure que

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}=9)=\mathrm{P}(\mathrm{S}=10)?$$

Exemple : On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une paire ?

L'univers Ω est l'ensemble de tous les sous-ensembles de 5 cartes sans remise d'un jeu de 52 cartes. Donc $|\Omega| = C_{52,5}$.

On rappelle qu'il y a $13 = 52/4$ valeurs possibles.

Le nombre de possibilité d'obtenir une paire implique :

- choisir une valeur qui sera la base de notre paire, soit $C_{13,1}$ possibilités.
- parmi ces 4 cartes il faut en choisir 2 pour former la paire, soit $C_{4,2}$ possibilités.
- choisir 3 valeurs différentes parmi $13 - 1 = 12$, soit $C_{12,3}$.
- enfin pour chaque valeur, il y a $C_{4,1}$ possibilités.

Donc la probabilité d'avoir exactement une paire est

$$\frac{C_{13,1}C_{4,2}C_{12,3}C_{4,1}C_{4,1}C_{4,1}}{C_{52,5}} = 0.422569$$