

## Remarque préalable

Dans les pages suivantes on trouvera des exercices théoriques qui entrent à faire partie de six travaux de maturité proposés à autant d'élèves du Collège St-Michel de Fribourg.

Ces exercices ne constituent que *la première partie* du travail de maturité. Ils ont été précédés par environ cinq heures de cours, portant sur la notion de polarisation, les vecteurs d'état et les règles de calcul des probabilités, la notion d'intrication, culminant dans le calcul explicite de l'expérience de Bell. Les exercices sont conçus de sorte à ne pas devoir introduire la notion d'opérateur ("observables"): tous les calculs sont des calculs de probabilités, et les valeurs moyennes — lorsqu'elles sont nécessaires — sont calculées directement à partir du tableau des probabilités, sans utiliser les raccourcis du formalisme opératoire.

Une *deuxième partie* du travail consistera dans la lecture d'un article scientifique qui présente une expérience, en lien direct avec la théorie. Le but n'est pas que l'étudiant comprenne tous les détails de l'article, mais qu'il remarque où se trouvent les principales différences entre l'idéalisation théorique et la réalisation expérimentale. Dans l'opinion de celui qui écrit, cette articulation théorie-expérience est le coeur de la démarche scientifique. Les articles en question sont les suivants:

- **Thème 1: cryptographie quantique.** N. Gisin et al., Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002), chapitres choisis (en particulier, le système "plug-and-play", section IV-C-2).
- **Thème 2: clonage quantique.** S. Fasel et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 107901 (2002)
- **Thème 3: téléportation quantique.** D. Bouwmeester et al., Nature **390**, 575 (1997)
- **Thème 4: inégalités de Bell.** G. Weihs et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998)
- **Thème 5: argument GHZ.** J.-W. Pan et al., Nature **403**, 515 (2000)
- **Thème 6: frontière quantique-classique.** M. Brune et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996)

Il sera enfin très souhaitable que le travail comporte une *troisième partie*, consacrée aux considérations "philosophiques" que la découverte de la physique quantique aura suscitées chez l'élève. Cette partie est laissée à l'initiative de l'élève, sur la base de quelques conseils bibliographiques initiaux.



# Thème 1

## Cryptographie quantique

*Ce texte est une trace pour guider l'étudiant dans la partie théorique de son travail de maturité. Il ne s'agit pas d'un texte parfaitement développé, mais d'une base à partir de laquelle l'étudiant développera son propre texte.*

### 1.1 One-time pad

Alice veut envoyer à Bob un message  $\mathcal{M}$  qui, codé en binaire, a une longueur de  $N$  bits. Supposer qu'Alice et Bob partagent une liste  $\mathcal{K}$  de  $N$  bits aléatoires appelée clé, qui est secrète (c'est-à-dire, connue d'eux seuls).

1. Alice forme la liste de  $N$  bits  $\mathcal{X} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{K}$ , où  $\oplus$  indique la somme binaire bit par bit. Se convaincre que la liste  $\mathcal{X}$  est aléatoire, c'est-à-dire qu'elle ne contient aucune information.
2. Alice envoie  $\mathcal{X}$  à Bob. Un espion qui écoute la ligne ne peut tirer aucune information. Bob cependant va pouvoir décoder le message, car il possède la clé. Montrer que le décodage est décrit par  $\mathcal{X} \oplus \mathcal{K} = \mathcal{M}$ .

La cryptographie à clé secrète est absolument sûre, pourvu qu'Alice et Bob partagent une clé secrète. La cryptographie quantique est une méthode pour établir la clé secrète; une fois la clé établie, l'envoi du message se fera de manière classique avec le one-time pad.

### 1.2 Protocole BB84

Le protocole BB84 peut être résumé en les étapes suivantes

**1. Envoi.** Alice prépare des photons uniques polarisés soit dans la base de travail (notée  $Z$ ) soit dans la base "diagonale" (notée  $X$ ). On rappelle que les états associés aux résultats de mesure sont:

$$\begin{aligned} \text{Pour la base } Z: \quad |0_z\rangle &= |H\rangle \\ |1_z\rangle &= |V\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour la base X: } |0_x\rangle &= |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \\ |1_x\rangle &= |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle). \end{aligned}$$

**2. Accord des bases.** Pour chaque photon qu'elle a envoyée, Alice révèle la base ( $Z$  ou  $X$ ) dans laquelle le photon a été polarisé. Bob aussi révèle la base dans laquelle il a mesuré. Ils gardent les cas où ils ont utilisé la même base et jettent les autres. Sans espion ni erreurs, à ce stade Alice et Bob devraient avoir deux listes identiques de bits secrets.

**3. Estimation de l'erreur.** Alice révèle publiquement quelques-uns des bits de sa clé. Bob compare et estime le taux d'erreur.

**4. Traitement ultérieur.** Si le taux d'erreur est assez faible, Alice et Bob appliquent des procédures qui corrigent presque toutes les erreurs et diminuent l'information d'un espion éventuel. Si le taux d'erreur est trop grand, l'espion pourrait avoir trop d'information: Alice et Bob jettent la clé. *Jamais une clé non-secrète n'est utilisée.*

Le but de cet exercice est de comprendre les différentes étapes de ce protocole.

### 1.3 Calcul: sans espion ni erreurs

Complète le tableaux des probabilités suivant, qui décrit la phase "Envoi":

Alice envoie	Bob mesure... et trouve...	Probabilité
$ 0_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	1
$ 0_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	0
$ 0_z\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	1/2
$ 0_z\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	1/2
$ 1_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	
$ 0_x\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 0_x\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 0_x\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	
$ 0_x\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	
$ 1_x\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 1_x\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 1_x\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	
$ 1_x\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	

A l'aide de ce tableau, qui décrit une situation idéale sans espion ni erreurs, vérifie qu'après la phase "Accord des bases" Alice et Bob partagent une liste identique de bits secrets (pourquoi ces bits sont-ils secrets?).

## 1.4 Calcul: une attaque de l'espion

On s'intéresse maintenant à ce que peut faire l'espion Eve. On suppose qu'Eve fait la même chose que Bob: elle choisit de mesurer soit  $Z$  soit  $X$ . Mais Bob s'attend à recevoir quelque chose: Eve prépare alors un nouveau photon, polarisé selon le résultat de sa mesure. On appelle cette attaque *intercept-resend*.

Pour le tableau de la phase "Envoi", nous ne considérons que les cas où Alice et Bob mesurent dans la même base, car les autres cas seront de toute façon écartés lors de la phase "Accord des bases". Aussi, nous ne considérons que la base  $Z$ , la situation pour la base  $X$  étant symétrique. Complète donc le probabilités (rappel: Bob reçoit le photon envoyé par Eve, pas celui envoyé par Alice!):

Alice envoie	Eve mesure... et trouve...	Bob mesure... et trouve...	Probabilité
$ 0_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	1/2
$ 0_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	0
$ 0_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 0_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 0_z\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	1/8
$ 0_z\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 0_z\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 0_z\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$X \rightarrow  0_x\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	$Z \rightarrow  0_z\rangle$	
$ 1_z\rangle$	$X \rightarrow  1_x\rangle$	$Z \rightarrow  1_z\rangle$	

Constater que parfois Alice et Bob n'ont pas le même bit en présence de cette attaque d'Eve, malgré le fait qu'ils ont mesuré dans la même base.

A ce stade, on devrait avoir la réponse aux questions suivantes:

1. Pourquoi dans le protocole BB84 est-il nécessaire d'utiliser deux bases? C'est-à-dire, que se passerait-il, si Alice et Bob décidaient de n'utiliser qu'une base pour coder leurs bits?
2. Comment font Alice et Bob pour détecter la présence de l'espion?

## 1.5 Quantifier l'information

On veut donner quelques idées élémentaires sur un traitement plus quantitatif de la cryptographie. Une idée intuitive par exemple est la suivante: comparer l'information que Bob et Eve ont sur les bits envoyés par

Alice. Si  $I_{Bob} > I_{Eve}$ , on doit pouvoir faire quelque chose; si au contraire  $I_{Bob} < I_{Eve}$ , on ne peut que jeter la clé, qui n'est pas assez secrète. On va esquisser cette analyse pour l'attaque intercept-resend.

1. Dans l'attaque intercept-resend, il est facile de quantifier l'information moyenne  $I_{Eve}$  qu'Eve a sur chaque photon: c'est la fraction des bits envoyés par Alice qu'elle connaît parfaitement. En se référant au tableau de la section précédente, combien vaut-elle?
2. Pour chaque photon envoyé, vérifie que la probabilité qu'Alice et Bob n'ont pas le même bit en présence de cette attaque d'Eve, malgré le fait qu'ils ont mesuré dans la même base, est de 25%. Cette probabilité est le *taux d'erreur*, souvent écrit  $D$  ("disturbance"); on l'appelle aussi QBER ("quantum bit error rate").
3. Il se trouve (raison: à discuter) que l'information de Bob sur la clé envoyée par Alice est donnée par la formule suivante:

$$I_{Bob} = 1 + D \log_2 D + (1 - D) \log_2(1 - D), \quad (1.1)$$

avec la convention  $0 \log_2 0 = 0$ . Insère la valeur de  $D$  qu'on vient de trouver dans cette formule: combien obtient-on? Compare avec  $I_{Eve}$ .

4. Supposons alors qu'Alice et Bob estiment le taux d'erreur (phase 3 du protocole) et trouvent 25%: peuvent-ils utiliser la clé?
5. Supposons qu'Eve n'applique l'attaque qu'avec probabilité  $p$ , et avec probabilité  $1 - p$  laisse passer le photon à Bob sans le toucher. Se convaincre de que le taux d'erreur devient  $D = p \times 25\%$ . Que devient  $I_{Eve}$ ?
6. Pour quelle valeur de  $p$  a-t-on  $I_{Bob} = I_{Eve}$ ? (Solution numérique). A quelle valeur de  $D$  correspond-elle?

## 1.6 Ouvertures

- D'où vient la formule pour l'information de Bob?
- Eve peut-elle faire mieux que intercept-resend?
- Qu'en serait-il de la cryptographie quantique, si le clonage parfait était possible?
- Comment fonctionne la cryptographie à clé publique, utilisée couramment p.ex. sur Internet? Est-elle absolument sûre, comme la cryptographie à clé secrète?

## Thème 2

# Clonage quantique

*Ce texte est une trace pour guider l'étudiant dans la partie théorique de son travail de maturité. Il ne s'agit pas d'un texte parfaitement développé, mais d'une base à partir de laquelle l'étudiant développera son propre texte.*

### 2.1 Impossibilité de clonage parfait

Le théorème de non-clonage se démontre facilement si l'on admet que toutes les transformations possibles sur des états quantiques doivent être *linéaires*, c'est-à-dire: si  $|\psi_1\rangle \rightarrow |\phi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle \rightarrow |\phi_2\rangle$ , alors  $(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \rightarrow (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle)$ . Pour des raisons didactiques, dans cet exercice on demande d'abord d'accepter cette affirmation, sur laquelle on pourra revenir par la suite.

1. Vérifier que

$$|\psi\rangle \otimes |R\rangle \xrightarrow{?} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad (2.1)$$

est impossible. Ici,  $|\psi\rangle$  est l'état à copier et  $|R\rangle$  est un état de référence ("feuille blanche"). *Indication:* Supposer que la transformation est possible pour une base, p.ex.  $|\psi\rangle = |H\rangle$  et  $|\psi\rangle = |V\rangle$ ; comment se transforme alors  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ ?

2. Avec le même type de preuve, vérifier qu'il est impossible de copier parfaitement un état quantique inconnu, même en utilisant un système auxiliaire (une "machine"):

$$|\psi\rangle \otimes |R\rangle \otimes |M\rangle \xrightarrow{?} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |M(\psi)\rangle. \quad (2.2)$$

Ici,  $|M\rangle$  est l'état initial de la machine,  $|M(\psi)\rangle$  serait l'état final (qui pourrait dépendre de l'état qui a été copié).

## 2.2 Clonage optimal

Dans cette section, on présente la transformation qui effectue le meilleur clonage possible d'un état inconnu (pour simplifier les calculs, on va se restreindre à vérifier la linéarité sur des états à coefficients réels sur la base de travail). Cette transformation utilise trois systèmes: le photon qu'on veut copier, celui sur lequel on va copier, et la "machine" — qui se trouve être un troisième photon. La transformation s'écrit dans la base de travail:

$$\begin{aligned} |H\rangle|H\rangle|H\rangle &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}|H\rangle|H\rangle|V\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}\left(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle\right)|H\rangle \\ |V\rangle|H\rangle|H\rangle &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}|V\rangle|V\rangle|H\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}\left(|V\rangle|H\rangle + |H\rangle|V\rangle\right)|V\rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

et on va vérifier qu'elle s'écrit de la même manière pour n'importe quel état  $|\psi\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle$ :

$$|\psi\rangle|H\rangle|H\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}|\psi\rangle|\psi\rangle|\psi^\perp\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}\left(|\psi\rangle|\psi^\perp\rangle + |\psi^\perp\rangle|\psi\rangle\right)|\psi\rangle. \quad (2.4)$$

où nous avons écrit  $|\psi^\perp\rangle = \sin\theta|H\rangle - \cos\theta|V\rangle$ . On appelle cette transformation *machine cloneuse de Bužek-Hillery*.

1. Ecrire le résultat de la transformation de  $|\psi\rangle|H\rangle|H\rangle$  en utilisant la linéarité et (2.3). *Indication:*  $|\psi\rangle|H\rangle|H\rangle = \cos\theta|H\rangle|H\rangle|H\rangle + \sin\theta|V\rangle|H\rangle|H\rangle \rightarrow \dots$
2. Prendre à présent l'expression (2.4), insérer partout  $|\psi\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle$  et  $|\psi^\perp\rangle = \sin\theta|H\rangle - \cos\theta|V\rangle$  et développer les termes. Vérifier qu'on trouve la même chose qu'au point 1. La transformation est donc linéaire. *Indication:* le calcul est long mais ne présente aucun piège.
3. Nous venons de montrer que la transformation est la même pour tout  $|\psi\rangle$ . Fixons alors  $|\psi\rangle = |H\rangle$  pour fixer les idées, sans perte de généralité. Après la transformation, on mesure chacun des trois photons dans la base  $H - V$ : en se référant à (2.3), compléter le tableau des résultats possibles:

Résultat	Probabilité
$ H\rangle H\rangle H\rangle$	2/3
$ H\rangle H\rangle V\rangle$	
$ H\rangle V\rangle H\rangle$	
$ H\rangle V\rangle V\rangle$	
$ V\rangle H\rangle H\rangle$	
$ V\rangle H\rangle V\rangle$	
$ V\rangle V\rangle H\rangle$	
$ V\rangle V\rangle V\rangle$	

4. Vérifier que la probabilité de trouver le premier photon dans l'état initial  $|H\rangle$  est  $\text{Prob}(H|H) = F = \frac{5}{6}$ . On appelle *fidélité* du clonage cette probabilité.
5. Vérifier que la fidélité est la même pour le deuxième photon (la copie).

## 2.3 Emission stimulée et clonage optimal

On considère l'émission d'un photon par désexcitation d'un électron dans un atome. En l'absence d'autres photons, on suppose que le photon émis peut être polarisé selon n'importe quelle polarisation, avec probabilité égale. Supposons cependant qu'un photon polarisé  $|H\rangle$  soit déjà présent avant l'émission. Il se trouve que:

- (i) La probabilité  $p$  que le nouveau photon soit  $|V\rangle$  n'a pas changé; on dit que l'*émission spontanée* est toujours présente;
- (ii) la probabilité d'émettre  $|H\rangle$  est cependant augmentée, et vaut  $2p$ ; on dit que l'émission d'un nouveau photon  $|H\rangle$  est *stimulée* par la présence d'un photon  $|H\rangle$ .

Ce mécanisme, découvert par Einstein en 1917, est à la base du fonctionnement du laser.

1. On envoie un photon  $|H\rangle$  sur un atome excité, et on trouve deux photons à la sortie. Quelle est la probabilité d'avoir deux  $|H\rangle$ ? Quelle est la probabilité d'avoir un  $|H\rangle$  et un  $|V\rangle$ ? *Indication:* il s'agit de probabilités conditionnelles: on sait qu'il y a deux photons, donc qu'il y a eu émission.
2. On prend un photon au hasard parmi les deux: vérifier que la probabilité de le trouver polarisé selon  $|H\rangle$  est  $\frac{5}{6}$ : le mécanisme d'émission stimulée/spontanée réalise l'amplification optimale!

## 2.4 Cloneuses $N \rightarrow M$

On peut généraliser la notion de machine cloneuse optimal au cas où on entre avec  $N$  photons et on veut en produire  $M > N$  copies. Sans entrer dans les détails, on propose d'étudier la fidélité en fonction de  $N$  et  $M$ . La formule est

$$F_{N \rightarrow M} = \frac{MN + M + N}{M(N + 2)}. \quad (2.5)$$

1. Vérifier que pour  $N = 1$  et  $M = 2$  on retrouve  $F = \frac{5}{6}$ .
2. Fixons  $M = N + 1$ : vérifier (éventuellement à l'aide de l'ordinateur) que  $F_{N \rightarrow N+1}$  tend vers 1 lorsque  $N$  devient grand. Interpréter: si on a un grand nombre de photons, la copie est presque parfaite.
3. Facultatif: à l'aide de l'ordinateur, dessiner  $F_{N \rightarrow M=N+k}$  en fonction de  $N$  pour quelques valeurs de  $k = M - N$  ( $k$  est le nombre de nouveaux photons produits). Interpréter.

## 2.5 Ouvertures

- D'où vient le fait que les opérations possibles sur les états quantiques doivent être *linéaires*?
- Comment fonctionne un laser?
- Qu'en serait-il de la cryptographie quantique, si le clonage parfait était possible?



# Thème 3

## Téléportation quantique

Ce texte est une trace pour guider l'étudiant dans la partie théorique de son travail de maturité. Il ne s'agit pas d'un texte parfaitement développé, mais d'une base à partir de laquelle l'étudiant développera son propre texte.

On considère trois photons polarisés. Le premier (A) est préparé dans la polarisation  $|\psi\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle$ ; les deux autres (B et C) sont préparés dans l'état intriqué  $|\Phi^+\rangle$ . On rappelle la base de Bell:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle), \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|H\rangle - |V\rangle|V\rangle), \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle), \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle). \end{aligned}$$

### 3.1 Protocole de téléportation

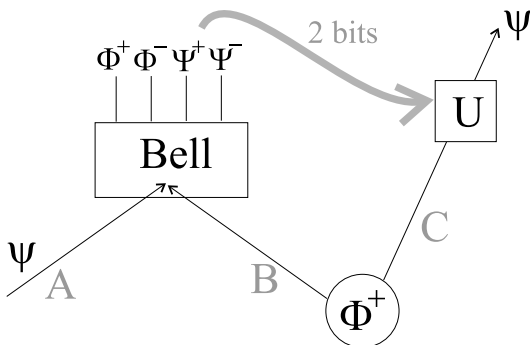


Figure 3.1: Montage pour la téléportation.

Le protocole de téléportation est schématisé dans la figure 3.1. On va en décomposer l'étude en plusieurs points; la synthèse sera faite au point 5.

1. Vérifier l'identité suivante:

$$\begin{aligned}
 (\cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle)_A |\Phi^+\rangle_{BC} &= \frac{1}{2} |\Phi^+\rangle_{AB} (\cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle)_C + \\
 &+ \frac{1}{2} |\Phi^-\rangle_{AB} (\cos\theta|H\rangle - \sin\theta|V\rangle)_C + \\
 &+ \frac{1}{2} |\Psi^+\rangle_{AB} (\cos\theta|V\rangle + \sin\theta|H\rangle)_C + \\
 &+ \frac{1}{2} |\Psi^-\rangle_{AB} (\cos\theta|V\rangle - \sin\theta|H\rangle)_C.
 \end{aligned}$$

Pour ce faire, il suffit de remplacer les états de Bell par leur forme explicite.

2. Sur les deux photons A-B on fait une "mesure de Bell", qui distingue entre les quatre états de Bell.

Compléter le tableau suivant:

Résultat de la mesure de A-B	Etat préparé en C	Probabilité
$ \Phi^+\rangle$	$\cos\theta H\rangle + \sin\theta V\rangle$	$\frac{1}{4}$
$ \Phi^-\rangle$		
$ \Psi^+\rangle$		
$ \Psi^-\rangle$		

3. On aimerait transformer  $\cos\theta|H\rangle - \sin\theta|V\rangle$  dans le vecteur initial  $|\psi\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle$ , c'est-à-dire effectuer la transformation:  $|H\rangle \rightarrow |T(H)\rangle = |H\rangle$ ,  $|V\rangle \rightarrow |T(V)\rangle = -|V\rangle$ . Pour qu'une opération sur un état quantique soit possible, il faut qu'elle soit *unitaire*, c'est-à-dire qu'elle préserve le produit scalaire (on propose d'accepter ici cette affirmation, et d'en étudier la raison plus tard). Vérifier que c'est bien le cas, c'est-à-dire que  $\langle T(H)|T(H)\rangle = \langle H|H\rangle$ ,  $\langle T(V)|T(V)\rangle = \langle V|V\rangle$  et  $\langle T(H)|T(V)\rangle = \langle H|V\rangle$ .
4. Trouver les transformations qui ramènent, respectivement,  $\cos\theta|V\rangle + \sin\theta|H\rangle$  et  $\cos\theta|V\rangle - \sin\theta|H\rangle$  sur  $|\psi\rangle$ . Vérifier que ces deux transformations sont aussi unitaires.
5. Conclure: le protocole de téléportation consiste à (i) effectuer une mesure de Bell sur le photon initial et un photon d'une paire intriquée; (ii) envoyer le résultat de la mesure de Bell à C, pour qu'on puisse, le cas échéant, effectuer la transformation convenable.

## 3.2 Analyse du transfert d'information

On mesure la particule C dans la base définie par  $|+\gamma\rangle = \cos\gamma|H\rangle + \sin\gamma|V\rangle$  et  $|-\gamma\rangle = \cos\gamma|V\rangle - \sin\gamma|H\rangle$ . Soient  $\text{Prob}(+\gamma)$  et  $\text{Prob}(-\gamma)$  les probabilités d'obtenir  $|+\gamma\rangle$ , respectivement  $|-\gamma\rangle$ .

1. L'état de A est préparé comme  $|\psi\rangle = |H\rangle$ . Donner  $\text{Prob}(+\gamma)$  et  $\text{Prob}(-\gamma)$  à la fin du protocole de téléportation. *Indication:* quel est l'état du photon C à la fin du protocole?

2. Supposer à présent qu'on fait la mesure selon  $\gamma$  sans tenir compte du résultat de la mesure de Bell (c'est-à-dire, sans effectuer la transformation qui ramène toujours à  $|\psi\rangle$ ). Quelles sont  $\text{Prob}(+\gamma)$  et  $\text{Prob}(-\gamma)$ ? *Indication:* Récrire le tableau de la section précédente pour  $|\psi\rangle = |H\rangle$ .
3. Refaire les points 1 et 2 en supposant cette fois que l'état de A est préparé comme  $|\psi\rangle = |V\rangle$ .
4. Quelqu'un, ayant lu des explications pour grand public de la téléportation, vient t'expliquer son idée pour envoyer de l'information plus vite que la lumière: *C'est évident! Lors de la mesure de Bell, l'état se transforme instantanément en l'état  $|\psi\rangle$  initial. Il suffit qu'Alice prépare le photon A soit en  $|H\rangle$ , soit en  $|V\rangle$ ; Bob reçoit instantanément cet état, et il peut distinguer entre  $|H\rangle$  et  $|V\rangle$ .* Pourquoi cette affirmation est-elle fausse?

### 3.3 Ouvertures

- D'où vient le fait que les opérations possibles sur les états quantiques doivent être *unitaires*?
- Que se passe-t-il si la particule téléportée, au lieu d'être dans un état  $|\psi\rangle$ , est elle-même intriquée avec une quatrième particule? *Indication:* dessine le schéma de l'expérience (connue sous le nom de "permutation d'intrication", "entanglement swapping").



# Thème 4

## Inégalités de Bell

*Ce texte est une trace pour guider l'étudiant dans la partie théorique de son travail de maturité. Il ne s'agit pas d'un texte parfaitement développé, mais d'une base à partir de laquelle l'étudiant développera son propre texte.*

### 4.1 Description quantique

On considère l'expérience de corrélations quantiques à deux particules schématisée dans la figure 4.1. La source prépare l'état "singlet"

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle). \quad (4.1)$$

Une particule est envoyée à Alice, qui mesure la polarisation dans la base définie par  $|+\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$  et  $|-\alpha\rangle = \cos\alpha|V\rangle - \sin\alpha|H\rangle$ . L'autre est envoyée à Bob, qui mesure la polarisation dans la base définie par  $|+\beta\rangle = \cos\beta|H\rangle + \sin\beta|V\rangle$  et  $|-\beta\rangle = \cos\beta|V\rangle - \sin\beta|H\rangle$ .

Pour chaque paire de particules envoyée, on écrira  $r_A(\alpha)$  le résultat (+1 ou -1) obtenu par Alice et  $r_B(\beta)$  le résultat (+1 ou -1) obtenu par Bob.

1. Vérifie, à l'aide des formules introduites au cours général, que les probabilités pour les résultats de cette expérience sont:

$$\text{Prob}(++|\alpha, \beta) = \text{Prob}(--|\alpha, \beta) = \frac{1}{4} [1 - \cos[2(\alpha - \beta)]], \quad (4.2)$$

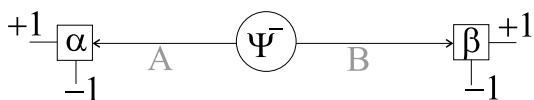


Figure 4.1: Montage pour l'expérience de Bell avec photons polarisés.

$$\text{Prob}(+-|\alpha, \beta) = \text{Prob}(-+|\alpha, \beta) = \frac{1}{4}[1 + \cos[2(\alpha - \beta)]] . \quad (4.3)$$

2. Vérifier que la valeur moyenne de  $r_A(\alpha)$  est 0, quel que soit  $\alpha$ ; de même pour  $r_B(\beta)$ .
3. Vérifier que la valeur moyenne du produit  $r_A(\alpha)r_B(\beta)$ , appelée *coefficient de corrélation*, est donnée par

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) = \langle r_A(\alpha)r_B(\beta) \rangle &= \text{Prob}(++|\alpha, \beta) + \text{Prob}(--|\alpha, \beta) - \text{Prob}(+-|\alpha, \beta) - \text{Prob}(-+|\alpha, \beta) = \\ &= -\cos[2(\alpha - \beta)] . \end{aligned} \quad (4.4)$$

4. Considérer le cas particulier  $\alpha = \beta$ : à partir des probabilités trouvées ci-dessus, conclure que  $r_A(\alpha)$  est égal à  $-r_B(\alpha)$  pour chaque paire de particules envoyées.

## 4.2 Tentatives d'explication classique

La physique quantique s'arrête aux probabilités précédentes et à leurs conséquences. On va essayer de trouver une explication classique à ces corrélations, et voir que ce n'est pas possible.

1. Une première explication classique serait la suivante: la première particule à être détectée (disons A) envoie à l'autre une information concernant la mesure  $\alpha$  qu'elle a subie et le résultat  $r_A(\alpha)$  qu'elle a donné. La particule B réagit en conséquence. Pourquoi cette explication n'est-elle pas possible? *Indication:* les mesures peuvent être faites à très grande distance, et peuvent être choisies juste avant que les particules arrivent.
2. L'échange d'un signal étant exclu, l'autre mécanisme possible pour avoir des corrélations est une préparation commune. Supposons alors que *les résultats de toutes les mesures possibles sont déjà établis au moment où les particules quittent la source*. Cela veut dire que les particules quittent la source, chacune avec une liste

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \{ \dots, r_A(\alpha), r_A(\alpha'), r_A(\alpha''), \dots \} \\ \lambda_B &= \{ \dots, r_B(\beta), r_B(\beta'), r_B(\beta''), \dots \} . \end{aligned}$$

Traditionnellement, on appelle  $\lambda = \{\lambda_A, \lambda_B\}$  la "variable cachée", car elle n'est pas nécessaire dans le calcul quantique — mais est censée l'expliquer. La variable cachée peut être différente d'une paire de particules à l'autre.

3. Se convaincre que: si  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$  sont tels que  $r_A(x) = -r_B(x)$  pour toute orientation de mesure  $x$ , alors la variable cachée reproduit les prédictions quantiques dans le cas  $\alpha = \beta$ . Le théorème de Bell (section 4.3) va cependant montrer qu'aucune variable cachée ne peut reproduire la prédiction quantique dans *tous* les cas.

### 4.3 Théorème de Bell

1. Supposer qu'il existe la variable cachée: pour chaque  $\lambda$ , on peut choisir quatre directions de mesure ( $\alpha$  et  $\alpha'$  chez Alice,  $\beta$  et  $\beta'$  chez Bob) et former le nombre

$$S(\lambda) = (r_A(\alpha) + r_A(\alpha')) r_B(\beta) + (r_A(\alpha) - r_A(\alpha')) r_B(\beta'). \quad (4.5)$$

Vérifier que  $S(\lambda)$  ne peut prendre que les valeurs  $+2$  ou  $-2$ . *Indication:* on rappelle que les  $r$  ne peuvent prendre que les valeurs  $+1$  ou  $-1$ .

2. Remarquer cependant que  $S(\lambda)$  ne peut pas être mesurée directement sur chaque paire, puisque sa définition implique deux mesures chez Alice et deux chez Bob; alors que, sur chaque particule, Alice et Bob ne peuvent faire qu'une seule mesure chacun.
3. On considère toute l'expérience, c'est-à-dire qu'on envoie un grand nombre de particules. On peut donc calculer, en principe, la valeur moyenne de  $S$ . Vérifier que

$$\langle S \rangle = \langle r_A(\alpha) r_B(\beta) \rangle + \langle r_A(\alpha') r_B(\beta) \rangle + \langle r_A(\alpha) r_B(\beta') \rangle - \langle r_A(\alpha') r_B(\beta') \rangle. \quad (4.6)$$

*Indication:* utiliser la définition de la moyenne,  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$  (pour  $N$  grand).

4. Reprenant le résultat du point 1, établir l'*inégalité de Bell*

$$|\langle S \rangle| \leq 2. \quad (4.7)$$

5. Constater que la valeur moyenne de  $S$  s'écrit

$$\langle S \rangle = E(\alpha, \beta) + E(\alpha', \beta) + E(\alpha, \beta') - E(\alpha', \beta') \quad (4.8)$$

et elle est donc la somme de quatre valeurs moyennes mesurables, car chacune n'implique qu'une mesure chez Alice et une chez Bob

6. Remplacer l'expression quantique (4.4) de  $E(\alpha, \beta)$  dans (4.8). Vérifier que pour des choix judicieux des directions de mesure, par exemple,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha' = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{8}$  et  $\beta' = -\frac{\pi}{8}$ , on obtient  $\langle S \rangle = -2\sqrt{2}$ , en violation de l'inégalité de Bell (4.7).
7. Trouver des directions de mesure pour lesquelles  $\langle S \rangle = +2\sqrt{2}$ ; en trouver aussi pour lesquelles  $\langle S \rangle = 2$  (pas de violation).
8. Conclure: l'hypothèse de la variable cachée conduit à l'inégalité de Bell; la physique quantique prédit que l'inégalité peut être violée, donc...

### 4.4 Ouvertures

- Nous venons de dériver l'inégalité CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt, 1969); l'inégalité originale de Bell (1964) était légèrement différente. La trouver et l'analyser.
- Approfondir la notion de mesures incompatibles en physique quantique.



## Thème 5

# L'argument GHZ pour la non-localité

*Ce texte est une trace pour guider l'étudiant dans la partie théorique de son travail de maturité. Il ne s'agit pas d'un texte parfaitement développé, mais d'une base à partir de laquelle l'étudiant développera son propre texte.*

On considère le montage expérimental décrit dans la figure 5.1 pour trois photons. La source produit l'état

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle|V\rangle). \quad (5.1)$$

Chacun des physiciens Alice, Bob et Charles mesure soit dans la base "diagonale" (notée  $X$ ) soit dans la base "circulaire" (notée  $Y$ ). On rappelle que les états associés, respectivement, aux résultats  $+1$  et  $-1$  sont:

$$\text{Pour la base X: } |\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle \pm |V\rangle). \quad (5.2)$$

$$\text{Pour la base Y: } |\pm y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle \pm i|V\rangle). \quad (5.3)$$

Pour simplifier, on écrira les états de trois particules comme (p.ex.)  $|+x, -x, +x\rangle \equiv |+x\rangle|-x\rangle|+x\rangle$ .

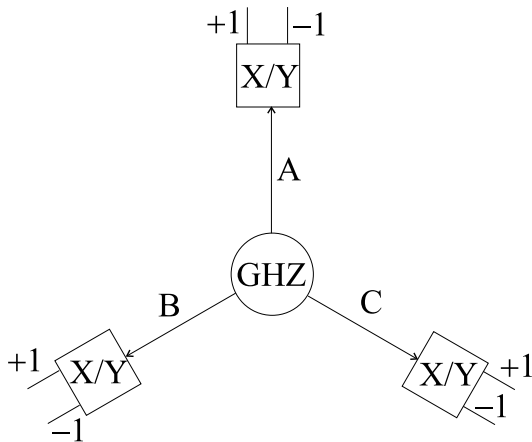


Figure 5.1: Montage pour l'argument GHZ.

## 5.1 Mesure selon X-X-X

1. Vérifier que, dans le cas où A, B et C mesurent selon X, les huit résultats possibles apparaissent avec les probabilités suivantes:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(+++|xxx) &= |\langle +x, +x, +x|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(++-|xxx) &= |\langle +x, +x, -x|GHZ\rangle|^2 = 0 \\
\text{Prob}(+-+|xxx) &= |\langle +x, -x, +x|GHZ\rangle|^2 = 0 \\
\text{Prob}(-+-|xxx) &= |\langle +x, -x, -x|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(-++|xxx) &= |\langle -x, +x, +x|GHZ\rangle|^2 = 0 \\
\text{Prob}(-+-|xxx) &= |\langle -x, +x, -x|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(- - +|xxx) &= |\langle -x, -x, +x|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(- - -|xxx) &= |\langle -x, -x, -x|GHZ\rangle|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Suggestion: développer les états à trois photons dans la base de travail, p.ex.

$$\begin{aligned}
|+x, +x, +x\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|HHH\rangle + |HHV\rangle + |HVV\rangle + |VHH\rangle + |VHV\rangle + |VVH\rangle + |VVV\rangle).
\end{aligned}$$

2. On écrira  $r_A(x)$ ,  $r_B(x)$  et  $r_C(x)$  les résultats d'une mesure selon X chez A, B et C (chaque  $r$  peut valoir +1 ou -1). Vérifier que le résultat obtenu sous le point 1 implique  $\text{Prob}(r_A(x) = +1) = \text{Prob}(r_A(x) = -1) = \frac{1}{2}$  et de même pour B et C; et qu'il implique aussi

$$r_A(x)r_B(x)r_C(x) = +1 \quad \text{avec certitude} \quad (5.4)$$

En d'autres termes, lorsque A, B et C mesurent tous selon X, le résultat de chacun semble aléatoire; cependant, les trois résultats s'arrangent toujours pour que leur produit soit +1.

## 5.2 Mesure selon X-Y-Y

1. Vérifier que, dans le cas où A mesure selon X, B et C selon y, les huit résultats possibles apparaissent avec les probabilités suivantes:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(+++|xyy) &= |\langle +x, +y, +y|GHZ\rangle|^2 = 0 \\
\text{Prob}(++-|xyy) &= |\langle +x, +y, -y|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(+-+|xyy) &= |\langle +x, -y, +y|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(-+-|xyy) &= |\langle +x, -y, -y|GHZ\rangle|^2 = 0 \\
\text{Prob}(-++|xyy) &= |\langle -x, +y, +y|GHZ\rangle|^2 = \frac{1}{4} \\
\text{Prob}(-+-|xyy) &= |\langle -x, +y, -y|GHZ\rangle|^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Prob}(- - +|xyy) &= |\langle -x, -y, +y|GHZ \rangle|^2 = 0 \\ \text{Prob}(- - -|xyy) &= |\langle -x, -y, -y|GHZ \rangle|^2 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. En déduire, par symétrie, qu'on obtient le même type de tableau lorsque B mesure selon X, A et C selon y, et lorsque C mesure selon X, A et B selon y.
3. On écrira  $r_A(y)$ ,  $r_B(y)$  et  $r_C(y)$  les résultats d'une mesure selon y chez A, B et C. Vérifier que le résultat obtenu sous le point 1 implique

$$r_A(x)r_B(y)r_C(y) = -1 \quad \text{avec certitude} \quad (5.5)$$

$$r_A(y)r_B(x)r_C(y) = -1 \quad \text{avec certitude} \quad (5.6)$$

$$r_A(y)r_B(y)r_C(x) = -1 \quad \text{avec certitude} \quad (5.7)$$

En d'autres termes, lorsqu'une personne mesure selon X et les deux autres selon Y, les trois résultats s'arrangent toujours pour que leur produit soit  $-1$ .

### 5.3 Modèle "raisonnable"

On vient donc de constater que les résultats de certaines mesures de A, B et C sont fortement corrélés. On va chercher une explication de type classique pour ces corrélations, et voir qu'il n'y en a aucune.

1. Expliquer pourquoi il est impossible que la particule A informe les autres sur la mesure à laquelle elle a été soumise. *Indication:* A, B et C peuvent être loin les uns des autres.
2. Supposer alors que les trois particules quittent la source avec une information commune, de sorte que chacune "sait" déjà quel résultat donner en cas de mesure selon X et selon Y. C'est-à-dire, supposer que les particules quittent la source en s'étant accordées sur une liste de six nombres

$$\lambda = \{r_A(x), r_A(y); r_B(x), r_B(y); r_C(x), r_C(y)\} \quad (5.8)$$

qui vont satisfaire les quatre relations (5.4), (5.5), (5.6) et (5.7). Vérifier qu'aucune des listes  $\lambda$  ne peut satisfaire ces relations! *Indications:* se souvenir que chacun des  $r$  ne peut valoir que  $+1$  ou  $-1$ ; il y a  $2^6 = 64$  listes possibles, on peut en essayer quelques-unes pour se faire la main, mais il conviendra de dégager une démonstration abstraite au lieu de les vérifier toutes!

### 5.4 Ouvertures

- Etudier la notion de "mesures incompatibles" en physique quantique.



# Thème 6

## Frontière entre classique et quantique

*Ce texte est une trace pour guider l'étudiant dans la partie théorique de son travail de maturité. Il ne s'agit pas d'un texte parfaitement développé, mais d'une base à partir de laquelle l'étudiant développera son propre texte.*

### 6.1 Pre-mesure et mesure

Le but de cette section est de montrer comment on décrit en physique quantique la "pre-mesure" à travers la notion d'intrication.

1. Considérer la mesure de la polarisation d'un photon avec un séparateur de polarisation, figure 6.1. Constater qu'on ne mesure pas "directement" la polarisation: on mesure une "position" qu'on sait par ailleurs être corrélée avec la polarisation.
2. Expliquer la description quantique:

$$(\cos \theta|H\rangle + \sin \theta|V\rangle)|x\rangle \rightarrow \cos \theta|H\rangle|x\rangle + \sin \theta|V\rangle|y\rangle \quad (6.1)$$

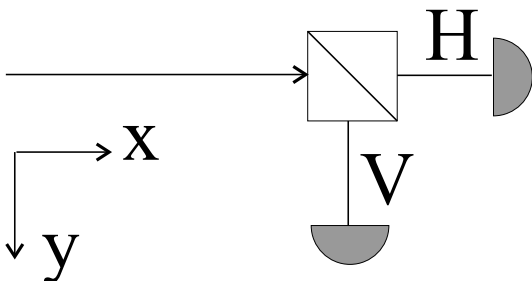


Figure 6.1: Mesure de la polarisation d'un photon.

et compléter le tableau suivant pour les probabilités jointes:

Résultat d'une mesure	Probabilité
Polarisation $ H\rangle$ dans le chemin $ x\rangle$	$\cos^2 \theta$
Polarisation $ V\rangle$ dans le chemin $ x\rangle$	
Polarisation $ H\rangle$ dans le chemin $ y\rangle$	
Polarisation $ V\rangle$ dans le chemin $ y\rangle$	

Remarquer que ceci n'explique pas *pourquoi* lors d'une mesure individuelle on obtient *tel résultat et pas tel autre*. En fait, ce formalisme explique comment on couple le "système à mesurer" (ici, la polarisation) à la "variable à mesurer" ou "pointeur" (ici, le chemin). En ce sens, on parle de pre-mesure et non pas de mesure. La pre-mesure est donc une opération

$$\begin{aligned} |H\rangle|x\rangle &\longrightarrow |H\rangle|x\rangle \\ |V\rangle|x\rangle &\longrightarrow |V\rangle|y\rangle \end{aligned}$$

où  $|x\rangle$  et  $|y\rangle$  sont des états orthogonaux et donc parfaitement discernables.

3. Pour qu'une opération sur un état quantique soit possible, il faut qu'elle soit *unitaire*, c'est-à-dire qu'elle préserve le produit scalaire (on propose d'accepter ici cette affirmation, et d'en étudier la raison plus tard). En d'autres termes: soit  $|T(\Psi)\rangle$  la transformation de l'état  $|\Psi\rangle$  par la transformation  $T$ . Alors  $T$  est unitaire si et seulement si  $\langle T(\Psi)|T(\Phi)\rangle = \langle \Psi|\Phi\rangle$  quels que soient les états  $|\Psi\rangle$  et  $|\Phi\rangle$ .

Supposons que la pre-mesure suivante soit possible:

$$\begin{aligned} |H\rangle|x\rangle &\xrightarrow{?} |H\rangle|x\rangle \\ |+\rangle|x\rangle &\xrightarrow{?} |+\rangle|y\rangle \end{aligned}$$

avec  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ . Dans ce cas, en mesurant le chemin après la pre-mesure, on pourrait distinguer parfaitement  $|H\rangle$  de  $|+\rangle$ , alors que ces deux états de polarisation ne sont pas orthogonaux. Montrer en effet que cette hypothétique pre-mesure n'est pas unitaire. *Indication:* calculer le produit scalaire de l'état de la première ligne avec celui de la deuxième ligne, avant et après la flèche.

## 6.2 Décohérence

La décohérence est un processus de "mesure par l'environnement". Un système physique n'est jamais parfaitement isolé. Même si on prépare un état précis du système au temps  $t = 0$ , au cours du temps le système va se coupler à son environnement. On dit de manière imagée qu'une partie de l'information contenue dans le système se dissipe dans l'environnement, ou encore, que l'environnement contient de l'information sur l'état du système.

Formellement, on va reprendre le formalisme de la pre-mesure en utilisant l'environnement comme pointeur.

On considère donc l'évolution avec le temps

$$\begin{aligned} |H\rangle|E\rangle &\xrightarrow{t} |H\rangle|E_H(t)\rangle \\ |V\rangle|E\rangle &\xrightarrow{t} |V\rangle|E_V(t)\rangle \end{aligned} \tag{6.2}$$

où  $|E_H(t)\rangle$  et  $|E_V(t)\rangle$  sont deux états de l'environnement. Cette fois, on ne suppose pas que ces états sont orthogonaux. Mais on peut toujours les décomposer sur une base; le cas non-trivial le plus simple est

$$\begin{aligned} |E_H(t)\rangle &= \sqrt{\lambda(t)}|E_1\rangle + \sqrt{1-\lambda(t)}|E_2\rangle \\ |E_V(t)\rangle &= \sqrt{\lambda(t)}|E_2\rangle + \sqrt{1-\lambda(t)}|E_1\rangle \end{aligned}$$

où  $|E_1\rangle$  et  $|E_2\rangle$  sont orthogonaux.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on omet presque toujours d'écrire la dépendance en  $t$  de  $|E_H\rangle$ ,  $|E_V\rangle$  et  $\lambda$ .

1. Calculer le produit scalaire  $\chi = \langle E_H|E_V\rangle$ ; discuter en fonction de  $\lambda$  (surtout les cas extrêmes  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $\lambda = 1$ ).
2. En regardant (6.2), on voit qu'au temps  $t = 0$  on veut  $|E_H\rangle = |E_V\rangle = |E\rangle$ . Que doit valoir  $\lambda(t = 0)$ , et comment s'écrit alors  $|E\rangle$  dans la base formée par  $|E_1\rangle$  et  $|E_2\rangle$ ?
3. On commence avec l'état  $|\psi\rangle|E\rangle = (\cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle)|E\rangle$ . Vérifier que l'état du système et de l'environnement après un temps  $t$  s'écrit

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \left(\sqrt{\lambda}\cos\theta|H\rangle + \sqrt{1-\lambda}\sin\theta|V\rangle\right)|E_1\rangle + \left(\sqrt{1-\lambda}\cos\theta|H\rangle + \sqrt{\lambda}\sin\theta|V\rangle\right)|E_2\rangle = \\ &\equiv |\psi_1\rangle|E_1\rangle + |\psi_2\rangle|E_2\rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

4. Au temps  $t$  on effectue une mesure de la polarisation dans la base définie par  $|+\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$  et  $|-\alpha\rangle = \cos\alpha|V\rangle - \sin\alpha|H\rangle$ . Comprendre pourquoi

$$\text{Prob}(\pm\alpha|\theta, \lambda) = \text{Prob}(\pm\alpha|\psi_1) + \text{Prob}(\pm\alpha|\psi_2) = |\langle\pm\alpha|\psi_1\rangle|^2 + |\langle\pm\alpha|\psi_2\rangle|^2. \quad (6.4)$$

*Indication:* si on mesurait en même temps l'environnement, on pourrait distinguer parfaitement entre  $|E_1\rangle$  et  $|E_2\rangle$ . Or, si on trouve  $|E_1\rangle$  pour l'environnement, quel est l'état du système?

5. Calculer explicitement

$$\begin{aligned} \text{Prob}(+\alpha|\theta, \lambda) &= \left|\sqrt{\lambda}\cos\theta\cos\alpha + \sqrt{1-\lambda}\sin\theta\sin\alpha\right|^2 + \left|\sqrt{1-\lambda}\cos\theta\cos\alpha + \sqrt{\lambda}\sin\theta\sin\alpha\right|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\cos 2\alpha + \chi\sin 2\theta\sin 2\alpha\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

où pour la dernière ligne on a utilisé  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$  et  $2\sin x\cos x = \sin 2x$ . Constater que le couplage avec l'environnement apparaît uniquement à travers le produit scalaire  $\chi = \langle E_H|E_V\rangle$ .

6. Ecrire explicitement  $\text{Prob}(-\alpha|\theta, \lambda) = 1 - \text{Prob}(+\alpha|\theta, \lambda)$ .
7. On va considérer à partir de maintenant le cas  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ : récrire  $\text{Prob}(+\alpha|\theta, \lambda)$  et  $\text{Prob}(-\alpha|\theta, \lambda)$  pour ce cas. Dessiner ces probabilités en fonction de  $\theta$  pour  $\chi = 1$ ,  $\chi = \frac{1}{2}$ ,  $\chi = 0$ .
8. On appelle *visibilité* des fringes d'interférence la quantité  $V = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}}$  avec  $P_{max} = \max_{\theta} [\text{Prob}(-\alpha|\theta, \lambda)]$  et  $P_{min} = \min_{\theta} [\text{Prob}(-\alpha|\theta, \lambda)]$ . Vérifier que  $V = \chi$  dans notre cas. A quoi correspond la visibilité sur les courbes tracées au point précédent? En particulier, que signifie  $V = 1$ ? Et  $V = 0$ ?

9. Souvent on a  $\chi(t) = e^{-t/\tau}$ , où  $\tau$  est appelé "temps de décohérence". Dessiner cette fonction. Intuitivement, si l'interaction avec l'environnement est forte,  $\tau$  va-t-il diminuer ou augmenter?

### 6.3 Ouvertures

- D'où vient le fait que les opérations possibles sur les états quantiques doivent être *unitaires*?
- Comprendre ce qu'est le "problème de la mesure" en physique quantique. La décohérence est-elle une solution à ce problème?