M4 MOMENT D'INERTIE

I. INTRODUCTION

Le moment d'inertie est une notion importante lorsque l'on traite la dynamique du solide et plus particulièrement les mouvements de rotation de ce solide par rapport à un axe donné. Par exemple, l'énergie cinétique de rotation d'un corps ne dépend pas uniquement de la masse M, mais également de sa répartition spatiale autour de l'axe de rotation. Pour tenir compte de cet aspect géométrique, on introduit la notion de moment d'inertie.

II. THEORIE

Considérons un solide en rotation autour de l'axe Z avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Chaque élément de masse m_i décrit un cercle de rayon R_i avec la vitesse $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Le moment cinétique total $\vec{L}$ est la somme de tous les moments cinétiques élémentaires $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$.

Les lettre en gras sur le graphique indiquent des vecteurs.

$$R_i = |\vec{r}_i| \sin \alpha_i$$
$$v_i = |\vec{v}_i| = |\vec{\omega}| R_i$$

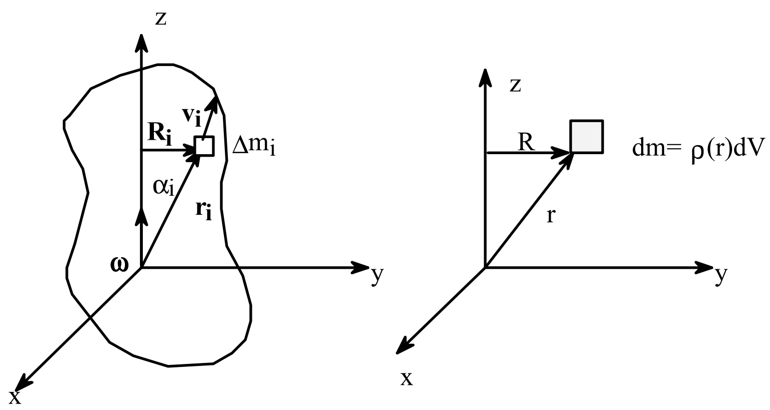

Figure 1

La composante du moment cinétique total suivant l'axe de rotation sera donc :

$$L_i = \sum_i L_i \sin \alpha_i = \sum_i m_i r_i v_i \sin \alpha_i = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \left[\sum_i m_i R_i^2 \right] \omega \quad (1)$$

L'expression $\sum_i m_i R_i^2$ est appelée moment d'inertie I_z par rapport à l'axe de rotation Oz.

En considérant des éléments de masse infinitésimaux, I s'exprime à l'aide d'une intégrale de volume

$$I = \int_{Volume} R^2 dm = \int_{Volume} \rho(\vec{r}) R^2 dV \quad (2)$$

où $\rho(\vec{r})$ est la densité au point $\vec{r}$ du corps et R est le rayon de rotation de l'élément de masse $dm = \rho(\vec{r})\, dV$.

Le moment d'inertie décrit donc la répartition spatiale de la masse par rapport à l'axe considéré.

Dans le cas où la direction du moment cinétique total coïncide avec l'axe de rotation (rotation suivant un axe principal d'inertie) on a :

(3) $$\vec{L} = I_\omega \vec{\omega}$$

et la loi du mouvement exprimée par le théorème du moment cinétique

(4) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

devient:

(5) $$\vec{M} = I_\omega \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

où $\vec{M}$ est le moment des forces agissant sur le corps par rapport à l'axe Oz.

Règle de Steiner

Si l'on connaît le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe A passant par son centre de masse, son moment d'inertie par rapport à un axe B parallèle à A est donné par la relation

(6) $$I_B = I_A + M \cdot d^2$$

où d est la distance entre les axes A et B

M est la masse totale du corps.

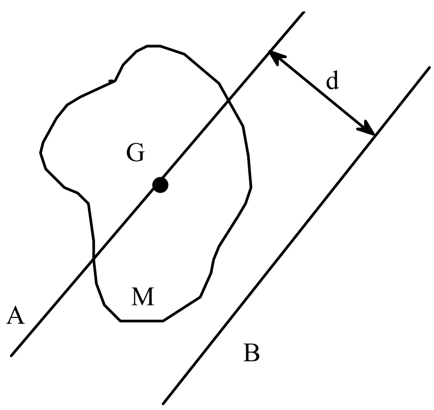

Figure 2

Moment d'inertie de trois corps simples

disque (ou cylindre) de rayon R : $I = \frac{1}{2}MR^2$

anneau (ou tube) mince de rayon R : $I = MR^2$

sphère de rayon R : $I = \frac{2}{5}MR^2$

III. EXPERIENCES

a) Pendule de torsion

Il est réalisé, dans notre cas, par un disque homogène suspendu en son centre de masse à un fil. Lorsqu'on écarte le corps de sa position d'équilibre d'un angle ϕ, le fil engendre un couple de rappel M proportionnel à l'angle de torsion ϕ.

(7) $$M = - D \cdot \phi$$

D = moment de rappel du fil de suspension ou constante de torsion

Par le théorème du moment cinétique et dans le cas où les frottements sont négligés, on a :

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\phi}{dt} = -D\phi$$

Cette équation différentielle admet pour solution un mouvement harmonique de période T :

(8) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

b) Pendule de Poggendorf

Dans ce genre de pendule, une barre horizontale suspendue à un fil supporte deux disques semblables de masse m placés à une distance d de part et d'autre du centre de masse de la barre. Les disques peuvent être soit solidaires de la barre, soit tourner librement sur des pivots.

Lorsque les deux disques sont solidaires de la barre, le moment d'inertie total est :

(9) $$I_2^{total} = I_{barre} + 2I_{disque} + 2md^2$$

Lorsqu'un disque peut tourner librement, son moment d'inertie propre n'intervient plus et le moment d'inertie total s'écrit :

(10) $$I_1^{total} = I_{barre} + I_{disque} + 2md^2$$

Finalement lorsque les deux disques sont libres de tourner, leurs moments d'inertie n'interviennent plus et le moment d'inertie total est simplement :

(11) $$I_0^{total} = I_{barre} + 2md^2$$

IV. MANIPULATIONS

A) Mesure de la constante de torsion D du fil et du moment d'inertie d'un disque

1) Mesurer la période T du disque en comptant au moins 20 oscillations:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

2) Rajouter au disque une couronne cylindrique de masse M dont le moment d'inertie est donné par $I' = MR^2$ et mesurer alors la période T' du système couronne et disque :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I + I'}{D}}$$

3) Des équations (a) et (b), on peut calculer la valeur de I et D en fonction de I', T et T'.

B) Moment d'inertie d'une sphère

1) En tenant compte de la constante de torsion déterminée sous A, mesurer le moment d'inertie de la sphère à l'aide du pendule de torsion.

2) Calculer le moment d'inertie de la sphère et comparer avec votre résultat expérimental.

C) Pendule de Poggendorf

1) Mesurer les périodes T_0, T_1 et T_2 correspondant aux moments d'inertie I_0^{total}, I_1^{total}, I_2^{total} (les indices 0,1 et 2 représentent le nombre de masses fixes). Déterminer T_n (n = 0, 1, 2) sur un minimum de 10 oscillations.

   Pour déterminer le moment d'inertie de la barre (ainsi que la constante de torsion du fil), nous pouvons écrire l'équation (a) sous la forme:

$$\frac{D}{4\pi^2}T_n^2 = I_n^{total} = I_{barre} + I_n$$

$$\text{où} \quad I_n = nI_{disque} + 2md^2 \qquad n = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{ aucune masse fixe} \\ 1 \Rightarrow \text{ une masse fixe} \\ 2 \Rightarrow \text{ deux masses fixes} \end{cases}$$

   <u>Rappel</u> : $I_{disque} = \frac{1}{2}MR^2$ (la valeur de la masse est gravée sur chaque objet)

2) Porter I_n en fonction de T_n^2 et déterminer le moment d'inertie de la barre ainsi que la constante de torsion du fil. I_n en fonction de T_n^2 donne une droite de pente $D/(4\pi^2)$ (où D est la constante de torsion du fil) et d'abscisse $-I_{barre}$.

<u>Rappel</u> :

$$I_n = \frac{D}{4\pi^2}T_n^2 - I_{barre}$$