

Correction du TP10 - Variables aléatoires continues

Exercice 5.7

L'énoncé nous donne les informations suivantes :

$$\begin{aligned}X_A &\sim N(15, 100) \\ X_B &\sim N(20, 2025)\end{aligned}$$

1. On note $Y = 3X_A + 2X_B$ la valeur du portefeuille. L'espérance de Y se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}E[Y] &= E[3X_A + 2X_B] \\ &= E[3X_A] + E[2X_B] \\ &= 3 \cdot E[X_A] + 2 \cdot E[X_B] \\ &= 3 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 85\end{aligned}$$

La variance de Y se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}Var[Y] &= Var[3X_A + 2X_B] && (1) \\ &= Var[3X_A] + Var[2X_B] && (2) \\ &= 3^2 \cdot Var[X_A] + 2^2 \cdot Var[X_B] \\ &= 9 \cdot 100 + 4 \cdot 2025 = 9000\end{aligned}$$

Le passage entre (1) et (2) est autorisé car on admet l'indépendance entre X_A et X_B . Puisque X_A et X_B sont des variables aléatoires normalement distribuées et que Y est une combinaison linéaire de ces deux, nous pouvons écrire

$$Y \sim N(85, 9000)$$

2. La valeur du portefeuille au temps t_0 est de :

$$y(t_0) = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 17 = 70 \text{ francs}$$

Au temps t_1 , c'est-à-dire dans un an, on souhaiterait que le portefeuille ait rapporté plus de 30%. La valeur du portefeuille devrait alors dépasser les 130% de 70 francs. Autrement dit, dépasser

$$y(t_1) = \frac{130}{100} \cdot 70 = 91 \text{ francs}$$

On s'intéresse à la probabilité que la valeur du portefeuille dépasse 91 francs :

$$\begin{aligned}P(Y > 91) &= 1 - P(Y < 91) \\ &= 1 - P\left(\frac{Y - 85}{\sqrt{9000}} < \frac{91 - 85}{\sqrt{9000}}\right)\end{aligned}$$

Nous créons une nouvelle variable aléatoire $Z = \frac{Y-85}{\sqrt{9000}}$. Il s'agit d'une variable normale centrée-réduite. Ainsi,

$$Z \sim N(0, 1)$$

Ce qui nous permet d'utiliser la notation

$$\begin{aligned} P(Y > 91) &= 1 - P\left(Z < \frac{91 - 85}{\sqrt{9000}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{91 - 85}{\sqrt{9000}}\right) \\ &= 1 - 0.5249 = 0.4751 \end{aligned}$$

Où $\Phi(z)$ représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite évaluée au point z .

Exercice 5.9

Corrigé au séminaire

Exercice 5.23

Corrigé au séminaire