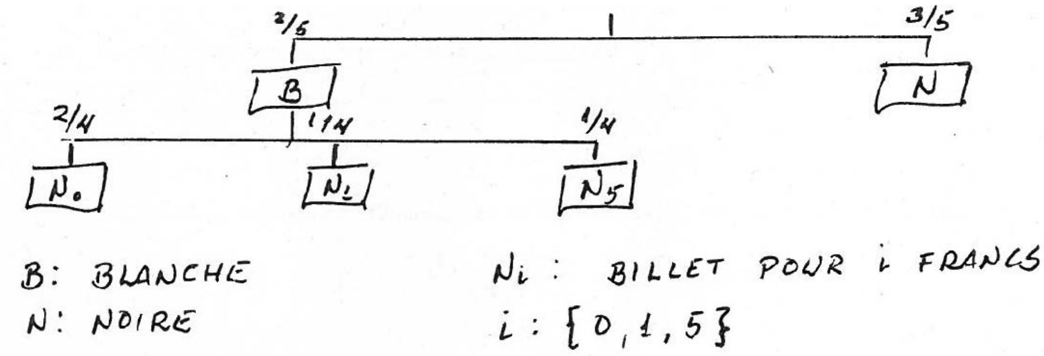
Correction du TP7 - Calcul des probabilités

1 Exercice 3.19 du recueil d'exercices



X : Montant d'argent gagné au jeu

1. Calculez la probabilité qu'il ne gagne absolument rien.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(B) * P(N_0) \\ &= 2/5 * 2/4 \\ &= 1/5 \end{aligned}$$

2. Calculez la probabilité qu'il gagne au moins deux francs.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(B) * P(N_5) \\ &= 2/5 * 1/4 \\ &= 1/10 \end{aligned}$$

3. Calculez la probabilité qu'il tire une boule blanche et qu'il gagne un franc.

$$\begin{aligned} P(B \cap X=1) &= P(X=1|B) * P(B) \\ &= 1/4 * 2/5 \\ &= 1/10 \end{aligned}$$

4. Frédéric y gagné un franc, calculez la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche.

$$\begin{aligned}
P(B|X=1) &= \frac{P(B\cap X=1)}{P(X=1)} \\
&= \frac{1/10}{P(N)+P(B)P(N_1)} \\
&= \frac{1/10}{3/5+2/5*1/4} \\
&= \frac{1/10}{7/10} \\
&= 1/7
\end{aligned}$$

5. Sachant que Frédéric a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité qu'il gagne un franc?

$$\begin{aligned}
P(X=1|B) &= \frac{P(B\cap X=1)}{P(B)} \\
&= \frac{1/10}{2/5} \\
&= 1/4
\end{aligned}$$

2 Exercice 3.20 du recueil d'exercices

- A $\longrightarrow$ "Abel meurt"
- B $\longrightarrow$ "Bill meurt"
- T $\longrightarrow$ "Tim meurt"
- G $\longrightarrow$ "Le gardien dit que Tim sera mis en liberté

$P(A) = P(B) = P(T) = \frac{1}{3}$

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)\cdot P(A)}{P(G|A)\cdot P(A)+P(G|B)\cdot P(B)+P(G|T)\cdot P(T)}$$

$$P(A|G) = \frac{1/2\cdot 1/3}{1/2\cdot 1/3+1\cdot 1/3+0\cdot 1/3} = P(A)$$

En fait, G ne donne aucune nouvelle information à Abel sur sa probabilité de mourir, car il sait déjà que Bill ou Tim, l'un au moins, va être mis en liberté.

On obtient le même résultat si on remplace Tim par Bill dans l'événement G.

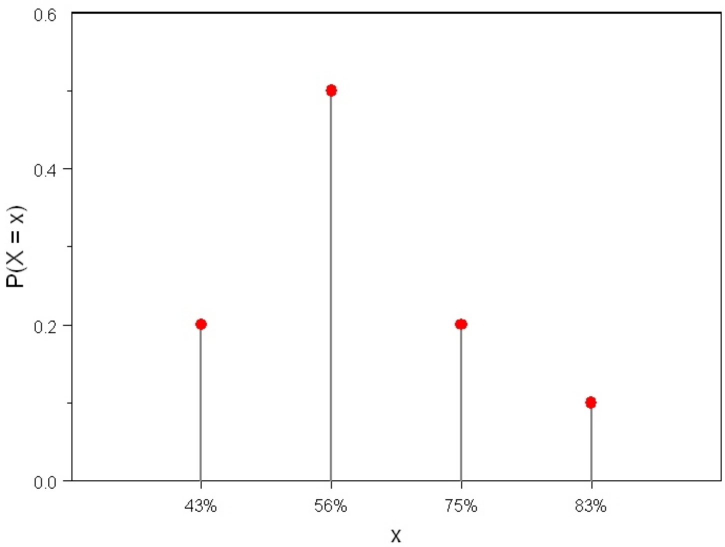
3 Exercice 4.2 du recueil d'exercices

1. Le taux de remplissage X de la *business class* du vol Genève-Mexico est connu:

x	43%	56%	75%	83%
$\mathrm{P}(X = x)$	0.2	0.5	0.2	0.1

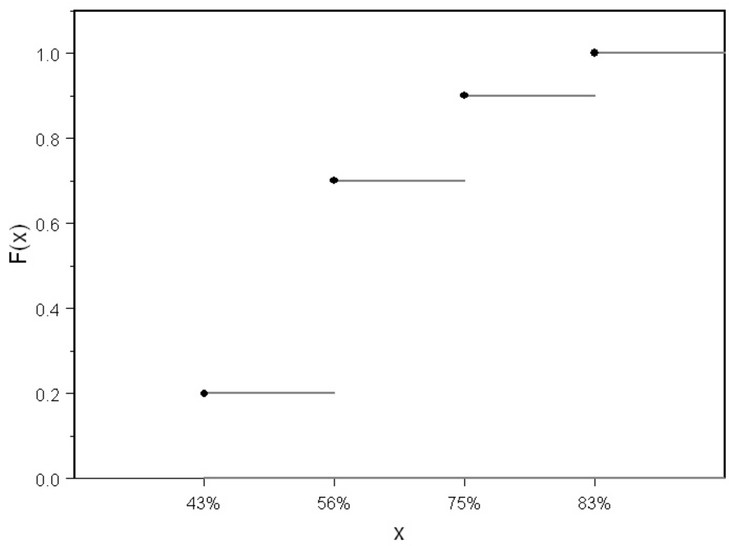
Le prix du billet pour cette classe est de 2200 CHF.

(a) Construire le graphe de la distribution de probabilité.



(b) Établir la fonction de répartition $F(x)$. Tracer cette fonction.

$$F(x) = \begin{cases} 0.0 & \text{si} \quad x < 43\% \\ 0.2 & \text{si} \quad 43\% \leq x < 56\% \\ 0.7 & \text{si} \quad 56\% \leq x < 75\% \\ 0.9 & \text{si} \quad 75\% \leq x < 83\% \\ 1.0 & \text{si} \quad x \geq 83\% \end{cases}$$



(c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P(X = x_i)$
$= 0.43 \cdot 0.2 + 0.56 \cdot 0.5 + 0.75 \cdot 0.2 + 0.83 \cdot 0.1$
$= 0.599$
$= 59.9\%$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
$= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - [E(X)]^2$
$= 0.43^2 \cdot 0.2 + 0.56^2 \cdot 0.5 + 0.75^2 \cdot 0.2 + 0.83^2 \cdot 0.1 - 0.599^2$
$= 0.016369$

2. Le taux de remplissage de la classe *economy* pour le même vol est donné par la fonction de répartition suivante:

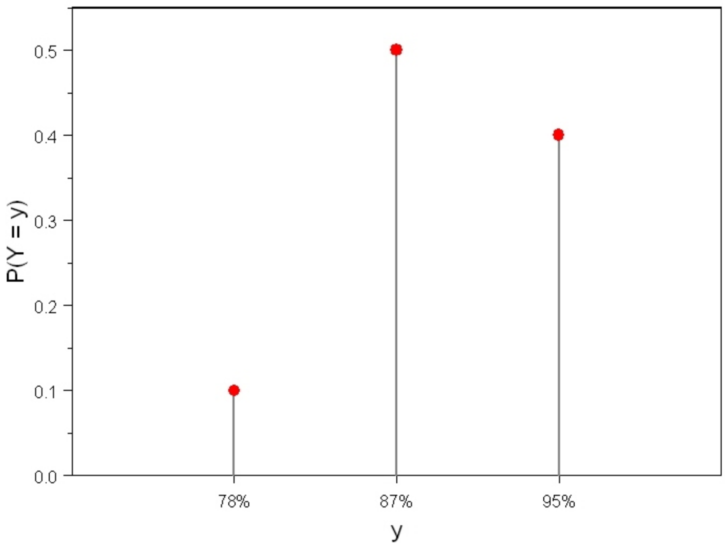
$$F(y) = \begin{cases} 0.0 & \text{si } x < 78\% \\ 0.1 & \text{si } 78\% \leq x < 87\% \\ 0.6 & \text{si } 87\% \leq x < 95\% \\ 1.0 & \text{si } x \geq 95\% \end{cases}$$

Les billets pour ce vol en cette classe sont vendus à 1080 CHF.
Tracer la graphe de la distribution de probabilité de la classe *economy*.

Soit Y le taux de remplissage de la classe *economy*. La distribution de probabilité de cette variable aléatoire est donné par

y	78%	87%	95%
$P(Y = y)$	0.1	0.5	0.4

et sa graphe:



On peut aussi calculer l'espérance de Y:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot P(Y = y_i) \\
&= 0.78 \cdot 0.1 + 0.87 \cdot 0.5 + 0.95 \cdot 0.4 \\
&= 0.893 \\
&= 89.3\%
\end{aligned}
$$

3. Un avion possède 60 places *business* et 140 places *economy*.

   (a) Déterminer l'espérance mathématique de la valeur des ventes de billets *business*.
   $E(X) = 0.599 \Rightarrow$ taux de remplissage espéré.
   V_B = valeur des ventes de billets *business*.
   $E(V_B) = E(X) \cdot (60 \text{ places}) \cdot (2200 \frac{\text{CHF}}{\text{place}}) = 79068$ CHF.

   (b) Les dirigeants de la compagnie donnent l'ordre de déclasser 50% des places *business* en classe *economy*. Déterminer l'espérance mathématique de la valeur des ventes de billets *business* après le déclassement. Est-ce que le déclassement des places est une bonne solution pour la compagnie?

   - Avant déclassement
     Soient V_B la valeur des ventes de billets *business*, V_E la valeur des ventes de billets *economy* et V_T la valeur totale des ventes de billets.
     $E(V_B) = 79068$ (calculé au point **a**)
     $E(V_E) = E(Y) \cdot (140 \text{ places}) \cdot (1080 \frac{\text{CHF}}{\text{place}}) = 135021.6$ CHF.
     Donc,
     $E(V_T) = E(V_B) + E(V_E) = 214089.6$ CHF.

   - Après déclassement
     On fait l'hypothèse que les taux de remplissange ne changent pas. Maintenant, il y a 30 places *business* et 170 places *economy*.

$E(V_B) = E(X) \cdot (30 \text{ places}) \cdot (2200 \frac{\text{CHF}}{\text{place}}) = 39534$ CHF.
$E(V_E) = E(Y) \cdot (170 \text{ places}) \cdot (1080 \frac{\text{CHF}}{\text{place}}) = 163954.8$ CHF.
Donc,
$E(V_T) = E(V_B) + E(V_E) = 203488.8$ CHF.

$\Rightarrow$ La valeur totale des ventes de billets V_T était plus haute avant le déclassement. Donc, le déclassement n'est pas une bonne décision pour la compagnie.

(c) Si les dirigeants veulent s'assurer le maximum de valeur des ventes des billets, quel devrait être le pourcentage de billets *business* déclassés?
Soit d le nombre de places à déclasser ($d \geq 0$). Après avoir déclassé d places *business*, on aura $(60 - d)$ places *business* et $(140 + d)$ places *economy*. Dans ce cas,
$E(V_B) = E(X) \cdot (60 - d \text{ places}) \cdot (2200 \frac{\text{CHF}}{\text{place}}) = 79068 - 1317.8 \cdot d$
$E(V_E) = E(Y) \cdot (140 + d \text{ places}) \cdot (1080 \frac{\text{CHF}}{\text{place}}) = 135021.6 + 964.44 \cdot d$
$E(V_T) = E(V_B) + E(V_E) = 214089.6 - 353.63 \cdot d$
On peut voir que la compagnie atteint le maximum pour V_T quand $d = 0$. Donc, la meilleure décision est de ne déclasser aucun siège.