# Frontière de Poisson et frontière de Martin

## Une introduction sur des exemples

Jürgen Angst

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Séminaire des doctorants,
17 Avril 2008, Strasbourg

On se donne un ensemble $X$ et un opérateur $\Delta$ qui agit sur un sous ensemble des fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction $f$ est *harmonique*, si $\Delta f = 0$, c'est à dire si $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in X$.

On cherche à décrire l'ensemble des fonctions harmoniques.

1. Rappels sur les graphes et les arbres
2. Marche aléatoire sur les graphes
3. Bord géométrique, frontières de Poisson et de Martin
4. MB sur une variété riemannienne à courbure pincée

1 Rappels sur les graphes et les arbres

2 Marche aléatoire sur les graphes

3 Bord géométrique, frontières de Poisson et de Martin

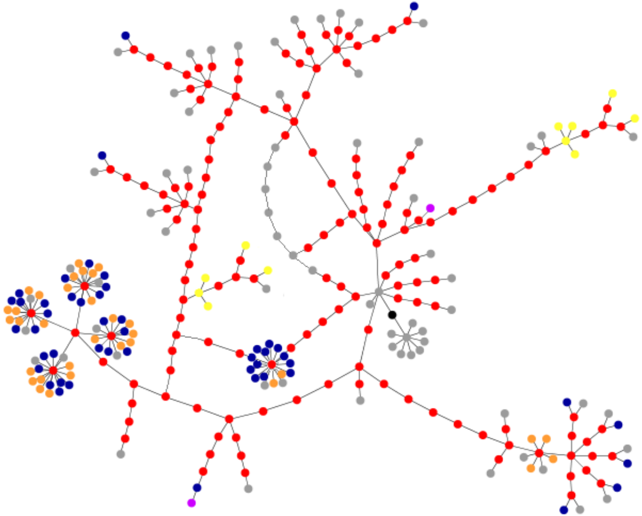
4 MB sur une variété riemannienne à courbure pincée

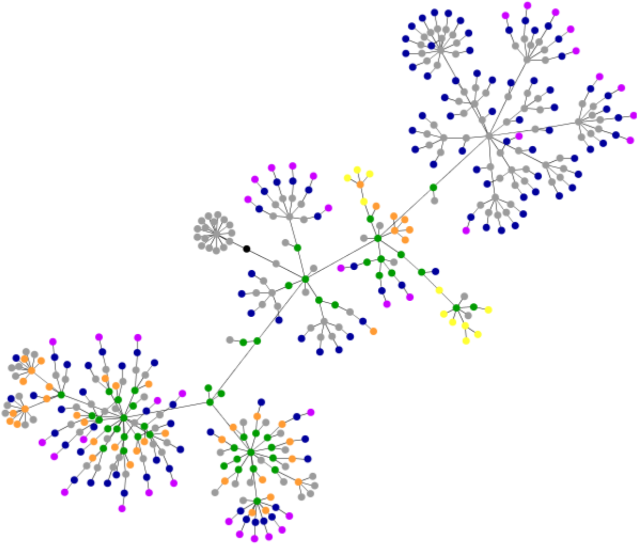
# Graphes et chemins

On définit un *graphe non orienté* $\mathcal{G} = \mathcal{S} \times \mathcal{A}$ par son ensemble de *sommets* $\mathcal{S}$ et son ensemble d'*arêtes* $\mathcal{A}$, une arête étant une partie à deux éléments de $\mathcal{S}$.

Nous dirons que deux sommets $x$ et $y$ sont *voisins*, et nous noterons $x \sim y$, s'il existe une arête entre $x$ et $y$, $i.e.$, $\{x, y\} \in \mathcal{A}$.

Une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, telle que $x_i \sim x_{i+1}$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, est appelée un *chemin de longueur* $n$ joignant $x$ à $y$.





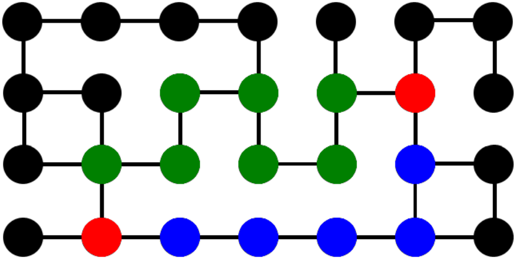
# Graphes et chemins

Dans toute la suite, les graphes seront supposés :

- localement finis : tout sommet a un nombre fini de voisins.
- connexes : deux points quelconques de $\mathcal{G}$ sont toujours joignables par un chemin.

# Distance, géodésiques

La *distance* entre deux points $x$ et $y$ est la longueur minimum des chemins joignants $x$ à $y$.



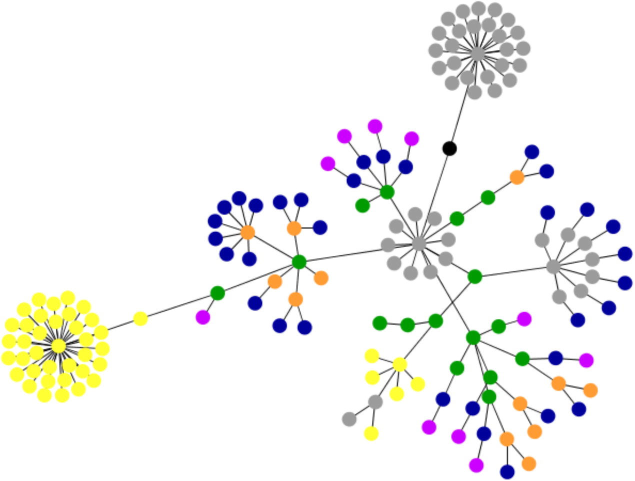
Un chemin réalisant ce minimum est dit *géodésique*.

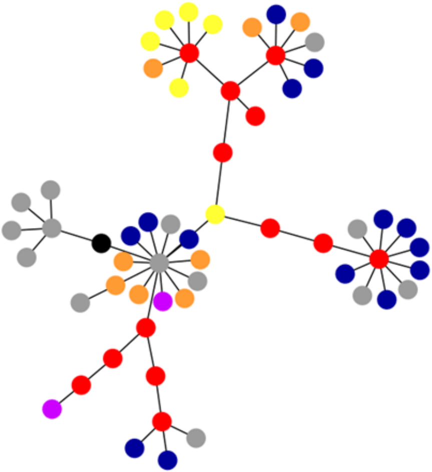
# Homotopie, arbre

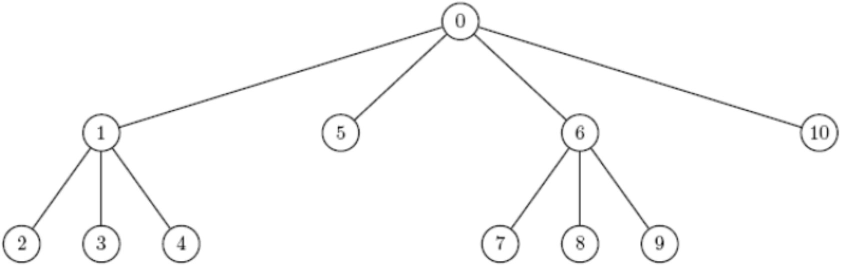
Deux chemins sont *homotopes* si l'on peut passer de l'un à l'autre en supprimant un "aller-retour", c'est à dire si l'on peut remplacer $\dots, x, y, x, \dots$ par $\dots, x, \dots$. On appelle *homotopie* la relation d'équivalence engendrée sur l'ensemble des chemins.

Un *lacet* est un chemin dont les extrémités coïncident, et un *lacet trivial* un lacet réduit à un point.

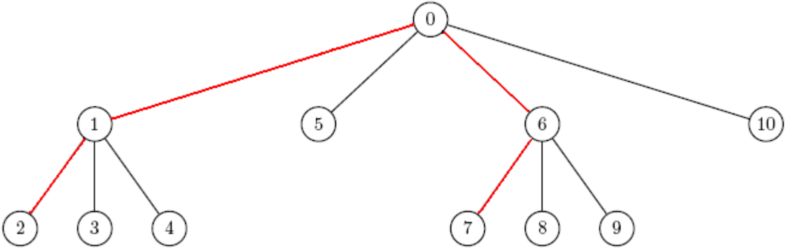
Un graphe $\mathcal{G}$ est appelé un *arbre* s'il est *simplement connexe*, c'est à dire si tout lacet est homotope à un lacet trivial.






0
1
5
6
10
2
3
4
7
8
9

- Dans un arbre, deux points quelconques $x$ et $y$ sont reliés par un unique chemin géodésique.




- Tout chemin joignant $x$ à $y$ passe par tous les points de ce chemin géodésique.

1. Rappels sur les graphes et les arbres
2. Marche aléatoire sur les graphes
3. Bord géométrique, frontières de Poisson et de Martin
4. MB sur une variété riemannienne à courbure pincée

# Marche aléatoire sur un graphe

Une marche aléatoire sur un graphe $\mathcal{G}$ est une *chaine de Markov* sur l'ensemble de ses sommets $\mathcal{S}$, $i.e.$, une application mesurable

$$X : \begin{cases} (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & (\mathcal{S}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}) \\ \omega & \longmapsto & (X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots) \end{cases}$$

qui vérifie la propriété de Markov : pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, le *futur* de la trajectoire $(X_{n_0+1}, X_{n_0+2}, \ldots)$ ne dépend du *passé* $(X_0, X_1, \ldots, X_{n_0})$ que via le *présent* $X_{n_0}$.

On note $\mathbb{P}_{x_0}$ la loi de marche aléatoire issue de $x_0$, c'est à dire telle que $X_0 = x_0$.

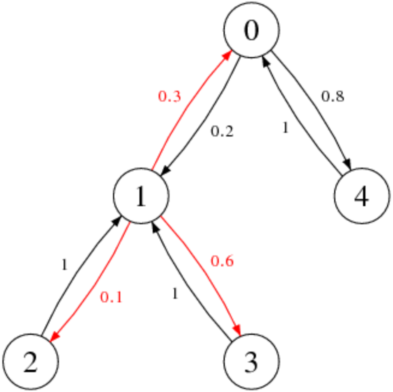
On désigne par $p(x,y)$ les *probabilités de transition* de la marche aléatoire, $i.e.$, les probabilités de passer de $x$ à $y$ en une étape :

$$p(x,y) := \mathbb{P}_{x_0}(X_{n+1} = y | X_n = x).$$

La marche aléatoire est "continue" : $p(x,y)$ est non nulle si et seulement si $x$ et $y$ sont deux sommets voisins.

Pour tout sommet $x \in \mathcal{S}$, on a

$$\sum_{y \sim x} p(x,y) = 1$$



# Fonction de Green

On définit $p_n(x,y) := \mathbb{P}_x(X_n = y)$, la probabilité de passer de $x$ à $y$ en exactement $n$ coups ($n \geq 1$). La *fonction de Green* est alors définie sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par

$$G(x,y) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x,y).$$

Si on note $L(y) := \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{X_n=y}$ le *temps de séjour* en $y$, on a :

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x[L(y)].$$

On peut exprimer $G(x,x)$ en fonction de $p_x$ la probabilité de revenir au moins une fois en $x$ en partant de $x$.

$$\mathbb{P}_x(\text{revenir exactement } n \text{ fois en } x) = p_x^n(1-p_x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- Lorsque $p_x = 1$, on a $G(x,x) = +\infty$, et $x$ est dit *récurrent*.
- Si $p_x < 1$, le point $x$ est dit *transient* et on a cette fois

$$G(x,x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)p_x^n(1-p_x) = \frac{1}{1-p_x}.$$

Pour exprimer $G(x,y)$, on introduit $H(x,y)$, la probabilité partant de $x$ d'atteindre $y$. D'après l'hypothèse de connexité, $H$ ne s'annule pas, et d'après la propriété de Markov, on a

$$G(x,y) = H(x,y)G(y,y).$$

On a la dichotomie classique : soit tous les points du graphe sont récurrents, soit tous les points sont transients.

Un graphe fini est toujours récurrent, un graphe transient est nécessairement infini.

# Fonctions harmoniques

On associe à la marche aléatoire un opérateur $\Delta$, défini sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ des fonctions de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$(\Delta f)(x) := \mathbb{E}_x[f(X_1)] - f(x) = \left( \sum_{y \sim x} p(x,y) f(y) \right) - f(x).$$

Une fonction $f$ est dite harmonique si $\Delta f = 0$. Par exemple, pour tout $y$ fixé, les fonctions $H(.,y)$ et $G(.,y)$ sont harmoniques sur $\mathcal{S} \setminus \{y\}$.

**Proposition (Martingales et fonctions harmoniques)**

*Pour tout point initial $x$ et toute fonction $f$, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général*

$$M_n := f(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta f(X_k)$$

*est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale pour la probabilité $\mathbb{P}_x$. En particulier, si $f$ est harmonique, la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.*

1 Rappels sur les graphes et les arbres

2 Marche aléatoire sur les graphes

3 Bord géométrique, frontières de Poisson et de Martin

4 MB sur une variété riemannienne à courbure pincée

# Bord géométrique

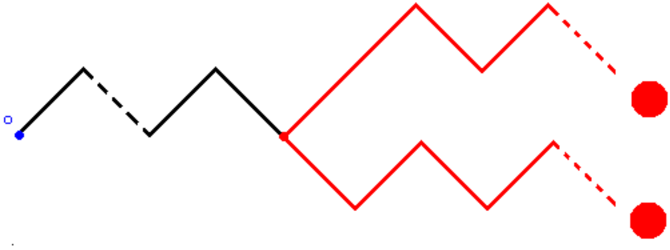
Un *rayon géodésique* dans un arbre transient $\mathcal{G}$ est un chemin infini (un élement de $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$) dont tous les sous chemins sont des segments géodésiques.

Deux rayons géodésiques $\gamma$ et $\delta$ sont *asymptotes*, s'ils restent à distance bornée l'un de l'autre, $i.e.$, $(d(\gamma_n, \delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On appelle *bord géométrique* de l'arbre et on note $\partial\mathcal{S}$, l'ensemble des rayons géodésiques quotienté par la relation d'équivalence $\gamma \approx \delta \Leftrightarrow \gamma$ et $\delta$ sont *asymptotes*.

Dans un arbre, un point base $o$ étant fixé, tout point $\theta$ du bord $\partial\mathcal{S}$ est représenté par un unique rayon géodésique issu de $o$, noté $\gamma_\theta$. On dit que $\gamma_\theta$ pointe vers $\theta$.

On munit $\mathcal{S}\cup\partial\mathcal{S}$ de la topologie des cônes. On obtient une compactification de $\mathcal{S}$, appelée la compactification géométrique.



# Frontière de Martin

La frontière de Martin est définie à l'aide des noyaux normalisés

$$K_y := \frac{G(.,y)}{G(o,y)}.$$

On considère les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telles que la suite de fonction $(K_{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ associée converge simplement vers une fonction harmonique sur $\mathcal{S}$.

La frontière de Martin est obtenue en quotientant l'ensemble de ces suites par la relation d'équivalence $(y_n) \equiv (y'_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} K_{y_n} - K_{y'_n} = 0$.

Identification de $\mathcal{S}$ et de l'ensemble des noyaux normalisés ainsi que la frontière de Martin et l'ensemble des fonctions harmoniques limites

$$+$$

Topologie de la convergence simple sur la réunion des ensembles

$$=$$

Nouvelle compactification de $\mathcal{S}$, la compactification de Martin.

Avec cette topologie, les suites convergent vers le point de la frontière de Martin qu'elles définissent.

# Bord géométrique vs Frontière de Martin

Les rayons géodésiques définissent-ils un point de la frontière de Martin ?

Oui. Si $\gamma_\theta \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ est le rayon géodésique pointant vers $\theta$, pour tout $x \in \mathcal{S}$,

$$\frac{G(x,\gamma_\theta(n))}{G(o,\gamma_\theta(n))} \longrightarrow \frac{H(x,\pi_\theta(x))}{H(o,\pi_\theta(x))} := K_\theta(x),$$

où $\pi_\theta(x)$ est la projection de $x$ sur $\gamma_\theta$, $i.e.$, le point de $\gamma_\theta$ à distance minimale de $x$. La fonction $K_\theta$ est appelée le noyau de Martin de $\theta$.

**Théorème (P.Cartier)**

*Pour un arbre transient, les compactifications de Martin et géométrique coïncident. De plus, tous les points de la frontière de Martin sont extrémaux.*

**Corollaire (Représentation des fonc. harm. positives)**

*La formule*

$$\forall\, x \in \mathcal{S}, \quad u(x) = \int_{\partial\mathcal{S}} K_\theta(x)\nu(d\theta)$$

*établit une bijection entre l'ensemble des fonctions harmoniques positives* $u$ *et l'ensemble des mesures boréliennes positives* $\nu$ *sur* $\partial\mathcal{S}$

# Frontière de Poisson

**Théorème (P.Cartier)**

*Soit $x \in \mathcal{S}$, alors $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, la suite $X_n$ converge vers un point $X_\infty$ de $\partial\mathcal{S}$. La loi de $X_\infty$, notée $\mu_x$, est une mesure sur $\partial\mathcal{S}$, appelée mesure harmonique partant de $x$.*
*Les mesures de la famille $\mu = (\mu_x)_{x\in\mathcal{S}}$ sont absolument continues les unes par rapport aux autres, leur dérivée de Radon-Nykodim est le noyau de Martin :*

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_o} = K_\theta(x).$$

Les mesures $\mu_x$ ont les mêmes ensembles négligeables, aussi peut-on définir la $\mu$-négligeabilité et l'espace $L^\infty(\partial\mathcal{S}, \mu)$.

Le support commun des mesures $\mu_x$ est appelé la *frontière de Poisson*.

**Théorème (Représentation des fonc. harm. bornées)**

*La formule*

$$\forall\, x \in \mathcal{S}, \quad u(x) = \int_{\partial\mathcal{S}} f(\theta)\mu_x(d\theta) = \mathbb{E}_x[f(X_\infty)]$$

*établit une bijection entre l'ensemble des fonctions harmoniques bornées $u$ et l'ensemble des fonctions $f \in L^\infty(\partial\mathcal{S}, \mu)$.*

1 Rappels sur les graphes et les arbres

2 Marche aléatoire sur les graphes

3 Bord géométrique, frontières de Poisson et de Martin

4 MB sur une variété riemannienne à courbure pincée

# Variétés de Cartan-Hadamard

Une variété de Cartan-Hadamard est une variété riemannienne de dimension finie

- simplement connexe,
- complète (les boules fermées sont compactes),
- de courbure sectionnelle négative en tout point.

Lorsque la courbure sectionnelle $K$ est uniformément bornée entre deux constantes $a \leq K \leq b < 0$, on parle de variété à courbure pincée.

Une variété à courbure pincée $\mathcal{M}$ de dimension $n$ admet un système de coordonnées global $(\rho, \theta)$, $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ (via des coordonnées exponentielles).

On identifie alors deux courbes $\gamma_t$, $\gamma'_t$, sortant de tout compact, et données en coordonnées polaires par $(\rho_t, \theta_t)$, $(\rho'_t, \theta'_t)$, si $\theta_t$ et $\theta'_t$ convergent vers un même point $\theta_\infty \in \mathbb{S}^{n-1}$, lorsque $t \to +\infty$.

$\mathcal{M}$ est donc naturellement munie d'un bord $\partial\mathcal{M}$, homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$. Comme dans le cas des arbres, $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ peut être munie d'une topologie adéquate. Il s'avère alors que toute géodésique converge vers un point du bord.

# Mouvement brownien sur $\mathcal{M}$

A la métrique riemmanienne sur $\mathcal{M}$ est naturellement associé un opérateur différentiel d'ordre deux, l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta$, analogue du Laplacien usuel dans $\mathbb{R}^n$.

On appelle mouvement brownien sur $\mathcal{M}$ le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ dont le générateur infinitésimal est $\Delta$

$$\Delta f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t}.$$

Pour tout point $x \in \mathcal{M}$, le mouvement brownien $(X_t)_{t\geq 0}$ issu de $x$, converge vers un point $X_\infty \in \partial\mathcal{M}$, de loi $\mu_x$.

Comme dans le cas des arbres, les lois $\mu_x$ sont absolument continues les unes par rapports aux autres, on peut parler de $\mu$-négligeabilité, et définir l'espace $L^\infty(\partial\mathcal{M}, \mu)$.

# Frontière de Poisson

**Théorème (M.T Anderson)**

*La formule*

$$\forall\, x \in \mathcal{M}, \quad u(x) = \int_{\partial \mathcal{M}} f(\theta)\mu_x(d\theta) = \mathbb{E}_x[f(X_\infty)]$$

*établit une bijection entre l'ensemble des fonctions harmoniques bornées $u$ et l'ensemble des fonctions $f \in L^\infty(\partial \mathcal{M}, \mu)$.*

# Tout n'est pas rose chez les flamands roses

Dans le cas d'une variété de Cartan-Hadamard dont la courbure sectionnelle vérifie $K \leq -\varepsilon < 0$ uniformément, on ne sait pas s'il existe des fonctions harmoniques non triviales.

## Conjecture (Greene, Wu, 1979)

*Soit $\mathcal{M}$ est une variété CH, et $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que*

$$K_x \leq -cr(x)^{-2}, \quad \forall\, x \in \mathcal{M} \backslash K$$

*pour un compact $K$, $c > 0$ et $r(x) = dist(x_0, x)$. Alors il existe des fonctions harmoniques non constantes sur $\mathcal{M}$.*

# Références

A. Ancona, Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XVIII - 1988

M. Arnaudon, A. Thalmaier, S. Ulsamer, Existence on non-trivial harmonic functions on Cartan-Hadamard manifolds of unbounded curvature, preprint.

P. Cartier, Fonctions harmoniques sur un arbre, In Symposia Mathematica volume IX, p. 203-270. Academic Press, London and New-York, 1972.

F. Mouton, Comportement asymptotique des fonctions harmoniques sur les arbres, Séminaire de Probabilités (Strasbourg), tome 34 (2000), p 353-373.

# Web sites as graphs

Applet Java :

`http ://www.aharef.info/2006/05/websites_as_graphs.htm`

Exemples :

`http ://www.flickr.com/photos/tags/websitesasgraphs`