Une introduction au processus de Schramm

Jürgen Angst

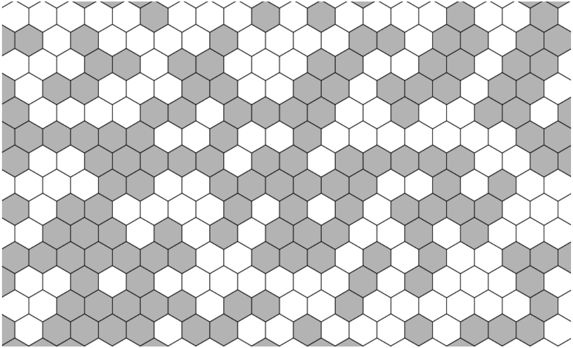
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Séminaire des doctorants,
23 Octobre 2008, Strasbourg

Introduction

Percolation par site sur le réseau triangulaire

On considère un pavage hexagonal du plan. Chaque hexagone est coloré en blanc (resp. gris), indépendamment des autres, avec une probabilité p (resp. $1 - p$).



Percolation par site sur le réseau triangulaire

- Si $p \leq 1/2$, presque sûrement il n'y a pas de composante connexe infinie formée d'hexagones blanc.

- Si $p > 1/2$, presque sûrement il y a une unique composante connexe infinie formée d'hexagones blanc.

- Soit C la composante connexe contenant l'origine et $N = card(C)$, on s'intéresse aux quantités :

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(N = +\infty), \qquad \chi(p) := \mathbb{E}_p\left[N\, 1_{N<+\infty}\right].$$

Si $p \leq p_c = 1/2$ on a $\theta(p) = 0$ et si $p > p_c$ on a $\theta(p) > 0$.

Percolation par site sur le réseau triangulaire

- Si $p \leq 1/2$, presque sûrement il n'y a pas de composante connexe infinie formée d'hexagones blanc.
- Si $p > 1/2$, presque sûrement il y a une unique composante connexe infinie formée d'hexagones blanc.
- Soit C la composante connexe contenant l'origine et $N = card(C)$, on s'intéresse aux quantités :

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(N = +\infty), \qquad \chi(p) := \mathbb{E}_p\left[N\, 1_{N<+\infty}\right].$$

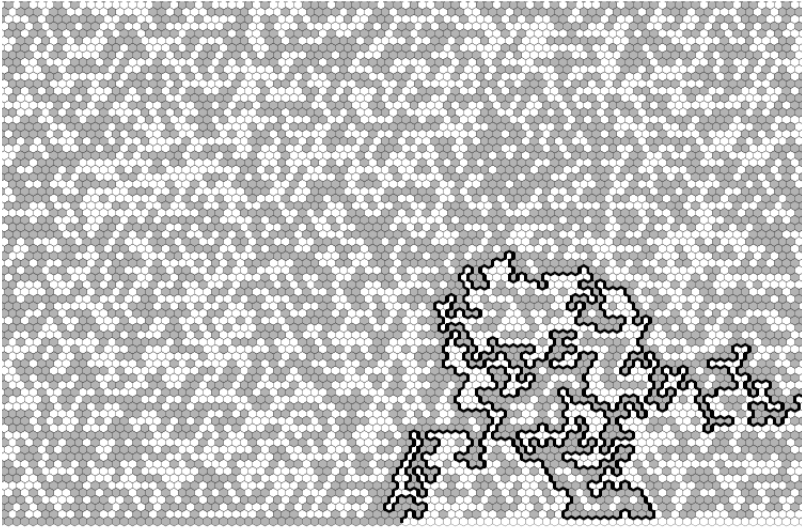
Si $p \leq p_c = 1/2$ on a $\theta(p) = 0$ et si $p > p_c$ on a $\theta(p) > 0$.

Percolation par site sur le réseau triangulaire

- Si $p \leq 1/2$, presque sûrement il n'y a pas de composante connexe infinie formée d'hexagones blanc.
- Si $p > 1/2$, presque sûrement il y a une unique composante connexe infinie formée d'hexagones blanc.
- Soit C la composante connexe contenant l'origine et $N = card(C)$, on s'intéresse aux quantités :

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(N = +\infty), \qquad \chi(p) := \mathbb{E}_p\left[N \, 1_{N<+\infty}\right].$$

Si $p \leq p_c = 1/2$ on a $\theta(p) = 0$ et si $p > p_c$ on a $\theta(p) > 0$.



Des questions naturelles

- Que peut-on dire des fonctions $\theta(p)$ et $\chi(p)$ au voisinage de la probabilité critique $p_c = 1/2$?
- La courbe d'exploration converge-t-elle vers une courbe plane aléatoire lorsque le pas du réseau tend vers zéro ?
- Quelles sont les propriétés (géométriques) de la courbe limite ? Comment ces propriétés dépendent-elles du réseau initial ?

Des questions naturelles

- Que peut-on dire des fonctions $\theta(p)$ et $\chi(p)$ au voisinage de la probabilité critique $p_c = 1/2$?
- La courbe d'exploration converge-t-elle vers une courbe plane aléatoire lorsque le pas du réseau tend vers zéro ?
- Quelles sont les propriétés (géométriques) de la courbe limite ? Comment ces propriétés dépendent-elles du réseau initial ?

Des questions naturelles

- Que peut-on dire des fonctions $\theta(p)$ et $\chi(p)$ au voisinage de la probabilité critique $p_c = 1/2$?
- La courbe d'exploration converge-t-elle vers une courbe plane aléatoire lorsque le pas du réseau tend vers zéro ?
- Quelles sont les propriétés (géométriques) de la courbe limite ? Comment ces propriétés dépendent-elles du réseau initial ?

Ce que prédit la physique théorique

- La courbe d'exploration converge vers une courbe aléatoire qui vérifie une propriété d'invariance conforme.

- Théorie conforme des champ et gravité quantique prédisent que :

$$\theta(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{36}+o(1)}, \quad \chi(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{43}{18}+o(1)}.$$

- Ces exposants sont universels, $i.e.$, ne dépendent pas du réseau initial, mais uniquement de la dimension.

Ce que prédit la physique théorique

- La courbe d'exploration converge vers une courbe aléatoire qui vérifie une propriété d'invariance conforme.
- Théorie conforme des champ et gravité quantique prédisent que :

$$\theta(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{36}+o(1)}, \quad \chi(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{43}{18}+o(1)}.$$

- Ces exposants sont universels, *i.e.*, ne dépendent pas du réseau initial, mais uniquement de la dimension.

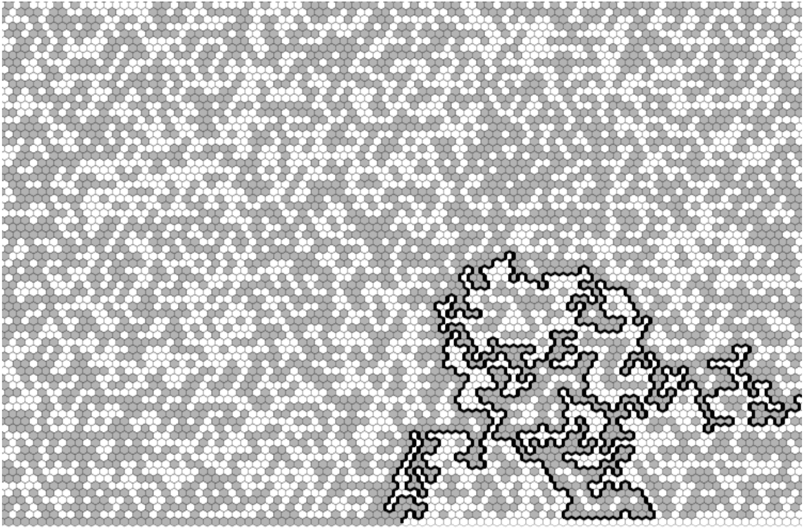
Ce que prédit la physique théorique

- La courbe d'exploration converge vers une courbe aléatoire qui vérifie une propriété d'invariance conforme.
- Théorie conforme des champ et gravité quantique prédisent que :

$$\theta(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{36}+o(1)}, \quad \chi(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{43}{18}+o(1)}.$$

- Ces exposants sont universels, $i.e.$, ne dépendent pas du réseau initial, mais uniquement de la dimension.

Le processus de Schramm



Description des courbes dans $\mathbb{H}$

Soit $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) \geq 0\}$ continue avec $\gamma(0) = 0$.

Pout tout $t \geq 0$, $\mathbb{H} - \gamma([0,t])$ est un ouvert qui a exactement une composante connexe infinie que l'on note H_t. On pose

$$K_t := \overline{\mathbb{H} - H_t}.$$

On se restreint aux courbes γ qui vérifient la condition de non croisement :

$$\forall\ 0 < s < t, \quad \gamma(t) \in \overline{H_s}$$

$i.e.$ après le temps s, la courbe ne pénètre plus dans $\mathring{K}_s$.

Description des courbes dans $\mathbb{H}$

Pour tout $t \geq 0$, l'ouvert H_t est simplement connexe.

Théorème (Riemann)

Il existe une unique application g_t conforme de H_t dans $\mathbb{H}$ ayant un développement asymptotique à l'infini de la forme

$$g_t(z) = z + \frac{2a(t)}{z} + \mathcal{O}\left(|z|^{-2}\right),$$

où a est une fonction continue croissante et positive ou nulle. Quitte à reparamétrer la courbe $\gamma(t)$, on peut toujours se ramener au cas où $a(t) = t$.

Équation d'évolution de Loewner

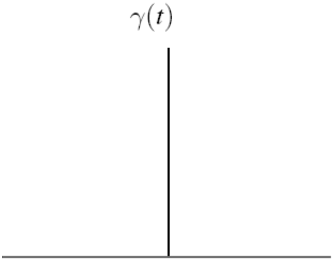
Théorème (Loewner, 1923)

Il existe une fonction continue $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *avec* $\beta(0) = 0$*, telle que* (g_t) *soit le flot de l'équation différentielle ordinaire dans le demi-plan supérieur :*

$$(L_\beta) \qquad y'(t) = \frac{2}{y(t) - \beta(t)}.$$

On dira que la courbe γ*, ou la fonction* β*, engendre le flot* (g_t)*.*

Un exemple simple



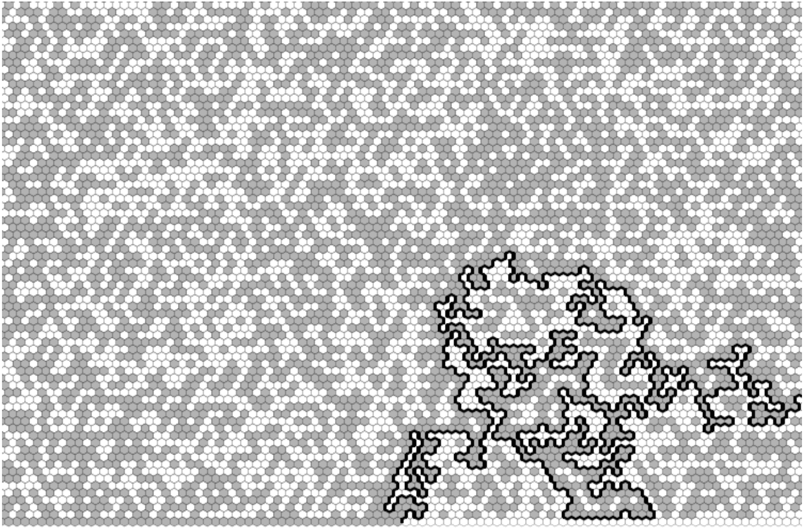
$$\gamma(t) = 2i\sqrt{t},$$

$$H_t = \mathbb{H} - \gamma([0,t]),$$

$$K_t = \gamma([0,t]),$$

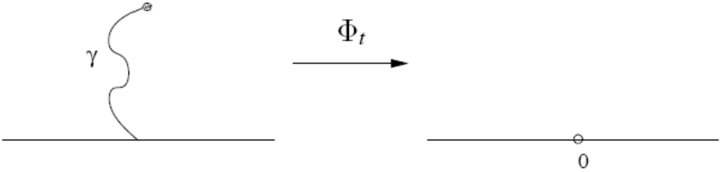
$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t},$$

$$\beta(t) \equiv 0.$$



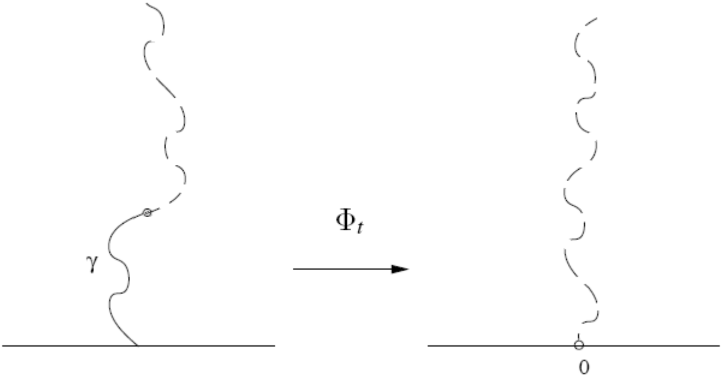
Propriété d'invariance conforme

À tout $t \geq 0$ on associe Φ_t, l'application conforme de H_t dans $\mathbb{H}$ qui envoie $\gamma(t)$ sur 0.



Propriété d'invariance conforme

À tout $t \geq 0$ on associe Φ_t, l'application conforme de H_t dans $\mathbb{H}$ qui envoie $\gamma(t)$ sur 0. On requiert que pour tout $t \geq 0$, les courbes $\Phi_t\left(\gamma([t,+\infty]) \mid \gamma([0,t])\right)$ et $\widetilde{\gamma}([0,+\infty])$ aient même loi.



Lien entre invariance conforme et β

L'application Φ_t n'est autre que $z \mapsto g_t^{-1}(z + \beta(t))$. La propriété d'invariance conforme entraîne l'identité en loi :

$$g_{t+s} - \beta(t+s) \stackrel{d}{=} [g_t - \beta(t)] \circ \left[\widetilde{g}_s - \widetilde{\beta}(s)\right],$$

dont on déduit

$$\beta(t+s) - \beta(t) \stackrel{d}{=} \widetilde{\beta}(s),$$

$i.e.$ β est stationnaire, à accroissements indépendants.

Si l'on impose que β et $-\beta$ ont même loi, alors le seul candidat possible pour la fonction β est un mouvement brownien réel.

Le processus de Schramm

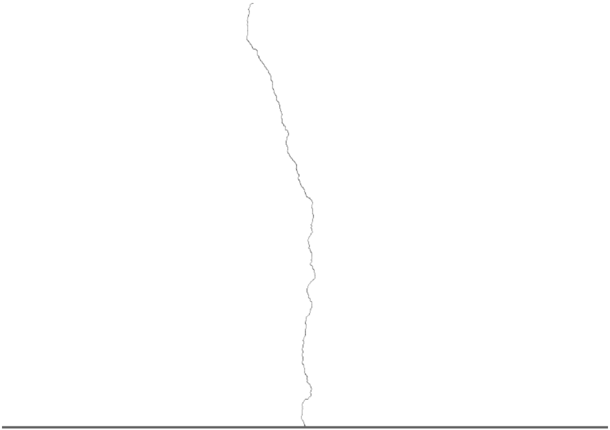
Définition (Schramm, 1999)

Soit B_t un mouvement brownien réel standard issu de 0 et κ un réel positif. On appelle SLE (chordal) de paramètre κ dans $\mathbb{H}$ ou encore SLE$_\kappa$ dans $\mathbb{H}$, le flot associé à l'équation différencielle de Loewner (L_β) avec $\beta(t) = \sqrt{\kappa}\, B_t$:

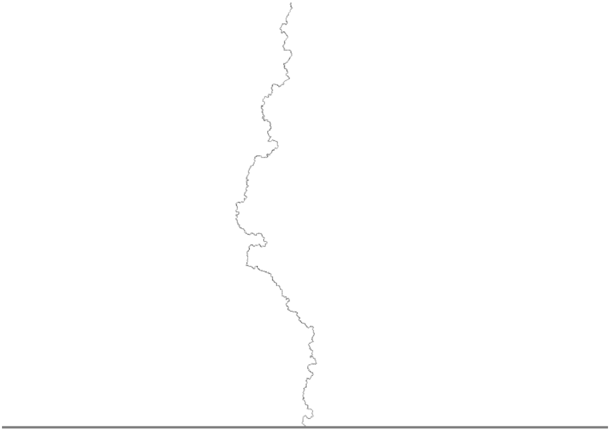
$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\, B_t}.$$

Selon le contexte, le terme SLE_κ désigne le flot (g_t) ou le processus $t \mapsto K_t$.

A quoi cela ressemble-t-il ?

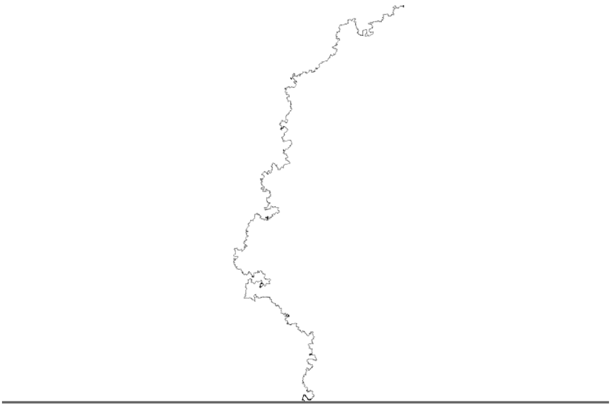


$\kappa = 0.2$



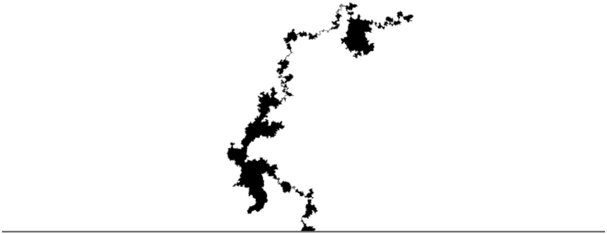
$\kappa = 1$

$\kappa = 2$

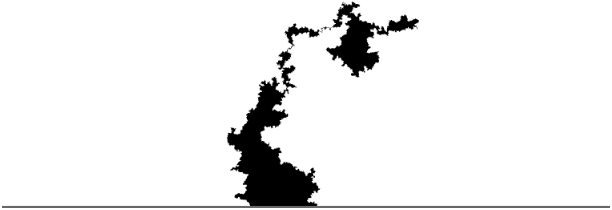


$\kappa = 4.2$

$\kappa = 5$

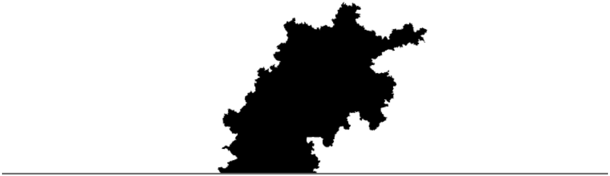


$\kappa = 6$



$\kappa = 7$

$\kappa = 8$



$\kappa = 9$

$\kappa = 9.8$

Quelques résultats

Auto-similarité

Proposition

Soit $\kappa \geq 0$ et soit (K_t) un SLE de paramètre κ. Si α est un réel strictement positif, alors les processus $t \mapsto K_t$ et $t \mapsto \alpha^{-1/2} K_{\alpha t}$ ont même loi.

De manière équivalente, les processus $(t, z) \mapsto g_t(z)$ et $(t, z) \mapsto \alpha^{-1/2} g_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} z)$ ont même loi.

Existence de la trace

Proposition

Soit $\kappa \geq 0$ et soit (g_t) un SLE de paramètre κ. Presque sûrement, il existe une unique courbe continue sans croisements $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{H}}$ qui engendre le flot (g_t) au sens du théorème de Loewner. Cette courbe est appelée la trace du SLE.

En fait, on montre que $\gamma(t) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ z \in \mathbb{H}}} g_t^{-1}\left(z + \sqrt{\kappa} B_t\right)$.

Transience de la trace

Proposition

Pour tout $\kappa \geq 0$, presque sûrement, la trace $\gamma(t)$ du SLE_κ est transiente :

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to+\infty} |\gamma(t)| = +\infty\right) = 1.$$

Transition de phase

Proposition

Soit γ la trace d'un SLE_κ. Alors presque sûrement :

- Si $0 \leq \kappa \leq 4$, alors la courbe γ est simple ;

- Si $4 < \kappa < 8$, alors la courbe γ a des points doubles mais elle est de mesure nulle ;

- Si $8 \leq \kappa$, alors la fonction γ est surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\overline{\mathbb{H}}$.

Transition de phase

Proposition

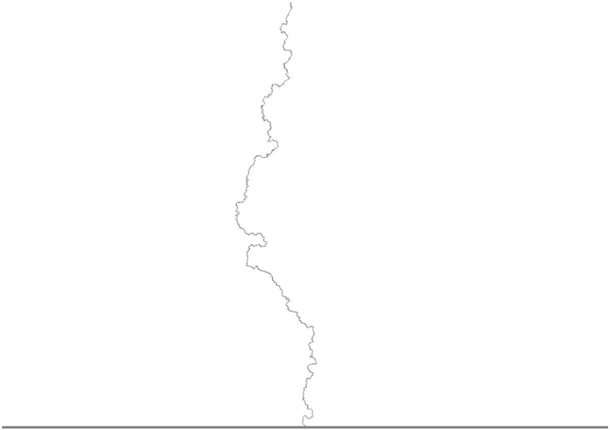
Soient $\kappa \geq 0$ et K_t un SLE_κ de trace γ. Alors presque sûrement :

- Si $0 \leq \kappa \leq 4$, alors $K_t = \gamma([0,t])$ est une courbe ;

- Si $4 < \kappa < 8$, alors K_t est de mesure positive, et on a $\gamma([0,t]) \subsetneq K_t$;

- Si $8 \leq \kappa$, on a de nouveau $K_t = \gamma([0,t])$.

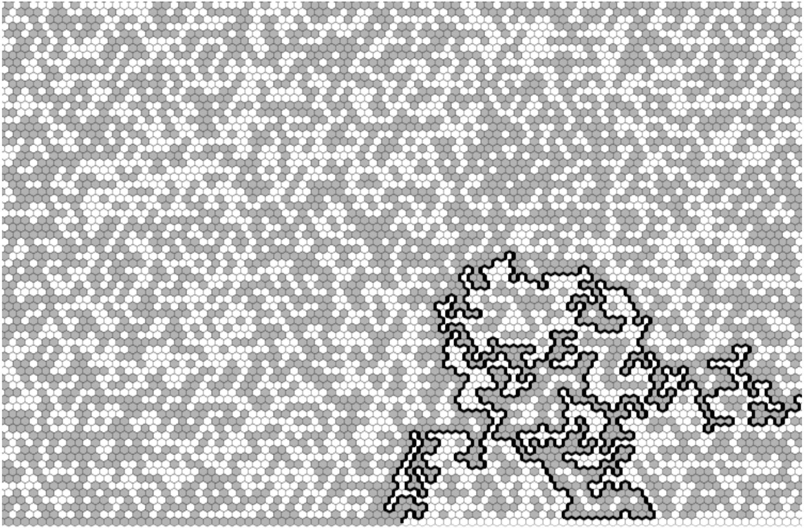
$\kappa = 1$



$\kappa = 4.2$

$\kappa = 9$

Le SLE comme limite



Convergence vers le SLE_6

Théorème (Smirnov, 2001)

La courbe d'exploration de la percolation critique sur le réseau triangulaire converge vers la trace d'un SLE_6.

Exposants critiques

Théorème (Smirnov, Werner, 2001)

Au voisinage de $p = 1/2$, on a les développements asymptotiques :

$$\theta(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{36}+o(1)}, \quad \chi(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{43}{18}+o(1)}.$$

Exposants critiques browniens

Théorème (Lawler, Schramm, Werner, 2001)

Soient $p \geq 2$ et B^i_t, $i = 1, \ldots, p$, p mouvements browniens plans indépendants issus de points distincts, alors lorsque t tend vers l'infini :

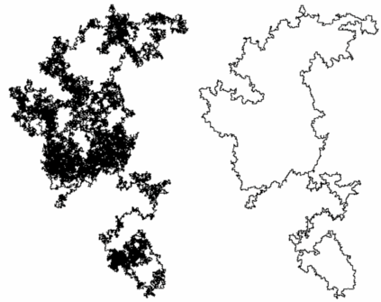
$$\mathbb{P}\left(\forall\, i \neq j,\ B^i([0,t]) \cap B^j([0,t]) = \emptyset\right) = t^{-\xi_p + o(1)},$$

$$\mathbb{P}\left(\forall\, i \neq j,\ B^i([0,t]) \cap B^j([0,t]) = \emptyset \text{ et } B^i([0,t]) \subset \mathbb{H}\right) = t^{-\widetilde{\xi}_p + o(1)},$$

$$\text{où} \qquad \xi_p := \frac{4p^2 - 1}{24}, \quad \widetilde{\xi}_p := \frac{p(2p+1)}{6}.$$

Conséquence : conjecture de Mandelbrot

Théorème (Lawler, Schramm, Werner, 2001)

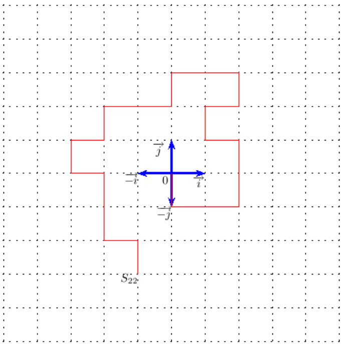


La dimension de Hausdorff de la frontière extérieure du mouvement brownien plan est égale à $4/3$.

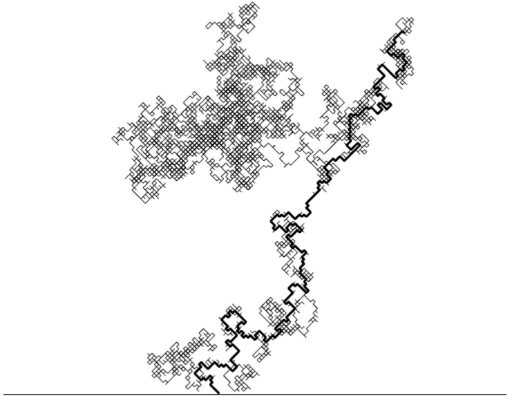
Autres convergences

Marche aléatoire simple

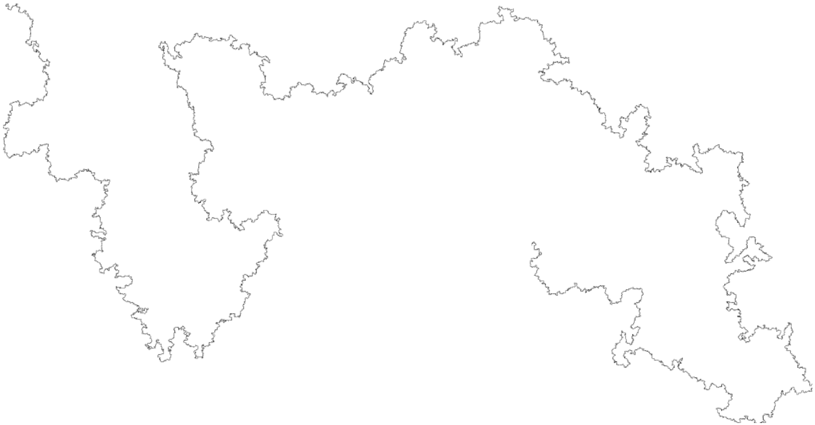
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables $i.i.d$ avec $\mathbb{P}(X_k = \pm\overrightarrow{i}) = \mathbb{P}(X_k = \pm\overrightarrow{j}) = 1/4$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.



Marche aléatoire à boucles effacées



Marche aléatoire à boucles effacées

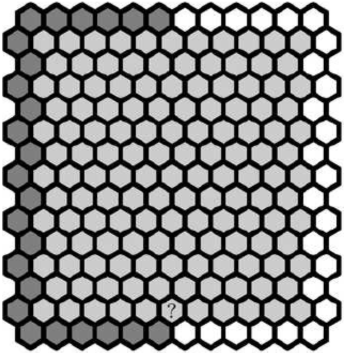


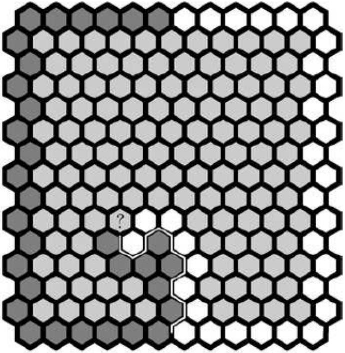
Convergence vers le SLE_2 (radial)

Théorème (Lawler, Schramm, Werner, 2004)

La marche aléatoire à boucles effacée tuée à son temps de sortie de $\mathbb{U}$ converge vers un SLE (radial) avec $\kappa = 2$.

L'explorateur harmonique





Convergence vers le SLE_4

Théorème (Schramm, Sheffield, 2005)

L'explorateur harmonique converge un SLE_4.

Convergence vers le SLE_8

Théorème (Lawler, Schramm, Werner, 2004)

La courbe de Peano d'un arbre couvrant uniforme converge vers un SLE_8.

Autres propriétés, conjectures...

Dimension de Hausdorff du SLE

Théorème (Beffara, 2004, 2008)

Considérons $\kappa > 0$ *et* (K_t) *un* SLE_κ *de trace* $\gamma(t)$. *Si on pose* $\mathcal{H} := \gamma([0, +\infty[)$, *alors*

$$\mathit{dim}_H(\mathcal{H}) = 2 \wedge \left(1 + \frac{\kappa}{8}\right).$$

Dimension de Hausdorff du SLE

Conjecture (Kenyon)

Presque sûrement, si $\kappa \geq 4$, la dimension de Hausdorff de la frontière d'un SLE_κ est $1 + 2/\kappa$, précisément :

$$\mathit{dim}_H(\partial K_1) = 1 + \frac{2}{\kappa}, \quad \mathit{pour} \quad \kappa \geq 4.$$

Dualité entre SLE_κ et $\mathrm{SLE}_{16/\kappa}$

En se basant sur des considérations concernant la dimension de Hausdorff du SLE et de sa trace, Duplantier a suggéré une dualité entre SLE_κ et $\mathrm{SLE}_{16/\kappa}$ lorsque $\kappa > 4$.

On pense que la frontière extérieure d'un SLE_κ avec $\kappa > 4$ serait décrite par un $\mathrm{SLE}_{16/\kappa}$.

Des liens profonds ont été établis entre SLE_2 et SLE_8 d'une part, entre $\mathrm{SLE}_{8/3}$ et SLE_6 d'autre part.

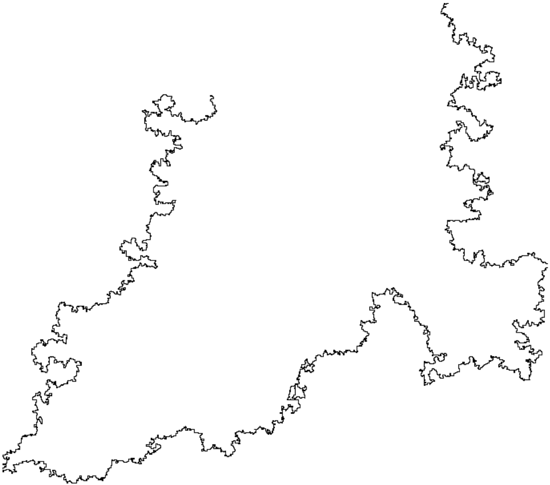
Marche auto-évitante uniforme dans $\mathbb{Z}^2$

Sur $\mathbb{Z}^2$, on appelle chemin auto-évitant de longueur N un chemin $c = (c_0, \ldots, c_N)$ avec $|c_{i+1} - c_i| = 1$, sans point double.

Si A_N désigne le nombre de tels chemins issus de l'origine, on a $A_{N+M} \leq A_N \times A_M$, et $A_N > c^N$, $c > 1$. On en déduit qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $(A_N)^{1/N} \to \lambda$.

Une marche aléatoire auto-évitante uniforme issue de zéro et de longueur N correspond au choix uniforme d'un chemin auto-évitant issu de zéro parmi les A_N chemins.

Marche auto-évitante uniforme dans $\mathbb{Z}^2$



Convergence vers le $\mathrm{SLE}_{8/3}$

Conjecture

La marche auto-évitante uniforme dans $\mathbb{Z}^2$ converge vers un $SLE_{8/3}$, lorsque le pas du réseau tend vers zéro.

Éléments de bibliographie

• les articles et “lectures notes” de Lawler, Schramm et Werner et al., disponibles sur Arxiv.

• L’introduction de la thèse de doctorat de Vincent Beffara disponible en ligne.

• Merci à Vincent Beffara qui a réalisé les simulations du SLE ainsi qu’un certain nombre des images présentées dans l’exposé.