# Un théorème limite central pour une classe de diffusions relativistes

Jürgen Angst et Jacques Franchi

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Séminaire de probabilités de Strasbourg, le 26 mars 2007

# Plan de l'exposé

# Plan de l'exposé

# L'espace de Minkowski

- L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$ est l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$ :

$$x = (x^\mu) = (x^0,\, x^i) = (x^0,\, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

muni de la pseudo-métrique minkowskienne

$$q(x,\, x) = |x^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |x^i|^2.$$

- D'après la théorie de la relativité restreinte, si $(x^\mu_\tau)_{\tau\geq 0}$ est la trajectoire d'une particule de masse $m > 0$ dans $\mathbb{R}^{1,d}$, on a :

$$q\left(\frac{dx_\tau}{d\tau}, \frac{dx_\tau}{d\tau}\right) < 0, \quad i.e.,$$

$\left(\frac{dx^\mu_\tau}{d\tau}\right)$ vit à l'intérieur du cône de lumière $\{x, q(x,x) = 0\}$.

# L'espace de Minkowski

- L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$ est l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$ :
$$x = (x^\mu) = (x^0,\, x^i) = (x^0,\, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$
muni de la pseudo-métrique minkowskienne
$$q(x,\, x) = |x^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |x^i|^2.$$
- D'après la théorie de la relativité restreinte, si $(x_\tau^\mu)_{\tau \geq 0}$ est la trajectoire d'une particule de masse $m > 0$ dans $\mathbb{R}^{1,d}$, on a :
$$q\left(\frac{dx_\tau}{d\tau}, \frac{dx_\tau}{d\tau}\right) < 0, \quad i.e.,$$
$\left(\dfrac{dx_\tau^\mu}{d\tau}\right)$ vit à l'intérieur du cône de lumière $\{x, q(x,x) = 0\}$.

# L'espace de Minkowski, temps propre

- La ligne d'univers $(x^\mu_\tau)_{\tau \geq 0}$ d'une particule de masse $m$ peut donc toujours être paramétrée par la longueur d'arc, ou temps propre $s$ :

$$ds := \sqrt{-q\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}, \frac{dx^\mu}{d\tau}\right)}d\tau.$$

- Le moment $p = (p^0, \mathbf{p})$ défini par $p^\mu_s := m\dfrac{dx^\mu_s}{ds}$ satisfait alors

$$|p^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |p^i|^2 = m^2.$$

# L'espace de Minkowski, temps propre

- La ligne d'univers $(x^\mu_\tau)_{\tau \geq 0}$ d'une particule de masse $m$ peut donc toujours être paramétrée par la longueur d'arc, ou temps propre $s$ :

$$ds := \sqrt{-q\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}, \frac{dx^\mu}{d\tau}\right)}d\tau.$$

- Le moment $p = (p^0,\ \mathbf{p})$ défini par $p^\mu_s := m\dfrac{dx^\mu_s}{ds}$ satisfait alors

$$|p^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |p^i|^2 = m^2.$$

# Plan de l'exposé

1. Le cadre, l'objet de l'étude
   - Espace de Minkowski
   - Du cadre minkowskien au cadre euclidien
   - Ce que l'on cherche à établir
2. Nos résultats
   - Enoncé du théorème principal
   - Comportement asymptotique de la variance
   - Conséquence sur la conjecture de Dunkel et Hänggi
3. Preuve des résultats
   - La méthode à partir d'un cas simple
   - Les deux principaux ingrédients de la preuve
   - Quelques détails de la preuve

# Une classe de diffusions minkowskiennes

- Nous considérons des diffusions minkowskiennes du type

$$(x_t)_{t\geq 0} = (t,\ \mathbf{x}(t),\ p^0(t),\ \mathbf{p}(t))_{t\geq 0}$$

- Dans ce cas, on a

$$p^0 = \frac{dt}{ds} = \left(1 - |\mathbf{v}|^2\right)^{-1/2} = \gamma(r) \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma(r)\,\mathbf{v},$$

où

$$\mathbf{v} := (v^1, \dots, v^d),\ \ v^i := \frac{dx^i}{dt},\ \ r := |\mathbf{p}| \ \text{ et } \ \gamma(r) := \sqrt{1 + r^2}.$$

- Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux diffusions euclidiennes $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

# Une classe de diffusions minkowskiennes

- Nous considérons des diffusions minkowskiennes du type

$$(x_t)_{t\geq 0} = (t,\ \mathbf{x}(t),\ p^0(t),\ \mathbf{p}(t))_{t\geq 0}$$

- Dans ce cas, on a

$$p^0 = \frac{dt}{ds} = \left(1 - |\mathbf{v}|^2\right)^{-1/2} = \gamma(r) \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma(r)\,\mathbf{v},$$

où

$$\mathbf{v} := (v^1, \ldots, v^d),\ \ v^i := \frac{dx^i}{dt},\ \ r := |\mathbf{p}|\ \text{ et }\ \gamma(r) := \sqrt{1+r^2}.$$

- Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux diffusions euclidiennes $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

# Une classe de diffusions minkowskiennes

- Nous considérons des diffusions minkowskiennes du type

$$(x_t)_{t\geq 0} = (t,\ \mathbf{x}(t),\ p^0(t),\ \mathbf{p}(t))_{t\geq 0}$$

- Dans ce cas, on a

$$p^0 = \frac{dt}{ds} = \left(1 - |\mathbf{v}|^2\right)^{-1/2} = \gamma(r) \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma(r)\,\mathbf{v},$$

où

$$\mathbf{v} := (v^1, \ldots, v^d), \quad v^i := \frac{dx^i}{dt}, \quad r := |\mathbf{p}| \ \text{ et } \ \gamma(r) := \sqrt{1 + r^2}.$$

- Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux diffusions euclidiennes $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

# Une classe de diffusions euclidiennes

Nous supposerons que les diffusions euclidiennes $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ associées aux diffusions minkowskiennes $(t,\ \mathbf{x}_t,\ p_t^0,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de système d'équations différentielles stochastiques du type :

$$\begin{cases} dx_t^i = p_t^i \times f(r_t)\, dt \\ \\ dp_t^i = -p_t^i \times b(r_t)\, dt + \sigma(r_t)\, dW_t^i \end{cases} \qquad (\star) \quad ,$$

où $\mathbf{W} := (W^1, \ldots, W^d)$ est un mouvement brownien standard de dimension $d$ et $f$, $b$, $\sigma$ des fonctions boréliennes réelles.

# Hypothèses sur les paramètres de la diffusion

## Hypothèses :

$(\mathcal{H})$

- *Les fonctions* $f$ *et* $b$ *vérifient* $0 \leq f \leq b$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
- $\displaystyle\int_0^\rho g < \infty$ *pour tout* $\rho > 0$, *et* $\displaystyle\lim_{r \to 0} g(r) = 0$.
- *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$\sigma \geq \varepsilon$ *sur* $\mathbb{R}_+$, *et* $g(r) \geq \varepsilon$ *pour* $r$ *assez grand.*

où la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(r) := \dfrac{2r\,b(r)}{\sigma^2(r)}$.

# Exemples de diffusions considérées

Le Processus d'Orstein-Uhlenbeck Relativiste (ROUP) :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ \\ dp_t^i = -\frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt + \sqrt{2\beta^{-1}}\, dW_t^i \end{cases}$$

Le processus de Dunkel et Hänggi :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ \\ dp_t^i = -\, p_t^i\, dt + \sqrt{2\beta^{-1}\sqrt{1+r_t^2}}\, dW_t^i \end{cases}$$

# Plan de l'exposé

# Comportement de la variance dans le cas euclidien

Si $(\mathbf{x}_t)_{t\geq 0}$ est la primitive d'un processus de Orstein-Uhlenbeck euclidien $(\mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$, *i.e.*,

$$\begin{cases} dx_t^i = p_t^i \, dt \\ \\ dp_t^i = -\, p_t^i \, dt + \sqrt{2\beta^{-1}} \, dW_t^i \end{cases}$$

alors, lorsque $t$ tend vers l'infini :

$$t^{-1}\mathbb{E}\left(|\mathbf{x}_t|^2\right) = t^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d} |x_t^i|^2\right) \longrightarrow \frac{2d}{\beta}.$$

Qu'en est-il pour les généralisations relativistes que sont le ROUP et le processus de Dunkel et Hänggi ?

# La conjecture de Dunkel et Hänggi

## Conjecture de Dunkel et Hänggi

*Soit* $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)$ *une solution du système*

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ dp_t^i = -\, p_t^i\, dt + \sqrt{2\beta^{-1}\sqrt{1+r_t^2}}\, dW_t^i \end{cases}$$

*Alors la variance normalisée* $\Sigma_t^2 \ := \ t^{-1}\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d |x_t^i|^2\right)$ *converge, lorsque* $t$ *tend vers l'infini, vers la constante* $\dfrac{2d}{2+\beta}$.

# Le comportement asymptotique de $(\mathbf{x}^t_a)_{a\geq 0}$

De manière plus générale, étant donnée une solution $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ du système $(\star)$ sous les hypothèses $(\mathcal{H})$ :

$$\begin{cases} dx^i_t = p^i_t \times f(r_t)\, dt \\ \\ dp^i_t = -p^i_t \times b(r_t)\, dt + \sigma(r_t)\, dW^i_t \end{cases} \qquad (\star)$$

on souhaite déterminer le comportement asymptotique, lorsque le paramètre $t$ tend vers l'infini, du processus

$$\mathbf{x}^t := (\mathbf{x}^t_a)_{a\geq 0} := \left(t^{-1/2}\, \mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} = t^{-1/2}\left(x^1_{at},\ \dots,\ x^d_{at}\right)_{a\geq 0}.$$

Ce faisant, on répond à la conjecture puisque $\Sigma^2_t = \mathbb{E}\left[|\mathbf{x}^t_1|^2\right]$.

# Plan de l'exposé

# Enoncé du théorème principal

## Théorème principal

*Soit* $(\mathbf{x}_t, \ \mathbf{p}_t)$ *une diffusion solution du système d'équations*

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t^i = p_t^i \times f(r_t) \, dt \\ \\ dp_t^i = -p_t^i \times b(r_t) \, dt + \sigma(r_t) \, dW_t^i \end{array} \right. \qquad (\star)$$

*Sous les hypothèses* $(\mathcal{H})$, *il existe une constante positive* $\Sigma_\infty$ *telle que, lorsque* $t$ *tend vers l'infini, le processus* $(\mathbf{x}_a^t)_{a \geq 0}$ *converge en loi dans* $C(\mathbb{R}^+, \ \mathbb{R}^d)$, *muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, vers le processus* $(\Sigma_\infty \times \mathcal{B}_a)_{a \geq 0}$ *où* $(\mathcal{B}_a)_{a \geq 0}$ *est un mouvement brownien standard* $d$*-dimensionnel.*

# Plan de l'exposé

# Conséquence sur la variance

## Corollaire : comportement asymptotique de la variance

*Sous les hypothèses $(\mathcal{H})$, pour tout point initial, lorsque $t$ tend vers l'infini on a la convergence en loi :*

$$t^{-1}\,|\mathbf{x}_t|^2 \longrightarrow \Sigma_\infty^2 \times U,$$

*où $U$ suit une loi du chi $2$ à $d$ degrés de liberté. De plus, pour tout point initial, on a la convergence des espérances :*

$$\Sigma_t^2 := t^{-1}\,\mathbb{E}\left[|\mathbf{x}_t|^2\right] \longrightarrow d \times \Sigma_\infty^2.$$

# Plan de l'exposé

# Conséquence sur la conjecture de DH

## Corollaire : réponse à la question de DH

*Il y a bien convergence de $\Sigma_t^2$ vers une constante $\Sigma_\infty^2(\beta)$ lorsque $t$ tend vers l'infini. Cependant, dans le cas $d=1$, on a*

$$\Sigma_\infty^2(\beta) \neq \frac{2}{2+\beta}.$$

En dimension $d=1$, la constante $\Sigma_\infty^2(\beta)$ est en fait donnée par :

$$2\,\beta \left( \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} \left[ \int_x^\infty \frac{y\, e^{\beta\left(1-\sqrt{1+y^2}\right)}}{1+y^2}\, dy \right]^2 e^{\beta\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}\, dx.$$

Soit $\Sigma^2_\infty(\beta)$ donnée par :

$$2\,\beta \left( \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} \left[ \int_x^\infty \frac{y\, e^{\beta\left(1-\sqrt{1+y^2}\right)}}{1+y^2}\, dy \right]^2 e^{\beta\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}\, dx.$$

### Comportement asymptotique de $\Sigma^2_\infty(\beta)$ en dimension $d=1$

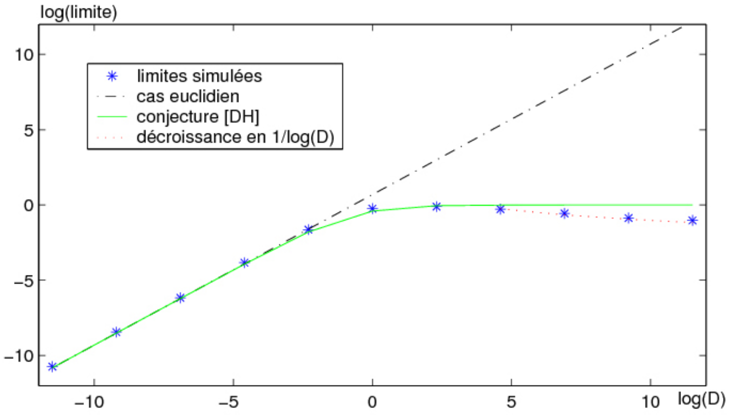
*Lorsque* $\beta \nearrow \infty$, *on a*

$$\Sigma^2_\infty(\beta) \sim 2/\beta\,.$$

*Lorsque* $\beta \searrow 0$, *il existe une constante explicite* $A>0$ *telle que*

$$\Sigma^2_\infty(\beta) \sim A \left( \log \frac{1}{\beta} \right)^{-1}.$$

# Simulations numériques



# Plan de l'exposé

# Un cas simple : le processus de Orstein-Uhlenbeck

Soit $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}$ la solution du système

$$\begin{cases} dx_t^i = p_t^i\, dt \\ \\ dp_t^i = -p_t^i\, dt + \sigma\, dW_t^i \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\mathbf{x}_0,\ \mathbf{p}_0) = (0,\ 0).$$

En intégrant la seconde équation, il vient

$$x_{at}^i = -p_{at}^i + \sigma\, W_{at}^i.$$

$(p_t^i)$ est ergodique sur $\mathbb{R}$, de loi invariante $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on a donc

$$t^{-1/2} p_{at}^i \to 0 \quad \text{d'où} \quad t^{-1/2} x_{at}^i = \sigma \times t^{-1/2} W_{at}^i + o(1).$$

Finalement :

$$t^{-1/2} x_{at}^i \to \sigma \times \mathcal{B}_a^i$$

# La méthode générale

- Trouver une fonction $F = (F^1, \ldots, F^d)$ telle que :

$$x^i_{at} = -F^i(\mathbf{p}_{at}) + M^i_{at}, \tag{1}$$

où $\mathbf{M} = (M^1, \ldots, M^d)$ est une martingale.

- Montrer que $t^{-1/2} F^i(\mathbf{p}_{at}) = o(1)$ lorsque $t$ tend vers l'infini.
- Montrer que le processus $\mathbf{M}^t_a = t^{-1/2}(M^1_{at}, \ldots, M^d_{at})$ converge en loi vers un mouvement brownien.

# La méthode générale

- Trouver une fonction $F = (F^1, \dots, F^d)$ telle que :

$$x^i_{at} = -F^i(\mathbf{p}_{at}) + M^i_{at}, \tag{1}$$

où $\mathbf{M} = (M^1, \dots, M^d)$ est une martingale.

- Montrer que $t^{-1/2} F^i(\mathbf{p}_{at}) = o(1)$ lorsque $t$ tend vers l'infini.

- Montrer que le processus $\mathbf{M}^t_a = t^{-1/2}(M^1_{at}, \dots, M^d_{at})$ converge en loi vers un mouvement brownien.

# La méthode générale

- Trouver une fonction $F = (F^1, \dots, F^d)$ telle que :

$$x^i_{at} = -F^i(\mathbf{p}_{at}) + M^i_{at}, \tag{1}$$

où $\mathbf{M} = (M^1, \dots, M^d)$ est une martingale.

- Montrer que $t^{-1/2} F^i(\mathbf{p}_{at}) = o(1)$ lorsque $t$ tend vers l'infini.

- Montrer que le processus $\mathbf{M}^t_a = t^{-1/2}(M^1_{at}, \dots, M^d_{at})$ converge en loi vers un mouvement brownien.

# Plan de l'exposé

# Les deux principaux ingrédients de la preuve

## Existence et contrôle des fonctions $F^i$

*Il existe des fonctions $F^i$ de classe $C^2$ vérifiant la relation $(1)$*

$$F^i(\mathbf{p}) = \frac{p^i}{r} \times \psi(r) = \theta^i \times \psi(r)$$

*La fonction $\psi$ vérifie $0 \leq \psi \leq Id$ et $|\psi'| = O\left(1 + Id^{-2}G\right)$*

## Ergodicité du processus $(\mathbf{p}_t)$

*Le processus $(\mathbf{p}_t)$ admet une mesure invariante $\pi$. La mesure $\pi$ est finie, de sorte que $(\mathbf{p}_t)$ est ergodique.*

# Plan de l'exposé

# Comment trouver les fonctions $F^i$ ?

On cherche $F = (F^1, .., F^d) \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que :

$$dF^i(\mathbf{p}_t) + dx_t^i - dM_t^i = 0.$$

D'après la formule d'Itô :

$$dF^i(\mathbf{p}_t) = \left[ \left( -\sum_{j=1}^{d} \partial_j F^i(\mathbf{p}_t) p_t^j \right) b(r_t) \; + \frac{\sigma^2(r_t)}{2} \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 F^i(\mathbf{p}_t) \right] dt + dM_t^i \, ,$$

avec

$$dM_t^i = \sigma(r_t) \sum_{j=1}^{d} \partial_j F^i(\mathbf{p}_t) dW_t^j \, .$$

# Comment trouver les fonctions $F^i$ ?

Une fonction $F$ satisfaisant $(1)$ doit résoudre :

$$\left[\left(-\sum_{j=1}^{d} \partial_j F^i(\mathbf{p}) p^j\right) b(r) + \frac{\sigma^2(r)}{2} \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 F^i(\mathbf{p})\right] = -p^i \times f(r). \quad (2)$$

Si $F^i$ est de la forme $F^i(\mathbf{p}) = \theta^i \times \psi(r) = p^i \times \psi(r)/r$, et si

$$g(r) := \frac{2r\, b(r)}{\sigma^2(r)}, \quad h(r) := \frac{2r\, f(r)}{\sigma^2(r)}, \quad \text{and} \quad G(r) := \int_0^r g(\rho)\, d\rho\,,$$

alors l'équation $(2)$ est équivalente à :

$$\psi''(r) - \left(g(r) - \frac{(d-1)}{r}\right)\psi'(r) - \frac{(d-1)}{r^2}\psi(r) + h(r) = 0\,. \quad (3)$$

# Comment trouver les fonctions $F^i$ ?

**Proposition : (un grand merci à R. Schäfke !)**

*Sous les hypothèses* $(\mathcal{H})$*, l'équation*

$$\psi''(r) - \left( g(r) - \frac{(d-1)}{r} \right) \psi'(r) - \frac{(d-1)}{r^2} \psi(r) + h(r) = 0 \,.$$

*admet une solution* $\psi$ *de classe* $C^2$ *vérifiant* $\psi(0) = 0$ *et* $0 \leq \psi \leq Id$ *sur* $\mathbb{R}^+$*. De plus, on a* $|\psi'| = \mathcal{O}(1 + Id^{-2} G)$ *en l'infini.*

# Ergodicité du processus $(\mathbf{p}_t)$

Si $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)$ est solution de $(\star)$, alors $r_t := |\mathbf{p}_t|$ vérifie :

$$dr_t = \left( \frac{(d-1)\sigma^2(r_t)}{2\, r_t} - r_t\, b(r_t) \right) dt + \sigma(r_t)\, dB_t, \quad \text{avec} \quad (B_t) \ \text{un} \ MB.$$

Pour $d \geq 2$, on a alors :

$$r_t = r_0 \exp\left( \frac{(d-2)}{2}\, C_t - \int_0^t b(r_s) ds \right) \exp\left(B_{C_t}\right),$$

où l'horloge $C_t$ est donnée par

$$C_t := \int_0^t \frac{\sigma^2(r_s)}{r_s^2}\, ds\,.$$

# Ergodicité du processus $(\mathbf{p}_t)$

Le processus angulaire $\Theta_t = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ défini par

$$\mathbf{p}_t := r_t \times \Theta_{C_t}$$

est solution du système

$$d\theta_t^i = \left(\frac{1-d}{2}\right) \theta_t^i \, dt + \sum_{j=1}^{d} \left(\delta_{ij} - \theta_t^i \theta_t^j\right) d\widetilde{W}_t^j,$$

où $\widetilde{\mathbf{W}} = (\widetilde{W}^1, \ldots, \widetilde{W}^d)$ est un mouvement brownien standard $d$-dimensionnel. Le processus $(\Theta_t) \in \mathbb{S}^{d-1}$ est donc un mouvement brownien sphérique.

Le générateur infinitésimal de la diffusion $(r_t, \Theta_{C_t})$ est

$$\mathcal{A} := \mathcal{L}_r + \frac{\sigma^2(r)}{2\, r^2}\, \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}},$$

$$\text{où} \quad \mathcal{L}_r := \frac{\sigma^2(r)}{2} \left( \left[ \frac{d-1}{r} - g(r) \right] \partial_r + \partial_r^2 \right).$$

Le processus $(r_t)$ admet la mesure invariante $\nu(r)dr$, de densité sur $\mathbb{R}^+$ :

$$\nu(r) := \sigma^{-2}(r)\, r^{d-1}\, e^{-G(r)}\,.$$

D'après $(\mathcal{H})$, $\nu$ est finie de sorte que $r_t$ est ergodique.

### Proposition : ergodicité du processus $(\mathbf{p}_t)$

*La mesure de probabilité*

$$\pi(dr, d\Theta) := \left(\int_0^\infty \nu\right)^{-1} \times \nu(r) dr\, d\Theta$$

*est une probabilité invariante pour le processus* $(r_t, \Theta_{C_t})$*, qui est donc ergodique* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}$.

# La méthode générale

- Montrer que $t^{-1/2}F^i(\mathbf{p}_{at}) = o(1)$ lorsque $t$ tend vers l'infini.
- Montrer que le processus $\mathbf{M}_a^t = t^{-1/2}(M_{at}^1, \ldots, M_{at}^d)$ converge en loi vers un mouvement brownien.

# Le “reste” est négligeable

**Lemme**

*Pour tout point initial* $\mathbf{p}_0 = (r_0, \Theta_0)$, *uniformément par rapport à* $a \geq 0$, *on a :*

$$t^{-1}\,\mathbb{E}_{\mathbf{p}_0}\left[|F^i(\mathbf{p}_{at})|^2\right] \longrightarrow 0\,, \;\textit{lorsque}\; t \to \infty\,, \quad \textit{pour}\; 1 \leq i \leq d\,.$$

Comme $0 \leq \psi \leq Id$, on a $|F^i(\mathbf{p}_{at})|^2 \leq \psi^2(r_{at}) \leq r_{at}^2$ et donc

$$\mathbb{E}_{\mathbf{p}_0}\left[|F^i(\mathbf{p}_{at})|^2\right] \leq \mathbb{E}_{r_0}\left[r_{at}^2\right].$$

Le processus $(r_t)$ étant ergodique, la fonction $s \mapsto \mathbb{E}_{r_0}\left[r_s^2\right]$ est bornée, d'où le résultat.

# Les martingales $M^i$ sont asymptotiquement indépendantes

Grâce à l'ergodicité de $\mathbf{p}_t$, on montre que :

## Lemme

*Pour* $1 \leq i \neq l \leq d$, *lorsque* $t \to \infty$ *on a presque sûrement :*

$$t^{-1}\langle M^i, M^l\rangle_t \longrightarrow 0, \quad \textit{et} \;\; t^{-1}\langle M^i, M^i\rangle_t \longrightarrow \Sigma^2_\infty,$$

*où*

$$\Sigma^2_\infty = \left( d \int_0^\infty \nu \right)^{-1} \left[ \int_0^\infty \psi'^2 \sigma^2 d\nu + (d-1) \int_0^\infty I d^{-2} \psi^2 \sigma^2 d\nu \right].$$

*En particulier,*

$$\langle M^i, M^l\rangle_t = o\Big( \langle M^i, M^i\rangle_t \Big).$$

Soit $\mathbf{M}^t$ la martingale renormalisée :

$$\mathbf{M}_a^t := (M_a^{1,t}, \dots, M_a^{d,t}) := t^{-1/2}\,\mathbf{M}_{at} ,$$

et $\beta^{i,t}$ les MB de Dambis-Dubins-Schwarz associés :

$$M_a^{i,t} = \beta^{i,t}(\langle M^{i,t}, M^{i,t}\rangle_a) = \beta^{i,t}(t^{-1}\langle M^i, M^i\rangle_{at}).$$

D'après le théorème de Knight asymptotique, on a alors

**Corollaire : indépendance asymptotique des martingales $M^i$**

*Le processus* $(\beta^{1,t}, \dots, \beta^{d,t})$ *converge en loi, lorsque* $t$ *tend vers l'infini, vers un mouvement brownien standard* $\mathcal{B}$ *de dimension* $d$.

# $\mathbf{M}^t$ converge vers un mouvement brownien

Grâce au théorème de couplage de Skorokhod, on obtient

**Proposition : convergence des marginales de dimension finies**

*Le processus $\mathbf{M}^t$ converge au sens des marginales de dimension finies, lorsque $t$ tend vers l'infini, vers un mouvement brownien $\Sigma_\infty \times \mathcal{B}$.*

Enfin, en utilisant le critère d'Arzelà-Ascoli, on montre que

**Proposition : tension**

*La famille des martingales $\mathbf{M}^t$ est tendue, dans $C\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d\right)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.*