



## Temps de surveillance



La ville de Königsberg veut organiser une manifestation culturelle qui dure huit jours.

Elle s'adresse alors à la société de surveillance XXX qui lui envoie ses quatre meilleurs surveillants : **Umberto, Denis, Tristan et Quentin**.

Leur mission sera d'assurer chacun leur tour pendant deux jours la sécurité des visiteurs.

Lors de la signature du contrat, Umberto, Denis, Tristan et Quentin posent cependant leurs conditions :

- Umberto veut avoir ses **deux jours de travail consécutifs** ;
- Denis veut **un jour de repos** entre ses deux jours de travail ;
- Tristan veut **deux jours de repos**,
- Quentin veut **trois jours de repos**.

Consciente qu'elle a devant elle les quatre meilleurs surveillants de la ville, l'organisatrice de la manifestation accepte leurs conditions et promet de leur donner leur horaire le lundi suivant.

Pouvez-vous l'aider ?



Comme l'organisatrice, essayez, à l'aide de la table, de satisfaire les requêtes de n surveillants pour n=1, n=2, n=3, n=4,...

Est-ce possible pour tout n ?



L'organisatrice de la manifestation, un peu désespérée, appelle un de ses amis mathématiciens :

« Nous allons modéliser le problème, ainsi tu pourras par la suite le résoudre pour un nombre quelconque de surveillants !

Numérotions tout d'abord les jours de surveillance de 1 à 8.

Numérotions aussi les surveillants de la manière suivante :

Umberto : 1

Denis : 2

Tristan : 3

Quentin : 4

Notons  $a_i$  et  $b_i$  les deux jours où le i-ème surveillant est en faction.

*Par exemple, si Tristan surveille le 4<sup>ème</sup> jour et le 7<sup>ème</sup> jour, alors  $a_3=4$  et  $b_3=7$ .*

Les quatre conditions demandées par les surveillants s'écrivent alors  
 $b_i - a_i = i$  pour i allant de 1 à 4

*Dans l'exemple de Tristan :  $b_3-a_3=7-4=3$  !*

Donc, pour que tous les jours soient surveillés, il faut que dans la suite

$a_1, b_1, \dots, a_4, b_4$

tous les nombre de 1 à 8 se retrouvent une et une seule fois.

Pour un n donné, trouver un tel horaire de surveillance revient à découvrir une suite  $a_1, b_1, \dots, a_4, b_4$  satisfaisant les conditions ci-dessus, pour autant que ce soit possible ! »