



Temps de surveillance



La ville de Königsberg veut organiser une manifestation culturelle qui dure huit jours.

Elle s'adresse alors à la société de surveillance XXX qui lui envoie ses quatre meilleurs surveillants : **Umberto, Denis, Tristan et Quentin.**

Leur mission sera d'assurer chacun leur tour pendant deux jours la sécurité des visiteurs.

Lors de la signature du contrat, Umberto, Denis, Tristan et Quentin posent cependant leurs conditions :

- Umberto veut avoir ses **deux jours de travail consécutifs** ;
- Denis veut **un jour de repos** entre ses deux jours de travail ;
- Tristan veut **deux jours de repos**,
- Quentin veut **trois jours de repos**.

Consciente qu'elle a devant elle les quatre meilleurs surveillants de la ville, l'organisatrice de la manifestation accepte leurs conditions et promet de leur donner leur horaire le lundi suivant.

Pouvez-vous l'aider ?

L'organisatrice de la manifestation, un peu désespérée, appelle un de ses amis mathématiciens :

« Nous allons modéliser le problème, ainsi tu pourras par la suite le résoudre pour un nombre quelconque de surveillants !

Numérotons tout d'abord les jours de surveillance de 1 à 8.

Numérotons aussi les surveillants de la manière suivante :

Umberto :	1
Denis :	2
Tristan :	3
Quentin :	4

Notons a_i et b_i les deux jours où le i -ème surveillant est en faction.

Par exemple, si Tristan surveille le 4^{ème} jour et le 7^{ème} jour, alors $a_3=4$ et $b_3=7$.

Les quatre conditions demandées par les surveillants s'écrivent alors

$b_i - a_i = i$ pour i allant de 1 à 4

Dans l'exemple de Tristan : $b_3 - a_3 = 7 - 4 = 3$!

Donc, pour que tous les jours soient surveillés, il faut que dans la suite

$a_1, b_1, \dots, a_4, b_4$

tous les nombres de 1 à 8 se retrouvent une et une seule fois.

Pour un n donné, trouver un tel horaire de surveillance revient à découvrir une suite $a_1, b_1, \dots, a_4, b_4$ satisfaisant les conditions ci-dessus, pour autant que ce soit possible ! »



Comme l'organisatrice, essayez, à l'aide de la table, de satisfaire les requêtes de n surveillants pour $n=1, n=2, n=3, n=4, \dots$

Est-ce possible pour tout n ?

