FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Dans la tête, pas de limite

0 — $2 \cdot 10^{-4}[mm]$


Epaisseur de la paroi d'une bulle de savon


Une *Myriade*, un très grand nombre selon les Grecs.

10^4


Nombre de connexions par neurone dans le cerveau humain

$\approx 10^4$

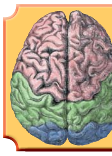

Nombre de gènes dans l'ADN humain

$\approx 3,5 \cdot 10^4$

10^5


Nombre de cheveux

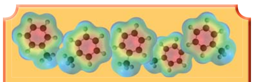
$\approx 1,5 \cdot 10^5$


Nombre de neurones dans le cerveau humain

10^{11}

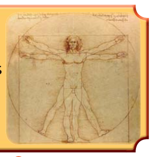

Nombre d'étoiles dans l'Univers

$\approx 10^{22}$


Nombre d'Avogadro: nombre d'atomes de Carbone dans 12gr de charbon pur.

$6,022 \cdot 10^{23}$

10^{10}


Nombre de cellules dans le corps humain

$\approx 10^{14}$


Masse de la Terre

$5,9736 \cdot 10^{24}[kg]$


Rayon de l'Univers observable

$10^{26}[m]$


Nombre de molécules d'eau sur la Terre

$\approx 10^{47}$

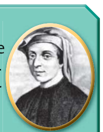

Nombre de particules dans l'Univers

$\approx 10^{80}$ — 10^{87}

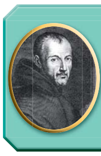
10^{100}

Gogol Nombre introduit en 1938 par le mathématicien américain Edward Kasner pour illustrer la différence entre un grand nombre et l'infini

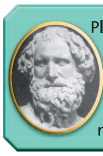
10^{10^5}


Plus grand nombre de Fibonacci premier connu à ce jour (avril 2009)

$\mathcal{F}_{1\,636\,007} \cong 10^{3,4 \cdot 10^5}$


Plus grand nombre premier connu à ce jour (août 2008)

$2^{43\,112\,609} - 1 \cong 3,16 \cdot 10^{1,3 \cdot 10^7}$


Plus grand nombre nommé dans le *Compteur de sable*, le système de numération d'Archimède

$10^{8 \cdot 10^{16}}$

$10^{10^{10}}$

Gogolplex: il est impossible d'écrire ce nombre sur du papier, car cela requerrait plus de matière que l'univers ne peut en fournir.

$10^{10^{100}}$

Des nombres tellement grands qu'on invente de nouvelles notations !

On connaît la notation à l'aide des puissances (par exemple $10^{10^{100}}$). Cependant, elle devient vite encombrante, voire insuffisante. C'est pour cela que Knuth introduit la notation des puissances itérées (1976). C'est à dire:

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b \text{ exemplaires de } a} \quad \text{ou plus généralement} \quad a \uparrow^n b = \begin{cases} a^b & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } b = 0 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Mais cette notation ne suffit toujours pas pour des nombres comme celui de Graham. C'est pourquoi Conway introduit la notation des flèches chaînées.

Pour des chaînes de longueur 3, on a l'égalité $\underset{\text{(Knuth)}}{a \uparrow^n b} = \underset{\text{(Conway)}}{a \to b \to n}$, tandis que pour les chaînes plus longues, la notation de Knuth ne suffit plus et on définit récursivement la notation de Conway comme:
soit *p* et *q* des nombres entiers positifs et *X* une chaîne. On pose :

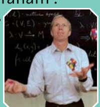
1. $p \to q = p^q$ (exponentiation)
2. $X \to 1 = X$ (et donc $p \to 1 = p$)
3. $X \to p \to (q+1) = X \to (X \to (\ldots X \to (X) \to q \ldots) \to q) \to q$
avec *p* copies de la chaîne *X*, *p-1* copies de *q*, et *p-1* paires de parenthèses.

$10^{10^{10^5}}$

$10^{10^{10^{10}}}$


Nombre de Skewes

$10^{10^{10^{34}}}$


Nombre de Graham : le plus grand nombre jamais utilisé dans une démonstration mathématique pertinente

Si on considère la fonction
$$f(n) = 3 \to 3 \to n$$
alors
$$G = f^{64}(4)$$
dont voici une aproximation
$$3 \to 3 \to 64 \to 2 < G < 3 \to 3 \to 65 \to 2$$

∞

... et pourtant, depuis longtemps déjà, les hommes ont conscience de l'infini...

Conception : Shaula Fiorelli Vilmart

Dans la tête, pas de limite

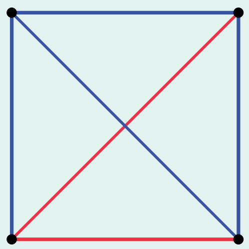
Le problème associé au nombre de Graham

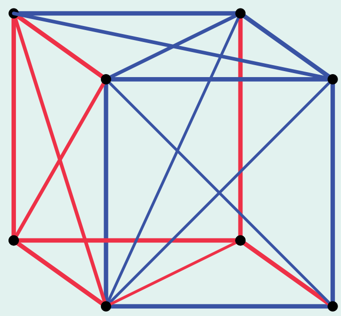
Le nombre de Graham entretient un lien avec une branche des mathématiques connue sous le nom de théorie de Ramsey :

> Soit un hypercube de dimension n dont on relie tous les couples de sommets pour obtenir un graphe complet à 2^n sommets (et donc $2^{n-1}(2^n-1)$ arêtes). Si l'on colorie chacune des arêtes du graphe en bleu ou en rouge, quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle toutes les façons de colorier le graphe permettent d'obtenir quatre sommets coplanaires tels que le sous-graphe complet qu'ils déterminent ait toutes ses arêtes de la même couleur ?

La solution de ce problème n'est pas encore connue. Le nombre de Graham est la plus petite valeur de n connue qui satisfait ce problème.

Dans son livre *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers* sorti en 1989, Martin Gardner a écrit que « les spécialistes de la théorie de Ramsey estiment que la valeur du nombre de Ramsey pour ce problème est 6 », faisant peut-être du nombre de Graham la pire plus petite borne supérieure jamais découverte.
Plus récemment, Geoff Exoo de l'Université d'Indiana a démontré que le résultat ne peut pas être inférieur à 11 et semble penser que la réponse est plus grande.





Pour ne pas surcharger le dessin, toutes les arêtes ne sont pas dessinées.

Le problème associé au nombre de Skewes

Étant donné un nombre n, le nombre de nombre premiers plus petits ou égaux à n est donné approximativement par

$$\int_0^n \frac{dx}{\log(x)}.$$

Pour des « petites » valeurs de n (moins de 10 millions) ceci est une surestimation.

Littlewood a démonté en 1914 que ce n'est pas toujours le cas. Il démontre en effet qu'il existe une infinité de valeurs pour lesquelles cette intégrale passe d'une surévaluation a une sous-évaluation et inversement.
Sa preuve, non constructive, ne permet pas de déterminer le premier changement.

En 1933, Skewes démontre que ce premier changement apparaît avant $10^{10^{10^{34}}}$, en supposant l'hypothèse de Riemann.