СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА КОРАБЛЯ[1]

[РАЗДЕЛЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕОРИИ ПЛАСТИН]

Из «Введения»

Размеры отдельных частей всякого сооружения определяются или посредством сравнения с соответствующими частями уже осуществленных сооружений подобного рода, или путем расчета этих размеров по силам, действующим на данную часть сооружения при условии достаточной ее прочности. Первый способ применяется, когда действующие силы не могут быть учтены с надлежащей достоверностью или же закон распределения вызываемых ими напряжений в рассматриваемой части сооружения является чрезмерно сложным и неуловимым; сюда же нужно отнести случаи, когда условия работы данной части осложняются нагреванием ее вследствие трения при подвижном соединении с соседними частями или износом от истирания или ржавления; кроме того, размеры отдельных частей определяются иногда условиями выделки или удобства пользования ими во время службы. Во всех подобных случаях размеры частей приходится находить или непосредственным сравнением, или при помощи интерполяционных формул и таблиц, составленных для определенной конструкции, работающей при заданных условиях, на основании особых опытов или конструктивных соображений.

Но для многих сооружений размеры отдельных частей могут быть определены и по условию достаточной прочности их, т. е. так, чтобы сооружение не разрушалось при действии на него заданной системы сил; к таковым сооружениям можно,

с) что тела эти представляются совершенно однородными и изотропными, так что коэффициенты пропорциональности в выражениях, связывающих напряжения и деформации, будут одинаковыми во всех точках тела и по всем направлениям.

Кроме того, предполагается, что все линейные и угловые деформации всегда остаются величинами малыми *).

Таким образом, все полученные формулы мы можем применять лишь к таким строительным материалам, которые в достаточной степени обладают свойствами упругости, однородности и изотропности (сталь Мартена, Бессемера, никелевая, хромистая и пр., а также некоторые сплавы меди) и лишь в тех установленных непосредственными опытами гра-

---

*) Коэффициенты в выражениях, связывающих напряжения и деформации, называются обыкновенно модулями упругости; для полной характеристики однородного изотропно упругого тела нужно знать два модуля, которые можно выбрать различно; мы выберем модуль Юнга E и модуль кручения G, так что скалывающие напряжения τ_x, τ_y, τ_z выразятся через соответственные угловые деформации (сдвиги) γ_x, γ_y и γ_z через соотношения

$$\tau_x = G\gamma_x, \quad \tau_y = G\gamma_y, \quad \tau_z = G\gamma_z,$$

а нормальные напряжения σ_x, σ_y и σ_z будут связаны с линейными деформациями ε_x, ε_y и ε_z при помощи соотношений

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z),$$
$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x),$$
$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y),$$

где μ есть отвлеченное число, называемое коэффициентом Пуассона и равное

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1.$$

Для выражения модулей E и G, а также и напряжений σ и τ в числах мы выберем за единицу давление в один килограмм на площадь в квадратный сантиметр, называя для простоты эту единицу атмосферою; это давление довольно близко по величине к среднему давлению земной атмосферы и соответствует высоте ртутного столба в 735,5 миллиметра при 0° С.

Средняя величина модуля E для материалов, употребляемых для корпуса корабля (сталь Мартена и специальных сортов), по большей части не выходит из пределов $2{,}1 \cdot 10^6$—$2{,}2 \cdot 10^6$ атмосфер, коэффициент же μ обыкновенно близок к 0,3.

Что касается величины деформаций, то в этих материалах они не превосходят 0,002 даже при критических напряжениях [3].

ницах, пока справедлив закон Гука. Те предельные напряжения, при которых этот закон нарушается и, следовательно, наши формулы перестают быть верными, мы будем называть критическими напряжениями данного материала [3]; заметим, что эти напряжения всегда бывают значительно ниже разрушающих, и наши формулы не могут предсказать нагрузок, вызывающих разрушение какой-либо части сооружения *). В тех случаях, когда эти формулы применяются к материалам, не обладающим в полной мере указанными свойствами (чугун, дерево), они не могут дать действительной картины распределения напряжений и должны быть рассматриваемы как интерполяционные. Тогда в них вводится обыкновенно так называемый коэффициент запаса, часто очень высокий, который в известной мере учитывает степень неверности расчетных напряжений по сравнению с действительными; естественно, что область применения таких формул будет весьма узкой и не может выйти за пределы тех конструкций, для которых опыт подтверждает достаточность выбранного поправочного коэффициента.

Прочность сооружения оценивается отношением наибольших напряжений или деформаций, возникающих в нем при действии заданной системы сил, к критическим напряжениям или соответствующим им деформациям; это отношение всегда должно быть меньше единицы и зависит от характера нагрузки, свойств материала и некоторых других обстоятельств, на которых мы остановимся подробнее в главе о допускаемых напряжениях **).

Таким образом, задача проектирования сооружения сводится к нахождению таких размеров его частей, при которых

---

*) Некоторые группы формул теории упругости при известных условиях могут предсказать разрушающую нагрузку довольно близко (например, с ошибкой $\pm 20\%$), как это имеет место, например, для формул Эйлера, относящихся к сжатию тонких стержней. Но такой вывод является результатом длинного ряда специальных опытов и не может быть сделан непосредственно из самих формул.

**) Впрочем, ниже мы увидим, что есть группы напряжений, которые при некоторых условиях можно безопасно довести до критических пределов; вопросу о допускаемых напряжениях ниже будет посвящена особая глава [4], где будут подробнее разобраны различные критерии прочности сооружений. Здесь мы укажем только, что теория упругости дает возможность определить по найденным шести

напряжения не превзошли бы допустимых при данных условиях пределов. Вообще говоря, эта задача является неопределенной, допускающей множество решений, между которыми мы должны выбрать такие, которые дают наиболее целесообразные и удобные для практического выполнения конструкции, удовлетворяющие, кроме того, условиям наименьшего веса или наименьшей стоимости; поэтому указанная здесь прямая постановка задачи часто изменяется таким образом: выбираются по способу сравнения или по каким-либо иным соображениям размеры рассматриваемой части, для них делается проверочный расчет на прочность, и на основании полученных результатов выбранные размеры соответственно изменяются; такой способ, сводящий задачу к нахождению напряжений в конструкции заданных размеров, во многих случаях скорее приводит к цели, чем прямое решение вопроса, в особенности если необходимые изменения выбранных размеров мы будем искать в виде поправок по способу последовательных приближений; но для некоторых хорошо исследо-

---

компонентам σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z для данной точки так называемые «главные нормальные напряжения» при помощи следующего кубического уравнения:

$$(\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma)+2\tau_x\tau_y\tau_z-$$
$$-(\sigma_x-\sigma)\tau_x^2-(\sigma_y-\sigma)\tau_y^2-(\sigma_z-\sigma)\tau_z^2=0,$$

дающего для величины σ три действительных корня σ_1, σ_2 и σ_3, которые и будут главными напряжениями; одно из этих напряжений будет наибольшим по величине для рассматриваемой точки, другое — наименьшим. Наибольшие и наименьшие скалывающие напряжения τ_1, τ_2 и τ_3 для этой точки определятся из соотношений

$$\tau_1=\pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\quad \tau_2=\pm\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\quad\text{и}\quad \tau_3=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}.$$

Наибольшие линейные и угловые деформации в той же точке ε_1, ε_2, ε_3 и γ_1, γ_2, γ_3 найдутся из соотношений

$$E\varepsilon_1=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3),$$
$$E\varepsilon_2=\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1),$$
$$E\varepsilon_3=\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)$$

и

$$\tau_1=G\gamma_1,\quad \tau_2=G\gamma_2\quad\text{и}\quad \tau_3=G\gamma_3;$$

величины $E\varepsilon_1$, $E\varepsilon_2$ и $E\varepsilon_3$ условно называются «приведенными напряжениями» [5].

ванных конструкций можно получать решения и при прямой постановке задачи.

Корпус корабля может быть рассматриваем как совокупность отдельных балок и тонких пластин, различным образом соединенных между собой: ниже мы укажем на те способы, посредством которых это сооружение может быть разложено на эти простейшие элементы, определим нагрузки, действующие на каждый из этих элементов, а также и силы, возникающие в местах соединения. Теперь же мы перейдем к изложению тех выводов и формул, которые дает теория упругости относительно распределения напряжений и деформаций в отдельных балках и тонких пластинах под различными нагрузками, останавливаясь преимущественно только на тех заключениях, которые имеют значение в строительной механике корабля [6].

Тонкой пластиной мы будем называть тело, имеющее форму призмы, высота которой h весьма мала по сравнению с размерами ее основания; подобно балке пластина предназначается для восприятия нагрузок, которые обыкновенно бывают распределены по поверхностям пластины, т. е. по основаниям призмы, и для передачи этих сил на опоры; опоры в этом случае представляют по большей части непрерывную замкнутую линию, называемую опорным контуром пластины; но кроме этих нагрузок к пластине могут быть приложены также и усилия, действующие по ее кромкам, т. е. на боковой поверхности призмы, которые мы можем разложить на нормальные к поверхности пластины и параллельные им, причем последние будем называть усилиями, действующими в плоскости пластины.

Подобно балке с кривой осью и переменным профилем мы можем представить себе пластину, ограниченную двумя поверхностями и имеющую переменную толщину, но в дальнейшем мы будем говорить почти исключительно о плоских пластинах одинаковой толщины, т. е. ограниченных в начальном состоянии (до приложения нагрузки) двумя параллельными плоскостями; плоскость, расположенную между этими последними в равном расстоянии от каждой из них, мы будем называть средней плоскостью, а когда после приложения нагрузки

точки ее переместятся, то средней поверхностью [7] пластины; перемещения ξ_0 этих точек по направлению, перпендикулярному к средней плоскости, мы будем называть стрелками прогиба пластины.

Основное дифференциальное уравнение средней поверхности пластины при изгибе было найдено в двадцатых годах прошлого века Софьей Жермен; дальнейшие работы Пуассона и Кирхгофа выяснили вопрос об условиях на опорном контуре, но полного решения задачи об изгибе пластины, нагруженной на одной из поверхностей и удовлетворяющей некоторым определенным условиям закрепления на заданном контуре, мы до сих пор не имеем благодаря трудностям чисто математического характера. Впрочем, в пределах, необходимых для решения различных вопросов строительной механики корабля, задачу в настоящее время можно считать достаточно выясненной.

Примем среднюю плоскость пластины за плоскость yz, а какую-нибудь перпендикулярную к ней прямую — за ось x и положим, что на одной из поверхностей пластины действует нормальное к ней давление p_x, распределенное на этой поверхности по какому-нибудь закону, т. е. зависящее от координат y и z нагруженной точки, причем давление это передается пластиной на опорный контур, определяемый уравнением $F(y, z) = 0$.

Пластины, работающие при таких условиях, мы разделим на две категории:

а) жесткие пластины, в средней поверхности которых указанная нагрузка не вызывает напряжений σ_y и σ_z или же эти напряжения пренебрежимо малы для нагрузок, удовлетворяющих условию прочности пластины;

б) гибкие пластины, удовлетворяющие этому условию в то время, как в точках средней поверхности их возникают значительные напряжения σ_y и σ_z.

Вопрос о жестких пластинах решается в предположении, что как толщина h, так и стрелки прогиба ξ_0 малы по сравнению с размерами контура в плоскости yz и что точки пластины, лежавшие до изгиба на прямой, параллельной оси x, будут и после изгиба лежать на некоторой прямой; последнее

допущение, очевидно, аналогично гипотезе Бернулли для балок. При этих допущениях теория упругости дает следующие выводы.

1) Напряжения и деформации, вызываемые нагрузкой в пластине, а также и перемещения точек ее подчиняются принципу наложения, если только напряжения не переходят критических.

2) Нормальные напряжения σ_y и σ_z в точках линии, параллельной оси x, пропорциональны координате x и определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{Ex}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}\right), \\ \sigma_z &= -\frac{Ex}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

3) Нормальное напряжение σ_x по сравнению с другими компонентами является пренебрежимо малым и может быть принято за нуль.

4) Скалывающее напряжение τ_x определяется выражением

$$-\frac{Ex}{1+\mu}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y\,\partial z},$$

а напряжения τ_y и τ_z удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_y\,dx=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial\Delta\xi_0}{\partial z},$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_z\,dx=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial\Delta\xi_0}{\partial y},$$

где Δ — знак операции Лапласа [8]. При поставленном нами условии малости толщины сравнительно с поперечными размерами контура скалывающие напряжения получаются малыми по сравнению с нормальными, так что в вопросах о прочности пластины с ними считаться не приходится.

5) Уравнение средней поверхности пластины после нагрузки, т. е. выражение ξ_0 как функции координат y и z, должно удовлетворять условию

$$\Delta^2\xi_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} p_x \qquad (5)$$

для всех точек внутри опорного контура, причем через Δ^2 обозначена двойная операция Лапласа. Кроме того, стрелки ξ_0 и их производные должны удовлетворять заданным условиям закрепления пластины на опорном контуре.

Таким образом, вопрос о распределении напряжений в изогнутой жесткой пластине сводится к нахождению функции ξ_0, удовлетворяющей этим условиям; в дальнейшем мы укажем выражения для этой функции для некоторых видов опорного контура и найдем условия прочности для таких пластин *).

Вопрос об изгибе гибких пластин значительно сложнее, чем для жестких, и до сих пор разрешен лишь для простейших случаев, когда опорный контур представляет весьма длинный прямоугольник или круг; ниже мы остановимся подробно на этих случаях.

Если кроме нормального давления p_x на поверхности пластины мы имеем еще давления p_y и p_z на боковых кромках ее по опорному контуру, действующие в плоскости пластины, то для случая, когда опорный контур представляет прямоугольник, стороны которого параллельны осям y и z, уравнение (5) примет такой вид:

$$\Delta^2\xi_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left(p_x + hp_y\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} + hp_z\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}\right), \qquad (5a)$$

*) Полученные на основании указанных выводов напряжения и деформации, а также и перемещения точек пластины будут заключать в себе погрешности порядка $\left(\frac{h}{a}\right)^2$, где a — один из размеров опорного контура, например длина стороны прямоугольника, если контур прямоугольный; погрешности такого порядка мы имели и для балок, но в вопросе о пластинах относительное влияние их обыкновенно слабее, так как отношение $\frac{h}{a}$ бывает всегда значительно меньше, чем аналогичное ему отношение высоты профиля балки к пролету. Если пластина гнется под действием объемных сил, например силы своего веса, то можем заменить эти силы эквивалентным давлением на одну из поверхностей ее, получая при этом пренебрежимые погрешности того же порядка.

причем предположено, что давления p_y и p_z растягивают пластину, в противном же случае знаки при них должны быть изменены на обратные. Этот случай, имеющий большое значение для интересующих нас вопросов, также будет исследован нами в дальнейшем изложении.

---

§ 19. Жесткие пластины. Изгиб их под действием нагрузок, нормальных к средней плоскости. Случай пластины, свободно опертой на прямоугольный контур

Вопрос об изгибе тонких пластин под действием нормального к средней поверхности пластины давления p_x и приложенных по торцевым опорным сечениям ее нормальных и скалывающих нагрузок p_y, p_z и t_x представляет много различных затруднений, и потому при изложении его мы ограничимся рассмотрением лишь тех случаев, которые имеют непосредственное отношение к различным задачам строительной механики корабля. Таким образом, мы рассмотрим тонкую пластину постоянной толщины h, средняя поверхность которой до изгиба совпадает с координатной плоскостью yz; пластину эту будем считать ограниченной вполне жестким контуром, представляющим плоский прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$; кроме того, нам в дальнейшем придется сделать некоторые ограничения относительно способа распределения нагрузок p и t.

Начнем с некоторых аналогий между изгибом пластины и балки; если провести ряд плоскостей, параллельных плоскости xoz в расстоянии dy друг от друга [черт. 58], то наша пластина разделится ими на весьма узкие полоски, каждую из которых можно рассматривать как балку прямоугольного сечения со сторонами h и dy, лежащую на двух вполне жестких опорах с пролетом $2a$ и находящуюся под действием нижеследующих сил:

а) распределенной по верхней грани изгибающей нагрузки от давления p_x, причем на единицу длины балки эта нагрузка равна $p_x dy$;

И. Бубновъ.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА КОРАБЛЯ.

ЧАСТЬ II.

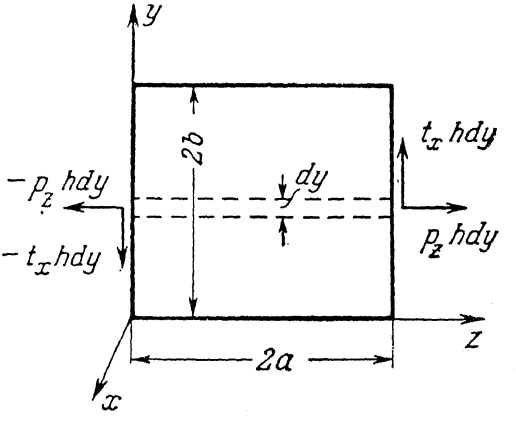
С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Морского Министерства, въ Главномъ Адмиралтействѣ.
1914.

Титульный лист 2-й части курса «Строительная механика корабля» (изд. 1914 г.).

b) приложенной к опорным сечениям балки осевой нагрузки $p_z h\,dy$, растягивающей или сжимающей балку, а также направленной вдоль стороны контура силы $t_x h\,dy$;

c) реактивных воздействий опорного контура на торцевые сечения балки и

d) распределенной по некоторому, пока неизвестному, закону нагрузки на боковые грани балки $2a \times h$, совпадающие с проведенными пограничными плоскостями; эта нагрузка



Черт. 58.

представляет ту поддержку, которую выделенная нами полоска-балка получает от двух соседних с нею, вследствие чего изгиб ее и будет отличаться от изгиба обыкновенной балки под нагрузками a), b) и c).

Если мы возьмем какое-нибудь поперечное сечение рассматриваемой полоски-балки (черт. 59), то возникшие в нем напряжения τ_y, τ_x и σ_z могут быть приведены к нижеследующим силам, направленным по осям координат и приложенным в центре тяжести площади поперечного сечения:

$$dy \int \tau_y\,dx, \quad dy \int \tau_x\,dx, \quad dy \int \sigma_z\,dx,$$

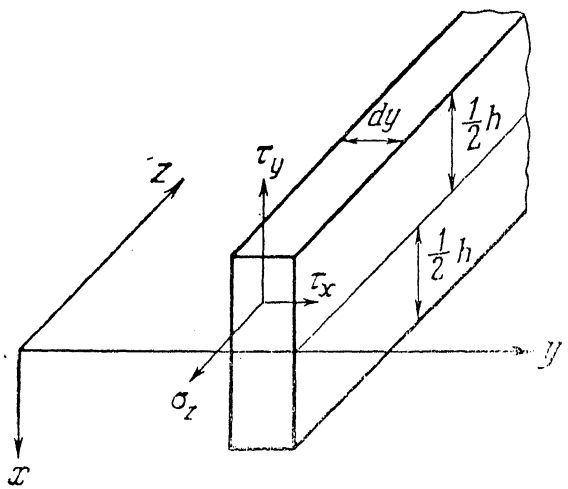
причем все интегралы должны быть взяты в пределах от $-\frac{1}{2}h$ до $+\frac{1}{2}h$, т. е. по всей толщине листа; кроме этих трех сил мы будем иметь еще две пары, стремящиеся повернуть

сечение около осей y и z:

$$dy \int \sigma_z x\, dx \quad \text{и} \quad dy \int \tau_x x\, dx,$$

где интегралы берутся в тех же пределах; величина момента третьей пары, вращающей сечение около оси x, как легко видеть, будет малой высшего порядка относительно dy.

Выражение $dy \int \sigma_z\, dx$ представляет собою силу, растягивающую или сжимающую нашу полоску по оси ее, вполне



Черт. 59.

аналогичную осевой силе V_z в балках; чтобы не иметь дела с малым множителем dy, мы будем относить эту силу к единице ширины пластины, считая в направлении оси y, и положим $v_z = \int \sigma_z\, dx$, причем величина v_z будет того же измерения, как и нагрузка на единицу длины.

Подобным же образом выражение $dy \int \tau_y\, dx$ будет аналогично срезывающей силе V_z в балках, и, обозначив $\int \tau_y\, dx$ через v_{xz}, мы будем называть эту величину срезывающей силой в пластине для площадки, перпендикулярной к оси z; измерение v_{xz} будет такое же, как и v_z.

Далее, выражения $dy \int \sigma_z x\, dx$ и $dy \int \tau_x x\, dx$ будут аналогичны изгибающему моменту M_y и скручивающему мо-

менту M_z в балках; входящие в них интегралы мы назовем соответственно через m_y и $\mathfrak{m}_z$; эти пары, отнесенные к единице длины, будут выражаться в единицах, измеряющих силы, например в килограммах.

Наконец, выражение $dy\int \tau_x dx$ представит силу, стремящуюся изогнуть нашу полоску в плоскости zoy, чему будут препятствовать соседние полоски.

Совершенно таким же образом разбивая нашу пластину рядом плоскостей, параллельных плоскости xoy, мы разделим ее на балки-полоски, перпендикулярные к рассмотренным; для этих полосок мы будем иметь:

$$v_y = \int \sigma_y dx, \qquad v_{xy} = \int \tau_z dx,$$

$$m_z = \int \sigma_y x\, dx, \qquad \mathfrak{m}_y = \int \tau_x x\, dx,$$

причем все интегралы берутся в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$.

Теперь мы определим введенные нами величины v, m и $\mathfrak{m}$ через производные перемещений ξ_0 точек средней плоскости пластины по координатам y и z *) при помощи приведенных во введении (см. стр. 109) выражений для возникающих в ней напряжений.

Прибавляя к определяемому формулой (4) нормальному напряжению σ_z от изгиба пластины нагрузкою p_x добавочное напряжение от растягивающей или сжимающей нагрузки p_z, мы будем иметь:

$$\sigma_z = p_z - \frac{Ex}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}\right),$$

причем давление p_z будем считать положительным, если оно растягивает пластину; подставляя это выражение в формулы,

---

*) Перемещения ξ_0 аналогичны стрелкам прогиба ξ_1 в балках; стрелки от сдвигов ξ_2 для пластины являются пренебрежимо малыми порядка $\left(\frac{h}{a}\right)^2$ или $\left(\frac{h}{b}\right)^2$, а стрелки от осадки опор ξ_3 исчезают, так как мы берем вполне жесткий опорный контур [9].

определяющие v_z и m_y, мы после интегрирования найдем:

$$\left.\begin{aligned} v_z &= hp_z \\ \text{и} \qquad m_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

подобным же образом после подстановки выражения для σ_y мы получим:

$$\left.\begin{aligned} v_y &= hp_y \\ \text{и} \qquad m_z &= -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{76a}$$

кроме того, из формул, данных во введении для τ_y и τ_z, мы будем иметь нижеследующие выражения для скалывающих сил в пластине:

$$\left.\begin{aligned} v_{xz} &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial\Delta\xi_0}{\partial z} \\ \text{и} \qquad v_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial\Delta\xi_0}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{76b}$$

наконец, формула, определяющая τ_x, даст нам выражение для момента скручивающей пары:

$$\mathfrak{m}_z = \mathfrak{m}_y = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y\,\partial z}. \tag{76c}$$

Полученные выражения для v, m и $\mathfrak{m}$ позволяют нам установить те условия, которым должна удовлетворять функция ξ_0 на опорном контуре пластины; не разбирая этого вопроса с тою общностью, как делали для балок, мы рассмотрим лишь три предельных случая:

a) когда торцевое сечение пластины, лежащее над вполне жестким опорным контуром, совсем не может повернуться около оси, параллельной рассматриваемой стороне контура;

b) когда это сечение может вполне свободно вращаться около указанной оси, не смещаясь вместе с тем по направлению оси x;

с) когда одна или две стороны опорного контура являются столь мало жесткими, что не оказывают никакого сопротивления ни поступательному движению опорного сечения по оси x, ни повороту его.

В первом случае мы будем говорить, что пластина вполне закреплена по той или иной стороне опорного контура, причем, согласно самому определению, мы должны уравнять нулю как самую стрелку прогиба ξ_0 по всей длине опорной линии, так и первую производную ее по нормали к этой линии. Таким образом, если мы закрепляем пластину по одной из сторон контура, параллельных оси y, то должны положить:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_0 = 0 \\ \text{и} \\ \dfrac{\partial \xi_0}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \text{ при } z = 0 \text{ или } z = 2a, \text{ причем } 0 \leqslant y \leqslant 2b. \quad (77)$$

Во втором случае, когда опорное сечение оперто на вполне жесткий контур, мы также должны приравнять нулю стрелку ξ_0 по этой линии контура, условие же свободного вращения опорного сечения выразится отсутствием опорной пары m для всех точек той же линии; таким образом, если рассматриваемый случай имеет место для одной из сторон контура, параллельных оси y, то мы должны положить

$$m_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2}\right) = 0$$

при $z = 0$ или при $z = 2a$; но так как при вполне жестком контуре второй член в скобках будет нулем, то условия закрепления для второго случая мы можем представить в таком виде:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_0 = 0 \\ \text{и} \\ \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ при } z = 0 \text{ или } z = 2a, \text{ причем } 0 \leqslant y \leqslant 2b. \quad (77а)$$

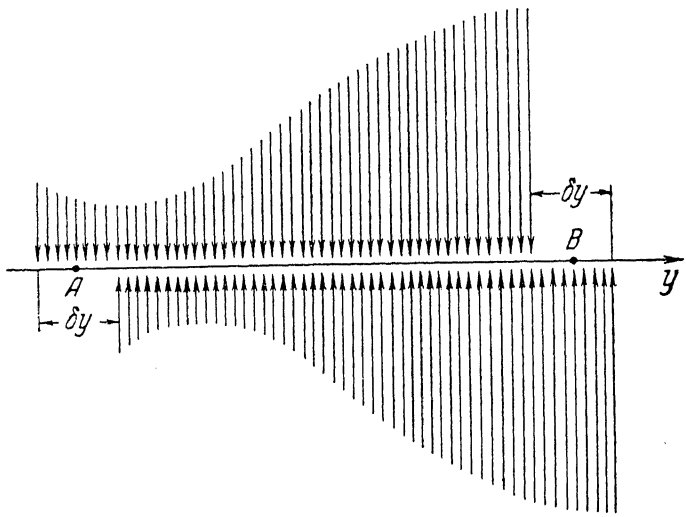
Для нахождения соответствующих условий в третьем случае мы должны предварительно найти выражения для реактивных давлений, воспринимаемых пластиной от ее опорного контура. Эти давления должны уравновесить срезывающие силы v_{xz} на сторонах контура, параллельных оси y, или силы v_{xy} — на двух других сторонах; таким образом, называя

реактивное давление на стороны, параллельные оси y, через r'_y, мы получим:

$$r'_y = -v_{xz} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial \Delta\xi_0}{\partial z}$$

при $z = 0$ или $z = 2a$, причем $0 \leqslant y \leqslant 2b$.

Но кроме этих давлений контур должен дать группу реактивных пар, противодействующих скручивающим моментам $\mathfrak{m}_z$ и $\mathfrak{m}_y$; выберем какую-нибудь точку контура A, лежащую,



Черт. 60.

положим, на оси y, и пусть действующая в ней реактивная пара будет $\mathfrak{m}_z^0$; представим эту пару в виде двух равных и прямо противоположных сил, направленных параллельно оси x и приложенных в расстояниях $-\frac{1}{2}\delta y$ и $+\frac{1}{2}\delta y$ от рассматриваемой точки, где через δy названа некоторая произвольная, но малая длина; величина этих сил будет $\mp \mathfrak{m}_z^0 : \delta y$. Возьмем теперь ряд точек, бесконечно близких к точке A и лежащих вправо от нее; тогда пары, действующие в каждой из них, будучи разложены на две силы с тем же плечом δy, дадут ряд сил $\mp \mathfrak{m}_z : \delta y$, приложенных в бесконечно близких точках, иначе говоря — непрерывно распределенных; рассматривая эти силы (черт. 60), мы легко заметим, что эпюр сил, направленных вверх, в точности повторяет эпюр сил, направленных вниз, являясь лишь сдвинутым вправо на длину δy;

таким образом, участок длиною δy близ точки A будет нагружен только силами, направленными вниз, на участок той же длины близ точки B, лежащей в конечном расстоянии от A, будут действовать только направленные вверх силы, весь же остальной промежуток между этими точками будет нагружен силами обоих направлений; при этом, если в какой-нибудь точке этого участка будет действовать направленная вверх сила $+\mathfrak{m}_z : \delta y$, то в обратном направлении будет приложена сила $-(\mathfrak{m}_z + \delta\mathfrak{m}_z) : \delta y$, где через $\delta\mathfrak{m}_z$ названо приращение пары $\mathfrak{m}_z$ на длине δy; следовательно, равнодействующая нагрузка на единицу длины в этом участке определится выражением $(-\delta\mathfrak{m}_z : \delta y)$.

Будем теперь уменьшать длину промежутка δy до сколь угодно малого предела, соответственно чему будут уменьшаться и длины участков близ точек A и B, нагруженных силами одного направления; таким образом, в пределе нагрузка каждого из участков обратится в сосредоточенный в точке A груз, направленный вниз и равный

$$-\left(\frac{\mathfrak{m}_z^0}{\delta y}\delta y\right)_{\delta y=0} = -\mathfrak{m}_z^0;$$

подобным же образом мы найдем, что в точке B будет действовать сосредоточенный груз $+\mathfrak{m}_z'$. Что касается распределенной нагрузки между этими предельными точками, то величина ее определится выражением

$$-\left(\frac{\delta\mathfrak{m}_z}{\delta y}\right)_{\delta y=0} = -\frac{\partial\mathfrak{m}_z}{\partial y},$$

т. е. будет выражаться производной от крутящей пары $\mathfrak{m}_z$, взятой по координате y.

Таким образом, реактивные скручивающие пары $\mathfrak{m}_z$ на сторонах опорного контура, параллельных оси y, могут быть приведены к распределенному по этим сторонам давлению

$$r_y'' = -\frac{\partial\mathfrak{m}_z}{\partial y} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{\partial^3\xi_0}{\partial y^2\,\partial z},$$

при $z = 0$ или $z = 2a$, причем $0 \leqslant y \leqslant 2b$, и четырем сосредоточенным грузам, приложенным в углах контура, равным

$$\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y\,\partial z},$$

причем в последнее выражение вместо y и z должны быть подставлены координаты вершин соответствующих углов.

Теперь мы без труда найдем и те условия, которым должна удовлетворять функция ξ_0, если некоторые кромки пластины, совпадающие со сторонами опорного контура, будут вполне свободными, т. е. не будут получать от контура никаких реактивных воздействий; так, например, если вполне свободной будет одна из сторон, параллельных оси y, то мы должны иметь:

$$\left.\begin{aligned} m_y &= 0, \\ r_y &= r'_y + r''_y = 0 \text{ *)} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{при } z = 0 \text{ или } z = 2a, \\ \text{причем } 0 \leqslant y \leqslant 2b; \end{array}$$

последнее условие можно переписать так:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \Delta \xi_0}{\partial z} + (1-\mu)\frac{\partial^3 \xi_0}{\partial y^2 \partial z}\right] = \\ = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^3 \xi_0}{\partial z^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \xi_0}{\partial y^2 \partial z}\right],$$

и, следовательно, будем иметь условия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 \xi_0}{\partial z^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \xi_0}{\partial y^2 \partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{при } z = 0 \text{ или } z = 2a, \\ \text{причем } 0 \leqslant y \leqslant 2b. \end{array} \tag{77b}$$

Таким образом, нами найдены пограничные условия для функции ξ_0 во всех трех предельных случаях; конечно, эти случаи соответствуют некоторым идеальным условиям закрепления опорного периметра пластины, и в более общем случае мы должны были бы положить, например, для параллельных оси y сторон:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= A v_{xz}, \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial z} &= \mathfrak{A} m_y \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{при } z = 0 \text{ или } z = 2a, \\ \text{причем } 0 \leqslant y \leqslant 2b, \end{array}$$

---

*) Заметим, что, заменяя действие реактивных скручивающих пар на свободной стороне m_z распределенной нагрузкой r''_y, мы должны в концах этой стороны, т. е. в углах контура, приложить и уравновешивающие их силы m_z^0 и m'_z; иначе сумма проекций на ось x всех действующих на пластину сил не будет равна нулю.

где A и $\mathfrak{A}$ — коэффициенты жесткости опорного контура, представляющие некоторую функцию координаты y; но подобное усложнение вопроса сделало бы нахождение функции ξ_0 чрезвычайно затруднительным, а в огромном большинстве нужных для наших целей случаев — и совсем невыполнимым.

Перейдем теперь к нахождению уравнения средней поверхности изогнутой пластины и разберем сперва случай, когда нагрузка на пластину сводится к распределенному по одной из поверхностей ее давлению p_x.

Тогда, как было указано во введении (стр. 110), стрелки прогиба пластины должны удовлетворять условию

$$\Delta^2\xi_0 = \frac{\partial^4\xi_0}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4\xi_0}{\partial y^2\,\partial z^2} + \frac{\partial^4\xi_0}{\partial z^4} = \frac{12\,(1-\mu^2)\,p_x}{Eh^3}; \qquad (5)$$

кроме того, на всех четырех сторонах опорного периметра эта функция должна удовлетворять одному из трех только что найденных условий; общего решения этого уравнения в конечном виде для случая пластины, так или иначе связанной с прямоугольным контуром, до сих пор не найдено *), поэтому мы будем искать решения в виде рядов, главным образом тригонометрических, подобных тем, которыми мы пользовались для выражения упругих кривых изогнутых балок.

Подобные ряды имеют целью представить функцию ξ_0, удовлетворяющую уравнению (5) и заданным условиям на контуре, а также и некоторые производные ее по координатам y и z; но эти производные будут совпадать с производными истинной, не известной нам функции ξ_0 лишь до тех пор, пока выражающие их ряды остаются сходящимися; если же ряд для какой-либо производной становится расходящимся, то он уже перестает давать истинное значение этой производной и не может служить для ее нахождения; с подобным обстоятельством мы уже имели случай встретиться (см. стр. 168 [1-й части Курса, изд. 1912 г.]) [10].

---

*) В конечном виде эти решения известны лишь для случаев кругового и эллиптического контуров.

Рассмотрим сперва случай пластины, свободно опертой на две параллельные стороны контура, например на стороны, параллельные оси z, уравнения которых при нашем расположении осей (см. черт. 58) будут $y=0$ и $y=2b$; относительно же условий закрепления двух других сторон мы не будем ставить никаких ограничений. Что касается нагрузки p_x, то в вопросах строительной механики корабля она обыкновенно представляет гидростатическое давление столба воды и, следовательно, в самом общем случае будет линейной функцией от координат y и z, так что мы можем положить:

$$p_x = p_x^0 + ny + n'z.$$

Положим теперь, что

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \sin \frac{i\pi y}{2b}, \tag{78}$$

где $i=1, 2, 3, 4, \ldots$, а Z_i — некоторая, пока неизвестная функция координаты z и числа i, остающаяся конечной и непрерывной при изменении z в нужных нам пределах $(0 \leqslant z \leqslant 2a)$ и убывающая надлежащим образом с увеличением i; нетрудно видеть, что подобранная таким образом функция ξ_0 удовлетворяет контурным условиям на обеих свободно опертых сторонах, так как при $y=0$ и $y=2b$ стоящие под знаком суммы синусы обращаются в нули и потому

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \sin(0+\varepsilon) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{4b^2} \sum_{i=1}^{\infty} Z_i i^2 \sin(0+\varepsilon) = 0,$$

где ε — исчезающая в пределе бесконечно малая; при этом последнее равенство будет иметь место только в том случае, если при всяком значении координаты z в наших пределах функция Z_i будет малой выше, чем третьего порядка по отношению к дроби $\frac{1}{i}$.

Подберем теперь функцию Z_i таким образом, чтобы ξ_0 удовлетворило уравнению (5); непосредственным дифференцированием найдем:

$$\frac{\partial^4 \xi_0}{\partial y^4} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^4 Z_i \sin \frac{i\pi y}{2b},$$

$$2\,\frac{\partial^4 \xi_0}{\partial y^2\,\partial z^2} = -\,2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i'' \sin \frac{i\pi y}{2b},$$

$$\frac{\partial^4 \xi_0}{\partial z^4} = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i^{\mathrm{IV}} \sin \frac{i\pi y}{2b};$$

далее, заметив, что входящий в правую часть нашего уравнения множитель p_x есть линейная функция координат y и z, мы при помощи тригонометрических рядов *) можем представить его в таком виде:

$$p_x = p_x^0 + ny + n'z =$$

$$= (p_x^0 + n'z + nb)\,\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{2b}}{i} - nb\,\frac{4}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{2b}}{i},$$

причем первая сумма распространяется на все нечетные значения i, вторая — только на четные, и ряды будут выражать нашу функцию при условии $0 < y < 2b$, т. е. в пределах контура пластины.

Подставляя найденные выражения в уравнение (5), мы получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[Z_i^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i'' + \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^4 Z_i\right] \sin \frac{i\pi y}{2b} =$$

$$= \frac{12\,(1-\mu^2)}{Eh^3}\,\frac{4}{\pi} \left[(p_x^0 + nb + n'z) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{2b}}{i} - nb \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{2b}}{i}\right];$$

*) См. стр. 189 и 190 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [11].

этому условию мы, очевидно, удовлетворим, если каждую из функций Z_i определим из уравнений

$$Z_i^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i'' + \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^4 Z_i = \frac{48(1-\mu^2)}{\pi E h^3 i}(p_x^0 + nb + n'z)$$

при i нечетном и

$$Z_i^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i'' + \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^4 Z_i = -\frac{48(1-\mu^2)nb}{Eh^3\pi i}$$

при i четном; полученные выражения представляют обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, общие решения которых, заключающие по четыре постоянных произвольных, напишутся в таком виде:

$$Z_i = (C_i + C_i' z)\operatorname{ch}\frac{i\pi z}{2b} + (D_i + D_i' z)\operatorname{sh}\frac{i\pi z}{2b} + \\ + \frac{768(1-\mu^2)b^4}{\pi^5 i^5 E h^3}(p_x^0 + nb + n'z), \quad (78a)$$

если i — нечетное; при четных же значениях i решение будет отличаться лишь величиною произвольных постоянных C и D и множитель в скобках в последнем члене придется заменить на $(-nb)$.

Произвольные постоянные в полученных решениях мы выберем таким образом, чтобы на сторонах опорного контура $z = 0$ и $z = 2a$ каждый член $Z_i \sin\frac{i\pi y}{2b}$ суммы, выражающей ξ_0 и его производные по координатам z и y, удовлетворяли соответствующим условиям закрепления пластины на этих сторонах; так как в каждом из трех рассмотренных выше случаев закрепления эти условия выражаются двумя уравнениями (77), (77a) или (77b), то всего мы будем иметь четыре уравнения, из которых и определим четыре произвольные постоянные для каждой из функций Z_i.

Полученное решение для функции ξ_0, очевидно, может иметь применение для следующих шести случаев:

1) обе кромки пластины по линиям $z = 0$ и $z = 2a$ вполне закреплены;

2) обе эти кромки свободно подперты;

3) обе кромки вполне свободны;

4) одна из кромок заделана, другая — свободно подперта;

5) одна из кромок заделана, другая — вполне свободна;
6) одна из кромок свободно подперта, другая — вполне свободна.

Мы найдем решения для второго и пятого случаев, остальные решения определятся теми же путями.

Для случая, когда все четыре кромки пластины свободно подперты, мы удовлетворим условиям закрепления на сторонах контура $z = 0$ и $z = 2a$, если для каждой из функций Z_i положим:

$$\left.\begin{aligned} Z_i &= 0 \\ Z_i'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 2a.$$

и

Чтобы не усложнять решений для постоянных произвольных, получающихся из этих условий, мы ограничимся наиболее важным для практических целей случаем равномерного распределения давления p_x на поверхности пластины, т. е. положим $n = n' = 0$; в тех же немногих случаях, когда это допущение не будет иметь места, выражения для постоянных придется дополнить соответствующими членами.

Таким образом, называя для упрощения письма отвлеченные числа

$$\frac{768}{\pi^5}(1-\mu^2)\,\frac{p_x^0}{E}\left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ через } N \text{ и } \pi\frac{a}{b} \text{ через } \omega,$$

мы получим из уравнений (77а) такие условия для определения постоянных:

$$Z_i(0) = C_i + \frac{Nh}{i^5} = 0,$$

$$Z_i(2a) = (C_i + 2aC_i')\operatorname{ch} i\omega + (D_i + 2aD_i')\operatorname{sh} i\omega + \frac{Nh}{i^5} = 0,$$

$$Z_i''(0) = \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 C_i + \frac{i\pi}{b} D_i' = 0,$$

$$Z_i''(2a) = \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 (C_i + 2aC_i')\operatorname{ch} i\omega + \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 (D_i + 2aD_i')\operatorname{sh} i\omega +$$

$$+ \frac{i\pi}{b}(C_i' \operatorname{sh} i\omega + D_i' \operatorname{ch} i\omega) = 0$$

при нечетных значениях буквы i; для четных же значений i при выбранной нагрузке p_x^0 все коэффициенты C, C', D и D' будут нулями, а потому обратится в нуль и функция Z_i.

Решая эти уравнения, найдем:

$$C_i = -\frac{Nh}{i^5}, \quad D_i' = +\frac{\pi}{4b}\frac{Nh}{i^4},$$

$$C_i' = -\frac{\pi}{4b}\frac{Nh}{i^4}\operatorname{th}\frac{i\omega}{2}, \quad D_i = +\frac{Nh}{i^5}\frac{\operatorname{sh} i\omega - \frac{1}{2}i\omega}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}i\omega\right)},$$

откуда после некоторых преобразований получим:

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \sin\frac{i\pi y}{2b} =$$

$$= Nh\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^5}\left(1 - \frac{\frac{i\pi z}{4b}\operatorname{sh}\frac{i\pi(a-z)}{2b} + \operatorname{ch}\frac{i\pi(a-z)}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}i\omega} - \frac{i\omega\operatorname{sh}\frac{i\pi z}{2b}}{4\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}i\omega\right)}\right)\times$$

$$\times \sin\frac{i\pi y}{2b}, \quad (79)$$

где $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$

Нетрудно убедиться, что стоящий под знаком суммы множитель в скобках для всех точек внутри опорного контура остается положительным и меньшим единицы, так что члены нашей суммы будут малыми пятого порядка относительно дроби $\frac{1}{i}$ и полученный ряд будет сходящимся; непосредственным дифференцированием мы можем убедиться, что сходимость ряда будет иметь место и для производных функции ξ_0 по координатам y и z до третьих производных включительно; следовательно, полученное выражение может дать нам как нормальные напряжения σ_y и σ_z, определяющиеся через вторые производные стрелки, так и давления пластины на опорный контур, в формулы для которых входят третьи производные.

Самое вычисление стрелок ξ_0 и их производных по найденному выражению не представит особых затруднений; так,

например, наибольшая стрелка прогиба, получающаяся, очевидно, в центре пластины ($y = b$, $z = a$), определится формулой

$$(\xi_0)_{\max} = Nh \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{i\omega}{2}} - \frac{i\omega}{4} \frac{\operatorname{th} \frac{i\omega}{2}}{\operatorname{ch} \frac{i\omega}{2}} \right) \sin \frac{i\pi}{2}, \quad (79a)$$

где $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$; для нахождения суммы этого ряда обыкновенно достаточно взять два — четыре члена и, например, для квадратной пластинки ($a = b$, $\omega = \pi$) мы будем иметь:

$$i = 1 \ldots \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{1^5} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\pi} - \frac{\pi}{4} \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}\pi}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\pi} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2{,}5092} - 0{,}7854 \frac{0{,}9171}{2{,}5092} \right) = +0{,}3144,$$

$$i = 3 \ldots \frac{\sin \frac{3}{2}\pi}{3^5} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3}{2}\pi} - \frac{3\pi}{4} \frac{\operatorname{th} \frac{3}{2}\pi}{\operatorname{ch} \frac{3}{2}\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{243} \left(1 - \frac{1}{55{,}5} - 2{,}36 \frac{1}{55{,}5} \right) = -0{,}0039,$$

$$= 5 \ldots \frac{\sin \frac{5}{2}\pi}{5^5} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{5}{2}\pi} - \frac{5\pi}{4} \frac{\operatorname{th} \frac{5}{2}\pi}{\operatorname{ch} \frac{5}{2}\pi} \right) \approx \frac{1}{3125} = +0{,}0003,$$

$$+0.3108$$

и следовательно,

$$(\xi_0)_{\max} = 0{,}3108Nh = 0{,}780\,(1 - \mu^2) \frac{p_x^0}{E} \frac{b^4}{h^3};$$

таким же путем найдем наибольшую стрелку и для всякого другого отношения сторон $a : b$.

Определим теперь наибольшие приведенные напряжения для рассматриваемой пластины; так как на контуре эти напряжения обращаются в нуль, то по соображениям симметрии наибольшими будут напряжения в центре пластины, т. е. при $y = b$ и $z = a$; кроме того, так как эти напряжения пропорциональны расстоянию x точки до средней поверхности

пластины, то наибольшими они будут на наружных поверхностях ее, т. е. при $x = \pm \frac{1}{2} h$.

Определяя приведенные напряжения из общей формулы

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \mu\sigma_y = -Ex\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2},$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \mu\sigma_z = -Ex\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2},$$

для выбранной нами точки мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
(E\varepsilon_z)_{\max} &= \pm \frac{24}{\pi^2}(1-\mu^2)\, p_x^0 \frac{ab}{h^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{i^2} \frac{\operatorname{th}\frac{i\omega}{2}}{\operatorname{ch}\frac{i\omega}{2}}, \\
(E\varepsilon_y)_{\max} &= \pm \frac{96}{\pi^3}(1-\mu^2)\, p_x^0 \frac{b^2}{h} \times \\
&\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{i^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{i\omega}{2}} - \frac{i\omega}{4} \frac{\operatorname{th}\frac{i\omega}{2}}{\operatorname{ch}\frac{i\omega}{2}}\right);
\end{aligned}\right\} \quad (80)$$

для квадратной пластины ($\omega = \pi$) оба выражения дадут одинаковый результат:

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = (E\varepsilon_y)_{\max} = \pm 0{,}884\,(1-\mu^2)\, p_x^0 \frac{b^2}{h^2},$$

при $a > b$ наибольшим будет напряжение $E\varepsilon_y$, при $a < b$ — напряжение $E\varepsilon_z$.

Перейдем теперь к вопросу о распределении реактивных давлений r' и r'' опорного контура пластины; подставляя в найденные выше формулы для этих давлений наше выражение для ξ_0, мы найдем:

$$r'_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial \Delta\xi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = -p_x^0 b \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{th}\frac{i\omega}{2} \sin\frac{i\pi y}{2b},$$

$$r''_y = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left(\frac{\partial^3 \xi_0}{\partial y^2\, \partial z}\right)_{z=0} =$$

$$= -p_x^0 b \frac{4(1-\mu)}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{\operatorname{sh} i\omega - i\omega}{\operatorname{ch} i\omega + 1} \sin\frac{i\pi y}{2b},$$

где $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$; из этих выражений видно, что реактивные давления во всех точках контура имеют одинаковый знак и действуют в сторону, обратную направлению нагрузки p_x^0; в углах прямоугольника ($y = 0$ и $y = 2b$) они обращаются в нуль, при середине стороны ($y = b$) давление r_y' имеет максимум, давление же r_y'' — максимум или минимум; кроме того, по абсолютной величине давление r_y' всегда превышает r_y'' больше чем в два раза.

Если мы проинтегрируем полученные выражения по всей длине стороны контура $2b$, то получим полное реактивное давление от этой стороны на пластину:

$$R_y' = -p_x^0 b^2 \frac{32}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \operatorname{th} \frac{i\omega}{2},$$

$$R_y'' = -p_x^0 b^2 \frac{16(1-\mu)}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \frac{\operatorname{sh} i\omega - i\omega}{\operatorname{ch} i\omega + 1},$$

причем реакция R_y'' уравновешивается двумя приложенными в углах контура силами, равными $-\frac{1}{2} R_y''$.

Положив $a > b$, мы можем написать следующие неравенства:

$$\frac{32}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} > \frac{32}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \operatorname{th} \frac{i\omega}{2} > \frac{32}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \operatorname{th} \frac{i\pi}{2},$$

$$\frac{16(1-\mu)}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} > \frac{16(1-\mu)}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \frac{\operatorname{sh} i\omega - i\omega}{\operatorname{ch} i\omega + 1} >$$

$$> \frac{16(1-\mu)}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \frac{\operatorname{sh} i\pi - i\pi}{\operatorname{ch} i\pi + 1};$$

вычислив суммы входящих сюда рядов и умножив оба неравенства на $p_x^0 b^2$, мы будем иметь, полагая $\mu = 0{,}3$:

$$1{,}0855 p_x^0 b^2 > -R_y' > p_x^0 b^2,$$

$$0{,}380 p_x^0 b^2 > -R_y'' > 0{,}260 p_x^0 b^2,$$

откуда заключаем, что реактивное давление R'_y от короткой стороны прямоугольного контура весьма медленно возрастает при удлинении другой стороны и не может превысить более чем на $8{,}55^0/_0$ давления, получаемого при квадратной пластине, равного $-p^0_x b^2$, т. е. одной четверти полного давления на пластину. Что касается давления короткой стороны от скручивающих пар R''_y, то оно составляет около $26^0/_0$ от R'_y для квадратной пластины и $35^0/_0$ — при весьма большом отношении сторон $a:b$.

Для нахождения давлений от длинной стороны прямоугольного опорного контура написанные выражения не очень удобны для расчетов, почему мы воспользуемся аналогичными выражениями для r'_z и r''_z, которые напишутся таким образом:

$$r'_z = -p^0_x b\,\frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\dfrac{i\pi(a-z)}{2b}}{\operatorname{ch}\dfrac{i\omega}{2}}\right],$$

$$r''_z = -p^0_x a\,\frac{2(1-\mu)}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left[\frac{z}{a}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{i\pi(z-a)}{2b}}{\operatorname{ch}\dfrac{i\omega}{2}}+\frac{\operatorname{sh}\dfrac{i\pi z}{2b}}{\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{1}{2}\,i\omega\right)}\right]\text{*)}.$$

Интегрируя эти выражения по координате z в пределах от 0 до $2a$, мы получим:

$$R'_z = -p^0_x b\,\frac{8}{\pi^2}\left(2a\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-\frac{4b}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\operatorname{th}\frac{i\omega}{2}\right)=$$

$$= -2p^0_x ab + p^0_x b^2\,\frac{32}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\operatorname{th}\frac{i\omega}{2},$$

$$R''_z = -p^0_x b^2\,\frac{16(1-\mu)}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\,\frac{\operatorname{sh} i\omega - i\omega}{\operatorname{ch} i\omega + 1},$$

---

*) Если в этих выражениях мы заменим букву z на y и переменим местами буквы a и b, то получим формулы для r'_y и r''_y, которые будут вполне тождественны с найденными выше, хотя входящие в них ряды и не будут одинаковыми.

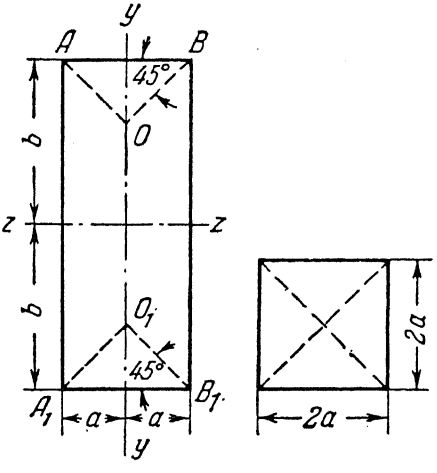
или

$$R'_y + R'_z = -2p^0_x ab \text{ и } R''_z = R''_y;$$

таким образом, от длинной стороны прямоугольного контура пластина воспринимает давление R'_z, равное приближенно

$$-2p^0_x ab + p^0_x b^2 = -2p^0_x ab\left(1 - \frac{b}{2a}\right);$$

что же касается давления от скручивающих пар, то для этой стороны оно составляет значительно меньшую долю от R'_z, чем это было найдено выше для короткой стороны контура (например, при $a:b=3$ — всего $7{,}7^0/_0$).

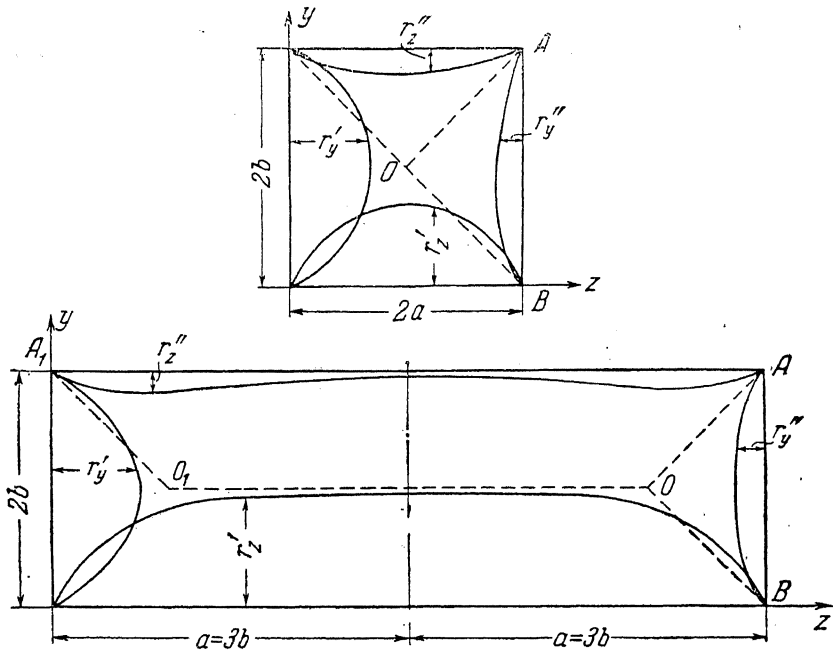


Черт. 52.

В главе о перекрытиях мы уже говорили о распределении давления от пластины на стороны поддерживающего ее прямоугольного контура и, довольствуясь грубым приближением, приняли там давление на короткую сторону равным $p^0_x b^2$, считая его распределенным по треугольнику AOB (см. черт. 52), давление же по длинной стороне мы считали распределенным по трапеции AOO_1A_1 *). На чертеже 61 показано действительное распределение этих давлений для рассматриваемого случая пластины, свободно опертой на прямоугольный контур при отношении сторон $a:b$, равном 1 и 3; на двух сторонах контура дан эпюр давлений r'_y и r'_z, причем эти давления отложены по нормалям к соответствующим сторонам, принимая p^0_x за единицу; на двух других сторонах показаны давления r''_y и r''_z, отложенные таким же образом. Если принять во внимание, что давления от скручивающих пар r''_y и r''_z уравновешиваются соответствующими силами, приложенными в

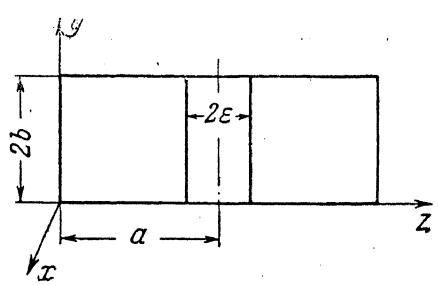
*) Приводим чертеж 52, на который ссылается автор. — *(Прим. ред.)*

вершинах углов контура, и нагрузку балок, разделяющих перекрытие на ряд отдельных прямоугольников, составляют давления



Черт. 61.

$(-r_y')$ и $(-r_z')$, то, как видно из чертежа, принятое нами в § 15 приближенное распределение давлений является в достаточной мере близким к истинному.



Черт. 62.

Положим теперь, что одна из сторон опорного контура, например сторона $2a$, является весьма большой по сравнению с другой стороной $2b$ [черт. 62], иначе говоря, положим, что входящая в наши формулы величина ω велика; при этом будем рассматривать не всю пластину, а лишь те части ее, которые лежат вблизи линии $z = a$, т. е. близ середины длинной стороны прямоугольника, иначе говоря, будем считать разность $z - a = \varepsilon$ малой по сравнению с размером a.

Тогда для рассматриваемых частей пластины функция Z_i может быть написана в таком виде:

$$Z_i = \frac{1}{i^5}\left[1 - \frac{\frac{i\omega}{4}\frac{\varepsilon}{a}\operatorname{sh}\frac{i\omega}{2}\frac{\varepsilon}{a} + \operatorname{ch}\frac{i\omega}{2}\frac{\varepsilon}{a}}{\operatorname{ch}\frac{i\omega}{2}} - \frac{i\omega}{4}\frac{\operatorname{sh}\frac{i\omega}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{i\omega}{2}\right)}\right];$$

заметим, что гиперболические синусы и косинусы весьма быстро растут при увеличении аргумента, и потому обе дроби в последнем выражении будут неопределенно убывать, приближаясь к нулю по мере возрастания величины ω; следовательно, функция Z_i будет подходить к $1 : i^5$, и мы найдем:

$$\xi_0 = Nh\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^5}\sin\frac{i\pi y}{2b} =$$

$$= \frac{768}{\pi^5}(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{b^4}{h^3}\frac{\pi^5}{96}\left[\left(\frac{y}{2b}\right) - 2\left(\frac{y}{2b}\right)^3 + \left(\frac{y}{2b}\right)^4\right],$$

или

$$\xi_0 = \frac{1}{24}(2p_x^0 b)(1-\mu^2)\frac{(2b)^3\,12}{Eh^3}\left[\left(\frac{y}{2b}\right) - 2\left(\frac{y}{2b}\right)^3 + \left(\frac{y}{2b}\right)^4\right];$$

нетрудно убедиться, что если мы отбросим близкий к единице множитель $1-\mu^2$, то полученное выражение для стрелки ξ_0 представит уравнение упругой кривой для балки прямоугольного профиля (высота профиля равна h, ширина — единице), свободно лежащей на двух жестких опорах с пролетом $2b$ под равномерно распределенной нагрузкой (см. случай V на стр. 111 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [12]); такое совпадение будет иметь место не только для стрелок ξ_0, но и для их производных по координате y до четвертой включительно *), что указывает на почти полное тождество обстоятельств изгиба рассматриваемого участка весьма длинной пластины и балки соответственного профиля. Отсюда ясно, что короткие стороны опорного контура перестают поддерживать достаточно отдаленные от них участки пластины, которые и гнутся

*) В таком совпадении нетрудно убедиться, сделав, например, в найденных выше выражениях для $(E\varepsilon_y)_{\max}$ и r_z' величину ω весьма большой и отбросив члены, стремящиеся к нулю, как это только что было сделано при преобразовании выражения для ξ_0.

как отдельные балки-полоски, средняя поверхность которых обращается в цилиндрическую с образующей, параллельной оси z; таким образом, эти балки являются частным случаем пластины, и все выражения для нормальных и касательных напряжений в пластине, давлений на контур и пр., которые содержат производные стрелки ξ_0 по координатам y и z, могут быть преобразованы в аналогичные выражения для балок прямоугольного профиля, если производные по координате z мы сделаем равными нулю.

Единственным отличием в некоторых из этих выражений будет отсутствие близкого к единице множителя, зависящего от коэффициента Пуассона, что является следствием некоторой разницы в обстоятельствах изгиба пластины и балки-полоски; рассматривая эти последние как отдельные вполне независимые друг от друга балки, мы тем самым допускаем свободные перемещения их точек в направлении, перпендикулярном плоскости изгиба; такой свободы в полосках, на которые мы мысленно разбиваем пластину, не будет, и потому в растянутых слоях пластины возникнут поперечные сжимающие напряжения и обратно; в рассматриваемом случае этот множитель будет равен $1 - \mu^2$, и для полного восстановления указанной аналогии достаточно момент инерции поперечного сечения балки-полоски, равный $h^3 : 12$, заменить на $h^3 : 12\ (1 - \mu^2)$.

Подобное же преобразование стрелки прогиба пластины ξ_0 можно сделать и в том случае, когда короткой стороной является сторона $2a$ и, следовательно, величина ω становится весьма малой; для этого достаточно в выражении для ξ_0 сделать $y = b$, а входящие в формулу для Z_i гиперболические функции разложить по степеням малого аргумента ω или $\omega \frac{z}{a}$; полученный результат приведет нас к совершенно таким же выводам, как и разобранный выше случай.

Заметим еще, что хотя найденные нами аналогии будут вполне точными только для бесконечно длинной пластины, но приближенно они имеют место и для пластин с конечным отношением сторон прямоугольного контура; так, например, наибольшие стрелки прогиба и наибольшие напряжения в пластинах с отношением сторон $a : b > 3$ будут в нашем случае отличаться от соответственных величин для балки меньше чем

на $6^1/_2{}^0/_0$; некоторые цифры, характеризующие обстоятельства изгиба рассматриваемой пластины, приведены в нижеследующей таблице [13].

Пластина, свободно опертая на прямоугольный жесткий контур размерами $2a \times 2b$ под нагрузкой p_x^0

	$\frac{a}{b} = 1$	$\frac{a}{b} = 5/4$	$\frac{a}{b} = 3/2$	$\frac{a}{b} = 2$	$\frac{a}{b} = 5/2$	$\frac{a}{b} = 3$	$\frac{a}{b} = 8$	Множители
$(\xi_0)_{\max}$	0,780	1,157	1,483	1,945	2,207	2,349	2,500	$(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{b^4}{h^3}$
$(E\varepsilon_y)_{\max}$	0,884	1,346	1,746	2,315	2,639	2,813	3,000	$(1-\mu^2)p_x^0\frac{b^2}{h^2}$
$-R_z'$	1,000	1,164	1,288	1,459	1,566	1,638	2,000	$p_x^0 ab$
$-R_y'$	1,000	1,046	1,068	1,082	1,085	1,086	1,086	$p_x^0 b$
$-R_z'' = -R_y''$	0,371	0,446	0,491	0,529	0,539	0,542	0,543	$(1-\mu)p_x^0 b^2$
$(-r_z')_{\max}$	0,675	0,777	0,847	0,930	0,968	0,985	1,000	$p_x^0 b$
$-(r_y')_{\max}$	0,675	0,711	0,728	0,739	0,742	0,742	0,742	$p_x^0 b$
$-(r_z'')_{z=a}$	0,237	0,212	0,177	0,109	0,062	0,034	0,000	$(1-\mu)p_x^0 b$
$-(r_y'')_{\max}$	0,237	0,295	0,330	0,360	0,368	0,371	0,371	$(1-\mu)p_x^0 b$

Чтобы закончить исследование изгиба жесткой пластины, свободно опертой на прямоугольный контур, мы покажем еще одно преобразование полученного выражения для ξ_0. Возьмем один из основных тригонометрических рядов (см. стр. 184 [1-й части Курса, изд. 1912 г.])

$$\frac{\pi}{4}\frac{\operatorname{ch} a_1\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}a_1\pi} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j\sin j\varphi}{j^2+a_1^2} \qquad (0<\varphi<\pi),$$

где $j = 1, 3, 5, 7, \ldots$, и продифференцируем его по a_1; тогда получим:

$$\frac{\pi}{4}\frac{\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)\operatorname{ch}\frac{1}{2}a_1\pi\operatorname{sh}a_1\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)-\frac{1}{2}\pi\operatorname{sh}\frac{1}{2}a_1\pi\operatorname{ch}a_1\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}a_1\pi\right)}=$$

$$=-2a_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j\sin j\varphi}{(j^2+a_1^2)^2};$$

теперь проинтегрируем два раза полученное выражение по углу φ, определив получающиеся при этом произвольные постоянные из условия, что первый из получающихся рядов обращается в нуль при $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, а второй — при $\varphi=0$; таким образом, найдем:

$$1-\frac{\frac{1}{2}a_1\varphi\operatorname{sh}a_1\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\operatorname{ch}a_1\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}a_1\pi}-\frac{a_1\pi}{4}\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}a_1\varphi}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}a_1\pi\right)}=$$

$$=\frac{4a_1^4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin j\varphi}{j(j^2+a_1^2)^2};$$

умножим теперь это равенство на Nhi^{-5} и заменим

$$\varphi\text{ — через }\frac{\pi z}{2a}\text{ и }a_1\text{ — через }\frac{ia}{b};$$

тогда будем иметь:

$$\frac{Nh}{i^5}\left[1-\frac{\frac{i\pi z}{4b}\operatorname{sh}\frac{i\pi}{2b}(a-z)+\operatorname{ch}\frac{i\pi}{2b}(a-z)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}i\omega}-\frac{i\omega\operatorname{sh}\frac{i\pi z}{2b}}{4\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}i\omega\right)}\right]=$$

$$=Z_i=\frac{4}{\pi}\frac{a^4}{ib^4}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi z}{2a}}{j\left(i^2+i^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}$$

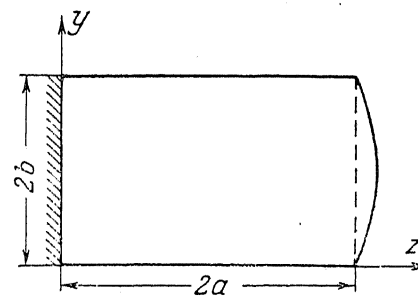
и, подставив найденное выражение для Z_i в формулу (79), определяющую ξ_0, мы найдем:

$$\xi_0 = \frac{3072}{\pi^6}(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{1}{h^3}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a}}{ij\left(\frac{i^2}{b^2}+\frac{j^2}{a^2}\right)^2}, \qquad (79b)$$

где i и $j = 1, 3, 5, 7, \ldots$; это выражение для ξ_0, а также и производные его по координатам y и z до третьих включительно вполне тождественны с полученными выше для всех точек, лежащих внутри опорного контура и на самом контуре; оно симметрично по отношению к буквам y и z, но не особенно удобно для нахождения числовых значений функции ξ_0 и ее производных, так как представляет двойную сумму; нам придется пользоваться им в следующих параграфах при исследовании вопроса об устойчивости пластины под действием сжимающих и скалывающих усилий.

§ 20. Изгиб жестких пластин под действием нагрузок нормальных к средней плоскости. Пластина, свободно опертая по двум кромкам прямоугольного контура, закрепленная по третьей кромке и вполне свободная — по четвертой. Пластина, закрепленная по всем четырем кромкам

Рассмотрим теперь изгиб пластины, две кромки которой ($y = 0$ и $y = 2b$) свободно оперты на вполне жесткий контур, одна кромка ($z = 0$) закреплена на контуре, четвертая же кромка ($z = 2a$) вполне свободна, причем нагрузку p_x^0 будем считать равномерно распределенной [черт. 63] [14].



Черт. 63.

Как мы видели в предыдущем параграфе, стрелка прогиба ξ_0 в этом случае может быть выражена рядом

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \sin\frac{i\pi y}{2b}, \qquad (78)$$

причем произвольные постоянные C_i, C_i', D_i и D_i', входящие

в выражение (78a) для функции Z_i, определяются из условий:

a) для закрепленной стороны (77)

$$Z_i = 0 \quad \text{и} \quad Z_i' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0;$$

b) для свободной стороны (77b)

$$Z_i'' - \mu \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i = 0$$

и

$$Z_i''' - (2 - \mu) \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i' = 0 \quad \text{при} \quad z = 2a;$$

из первых двух уравнений мы найдем:

$$C_i + \frac{Nh}{i^5} = 0 \quad \text{и} \quad C_i' + \frac{i\pi}{2b} D_i = 0,$$

а два последних уравнения после замены в них C_i через $\frac{Nh}{i^5}$ и D_i через $-\frac{2b}{i\pi} C_i'$ напишутся в таком виде:

$$C_i' [(1 + \mu) \operatorname{sh} i\omega + (1 - \mu) i\omega \operatorname{ch} i\omega] +$$
$$+ D_i' [2 \operatorname{ch} i\omega + (1 - \mu) i\omega \operatorname{sh} i\omega] = \frac{\pi}{2b} \frac{Nh}{i^4} [(1 - \mu) \operatorname{ch} i\omega + \mu],$$

$$C_i' [2 \operatorname{ch} i\omega - (1 - \mu) i\omega \operatorname{sh} i\omega] +$$
$$+ D_i' [(1 + \mu) \operatorname{sh} i\omega - (1 - \mu) i\omega \operatorname{ch} i\omega] = -\frac{\pi}{2b} \frac{Nh}{i^4} (1 - \mu),$$

откуда мы и получим:

$$C_i = -\frac{Nh}{i^5},$$

$$\left.\begin{aligned} D_i' &= \frac{\pi}{2b} \frac{Nh}{i^4} \frac{1}{(3 + \mu)(1 - \mu) \operatorname{ch}^2 i\omega + (1 - \mu)^2 i^2\omega^2 + (1 + \mu)^2} \times \\ &\times \{(3 + \mu)(1 - \mu) \operatorname{ch}^2 i\omega + 2\mu \operatorname{ch} i\omega - \\ &\quad - \mu (1 - \mu) i\omega \operatorname{sh} i\omega - (1 - \mu^2)\}, \\ D_i &= -\frac{2b}{\pi i} C_i' = \\ &= \frac{Nh}{i^5} \frac{1}{(3 + \mu)(1 - \mu) \operatorname{ch}^2 i\omega + (1 - \mu)^2 i^2\omega^2 + (1 + \mu)^2} \times \\ &\times \{(3 + \mu)(1 - \mu) \operatorname{sh} i\omega \operatorname{ch} i\omega + \mu (1 + \mu) \operatorname{sh} i\omega - \\ &\quad - \mu (1 - \mu) i\omega \operatorname{ch} i\omega - (1 - \mu)^2 i\omega\}; \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

таким образом, функция ξ_0, определяемая выражением

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[(C_i + C_i' z)\operatorname{ch}\frac{i\pi z}{2b} + (D_i + D_i' z)\operatorname{sh}\frac{i\pi z}{2b} + \frac{Nh}{i^5}\right]\sin\frac{i\pi y}{2b}, \tag{81a}$$

где $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$, будет найдена.

Сделав в этом выражении $z = 2a$, мы получим уравнение кривой, по которой изогнется свободная кромка пластины:

$$(\xi_0)_{z=2a} = Nh \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^5}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu(1+\mu)\operatorname{sh}^2 i\omega + \mu(1-\mu)\, i^2\omega^2 - 4\operatorname{ch} i\omega - 2(1-\mu)\, i\omega \operatorname{sh} i\omega}{(3+\mu)(1-\mu)\operatorname{ch}^2 i\omega + (1-\mu)^2 i^2\omega^2 + (1+\mu)^2}\right] \times$$

$$\times \sin\frac{i\pi y}{2b};$$

наибольшая стрелка прогиба получится, очевидно, при середине этой кромки, т. е. при $y = b$; для квадратной пластины ($\omega = \pi$) эта стрелка будет равна (при $\mu = 0{,}3$)

$$(\xi_0)_{\max} = Nh\left(\frac{0{,}864}{1^5} - \frac{1{,}169}{3^5} + \frac{1{,}169}{5^5} - \ldots\right) =$$

$$= 0{,}860\, Nh = 2{,}16(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{b^4}{h^3}$$

и, следовательно, будет превышать почти в 2,8 раза наибольшую стрелку для пластины тех же размеров, свободно опертой всеми четырьмя кромками (см. стр. 127).

Если мы положим, что размер a весьма велик по сравнению с размером b, иначе говоря, что свободная кромка пластины значительно удалена от заделанной ($\omega = \infty$), то уравнение кривой, по которой изогнется средняя линия этой свободной кромки, напишется таким образом:

$$\xi_0 = Nh \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^5}\left[1 + \frac{\mu(1+\mu)}{(3+\mu)(1-\mu)}\right]\sin\frac{i\pi y}{2b} =$$

$$= \frac{(3-\mu)(1+\mu)}{3+\mu}\,\frac{1}{24}\,(2p_x^0 b)\,\frac{(2b)^3\,12}{Eh^3}\left[\frac{y}{2b} - 2\left(\frac{y}{2b}\right)^3 + \left(\frac{y}{2b}\right)^4\right];$$

если в этом выражении отбросить первый множитель, то, как мы видели выше, оно совпадает с уравнением упругой кривой для балки-полоски, свободно лежащей на двух вполне жестких опорах под равномерно распределенною нагрузкою p_x^0; таким образом, и в этом случае значительно удаленная короткая сторона опорного контура почти не влияет на величину стрелки прогиба ξ_0 и ее производных. Что же касается первого множителя, зависящего от μ, о происхождении которого мы уже говорили, то в данном случае он будет несколько превышать единицу и при $\mu = 0{,}3$ будет равен 1,064.

Положим теперь, что размер a весьма мал по сравнению с размером b, так что балка-полоска с осью, совпадающей с линией $y = b$, будет достаточно удалена от сторон контура $y = 0$ и $y = 2b$, на которые свободно оперта наша пластина. Полагая в этом случае в выражении для наибольшей стрелки $\omega = 0$, мы заметим, что все члены входящей в него суммы обратятся в нули, тогда как множитель N станет весьма большим; для раскрытия получающейся таким образом неопределенности мы разложим функцию $Z_i(2a)$ в ряд по степеням малого аргумента $i\omega$, удержав лишь первый из неуничтожающихся членов; таким образом, после различных сокращений найдем:

$$Z_i(2a) = \frac{1}{i^5} Nh \frac{i^4\omega^4}{8} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{768}{\pi^5} (1-\mu^2) \frac{p_x^0}{E} \frac{b^4}{h^3} \frac{\pi^4 a^4}{8b^4} = \frac{96(1-\mu^2)}{\pi i} \frac{p_x^0}{E} \frac{a^4}{h^3};$$

подставляя это выражение в формулу для ξ_0, мы найдем:

$$(\xi_0)_{\max} = (1-\mu^2) \frac{p_x^0}{E} \frac{a^4}{h^3} \frac{96}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi}{2} = 24(1-\mu^2) \frac{p_x^0}{E} \frac{a^4}{h^3};$$

легко убедиться, что найденная наибольшая стрелка, за исключением множителя $1-\mu^2$, совпадает по величине с наибольшей стрелкой прогиба балки-полоски с вылетом $2a$, закрепленной одним концом под равномерно распределенной нагрузкой p_x^0 (см. случай XII на стр. 116 [1-й части Курса]) [15]; если бы вместо функции $Z_i(2a)$ мы стали раскладывать в аналогичный ряд функцию Z_i, то получили бы и уравне-

ние упругой кривой для этой балки, на изгиб которой не влияют достаточно удаленные короткие стороны опорного контура.

Наибольшие напряжения в рассматриваемой пластине возникают или при средине закрепленной стороны (напряжение σ_z), или при средине свободной стороны (напряжение σ_y); соответствующие им приведенные напряжения определятся формулами

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = \pm\frac{Eh}{2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2} = \pm\frac{Eh}{2}\sum_{i=1}^{\infty} Z_i''(0)\sin\frac{i\pi}{2},$$

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = \pm\frac{Eh}{2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} = \pm\frac{Eh}{2}\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty} i^2 Z_i(2a)\sin\frac{i\pi}{2},$$

причем выражение для $Z_i''(0)$ найдется непосредственно дифференцированием функции Z_i и подстановкою найденных выше значений для входящих в нее постоянных; таким образом, мы найдем:

$$Z_i''(0) = \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 C_i + \frac{i\pi}{b} D_i' = -\frac{Nh}{i^3}\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 + \frac{i\pi}{b} D_i';$$

нетрудно видеть, что если сторона $2a$ весьма велика сравнительно с $2b$, т. е. ω близко к бесконечности, то

$$Z_i''(0) = \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \frac{Nh}{i^3},$$

соответственно чему найдем:

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = \pm\frac{ENh^2}{2}\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi}{2} = \pm 3(1-\mu^2)p_x^0\frac{b^2}{h^2};$$

обратно, при a весьма малом в сравнении с b мы можем разложить входящие в D_i' гиперболические функции по степеням малого аргумента $i\omega$ и тогда получим:

$$Z_i''(0) = \frac{Nh}{i^5}\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2\frac{i^2\omega^2}{2} = (1-\mu^2)\frac{96}{\pi i}\frac{p_x^0}{E}\frac{a^2}{h^3},$$

и следовательно,

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = \pm \frac{Eh}{2}(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{a^2}{h^3}\frac{96}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{2} =$$

$$= 12(1-\mu^2)\,p_x^0\frac{a^2}{h^2},$$

причем этот последний предел, за исключением множителя $1-\mu^2$, совпадает с выражением для наибольшего напряжения в балке-полоске с вылетом $2a$, закрепленной одним концом.

Подобным же образом мы нашли бы, что напряжение $(E\varepsilon_y)_{\max}$ при увеличении стороны $2a$ подходит к пределу

$$\frac{(3-\mu)(1+\mu)}{3+\mu}\,3p_x^0\frac{b^2}{h^2},$$

соответственному балке-полоске с пролетом $2b$; при возрастании же отношения $b:a$ это напряжение неопределенно убывает.

Для квадратной пластины эти напряжения определяются выражениями

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = 2{,}83(1-\mu^2)\,p_x^0\frac{b^2}{h^2}$$

и

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = 2{,}56(1-\mu^2)\,p_x^0\frac{b^2}{h^2}.$$

Реактивное давление на пластину от закрепленной стороны ($z=0$) определяется формулами

$$r_y' = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial\Delta\xi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial z^3}\right)_{z=0} =$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\sum_{i=1}^{\infty}Z_i'''(0)\sin\frac{i\pi y}{2b},$$

$$r_y'' = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial y^2\,\partial z}\right)_{z=0} = 0,$$

полное же давление от этой стороны будет:

$$R_y' = \frac{Eh^3b}{3\pi(1-\mu^2)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}Z_i'''(0).$$

Дифференцирование функции Z_i в связи с уравнениями, определяющими входящие в нее постоянные, дает соотношение

$$Z_i'''(0) = \frac{i^2\pi^2}{2b^2} C_i';$$

таким образом, если сторона $2a$ будет мала по сравнению со стороной $2b$, то, поступая как и выше, мы найдем:

$$Z_i'''(0) = -\frac{Nh}{i^5}\frac{i^3\pi^3}{4b^3}\frac{i\omega}{2} = -\frac{96}{\pi i}(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{a}{h^3},$$

и следовательно,

$$r_y' = -p_x^0 a \frac{8}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi y}{2b} = -2p_x^0 a,$$

т. е. закрепленная длинная сторона воспримет давление на всю пластину. Понятно, что при конечном, хотя и большом отношении сторон $b:a$ этот вывод нужно понимать в том смысле, что закрепленной стороной будет воспринята значительная часть от полного давления на пластину (например, при $b:a=3$ — около $88^0/_0$), причем это давление будет распределено вдоль этой стороны почти равномерно.

Обратно, если закрепленная сторона будет весьма короткой, то мы получим:

$$Z_i'''(0) = -\frac{Nh}{i^5}\frac{i^3\pi^3}{4b^3},$$

так что

$$R_y' = -p_x^0 b^2 \frac{64}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3} = -2{,}171 p_x^0 b^2;$$

это давление будет ровно в два раза больше, чем давление на короткую сторону в пластине, свободно опертой всеми четырьмя кромками.

Для квадратной пластины это давление равно

$$R_y' = -2{,}090 p_x^0 b^2,$$

т. е. будет тоже почти в два раза больше, чем соответствующее давление на свободно опертую сторону для рассмотренной выше пластины ($-p_x^0 b^2$); таким образом, давление на

закрепленную сторону в нашем случае почти не зависит от длины стороны $2a$, если только $a > b$.

Давления на обе свободно опертые стороны контура при равномерно распределенной нагрузке p_x^0 будут одинаковы; определить эти давления можно из уравнения статического равновесия пластины, так как давление R_y' уже найдено; закон же распределения их вдоль опертых кромок определится по общим формулам, приведенным в предыдущем параграфе.

В нижеследующей таблице даны наибольшие стрелки прогиба, приведенные напряжения и давления R_y' для рассматриваемой пластины (при $\mu = 0{,}3$).

$\frac{a}{b}$	$(\xi_0)_{\max}$	$(E\varepsilon_z)_{\max}$	$(E\varepsilon_y)_{\max}$	R_y'
0	$21{,}84\,a^4$	$10{,}92\,a^2$	0	$4{,}00\,a$
1/3	$16{,}42\,a^4$	$9{,}35\,a^2$	$0{,}187\,b^2$	$3{,}54\,a$
1/2	$10{,}17\,a^4$	$6{,}97\,a^2$	$0{,}703\,b^2$	$3{,}20\,a$
2/3	$5{,}86\,a^4$	$4{,}96\,a^2$	$1{,}340\,b^2$	$2{,}81\,a$
1	$1{,}963\,b^4$	$2{,}59\,b^2$	$2{,}332\,b^2$	$2{,}09\,b$
3/2	$2{,}472\,b^4$	$2{,}70\,b^2$	$2{,}960\,b^2$	$2{,}16\,b$
2	$2{,}622\,b^4$	$2{,}72\,b^2$	$3{,}145\,b^2$	$2{,}17\,b$
3	$2{,}659\,b^4$	$2{,}73\,b^2$	$3{,}190\,b^2$	$2{,}17\,b$
∞	$2{,}659\,b^4$	$2{,}73\,b^2$	$3{,}191\,b^2$	$2{,}17\,b$
Множитель	$p_x^0 : Eh^3$	$p_x^0 : h^2$	$p_x^0 : h^2$	$p_x^0 b$

Теперь мы перейдем к вопросу о прямоугольной пластине, вполне заделанной по всем четырем кромкам; так как в задачах строительной механики корабля такой способ закрепления пластины является наиболее распространенным, то надлежащее решение этого вопроса представляется для нас весьма важным [16].

Ограничиваясь решением вопроса для равномерно распределенного по поверхности пластины давления p_x^0, мы зададим

функцию ξ_0 в таком виде:

$$\xi_0 = \frac{(1-\mu^2)\,p_x^0 a^2 b^2}{2Eh^3}\left[A + B\,\frac{y^2(2b-y)^2}{a^4b^4} + (1-B)\,\frac{z^2(2a-z)^2}{a^4b^4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i^3} Y_i \cos\frac{i\pi z}{a} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{i^3} Z_i \cos\frac{i\pi y}{b}\right], \qquad (82)$$

где A, B, C_i и D_i — постоянные для пластины с заданными размерами коэффициенты, i — положительное целое число, Y_i — функция координаты y и числа i, Z_i — такая же функция z; расположение координатных осей, а также и все остальные обозначения — те же, что и в предыдущих задачах.

Подберем теперь все коэффициенты и функции Y_i и Z_i, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению (5) и заданным условиям на контуре. Подставив наше решение в это уравнение, мы найдем:

$$\Delta^2\xi_0 = \frac{(1-\mu^2)\,p_x^0 a^2 b^2}{2Eh^3}\left[\frac{24B}{a^4b^4} + \frac{24(1-B)}{a^4b^4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i^3}\Delta^2\left(Y_i\cos\frac{i\pi z}{a}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i^3}\Delta^2\left(Z_i\cos\frac{i\pi y}{b}\right)\right] = \frac{12(1-\mu^2)\,p_x^0}{Eh^3};$$

сокращая подобные члены, мы получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i^3}\Delta^2\left(Y_i\cos\frac{i\pi z}{a}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i^3}\Delta^2\left(Z_i\cos\frac{i\pi y}{b}\right) = 0;$$

этому условию мы удовлетворим, если уравняем нулю каждый член этих сумм, т. е. положим

$$\Delta^2\left(Y_i\cos\frac{i\pi z}{a}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta^2\left(Z_i\cos\frac{i\pi y}{b}\right) = 0$$

для i, равного 1, 2, 3, 4, ...; определим теперь которую-нибудь из этих функций, например Z_i.

Написав соответствующее дифференциальное уравнение для этой функции

$$\left[Z_i^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2 Z_i'' + \left(\frac{i\pi}{b}\right)^4 Z_i\right]\cos\frac{i\pi y}{2b} = 0$$

и сделав нулем выражение в скобках, мы получим линейное уравнение четвертого порядка без второй части, общее решение которого будет:

$$Z_i = (\alpha + \alpha' z)\,\mathrm{ch}\,\frac{i\pi z}{b} + (\beta + \beta' z)\,\mathrm{sh}\,\frac{i\pi z}{b},$$

где α, α', β и β' — постоянные произвольные; три из них мы определим из нижеследующих условий:

a) значения, принимаемые функцией Z_i на контуре ($z = 0$ и $z = 2a$) одинаковы и

b) первые производные функции Z_i на контуре обращаются в нуль.

Выражая эти условия уравнениями, мы получим:

$$\alpha = (\alpha + 2a\alpha')\,\mathrm{ch}\,2i\omega + (\beta + 2a\beta')\,\mathrm{sh}\,2i\omega;\quad \alpha' + \frac{i\pi}{b}\beta = 0;$$

$$\left(\frac{i\pi}{b}\alpha + \beta' + 2i\omega\alpha'\right)\mathrm{sh}\,2i\omega + \left(\frac{i\pi}{b}\beta + \alpha' + 2i\omega\beta'\right)\mathrm{ch}\,2i\omega = 0,$$

где, как и раньше, положено $\omega = \frac{\pi a}{b}$.

Находя из этих уравнений постоянные α, β и β' и подставляя их в найденное решение для функции Z_i, мы получим:

$$Z_i = \frac{2b}{\pi i}\,\frac{\alpha'}{\mathrm{ch}\,2i\omega - 1}\left[\mathrm{sh}\,i\omega\,\mathrm{ch}\,\frac{i\pi(a-z)}{b} + i\omega\,\mathrm{ch}\,\frac{i\pi z}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{i\pi z}{b}\,\mathrm{sh}\,i\omega\,\mathrm{sh}\,\frac{i\pi(a-z)}{b}\right],$$

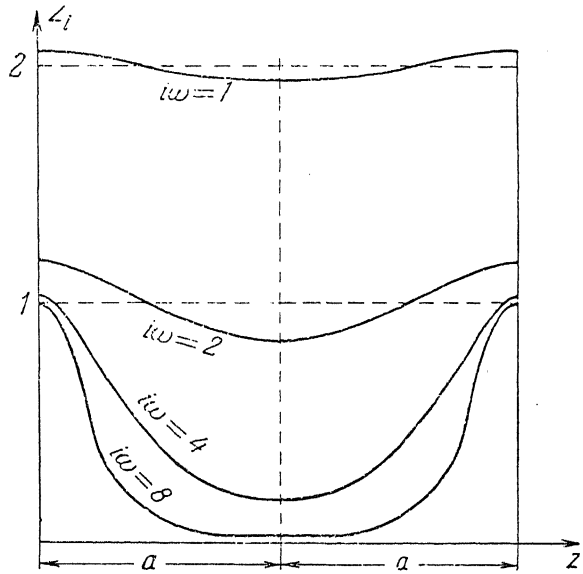
причем множитель α' можно выбрать совершенно произвольно; мы положим $\alpha' = \frac{\pi i}{b}$ и перепишем нашу функцию в таком виде:

$$Z_i = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{i\pi(a-z)}{b} + \frac{i\pi z}{b}\,\mathrm{sh}\,\frac{i\pi(a-z)}{b}}{\mathrm{sh}\,i\omega} + \frac{i\omega\,\mathrm{ch}\,\frac{i\pi z}{b}}{\mathrm{sh}^2 i\omega}. \qquad (83)$$

На чертеже 64 эти функции изображены графически в нужных нам пределах $0 \leqslant z \leqslant 2a$; все эпюры этих функций симметричны относительно линии $z = a$, имеют горизонтальные касательные в точках $z = 0$, $z = a$ и $z = 2a$, а также две симметрично расположенные точки перегиба; при малых значениях $i\omega$ величина функции мало меняется при изменении координаты z и близка к $\frac{2}{i\omega}$, с увеличением же $i\omega$ функ-

ция $Z_i(0)$ неопределенно и очень быстро приближается к единице, а $Z_i(a)$ — к нулю; при промежуточных же значениях координаты z функция Z_i будет заключаться между этими пределами. Все эти свойства легко получаются из уравнения (83).

Если в найденной функции Z_i мы переменим z на y и a на b, то получим функцию Y_i, которая, удовлетворяя соответствующему ей дифференциальному уравнению, будет иметь



Черт. 64.

равную нулю первую производную на контуре ($y=0$ и $y=2b$) и будет четной относительно линии $y=b$.

При сделанном выборе функций Y_i и Z_i стрелка прогиба пластины ξ_0 будет удовлетворять уравнению (5) и одному из условий на контуре, именно: ее первая производная по нормали будет нулем; в самом деле, взяв, например, производную ξ_0 по координате y, мы получим:

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial y} = \frac{(1-\mu^2)\,p_x^0 a^2 b^2}{2Eh^3}\left[B\,\frac{4y\,(b-y)\,(2b-y)}{a^2b^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i^3}\,Y_i' \cos\frac{i\pi z}{a} - \frac{\pi}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i^4}\,Z_i \sin\frac{i\pi y}{b}\right],$$

и, положив в этом выражении $y=0$ или $y=2b$, мы увидим, что все члены в скобках обращаются в нуль, причем последний член — при условии, что коэффициенты D_i при весьма большом i остаются конечными.

Подберем теперь коэффициенты C_i и D_i таким образом, чтобы удовлетворить и второму условию на контуре ($\xi_0=0$).

Разложим входящие в выражение для ξ_0 функции в тригонометрические ряды:

$$\left.\begin{aligned}\frac{z^2(2a-z)^2}{a^4b^4}&=\frac{a^2}{b^2}\left[\frac{8}{15}-\frac{48}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{i^4}\right]\text{ *)},\\ Z_j&=\frac{2}{j\omega}\left[1+2j^4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2}\right]\text{ **)},\end{aligned}\right\}\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

и, сделав в выражении (82) $y=0$, подставим туда полученные ряды; при этом, чтобы не спутать индексов, заменим в последней сумме выражения для ξ_0 индекс i на j; тогда мы будем иметь:

$$(\xi_0)_{y=0}=0=\frac{(1-\mu^2)\,p_x^0a^2b^2}{2Eh^3}\left\{A+(1-B)\frac{8}{15}\frac{a^2}{b^2}-\right.$$

$$-(1-B)\frac{48}{\pi^4}\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{i^4}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{i^3}Y_i(0)\cos\frac{i\pi z}{a}+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{j^3}\frac{2}{j\omega}\left[1+2j^4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2}\right]\right\}.$$

---

*) См. таблицу рядов на стр. 189 [1-й части Курса, изд. 1912 г.], четвертый ряд первой колонны, в котором надо положить $\varphi=\frac{\pi z}{a}$ [17].

**) Эта формула получается из последнего ряда на стр. 186 [1-й части Курса, изд. 1912 г.], если входящую в него постоянную a_1 мы сделаем мнимой и заменим через $\frac{ja}{b}$, угол же φ положим равным $\frac{\pi z}{a}$ [18].

Некоторые члены выражения, стоящего в скобках, будут независимы от координаты z, другие же имеют множителем $\cos\frac{i\pi z}{a}$, где $i=1, 2, 3, 4\ldots$; очевидно, мы выполним указанное равенство при всяком значении z в нужных нам пределах, если приравняем нулю отдельно каждую из этих групп, т. е. положим:

$$\left.\begin{aligned} A+\frac{8}{15}\frac{a^2}{b^2}(1-B)+\frac{2}{\omega}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{j^4}=0,\\ -\frac{48}{\pi^4 i^4}\frac{a^2}{b^2}(1-B)+\frac{C_i}{i^3}Y(0)+\frac{4}{\omega}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2}=0,\end{aligned}\right\} \quad (84)$$

причем последнее из этих уравнений мы перепишем в таком виде:

$$C_i Y_i(0)=\frac{48(1-B)}{\pi^4 i}\frac{a^2}{b^2}-\frac{4i^3}{\omega}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2}, \quad (84a)$$

где $i=1, 2, 3, 4, \ldots$, а функция $Y_i(0)$ с увеличением индекса i очень быстро подходит к единице.

Совершенно таким же путем мы найдем ряд уравнений, вытекающих из условия

$$(\xi_0)_{z=0}=0;$$

эти уравнения будут:

$$\left.\begin{aligned} A+B\frac{8}{15}\frac{b^2}{a^2}+\frac{2}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{j^4}=0\\ \text{и}\\ D_i Z_i(0)=\frac{48B}{\pi^4 i}\frac{b^2}{a^2}-\frac{4i^3}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2},\end{aligned}\right\} \quad (84b)$$

где через ω_1 названо $\frac{\pi b}{a}$; что касается двух других сторон контура ($z=2a$ и $y=2b$), то стрелки на них также будут нулями в силу условия а), поставленного нами при нахождении функций Z_i и Y_i.

Займемся уравнениями, определяющими коэффициенты C_i и D_i:

$$C_i Y_i(0) = \frac{48(1-B)}{\pi^4 i}\frac{a^2}{b^2} - \frac{4i^3}{\omega}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2},$$

$$D_i Z_i(0) = \frac{48B}{\pi^4 i}\frac{b^2}{a^2} - \frac{4i^3}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2};$$

посмотрим, нельзя ли будет удовлетворить этим уравнениям, если все коэффициенты C_i мы увеличим на не зависящую от i величину δC, коэффициенты D_i увеличим на величину δD, а коэффициент B — на величину δB. Тогда каждое из уравнений второй группы даст нам новое уравнение такого вида:

$$\delta D Z_i(0) = \frac{48}{\pi^4 i}\frac{b^2}{a^2}\delta B - \frac{4i^3}{\omega_1}\delta C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2};$$

возьмем теперь написанное выше выражение для Z_i через тригонометрический ряд и, положив в нем $z=0$, переменим местами индексы i и j; тогда получим:

$$Z_i(0) = \frac{2}{i\omega}\left[1 + 2i^4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(j^2\frac{b^2}{a^2}+i^2\right)^2}\right],$$

откуда и найдем:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2} = \frac{1}{2i^4}\frac{b^4}{a^4}\left(\frac{i\omega}{2}Z_i(0) - 1\right);$$

подставив эту сумму в наше уравнение, мы после упрощений получим:

$$\left(\delta D + \frac{b^2}{a^2}\delta C\right)Z_i(0) = \frac{2}{\pi i}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{24}{\pi^3}\delta B + \frac{b}{a}\delta C\right).$$

Преобразовывая совершенно так же и первую группу уравнений, связывающих наши коэффициенты, мы найдем:

$$\left(\delta C + \frac{a^2}{b^2}\delta D\right)Y_i(0) = \frac{2}{\pi i}\frac{a^2}{b^2}\left(-\frac{24}{\pi^3}\delta B + \frac{a}{b}\delta D\right);$$

полученные соотношения между тремя приращениями δB, δC и δD должны иметь место при всяком целом числе i; легко видеть, что это может иметь место только в том случае, если все четыре бинома в скобках будут нулями, что и приводит нас к соотношениям

$$\delta C = -\frac{24}{\pi^3}\frac{a}{b}\delta B \quad \text{и} \quad \delta D = \frac{24}{\pi^3}\frac{b}{a}\delta B;$$

таким образом, решив группы уравнений (84a, b) при каком угодно действительном значении B относительно коэффициентов C_i и D_i, мы при помощи найденных соотношений легко определим новые значения этих коэффициентов, соответствующие всякой другой величине B. Нетрудно найти и приращение δA, получаемое при этом коэффициентом A; взяв одно из двух определяющих его уравнений, например

$$A + \frac{8}{15}\frac{b^2}{a^2}B + \frac{2}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{j^4} = 0,$$

мы будем иметь:

$$\delta A + \frac{8}{15}\frac{b^2}{a^2}\delta B + \frac{2}{\omega_1}\delta C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^4} = 0,$$

и, подставив вместо δC найденное значение, получим:

$$\delta A = \frac{8}{15}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)\delta B;$$

совершенно такой же результат даст и другое аналогичное уравнение.

Теперь посмотрим, как изменится вид функции ξ_0 вследствие полученных коэффициентами A, B, C и D приращений. Члены, соответствующие этим приращениям, если в выражении (82) отбросить постоянный множитель перед скобками, напишутся таким образом:

$$\delta A + \frac{y^2(2b-y)^2}{a^2b^2}\delta B - \frac{z^2(2a-z)^2}{a^2b^2}\delta B + \\ + \delta C\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}Y_i\cos\frac{i\pi z}{a} + \delta D\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}Z_i\cos\frac{i\pi y}{b};$$

выразив все приращения через δB и представляя входящие сюда функции от y и z в виде тригонометрических рядов, мы найдем:

$$\left\{\frac{8}{15}\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{8}{15}-\frac{48}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi y}{b}}{i^4}\right]-\right.$$

$$-\frac{a^2}{b^2}\left[\frac{8}{15}-\frac{48}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{i^4}\right]-$$

$$-\frac{a}{b}\frac{24}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{i^4\omega_1}\left[1+2i^4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{j\pi y}{b}}{\left(j^2\frac{a^2}{b^2}+i^2\right)^2}\right]\cos\frac{i\pi z}{a}+$$

$$\left.+\frac{b}{a}\frac{24}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{i^4\omega}\left[1+2i^4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{j\pi z}{a}}{\left(j^2\frac{b^2}{a^2}+i^2\right)^2}\right]\cos\frac{i\pi y}{b}\right\}\delta B;$$

сократив взаимно уничтожающиеся члены, мы получим это выражение в таком виде:

$$\left[-\frac{96}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{i\pi z}{a}}{\left(j^2\frac{a}{b}+i^2\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{96}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{j\pi z}{a}\cos\frac{i\pi y}{b}}{\left(j^2\frac{b}{a}+i^2\frac{a}{b}\right)^2}\right]\delta B;$$

переставив в одной из двойных сумм индексы i и j, мы увидим, что наше выражение тождественно обращается в нуль, откуда заключаем, что взятое для функции ξ_0 решение не меняет своего вида и может иметь место при всяком значении δB, иначе говоря, коэффициент B может быть выбран совершенно произвольно.

Этот выбор мы сделаем таким образом, чтобы коэффициенты C_i и D_i были по возможности малы и при увеличении i неопределенно стремились бы к нулю; для выполнения последнего условия достаточно, чтобы суммы

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{j} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{j}$$

были конечными.

Возьмем одно из уравнений (84a, b) и, представив его в таком виде:

$$\frac{D_i Z_i(0)}{i} = \frac{48}{\pi^4}\frac{B}{i^2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{4i^2}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2},$$

просуммируем ряд таких выражений для всех значений i от единицы до бесконечности; тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i Z_i(0)}{i} = \frac{48}{\pi^4}\frac{b^2}{a^2}B\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} - \frac{4}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}i^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_j}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2};$$

заметим, что это выражение имеет смысл только для такого значения B, которое делает коэффициенты C_j и D_j неопределенно убывающими, так как иначе первая и последняя суммы делаются бесконечно большими; такое значение B мы назовем через B_0. Но при этом условии мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}i^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2} = \sum_{j=1}^{\infty}C_j\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{b^3}{a^3}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\operatorname{cth} j\omega_1 - \frac{j\omega_1}{\operatorname{sh}^2 j\omega_1}\right)\frac{C_j}{j};$$

но, кроме того,

$$Z_i(0) = \operatorname{cth} i\omega + \frac{i\omega}{\operatorname{sh}^2 i\omega},$$

и следовательно, наше уравнение примет такой вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{cth} i\omega + \frac{i\omega}{\operatorname{sh}^2 i\omega}\right)\frac{D_i}{i} = \frac{8}{\pi^2}\frac{b^2}{a^2}B_0 - \frac{b^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{cth} i\omega_1 - \frac{i\omega_1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1}\right)\frac{C_i}{i};$$

преобразовав таким же образом второе уравнение группы (84a, b), мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{cth} i\omega_1 + \frac{i\omega_1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1}\right)\frac{C_i}{i} =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\frac{a^2}{b^2}(1-B_0) - \frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{cth} i\omega - \frac{i\omega}{\operatorname{sh}^2 i\omega}\right)\frac{D_i}{i};$$

умножив это уравнение на $b:a$, а предыдущее — на $a:b$ и вычитая их, мы получим:

$$\frac{b^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1}-\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{\operatorname{sh}^2 i\omega}=\frac{4}{\pi^3}\left[\frac{a}{b}(1-B_0)-\frac{b}{a}B_0\right]; \quad (85)$$

это уравнение и послужит нам для определения искомого коэффициента B_0.

Таким образом, нахождение функции ξ_0 сведется к определению коэффициентов B_0, C_i и D_i из линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_iY_i(0)&=\frac{48(1-B_0)}{\pi^4 i}\frac{a^2}{b^2}-\frac{4i^3}{\omega}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2},\\ D_iZ_i(0)&=\frac{48B_0}{\pi^4 i}\frac{b^2}{a^2}-\frac{4i^3}{\omega_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2}, \end{aligned}\right\} i=1,2,3,4,\ldots,$$

и

$$\frac{b^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1}-\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{\operatorname{sh}^2 i\omega}=\frac{4}{\pi^3}\left[\frac{a}{b}(1-B_0)-\frac{b}{a}B_0\right];$$

легко видеть, что две первые группы уравнений при $a=b$ ($\omega=\omega_1$) будут тождественными, если мы сделаем $C_i=D_i$; таким образом, для квадратной пластины мы будем иметь только одну группу уравнений, причем и коэффициент B_0 определится непосредственно из последнего уравнения

$$1-B_0-B_0=0,$$

т. е. будет равен $^1/_2$; далее, если в двух группах наших уравнений мы взаимно переменим местами a на b, ω на ω_1, C_i на D_i, то уравнения будут тождественны с написанными, если B_0 мы заменим на $(1-B_0)$ и обратно; отсюда мы заключаем, что

$$C_i\left(\frac{a}{b}\right)=D_i\left(\frac{b}{a}\right),\ D_i\left(\frac{a}{b}\right)=C_i\left(\frac{b}{a}\right)\text{ и }B_0\left(\frac{a}{b}\right)+B_0\left(\frac{b}{a}\right)=1.$$

Таким образом, нам достаточно найти коэффициенты B_0, C_i и D_i только для разных значений $a:b$, бо́льших единицы, так как для случаев, когда это отношение будет меньше единицы, соответственные коэффициенты легко определятся указанными соотношениями.

Самое вычисление коэффициентов B_0, C_i и D_i проще всего может быть сделано таким путем: ниже, рассматривая давление на контур, мы найдем приближенное выражение для B_0, дающее весьма близкие к истинным значения этого коэффициента; назовем это приближенное значение через B_1 и, подставив его в первые два уравнения, сделаем в них $i=1$; отбросим теперь в суммах, входящих в эти уравнения, все члены, кроме первого, и тогда получим два уравнения с двумя неизвестными C_1 и D_1; найдя отсюда приближенные значения этих коэффициентов C_1' и D_1', сделаем в наших уравнениях $i=2$ и отбросим в суммах все члены, кроме двух первых, заменив при этом C_1 и D_1 их приближенными значениями; решив эти уравнения относительно C_2 и D_2, мы найдем их приближенные значения C_2' и D_2'; поступая таким же образом и дальше, мы получим несколько пар приближенных коэффициентов C_i' и D_i', которые потом и подставим вторично в первую пару уравнений (при $i=1$), причем во входящих в них суммах сохраним столько членов, сколько пар коэффициентов у нас найдено; решив эти уравнения, найдем второе приближение для двух первых коэффициентов C_1'' и D_1'', которые и будем подставлять в следующие пары уравнений (при $i=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$), определяя последовательно коэффициенты C_i'' и D_i'' во втором приближении; затем, если нужно, найдем таким же путем и следующие приближения для наших коэффициентов $C_i^{(n)}$ и $D_i^{(n)}$.

Теперь подставим эти величины в уравнение (85) и найдем из него коэффициент B, который несколько не совпадает по величине с B_1, по которому мы вычисляли коэффициенты C и D; пусть это новое значение коэффициента будет B_2; заметим еще, что ряды, входящие в это последнее уравнение, будут весьма быстро сходящимися, так как члены их заключают чрезвычайно быстро возрастающие делители $\mathrm{sh}^2 i\omega$ и $\mathrm{sh}^2 i\omega_1$, а потому даже при вычислении всех

коэффициентов на шесть знаков в этих рядах достаточно будет взять 2—4 первых члена.

Мы уже указывали, что уравнение (85) справедливо только в том случае, когда коэффициент B равен B_0; поэтому, если мы дадим коэффициентам $C_i^{(n)}$ и $D_i^{(n)}$ приращения

$$\delta C = -\frac{a}{b}\frac{24}{\pi^3}(B_0 - B_1) \quad \text{и} \quad \delta D = \frac{b}{a}\frac{24}{\pi^3}(B_0 - B_1),$$

то должны получить истинные коэффициенты C_i и D_i, удовлетворяющие нашему уравнению; таким образом, если из уравнения, определяющего B_2 —

$$\frac{b^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i - \delta C}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1} - \frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i - \delta D}{\operatorname{sh}^2 i\omega} = \frac{4}{\pi^3}\left[\frac{a}{b}(1 - B_2) - \frac{b}{a}B_2\right],$$

мы вычтем уравнение (85), то получим:

$$-\frac{b^2}{a^2}\delta C\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1} + \frac{a^2}{b^2}\delta D\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 i\omega} = \frac{4}{\pi^3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)(B_0 - B_2);$$

после подстановки выражений для δC и δD мы найдем:

$$6(B_0 - B_1)\left(\frac{b}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1} + \frac{a}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 i\omega}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)(B_0 - B_2),$$

откуда и будем иметь:

$$B_0 = B_1 + \frac{B_2 - B_1}{1 - \varkappa},$$

где для сокращения письма обозначено:

$$\frac{6}{a^2 + b^2}\left(b^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1} + a^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 i\omega}\right) \text{ через } \varkappa;$$

величина $\varkappa$ всегда меньше единицы, а потому, зная B_2 и B_1, мы сейчас же найдем B_0, а следовательно, поправки δC и δD, а также коэффициенты C_i и D_i.

Всегда будет выгоднее, найдя небольшое число приближенных коэффициентов $C_i^{(n)}$ и $D_i^{(n)}$, вычислить по ним B_0 и потом уже определять нужное число коэффициентов C_i и D_i

с назначенной степенью точности. Таблица этих коэффициентов для различных отношений сторон $a : b$ приведена в конце этого параграфа. Коэффициент A легко определяется из соотношений (84) и (84b), причем совпадение обоих результатов является некоторым контролем правильности вычисления коэффициентов C_i и D_i.

Теперь перейдем к нахождению стрелок прогиба ξ_0 и их производных в разных точках пластины.

Наибольшая стрелка получится, конечно, в центре пластины ($y = b$, $z = a$) и определится выражением

$$(\xi_0)_{\max} = \frac{(1-\mu^2)\, p_x^0\, a^2 b^2}{2Eh^3}\left[A + B_0\frac{b^2}{a^2} + (1-B_0)\,\frac{a^2}{b^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{i^3}\, Y_i(b)\cos i\pi + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i^3}\, Z_i(a)\cos i\pi\right];$$

входящие сюда ряды будут сходиться весьма быстро, так как коэффициенты C_i и D_i при возрастании индекса i неопределенно убывают, а функции $Y_i(b)$ и $Z_i(b)$ при увеличении i также стремятся к нулю; поэтому члены наших рядов будут убывать значительно быстрее, чем члены знакопеременного ряда

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$$

Наибольшие нормальные напряжения по аналогии с предыдущим мы должны искать в точках линии, соединяющей середины длинных сторон прямоугольного контура, причем напряжения эти будут направлены параллельно короткой стороне его. Пропорциональная этим напряжениям вторая производная стрелки по координате y (при $a < b$) напишется таким образом:

$$\left(\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2}\right)_{z=a} = \frac{(1-\mu^2)\, p_x^0\, a^2 b^2}{2Eh^3}\left[\frac{4(2b^2 - 6by + 3y^2)}{a^2 b^2}\, B_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{i^3}\, Y_i''\cos i\pi - \frac{\pi^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i}\, Z_i(a)\cos\frac{i\pi y}{b}\right],$$

причем производная функция Y_i'' определится выражением

$$Y_i'' = \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \left[\frac{\frac{i\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{i\pi (b-y)}{a} - \operatorname{ch} \frac{i\pi (b-y)}{a}}{\operatorname{sh} i\omega_1} + \frac{i\omega_1 \operatorname{ch} \frac{i\pi y}{a}}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1} \right].$$

Исследованием найденной производной можно обнаружить, что в нужных для нас пределах $0 \leqslant y \leqslant 2b$ она имеет аналитический максимум при $y = b$ (в центре листа) и два равных по величине пограничных — при $y = 0$ и при $y = 2b$ (на опорном контуре); соответствующее первой точке наибольшее приведенное напряжение будет равно

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = \frac{1}{2} Eh \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)_{z=a,\ y=b} =$$

$$= \frac{1}{4}(1-\mu^2) p_x^0 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left[-4B_0 + \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i} \left(\frac{i\omega_1 \operatorname{cth} i\omega_1 - 1}{\operatorname{sh} i\omega_1} \right) \cos i\pi - \right.$$

$$\left. - \pi^2 \frac{a^2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{i} \left(\frac{i\omega \operatorname{cth} i\omega + 1}{\operatorname{sh} i\omega} \right) \cos i\pi \right],$$

наибольшее же напряжение на контуре напишется так:

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = \frac{1}{2} Eh \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)_{z=a,\ y=0} =$$

$$= \frac{1}{4}(1-\mu^2) p_x^0 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left[8B_0 - \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{i} \left(\operatorname{cth} i\omega_1 - \frac{i\omega_1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1} \right) \cos i\pi - \right.$$

$$\left. - \pi^2 \frac{a^2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{i} \left(\frac{i\omega \operatorname{cth} i\omega + 1}{\operatorname{sh} i\omega} \right) \right].$$

По абсолютной величине пограничный максимум получается больше аналитического, подобно тому как мы имели для балок с вполне закрепленными опорными сечениями; входящие в эти выражения ряды будут в достаточной мере сходящимися, так как стоящие в скобках множители, зависящие от $i\omega$ и $i\omega_1$, при больших значениях i будут убывать как функции $e^{-i\omega}$ и $e^{-i\omega_1}$; исключение представляет первый ряд во втором выражении, для которого указанный множитель асимптотически

подходит к единице; но и этот ряд будет более сходящимся, чем, например, гармонический.

Перейдем теперь к нахождению реактивных давлений, воспринимаемых пластиной от опорного контура; прежде всего нетрудно убедиться, что давления r''_y и r''_z от скручивающих пар будут равны нулю для всех точек контура; только для четырех угловых точек сходимость наших рядов становится сомнительной, и следовательно, они перестают выражать соответствующие давления r''_y и r''_z; что же касается давления r'_y, то оно определится выражением

$$r'_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial \Delta\xi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^3 \xi_0}{\partial z^3}\right)_{z=0} =$$

$$= p_x^0 a\left[-(1-B_0)+\frac{\pi^3}{24}\frac{b^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty} C_i Y_i\left(\sin\frac{i\pi z}{a}\right)_{z=0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^3}{12}\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos\frac{i\pi y}{b}\right];$$

так как функция Y_i для всех значений координаты y, кроме предельных ($y=0$ и $y=2b$), убывает с увеличением i подобно вышеуказанным показательным функциям, а множители C_i, как мы видели, также неопределенно убывают, то сумма членов первого ряда, входящего в написанное выражение, будет нулем для всех точек, исключая угловые; таким образом, мы получим:

$$r'_y = p_x^0 a\left[-(1-B_0)+\frac{\pi^3}{12}\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos\frac{i\pi y}{b}\right],$$

$$r'_z = p_x^0 b\left[-B_0+\frac{\pi^3}{12}\frac{b}{a}\sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos\frac{i\pi z}{a}\right];$$

эти формулы будут иметь место для всех точек опорного контура, кроме четырех вершин его; некоторые соображения, которых не будем приводить здесь, заставляют думать, что в этих четырех точках давления r'_y и r'_z будут равны нулю.

Полное давление на стороны контура R'_y и R'_z мы найдем интегрированием полученных выражений по координатам y и z.

в соответственных пределах; легко видеть, что при этом обе суммы сделаются нулями, и мы будем иметь:

$$R'_y = -2(1-B_0)p_x^0 ab,$$
$$R'_z = -2B_0 p_x^0 ab;$$

сумма этих давлений будет равна $(-2p_x^0 ab)$, как это и должно быть.

Последние выражения дают возможность найти приближенно коэффициент B_0; в самом деле, для пластин, свободно опертых четырьмя кромками, мы видели, что давление R'_y на короткую сторону контура (если $a > b$) получается близким к $(-p_x^0 b^2)$; допуская, что это имеет место и в нашем случае, и заменяя неизвестный нам коэффициент B_0 его приближенным значением B_1, мы найдем:

$$B_1 = 1 - \frac{b}{2a}, \quad \text{если} \quad a > b;$$

из таблицы, приведенной в конце этого параграфа, видно, что почти всегда это приближенное значение B_1 отличается от точного B_0 лишь на доли процента.

Покажем теперь, как вычисляются по найденным формулам стрелки прогиба и их производные, причем для примера возьмем пластину, для которой отношение $a:b=2$.

В таблице, приведенной в конце этого параграфа, для рассматриваемого случая даны следующие значения коэффициентов, входящих в формулу для ξ_0:

$$A = -0{,}55153\ ^*), \quad B_0 = 0{,}74883,$$

$10^4\ C_i =$	3424,0	1786,8	813,7	382	180	78	23	−8	−25	−34,
$10^4\ D_i =$	487,2	92,2	17,7	−3	−9	−11	−10	−9	−8	−7.

Так как эти величины получились как результат решения значительного числа довольно сложных уравнений, то, естественно, прежде чем пользоваться ими, необходимо проверить,

---

*) Это число получено по формуле (81); другое выражение для того же коэффициента (84b) дает $A = -0{,}55152$.

с какою погрешностью они удовлетворяют этим уравнениям, выражающим одно из условий на контуре ($\xi_0 = 0$); поэтому мы возьмем несколько точек на контуре и посмотрим, насколько будет близка к нулю стрелка прогиба, определяемая при посредстве найденных коэффициентов.

Так, например, для угловой точки ($y = 0$ и $z = 0$) мы будем иметь:

$$\xi_0 = 2(1-\mu^2)\frac{p_x^0 b^4}{Eh^3}\left[A + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{i^3}Y_i(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i^3}Z_i(0)\right],$$

причем

$$Y_i(0) = \operatorname{cth} i\omega_1 + \frac{i\omega_1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1}, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \pi\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\pi,$$

$$Z_i(0) = \operatorname{cth} i\omega + \frac{i\omega}{\operatorname{sh}^2 i\omega}, \quad \text{где} \quad \omega = \pi\frac{a}{b} = 2\pi$$

и с увеличением индекса i обе эти функции очень быстро приближаются к единице.

Находим последовательно обе наши суммы:

$$C_1Y_1(0) = 0{,}34240\times 1{,}38693 = 0{,}47488$$
$$\frac{1}{8}C_2Y_2(0) = 0{,}02233\times 1{,}0273 = 0{,}02294$$
$$\frac{1}{27}C_3Y_3(0) = 0{,}00301\times 1{,}002 = 0{,}00302$$
$$\frac{1}{64}C_4Y_4(0) = 0{,}00060\times 1 = 0{,}00060$$
$$\frac{1}{125}C_5Y_5(0) = 0{,}00014\times 1 = 0{,}00014$$
$$\frac{1}{216}C_6Y_6(0) = 0{,}00004\times 1 = 0{,}00004$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}C_iY_i(0) = 0{,}50162$$

$$D_1Z_1(0) = 0{,}04872\times 1 = 0{,}04872$$
$$\frac{1}{8}D_2Z_2(0) = 0{,}00115\times 1 = 0{,}00115$$
$$\frac{1}{27}D_3Z_3(0) = 0{,}00006\times 1 = 0{,}00006$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}D_iZ_i(0) = 0{,}04993$$

и следовательно,

$$A + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}C_iY_i(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}D_iZ_i(0) =$$
$$= -0{,}55153 + 0{,}50162 + 0{,}04993 = 0{,}00002;$$

подобным же образом для точки, лежащей посередине короткой стороны контура ($y=b$, $z=0$), выражение в скобках было бы равно

$$A+\frac{1}{4}B_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}C_iY_i(b)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}D_iZ_i(0)\cos i\pi=$$
$$=-0{,}55153+0{,}18721+0{,}41196-0{,}04764=0{,}00000;$$

для средины же длинной стороны контура ($y=0$, $z=a$) мы найдем:

$$A+4(1-B_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}C_iY_i(0)\cos i\pi+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}D_iZ_i(a)=$$
$$=-0{,}55153+1{,}00467-0{,}45448+0{,}00132=-0{,}00002;$$

таким образом, при исчислении стрелок ξ_0 по найденным коэффициентам сумму членов, стоящих в скобках, мы можем найти с погрешностью, не превышающей нескольких стотысячных.

Вычислим теперь наибольшую стрелку прогиба в центре пластины, определяемую выражением

$$\xi_{max}=2(1-\mu^2)\frac{p_x^0b^4}{Eh^3}\left[A+\frac{1}{4}B_0+4(1-B_0)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{i^3}Y_i(b)\cos i\pi+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i^3}Z_i(a)\cos i\pi\right];$$

находим стоящие в скобках суммы:

$$C_1Y_1(b)\cos\pi=-0{,}34240\times$$
$$\times 1{,}17876=-0{,}40361$$

$$\frac{1}{8}C_2Y_2(b)\cos 2\pi=+0{,}02233\times$$
$$\times 0{,}3596=+0{,}00803$$

$$\frac{1}{27}C_3Y_3(b)\cos 3\pi=-0{,}00301\times$$
$$\times 0{,}103=-0{,}00031$$

$$\frac{1}{64}C_4Y_4(b)\cos 4\pi=+0{,}00060\times$$
$$\times 0{,}03=+0{,}00002$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}C_iY_i(b)\cos i\pi=-0{,}39587$$

$$D_1Z_1(a)\cos\pi=-0{,}04872\times$$
$$\times 0{,}0272=-0{,}00132$$

$$\frac{1}{8}D_2Z_2(a)\cos 2\pi=+0{,}00115\times$$
$$\times 0{,}000=+0{,}00000$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}D_iZ_i(a)\cos i\pi=-0{,}00132,$$

так что выражение в скобках будет равно

$$A+\frac{1}{4}B_0+4(1-B_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}C_iY_i(b)\cos i\pi+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}D_iZ_i(a)\cos i\pi=$$

$$=-0{,}55153+0{,}18721+1{,}00467-0{,}39587-0{,}00132=$$

$$=0{,}24316,$$

и следовательно,

$$(\xi)_{\max}=0{,}48632\,(1-\mu^2)\,\frac{p_x^0 b^4}{Eh^3},$$

причем погрешность этого результата не превысит одну-две сотых доли процента.

Наибольшая стрелка прогиба для балки-полоски с пролетом $2b$, не поддерживаемой короткими сторонами контура (отношение $a:b$ велико), определилась бы выражением

$$(\xi)_{\max}=0{,}5\,\frac{p_x^0 b^4}{Eh^3},$$

которое отличается от найденного множителем $1-\mu^2$, происхождение которого выяснено выше, и величиной числового коэффициента; эта последняя разница невелика (меньше 3%) и должна неопределенно убывать с увеличением отношения $a:b$.

Найдем теперь наибольшие напряжения в рассматриваемой пластине. В найденное выше выражение для $(E\varepsilon_y)_{\max}$ в точке, лежащей посредине длинной стороны контура, входят суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{i}\left(\operatorname{cth} i\omega_1-\frac{i\omega_1}{\operatorname{sh}^2 i\omega_1}\right)\cos i\pi$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i}{i}\left(\frac{i\omega\operatorname{cth} i\omega+1}{\operatorname{sh} i\omega}\right);$$

вычислим первую из них почленно:

$$\begin{aligned}
i=1\ldots &-0{,}34240\times 0{,}79374 = -0{,}27178\\
i=2\ldots &+0{,}08934\times 0{,}9802 = +0{,}08757\\
i=3\ldots &-0{,}02713\times 0{,}9986 = -0{,}02709\\
i=4\ldots &+0{,}00955\times 1 = +0{,}00955\\
i=5\ldots &-0{,}00360\times 1 = -0{,}00360\\
i=6\ldots &+0{,}00130\times 1 = +0{,}00130\\
i=7\ldots &-0{,}00033\times 1 = -0{,}00033\\
i=8\ldots &-0{,}00010\times 1 = -0{,}00010\\
i=9\ldots &+0{,}00028\times 1 = +0{,}00028
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{9} = -0{,}20420$$

если к найденной сумме первых девяти членов мы прибавим последовательно 10-й, 11-й и 12-й члены (— 34, + 34, — 33), то получим:

$$-0{,}20454,\quad -0{,}20420,\quad -0{,}20453;$$

так как последующие члены будут медленно убывать, все время меняя знак, то среднее арифметическое из полученных значений будет весьма мало отличаться от истинной величины искомой суммы, которое, таким образом, можно приближенно принять равным —0,20437; что касается второй суммы, то для нахождения ее достаточно взять лишь один первый член (0,00132).

Подставляя найденные числовые значения в полученную выше формулу для наибольшего приведенного напряжения на контуре листа, мы будем иметь:

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = \frac{1}{4}(1-\mu^2)\,p_x^0\left(\frac{b}{h}\right)^2(8B_0+0{,}19909\pi^2) =$$

$$= 1{,}9888\,(1-\mu^2)\,p_x^0\left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

причем погрешность этого результата едва ли превысит одну десятую процента.

Суммы, входящие в выражение приведенного напряжения в центре листа, вычисляются значительно проще, и мы без труда получим:

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = -0{,}9603\,(1-\mu^2)\,p_x^0\left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

причем погрешность этого результата будет меньшей, чем предыдущего.

Аналогичные выражения для напряжений в балке-полоске будут отличаться лишь отсутствием множителя $1-\mu^2$ и числовыми коэффициентами, причем эти последние будут равны соответственно 2 и 1.

Найдем еще распределение реактивных давлений от опорного контура пластины.

Полное давление от длинной и короткой сторон контура определяется по формулам

$$R_z' = -2B_0 p_x^0 ab = -1{,}4977 p_x^0 ab,$$

$$R_y' = -2\,(1-B_0)\,p_x^0 ab = -0{,}5023 p_x^0 ab;$$

наибольшее давление при средине длинной стороны ($z = a$) определится выражением

$$(r_z')_{\max} = p_x^0 b\left(-B_0 + \frac{\pi^3}{24}\sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos i\pi\right),$$

причем входящую в него сумму мы определим непосредственным сложением последовательных членов ее; так, в нашем случае, взяв сумму первых десяти членов, мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{10} C_i \cos i\pi = -0{,}2211;$$

прибавив 11-й и 12-й члены, мы будем иметь соответственно:

$$-0{,}2173 \text{ и } -0{,}2213;$$

средние арифметические величины из этих трех сумм (—0,2192 и — 0,2193) могут отличаться от истинной суммы на доли

процента *); приняв их за истинные, мы получим:

$$(r'_z)_{\max} = p^0_x b\,(-0{,}7488 - 0{,}2833) = -1{,}032 p^0_x b;$$

подобным же образом мы нашли бы:

$$(r'_y)_{\max} = -0{,}929 p^0_x b.$$

Давления в других точках контура определяются таким же путем, причем для точек, лежащих близ средины сторон (z близко к a и y близко к b), входящие в выражение r'_z

---

*) Для вычисления этой суммы часто выгоднее найти сперва $\sum_{i=1}^{\infty} C_i Y_i(0) \cos\frac{i\pi z}{a}$ из уравнения (84а):

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i Y_i(0) \cos\frac{i\pi z}{a} =$$

$$= \frac{48(1-B_0)}{\pi^4}\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\cos\frac{i\pi z}{a} - \frac{4}{\omega}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_i i^3 \cos\frac{i\pi z}{a}}{\left(i^2\frac{b^2}{a^2}+j^2\right)^2},$$

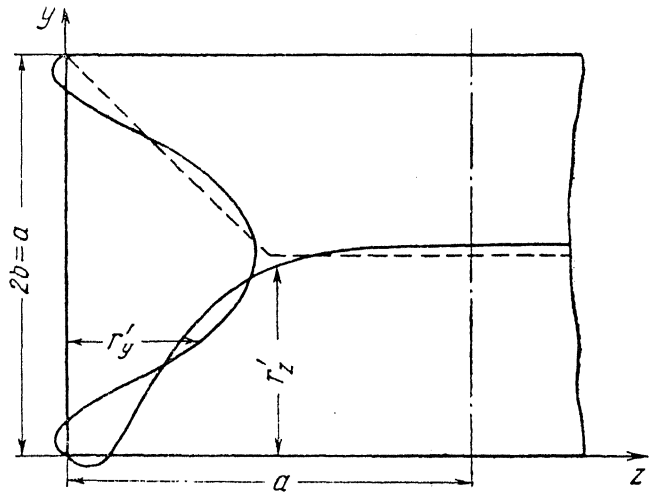
или

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i Y_i(0) \cos\frac{i\pi z}{a} = -\frac{48(1-B_0)}{\pi^4}\frac{a^2}{b^2}\lg\left(2\sin\frac{\pi z}{2a}\right) +$$

$$+\frac{4}{\pi}\frac{a^3}{b^3}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\lg\left(2\sin\frac{\pi z}{2a}\right) + 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{i\left(\frac{i^2b^2}{j^2a^2}+1\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{i\pi z}{a}}{i\left(\frac{i^2b^2}{j^2a^2}+1\right)^2}\right] D_j,$$

и r'_y ряды будут сходиться довольно быстро; для точек же, лежащих близ углов контура, сходимость их ухудшается, так что ошибка в сумме ряда при четырнадцати членах может достичь 10%; на чертеже 65 показан эпюр давлений на стороны прямоугольного контура при отношении $a : b = 2$,



Черт. 65.

причем давления отложены по внутренним нормалям, считая $p_x^0 = 1$; близ углов контура эти давления намечены приближенно.

В нижеследующих таблицах даны коэффициенты A, B_0, C_i и D_i для прямоугольных контуров с различными отношениями сторон $2a : 2b$, а также вычисленные при помощи этих

так как при суммировании по букве j можно ограничиться небольшим числом членов. Так, например, в нашем случае, взяв всего два члена, мы получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i Y_i(0) \cos i\pi = -0{,}3469$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos i\pi = -0{,}2192;$$

но при z, близком к 0 или к $2a$, этот прием делается неприменимым.

коэффициентов наибольшие стрелки прогиба, наибольшие приведенные напряжения и давления R'_z, R'_y, $(r'_z)_{\max}$ и $(r'_y)_{\max}$.

$\frac{a}{b}$	A	B_0	$B_1 - B_0$	C_1	C_2	C_3
2	—5515,3	7488,3	11,7	3424,0	1786,8	813,7
7/4	—4930,6	7125,1	17,8	3214,3	1427,9	587,3
3/2	—4410,9	6635,4	31,3	2900,4	1061,1	385,2
5/4	—4011,9	5951,4	48,6	2441,2	713,1	218,3
1	—3839,1	5000,0	0	1814,2	420,2	102,9
4/5	—4011,9	4048,6	—48,6	1236,7	248,1	52,9
2/3	—4410,9.	3364,6	—31,3	868,8	165,0	31,8
4/7	—4930,6	2874,9	—17,8	637,6	120,5	22,6
1/2	—5515,3	2511,7	—11,7	487,2	92,2	17,7

$\frac{a}{b}$	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{12}	C_{14}
2	382	180	78	23	— 8	—25	—34	—40	—40
7/4	250	101	28	— 8	—26	—35	—38	—40	—38
3/2	139	38	— 8	—26	—35	—39	—40	—37	—33
5/4	57	— 5	—29	—38	—40	—40	—38	—32	—27
1	9	—23	—33	—35	—34	—32	—29	—23	—19
4/5	—4	—20	—26	—26	—24	—22	—19	—15	—12
2/3	—6	—17	—20	—19	—18	—16	—14	—11	— 9
4/7	—5	—13	—14	—14	—13	—11	— 9	— 7	— 6
1/2	—3	— 9	—11	—10	— 9	— 8	— 7	— 5	— 4

Все коэффициенты в этой таблице умножены на 10^4; величины коэффициентов D_i здесь не приведены, так как они легко определяются из соотношения

$$D_i\left(\frac{a}{b}\right) = C_i\left(\frac{b}{a}\right).$$

Из таблицы [на стр. 169] видно, что при возрастании отношения $a : b$ наибольшая стрелка прогиба и напряжения $(E\varepsilon)_{\max}$ в рассматриваемой пластине весьма быстро подходят

к тем, которые получаются в балке-полоске или, что то же, в пластине, закрепленной по прямоугольному контуру с весьма большим отношением сторон; таким образом, если это отношение будет больше двух, то с допустимой в технических задачах погрешностью мы можем считать опорный контур пластины бесконечно длинным.

	$\frac{a}{b}=1$	$\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$	$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$	$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$	$\frac{a}{b}=2$	$\frac{a}{b}=\infty$	Множители
ξ_{max} в центре	0,243	0,350	0,422	0,464	0,486	0,500	$(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{b^4}{h^3}$
$E\xi_{max}$ на контуре	1,232	1,595	1,816	1,960	1,989	2,000	$(1-\mu^2)\,p_x^0\frac{b^2}{h^2}$
$E\epsilon_{max}$ в центре	0,423	0,650	0,809	0,932	0,960	1,000	$(1-\mu^2)\,p_x^0\frac{b^2}{h^2}$
$-R_z'$	1,000	1,190	1,327	1,425	1,498	2,000	$p_x^0\,ab$
$-R_y'$	1,000	1,012	1,009	1,006	1,005	—	$p_x^0\,b^2$
$-(r_z')_{max}$	0,88	1,00	1,03	1,04	1,03	1,00	$p_x^0\,b$
$-(r_y')_{max}$	0,88	0,92	0,93	0,93	0,93	—	$p_x^0\,b$

Сравнивая полученные числа с приведенными в таблице предыдущего параграфа (см. стр. 135) для пластины, свободно опертой на прямоугольный контур при той же нагрузке, мы заметим, что при одинаковом отношении сторон контура закрепленная опорными сечениями пластина значительно ближе подходит к балке-полоске, чем свободно опертая; так, например, при $a:b=3:2$ наибольшая стрелка для закрепленной пластины составляет более 84% от той, которую будет иметь соответствующая ей балка-полоска, в свободно же опертой пластине — менее 60%; точно так же и наибольшие напряжения в первой пластине будут составлять почти 91 и 81% от соответственных напряжений в балке-полоске, для опертой же пластины — всего 58%; это обстоятельство обрисовывается еще рельефнее, если отношение $a:b$ взять близким к двум.

Отсюда мы заключаем, что закрепление опорных сечений пластины в значительной мере уменьшает влияние коротких сторон опорного контура на обстоятельства изгиба среднего участка пластины, расположенного близ прямой линии, соединяющей средины длинных сторон этого контура.

§ 21. Жесткие пластины под действием нагрузок, лежащих в их средней плоскости. Случай равномерного распределения растягивающих и сжимающих нагрузок по кромкам контура

Перейдем теперь к вопросу об изгибе прямоугольной жесткой пластины, на которую кроме нормального к одной из ее поверхностей давления p_x действуют еще приложенные к торцевым опорным сечениям нагрузки p_y, p_z и t_x, направленные параллельно средней плоскости пластины. Дифференциальное уравнение, служащее для нахождения стрелки прогиба ξ_0 такой пластины, как указано во введении (см. стр. 110), напишется в таком виде:

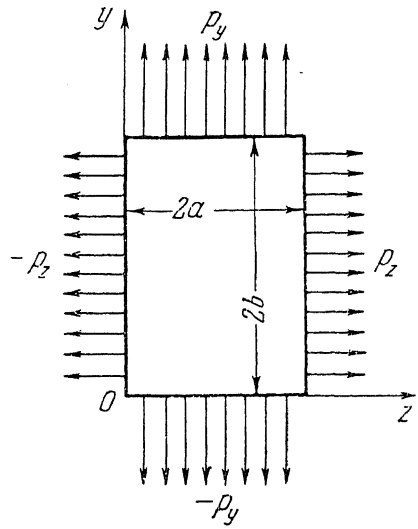
$$\Delta^2\xi_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left(p_x + hp_y\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} + hp_z\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2} - 2ht_x\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y\,\partial z}\right). \quad (5а)$$

Найдем решение этого уравнения для некоторых наиболее важных для наших целей случаев.

Рассмотрим случай пластины, растягиваемой нагрузками p_y и p_z, причем будем считать ее свободно опертой всеми четырьмя кромками на вполне жесткий прямоугольный контур, размеры которого, как и раньше, назовем через $2a$ и $2b$ [черт. 66]; давления p_x, p_y и p_z будем считать равномерно распределенными по соответствующим граням пластины, иначе говоря, не зависящими от координат x, y и z. Тогда, как мы видели, условия на контуре будут удовлетворены, если искомое решение для ξ_0 мы представим в виде двойной суммы

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a}, \quad (86)$$

где C_{ij} — не зависящая от координат функция положительных целых чисел i и j. Для определения этой постоянной мы подставим написанное решение в дифференциальное уравнение (5а), разложив предварительно член с множителем p_x^0 в правой части его по синусам кратных дуг $\frac{\pi y}{2b}$ и $\frac{\pi z}{2a}$, т. е. представив этот член в таком виде:



Черт. 66.

$$p_x^0 = p_x^0\left(\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi y}{2b}}{i}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi z}{2a}}{j}\right)=$$

$$=p_x^0\frac{16}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a}}{ij},$$

где i и j — нечетные числа; после такой подстановки мы получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}C_{ij}\left[\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]^2\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a}=$$

$$=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{p_x^0}{ij}\frac{16}{\pi^2}-C_{ij}hp_y\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2-\right.$$

$$\left.-C_{ij}hp_z\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a};$$

назвав теперь для сокращения письма

$$\frac{12(1-\mu^2)p_z}{E}\frac{a^2}{h^2}\text{ через }u^2\text{ и }\frac{12(1-\mu^2)p_y}{E}\frac{b^2}{h^2}\text{ через }v^2 \qquad (87)$$

и уравнивая друг другу члены правой и левой части написанного уравнения с одинаковыми индексами i и j, мы

будем иметь при нечетных значениях чисел i и j:

$$C_{ij} = \frac{3072\,(1-\mu^2)\,p_x^0}{\pi^6 E h^3} : \left[\left(\frac{i^2}{b^2}+\frac{j^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4v^2}{\pi^2}\frac{i^2}{b^4} + \frac{4u^2}{\pi^2}\frac{j^2}{a^4}\right] ji; \quad (88)$$

если же один или оба индекса будут четными, то коэффициент C обращается в нуль.

Таким образом, мы нашли функцию ξ_0, удовлетворяющую условиям на контуре и уравнению (5а), и, следовательно, можем найти стрелку прогиба для любой точки пластины.

Напряжения мы легко определим по общим формулам, полученным в § 19; так, например,

$$\sigma_z = p_z - \frac{Ex}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}\right) =$$

$$= p_z + \frac{Ex}{1-\mu^2}\frac{\pi^2}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j^2}{a^2}+\mu\frac{i^2}{b^2}\right)\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a};$$

наибольшее приведенное напряжение в центре пластины ($y=b$, $z=a$) определится выражениями

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = \sigma_z - \mu\sigma_y = p_z - \mu p_y \pm \frac{Eh}{a^2}\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} j^2 \sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2}$$

и

$$(E\varepsilon_y)_{\max} = \sigma_y - \mu\sigma_z = p_y - \mu p_z \pm \frac{Eh}{b^2}\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} i^2 \sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2},$$

причем под i и j нужно подразумевать только нечетные числа, а знак последнего члена брать такой же, как и знак алгебраической суммы первых двух членов.

Нетрудно видеть, что если нагрузки p_y и p_z, действующие в плоскости пластины, будут растягивающими ($p_y > 0$ и $p_z > 0$), то числа u и v будут действительными и знаменатели выражения C_{ij} станут неопределенно возрастать с увеличением этих нагрузок; при этом постоянные C_{ij}, а следовательно, и стрелки ξ_0 будут убывать, иначе говоря, растягивающие нагрузки выпрямляют пластину, изогнутую давлением p_x; точно так же и наибольшие приведенные напряжения

с уменьшением постоянных C_{ij} будут неопределенно приближаться к пределам $p_z - \mu p_y$ и $p_y - \mu p_z$, не зависящим от величины давления p_x^0.

Если нагрузки p_z и p_y обратятся в нуль ($u = v = 0$), то наше выражение для стрелки совпадет с найденною в § 19 формулой (79а).

Обратно, если одна из нагрузок p_y или p_z будет сжимающей, то отвечающий ей аргумент u или v сделается мнимым, соответственный же член в знаменателе выражения для C_{ij} — отрицательным; при этом очевидно, что, повышая сжимающее давление, мы можем подобрать его таким образом, чтобы знаменатель выражения C_{ij} при каких-нибудь частных значениях чисел i и j был сколь угодно мал, а следовательно, отвечающий ему коэффициент C_{ij}, а также стрелки прогиба и напряжения σ_z и σ_y сделались бы сколь угодно большими; ниже мы подробно остановимся на этом случае, пока же будем считать, что давления p_y и p_z таковы, что все знаменатели в выражениях C_{ij} остаются положительными.

Все полученные сейчас выводы в полной мере совпадают с теми, которые мы имели уже для балки, находящейся под действием изгибающей и растягивающей или сжимающей нагрузки.

Вычисление двойных сумм, входящих в выражения для стрелок и напряжений, не представляет особых затруднений, в особенности, если мы ограничиваемся небольшою точностью. Так, например, для квадратной пластины ($a = b$), положив $2a = 100\,h$, $p_x^0 = 0{,}5\ am$ и $p_y = p_z = 1000\ am$, мы найдем:

$$u^2 = v^2 = \frac{12(1-\mu^2)}{E} p_z \left(\frac{a}{h}\right)^3 = \frac{12 \cdot 0{,}91 \cdot 1000 \cdot 50^2}{2{,}2 \cdot 10^6} = 12{,}41,$$

и следовательно,

$$C_{ij} = \frac{3072(1-\mu^2) p_x^0 a^4}{\pi^6 E h^3} : \left[(i^2+j^2)^2 + \frac{4u^2}{\pi^2} i^2 + \frac{4v^2}{\pi^2} j^2\right] ij$$

или

$$C_{ij} = 4{,}130h : [(i^2+j^2)(i^2+j^2+5{,}03)\,ij],$$

откуда и найдем:

$$C_{11} = 0{,}2937h; \quad C_{13} = C_{31} = 0{,}0092h;$$
$$C_{33} = 0{,}0011h; \quad C_{15} = C_{51} = 0{,}0010h.$$

Таким образом, будем иметь:

$$(\xi_0)_{\max} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2} = 0{,}278h,$$

причем для получения этого результата, верного до десятых долей процента, достаточно взять четыре члена суммы *).

Для вычисления с такой же точностью наибольшего напряжения мы должны взять уже около десяти наибольших по величине членов ряда и найдем:

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = (E\varepsilon_y)_{\max} = p_z(1-\mu) + \frac{Eh}{a^2}\frac{\pi^2}{8}(0{,}232h) =$$
$$= 700 + 252 = 952\ am.$$

Если бы мы положили $p_y = 0$ и $p_z = 1000\ am$, то подобным же способом нашли бы

$$(\xi_0)_{\max} = 0{,}438h \text{ и } (E\varepsilon_z)_{\max} = 1000 + 449 = 1449\ am$$

и, наконец, при отсутствии сил, растягивающих пластину, положив в наших формулах $u = v = 0$, мы получим:

$$(\xi_0)_{\max} = 1{,}008h \text{ и } (E\varepsilon_y)_{\max} = (E\varepsilon_z)_{\max} = 1106\ am.$$

Эти числа наглядно показывают, как значительно убывают стрелки прогиба ξ_0, а также и суммы, входящие в выражения для напряжений, при возрастании растягивающих пластину усилий.

Для случая давлений, сжимающих пластину в ее плоскости (p_y, или p_z, или оба эти давления меньше нуля), нахождение стрелок ξ_0 и напряжений делается таким же образом, конечно, если соблюдено условие, что все знаменатели в выражении для C_{ij} остаются положительными и отличными от нуля. Так, например, положив для пластины того же размера, что и в рассмотренном выше случае,

$$p_x^0 = 0{,}5\ am;\quad p_y = p_z = -200\ am \text{ и } \frac{4u^2}{\pi^2} = \frac{4v^2}{\pi^2} = -1{,}006,$$

мы найдем:

$$(\xi_0)_{\max} = 2{,}05h \text{ и } (E\varepsilon_z)_{\max} = (E\varepsilon_y)_{\max} =$$
$$= -140 - 2130 = -2270\ am;$$

*) Члены с C_{13} и C_{15} при этом нужно удвоить.

таким образом, и стрелки прогиба пластины и напряжения в ней весьма быстро возрастают с увеличением сжимающих усилий.

Рассмотрим теперь частный случай изгиба пластины под указанными нагрузками, когда один из размеров прямоугольника, представляющего опорный контур, будет весьма велик по сравнению с другим. Положим, например, что отношение $a : b$ будет весьма малым; тогда выражение для C_{ij} примет такой вид:

$$C_{ij} = \frac{3072\,(1-\mu^2)\,a^4 p_x^0}{\pi^6 E h^3} : \left[j^4 + \frac{4u^2}{\pi^2} j^2 \right] ij;$$

подставляя это выражение для постоянной в общую формулу (86) для стрелки прогиба, мы найдем:

$$\xi_0 = \frac{3072\,(1-\mu^2)\,a^4 p_x^0}{\pi^6 E h^3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{2b} \sin \frac{j\pi z}{2a}}{ij^3 \left(j^2 + \frac{4u^2}{\pi^2} \right)},$$

где i и j — нечетные числа.

Будем рассматривать теперь только те части пластины, которые лежат близ прямой, соединяющей средины длинных сторон контура, т. е. сделаем y близким к b; тогда, независимо от величины ординаты y, мы будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi y}{2b} = \frac{\pi}{4},$$

и потому

$$\xi_0 = \frac{768\,(1-\mu^2)\,a^4 p_x^0}{\pi^5 E h^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi z}{2a}}{j^3 \left(j^2 + \frac{4u^2}{\pi^2} \right)}; \qquad (89)$$

эта формула почти вполне совпадает с выражением стрелки прогиба для балки-полоски с пролетом $2a$, свободно лежащей на двух опорах и находящейся под действием равномерно распределенной изгибающей нагрузки p_x^0 и растягивающей по

оси силы hp_z *); несовпадение сводится к присутствию близкого к единице множителя $1-\mu^2$ в последней формуле, о происхождении которого мы уже говорили в предыдущих параграфах.

Сумма, входящая в найденное выражение для ξ_0, может быть представлена в таком виде:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{j\pi z}{2a}}{j^3\left(j^2+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)} = \frac{\pi^5}{64u^2}\left[\frac{z(2a-z)}{2a^2}+\frac{\operatorname{ch} u\left(1-\frac{z}{a}\right)}{u^2\operatorname{ch} u}-\frac{1}{u^2}\right]^{**},$$

и следовательно, мы получим:

$$\xi_0 = \frac{12(1-\mu^2)a^4p_x^0}{Eh^3u^2}\left[\frac{z(2a-z)}{2a^2}+\frac{\operatorname{ch} u\left(1-\frac{z}{a}\right)}{u^2\operatorname{ch} u}-\frac{1}{u^2}\right]; \quad (89a)$$

это выражение, представляющее стрелку ξ_0 в конечном виде, удобнее для вычисления функции ξ_0 и, в особенности, ее производных по координате z, чем предыдущее выражение.

Наибольшую стрелку прогиба $(\xi_0)_{\max}$ мы получим, положив в найденном выражении $z=a$:

$$(\xi_0)_{\max} = \frac{12(1-\mu^2)a^4p_x^0}{Eh^3u^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{u^2\operatorname{ch} u}-\frac{1}{u^2}\right);$$

если мы назовем зависящее только от аргумента u выражение

$$\frac{24}{5u^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{u^2\operatorname{ch} u}-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1536}{5\pi^5}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi}{2}}{j^3\left(j^2+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)}$$

через $f_0(u)$, то будем иметь:

$$(\xi_0)_{\max} = \frac{5}{32}\frac{(1-\mu^2)p_x^0(2a)^4}{Eh^3}f_0(u); \quad (89b)$$

---

*) См. формулу для ξ_1 на стр. 232 [1-й части Курса, изд. 1912 г.], в которой нужно отбросить два первых члена, выражающих влияние кривизны оси балки, а также положить $Q=2ap_x^0$ и $B=l^3:EI=96a^3:Eh^3$ [19].

**) Для получения этой формулы нужно третий основной ряд на стр. 184 [1-й части Курса] проинтегрировать четыре раза по углу φ, положив при этом $\varphi=\frac{\pi z}{2a}$ и $a_1^2=-\frac{4u^2}{\pi^2}$ [20].

легко видеть, что при отсутствии осевой нагрузки $p_z(u=0)$ множитель $f_0(u)$ обращается в единицу, и последняя формула дает наибольшую стрелку прогиба для балки-полоски; при растягивающей осевой нагрузке $(u^2>0)$ множитель $f_0(u)$ будет меньше единицы, неопределенно убывая с увеличением аргумента; при сжимающей же нагрузке аргумент делается мнимым и, положив $u^2=-u_1^2$, мы получим:

$$f_0(u_1)=\frac{24}{5u_1^2}\left(\frac{1}{u_1^2\cos u_1}-\frac{1}{u_1^2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1536}{5\pi^5}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi}{2}}{j^3\left(j^2-\frac{4u^2}{\pi^2}\right)};$$

эта функция при изменении u_1 от нуля до $^1/_2\,\pi$ будет больше единицы, что подтверждает сделанный выше вывод о возрастании стрелок прогиба от сжимающих нагрузок; если же мы будем приближать аргумент к значению $^1/_2\,\pi$, то знаменатели $\cos u_1$ и $\left(1-\frac{4u_1^2}{\pi^2}\right)$ в наших выражениях будут подходить к нулю, а следовательно, стрелка $(\xi_0)_{\max}$ будет неопределенно возрастать. По аналогии с соответственным случаем для балок (см. стр. 241 [1-й части Курса, изд. 1912 г.]) [21] мы должны заключить, что сжимающая нагрузка p_z, соответствующая найденному пределу аргумента, является той границей, при которой напряжения и деформации в нашей пластине делаются чрезвычайно большими, и потому наши формулы теряют смысл; это предельное сжимающее давление мы будем называть эйлеровым напряжением σ_e для пластины, причем величина его, как и для балок, не будет зависеть ни от нагрузки p_x^0, ни от кривизны средней плоскости пластины, с которой мы не считались в наших выводах.

Величина эйлерова напряжения для рассматриваемого случая найдется из соотношения (87), если в нем положить $u_1=\frac{1}{2}\,\pi$:

$$\sigma_e=\frac{\pi^2E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2, \qquad (90)$$

и отличается от соответственной формулы (43), найденной для балок, только делителем $1-\mu^2$. Если мы возьмем для характеризующих материал величин E и μ их среднее значение для судостроительной стали ($E=2\,200\,000\,am$, $\mu=0{,}3$),

то последняя формула примет такой вид:

$$\sigma_e \sim 2 \cdot 10^6 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 \text{ в атмосферах} \qquad (90a)$$

и даст возможность с чрезвычайной простотой находить эйлерово напряжение для пластины, опертой на весьма длинный прямоугольный контур и сжимаемой параллельно короткой стороне $2a$.

Наибольшее напряжение в рассматриваемой пластине мы найдем по формуле

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = p_z - \mu p_y \pm \frac{Eh}{a^2}\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} j^2 \sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2},$$

откуда после подстановки выражения для C_{ij} получим:

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = p_z - \mu p_y \pm \frac{3}{4}(1-\mu^2)\, p_x^0 \left(\frac{2a}{h}\right)^2 \varphi_0(u), \qquad (91)$$

причем зависящая только от аргумента u функция $\varphi_0(u)$ определится соотношением

$$\varphi_0(u) = \frac{2}{u^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u}\right) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{j\pi}{2}}{j\left(j^2 + \frac{4u^2}{\pi^2}\right)};$$

эта функция подобно предыдущей подобрана таким образом, что при отсутствии нагрузки p_z ($u = 0$) она обращается в единицу; легко также видеть, что при растягивающей нагрузке ($u^2 > 0$) эта функция будет меньше единицы, неопределенно убывая с возрастанием аргумента, при сжимающей же нагрузке — будет больше единицы, обращаясь в бесконечность при соответствующем эйлерову напряжению значении аргумента $u = 1/2\,\pi$. В конце § 23 приведена таблица функций $f_0(u)$ и $\varphi_0(u)$ для различных значений аргумента u, которая значительно облегчает нахождение наибольшей стрелки и наибольшего напряжения для рассматриваемой пластины.

Положим теперь, что приложенная к более длинной стороне контура растягивающая нагрузка p_z (при $b > a$) будет

неопределенно возрастать, соответственно чему будет увеличиваться и аргумент u; тогда, если нагрузка p_y невелика, знаменатель выражения (88) для C_{ij} может быть представлен в таком виде:

$$\left(\frac{j^4}{a^4}+\frac{4u^2}{\pi^2}\,\frac{j^2}{a^4}\right) ij,$$

и следовательно, для участка пластины, лежащего близ линии, соединяющей средины длинных сторон контура (y близко к b), мы найдем:

$$\xi_0=\frac{768}{\pi^5}\,\frac{(1-\mu^2)\,p_x^0}{E}\,\frac{a^4}{h^3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi z}{a}}{j^3\left(j^2+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)};$$

легко видеть, что это приближенное выражение совпадает с найденным выше выражением (89) для случая пластины, опертой на весьма длинный контур, откуда мы можем заключить, что повышение растягивающей нагрузки p_z, действующей параллельно коротким сторонам опорного контура, ослабляет влияние этих сторон на обстоятельства изгиба пластины и тем значительнее, чем больше аргумент u.

Чтобы показать, насколько заметно это ослабление, возьмем проделанный выше числовой пример ($2a:h=100$, $p_x^0=0{,}5\ am$, $p_y=0$ и $p_z=1000\ am$) и, положив $b=2a$, мы найдем по нашим формулам

$$(\xi_0)_{\max}=0{,}498h \quad \text{и} \quad (E\varepsilon_z)_{\max}=1473\ am;$$

для контура же бесконечно длинного мы нашли бы *)

$$(\xi_0)_{\max}=0{,}530h \quad \text{и} \quad (E\varepsilon_z)_{\max}=1517\ am;$$

разница, как видно, получается незначительная (6 и $3^0/_0$).

Эта разница будет уменьшаться с возрастанием аргумента u и увеличением отношения $b:a$; но даже для квадратного контура найденные выше выражения

$$(\xi_0)_{\max}=0{,}438h \quad \text{и} \quad (E\varepsilon_z)_{\max}=1449\ am$$

еще не так далеки от тех, которые соответствуют бесконечно длинному контуру (разница в $17^1/_2$ и $4^1/_2{}^0/_0$).

*) Величины множителей $f_0(u)$ и $\varphi_0(u)$ при нашем значении аргумента $u=3{,}52$ можно найти интерполяцией по таблицам § 23.

При отсутствии же растягивающей нагрузки p_z разница в стрелках прогиба и в наибольших напряжениях для пластины с отношением $b:a=2$ и бесконечно длинной поднимается до $23^0/_0$, а для квадратного контура доходит до $70^0/_0$, как это видно из таблицы, приведенной в конце § 19 (см. стр. 135).

Эти числа показывают, как резко падает влияние коротких сторон опорного контура при растягивающей нагрузке p_z (при $b>a$) даже при не особенно высоких значениях аргумента u (в нашем примере $u=3{,}52$); таким же путем можно показать, что сжимающая нагрузка p_z усиливает влияние этих сторон.

Перейдем теперь к нахождению эйлеровых напряжений для рассматриваемого случая пластины, свободно опертой на прямоугольный контур при конечном отношении его сторон $2a:2b$.

Мы нашли уже, что стрелка прогиба ξ_0 для такой пластины определяется выражением

$$\xi_0=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}C_{ij}\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a}, \tag{86}$$

где i и j для случая равномерно распределенной нагрузки p_x будут нечетными числами, в случае же всякого другого распределения нагрузки эти числа могут быть и четными; постоянная C_{ij} определяется соотношением

$$C_{ij}=\frac{3072\,(1-\mu^2)\,p_x^0}{\pi^6 Eh^3}:\left[\left(\frac{i^2}{b^2}+\frac{j^2}{a^2}\right)^2+\frac{4v^2}{\pi^2}\,\frac{i^2}{b^4}+\frac{4u^2}{\pi^2}\,\frac{j^2}{a^4}\right]ij, \tag{88}$$

если p_x^0 распределено равномерно, при другой же нагрузке числители выражений для C_{ij} будут зависеть от способа этого распределения, но знаменатели останутся без изменения, только под буквами i и j нужно будет разуметь всевозможные целые числа.

Положим теперь, что одна из нагрузок, например p_z, будет отрицательной, т. е. сжимающей; тогда при надлежащем выборе ее мы можем любой из знаменателей выражения для C_{ij} обратить в нуль; при этом, конечно, как стрелки прогиба ξ_0,

так и напряжения в пластине, выражающиеся через производные ξ_0 по координатам y и z, неопределенно возрастут и наши формулы сделаются неприменимыми.

Но каждому из знаменателей выражения для C_{ij} будет соответствовать одно вполне определенное значение p_z, обращающее его в нуль *), и для нас, конечно, важно найти наименьшее из этих значений; попробуем получить его сперва для простейшего случая, когда давление p_y будет нулем ($v = 0$).

Тогда, заменяя в знаменателе аргумент u через сжимающее давление p_z при помощи соотношения (88), мы найдем:

$$-p_z = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2\left(\frac{i^2}{j}\frac{a^2}{b^2}+j\right)^2; \qquad (92)$$

множители, стоящие в правой части перед большими скобками, как легко видеть из соотношения (90), выражают эйлерово напряжение для пластины, опертой на прямоугольный контур с весьма большим отношением сторон $2b:2a$ и сжимаемой нагрузкой, параллельной короткой стороне; назвав это напряжение через σ_e^0, мы можем написать:

$$-p_z = \sigma_e^0\left(\frac{i^2a^2}{jb^2}+j\right)^2; \qquad (92a)$$

будем теперь искать, при каких именно значениях i и j нагрузка p_z будет наименьшей по абсолютной величине.

Так как множитель i входит лишь в числитель правой части, то p_z будет расти с увеличением i, и потому мы должны взять для i наименьшее из возможных его значений, именно $i = 1$. По отношению же к множителю j мы можем утверждать, что если отношение $a:b$ мало и, следовательно, первый член в скобках будет мал по сравнению со вторым, то мы должны и для j взять его наименьшее значение, т. е. единицу.

Но если отношение сторон контура $a:b$ будет значительным, то искомое значение j может отличаться от единицы, и для нахождения его мы уравняем нулю производную p_z по изменяемости j и получим:

$$-\frac{dp_z}{dj} = 2\sigma_e^0\left(j+\frac{a^2}{b^2j}\right)\left(1-\frac{a^2}{b^2j^2}\right) = 0,$$

*) Так как p_z входит в эти знаменатели линейно.

откуда и находим: $j=\frac{a}{b}$; таким образом, j должен быть целым числом, граничащим с величиною отношения $a:b$, так что, например, при $a:b=2{,}4$ мы должны сделать $j=2$ или $j=3$. Чтобы выяснить, которое из этих двух значений мы должны взять, положим, что отношение $a:b$ лежит между двумя целыми числами n и $n+1$; тогда для некоторых значений отношения $a:b$, лежащих между этими границами, мы должны положить $j=n$, для других же значений этого отношения нужно сделать $j=n+1$; очевидно, что есть и такое значение для отношения $a:b$, при котором p_z будет одинаково, какое бы из этих двух значений для j мы ни взяли. Величина такого отношения $a:b$ определится из условия

$$\left(\frac{a^2}{b^2 n}+n\right)^2=\left[\frac{a^2}{b^2(n+1)}+n+1\right]^2,$$

откуда найдем:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{n(n+1)},$$

и следовательно, если отношение $a:b$, заключающееся между целыми числами n и $n+1$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{a}{b}\leqslant\sqrt{n(n+1)},$$

то мы должны положить $j=n$, если же это неравенство имеет обратный знак, то нужно сделать $j=n+1$.

Назовем теперь напряжение, равное $\frac{a^2}{b^2}\sigma_e^0=\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2b}\right)^2$, через σ_e', и положим в уравнении (92а) последовательно $j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$; тогда будем иметь:

если $0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\sqrt{2}$, то $j=1$ и $-p_z=\sigma_e^0\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2=\sigma_e'\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2$,

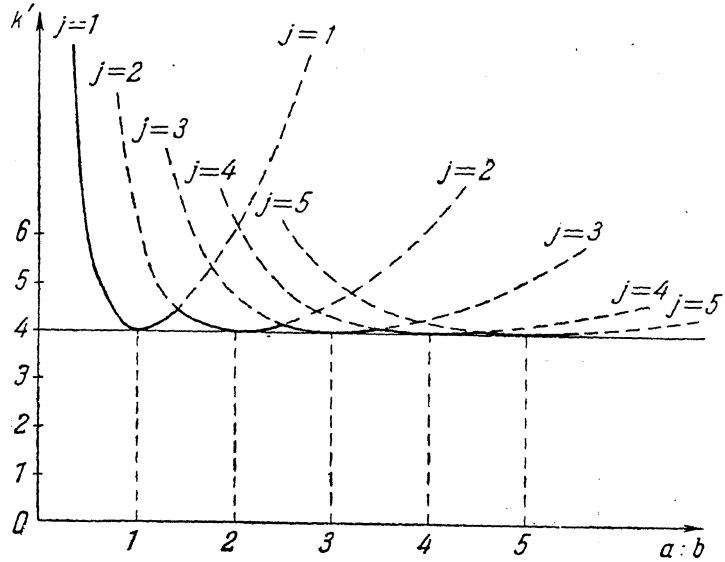
если $\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\sqrt{6}$, то $j=2$ и $-p_z=\sigma_e^0\left(2+\frac{a^2}{2b^2}\right)^2=\sigma_e'\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\right)^2$,

если $\sqrt{6}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\sqrt{12}$, то $j=3$ и $-p_z=\sigma_e^0\left(3+\frac{a^2}{3b^2}\right)^2=\sigma_e'\left(\frac{3b}{a}+\frac{a}{3b}\right)^2$,

. . . . . .

Исследуя величину множителя при σ_e', зависящего лишь от вели-

чины отношения $a : b$, нетрудно видеть, что он неопределенно возрастает при уменьшении этого отношения, когда же величина $a : b$ становится целым числом, множитель делается равным четырем; если отношение $a : b$ будет больше единицы, но не будет целым числом, то множитель сделается больше четырех, причем пограничные максимумы его будут при $\frac{a}{b} = \sqrt{j(j+1)}$ и величина их определится выражением $(2j+1)^2 : j(j+1)$,



Черт. 67.

которое всегда будет заключаться между 4 и 4,5; таким образом, при $a > b$ наш множитель, который мы назовем через k', будет меняться в очень тесных границах, неопределенно приближаясь с увеличением отношения $a : b$ к своему меньшему пределу.

На чертеже 67 множитель k' изображен графически сплошною линией, состоящей из ряда дуг различных кривых, соответствующих разным значениям числа j.

Таким образом, если наша пластина сжимается вдоль длинной стороны контура, то критическую нагрузку проще всего определить по формуле

$$-p_z = k'\sigma'_e, \text{ причем } k' = \left(\frac{jb}{a} + \frac{a}{jb}\right)^2 \approx 4, \text{ если } a > b;$$

если же сжимающая нагрузка действует параллельно короткой стороне контура, то проще применить формулу (92а), сделав в ней $i=j=1$, так что

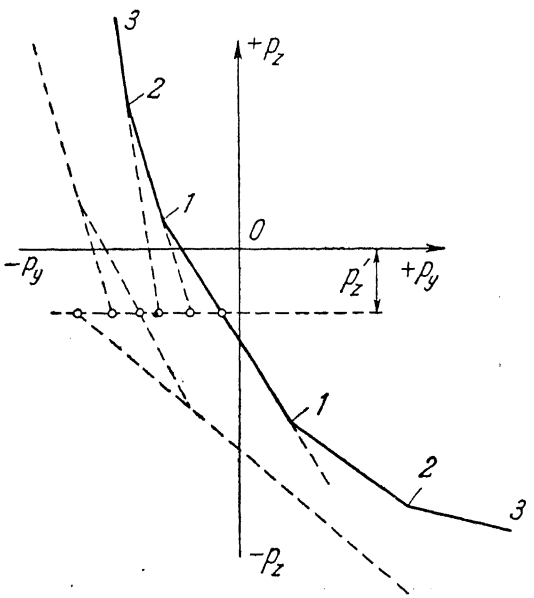
$$p_z' = -\sigma_e^0\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2, \text{ где } 0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\sqrt{2}.$$

Теперь мы вернемся к более сложному случаю, когда на пластину будут действовать две растягивающие или сжимающие нагрузки p_y и p_z [22]. Для получения критических значений их мы уравняем нулю который-нибудь из знаменателей выражения (88) для C_{ij}, положив

$$-j^2p_z-\frac{a^2}{b^2}i^2p_y=$$

$$=\sigma_e^0\left(\frac{a^2}{b^2}i^2+j^2\right)^2, \quad (93)$$

и будем искать такие значения целых чисел i и j, которые удовлетворят этому уравнению при наименьшей величине нагрузок p_y и p_z.



Черт. 68.

Если мы будем откладывать величины этих нагрузок по двум прямоугольным осям координат, то геометрическое место, выражаемое написанным уравнением, представит собою группу прямых линий, причем каждому частному значению целых чисел i и j будет соответствовать своя прямая; из написанного уравнения нетрудно видеть, что все эти линии пересекают координатные оси лишь при отрицательных значениях p_y и p_z и имеют отрицательный угловой коэффициент (черт. 68). Из всех этих линий мы выделим соответственные числам

$$i=1 \text{ и } j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$
$$j=1 \text{ и } i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

которые во взаимном пересечении составят ломаную линию ...*321123* ..., охватывающую квадрант между положительными направлениями осей; все же остальные линии будут расположены левее и ниже указанной ломаной и не пересекутся с нею.

Если мы дадим какое-нибудь частное значение ординаты p'_z, все равно большее или меньшее нуля, то можем получить бесчисленное множество значений для p_y, которые удовлетворили бы наше уравнение (93); найти эти величины p_y графически можно очень просто, проведя на чертеже горизонталь, соответствующую заданному значению p'_z, которая в точках пересечения с нашими линиями и даст искомые значения p_y; наименьшую из этих величин p'_y мы, очевидно, получим в пересечении нашей горизонтали с ломаной ... *321123* ..., так что совокупность нагрузок p'_z и p'_y и будет критической для нашей пластины.

Таким образом, наша задача сведется к нахождению тех границ p'_y и p'_z, в которых им будет соответствовать отрезок ломаной линии, получающейся при $i = 1$ и $j = n$ или $i = n$ и $j = 1$, где n — целое число.

Напишем уравнение прямой, отвечающей значениям $i = 1$ и $j = n$:

$$-n^2 p_z - \frac{a^2}{b^2} p_y = \sigma_e^0 \left(\frac{a^2}{b^2} + n^2\right)^2;$$

уравнение прямой, совпадающей с соседним отрезком рассматриваемой ломаной линии (при $i = 1$ и $j = n + 1$), будет:

$$-(n+1)^2 p_z - \frac{a^2}{b^2} p_y = \sigma_e^0 \left[\frac{a^2}{b^2} + (n+1)^2\right]^2;$$

координаты вершины угла, образуемого пересечением этих линий, найдутся, решая написанные уравнения относительно p_y и p_z; таким образом, найдем:

$$p_y = \sigma_e^0 \left[n^2 (n+1)^2 \frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2}\right];$$

$$p_z = -\sigma_e^0 \left[n^2 + (n+1)^2 + 2 \frac{a^2}{b^2}\right];$$

совершенно так же найдем и координаты вершин другого угла, образованного пересечением рассматриваемого отрезка

($i=1$ и $j=n$) с другим соседним отрезком $i=1$ и $j=n-1$,

$$p_y=\sigma_e^0\left[(n-1)^2n^2\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\right],$$

$$p_z=-\sigma_e^0\left[(n-1)^2+n^2+2\frac{a^2}{b^2}\right];$$

таким образом, если заданная нагрузка p_z' удовлетворяет неравенству

$$-\sigma_e^0\left[2n^2+2n+1+2\frac{a^2}{b^2}\right]<p_z'<-\sigma_e^0\left[2n^2-2n+1+2\frac{a^2}{b^2}\right],$$

то соответственная ей нагрузка p_y' будет заключена в пределах

$$\sigma_e^0\left[n^2(n+1)^2\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\right]\text{ и }\sigma_e^0\left[n^2(n-1)^2\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\right]$$

и определится из уравнения (93)

$$p_y'=-\frac{n^2b^2}{a^2}p_z'-\sigma_e^0\left(\frac{a}{b}+n^2\frac{b}{a}\right)^2;$$

заметим, что это решение может иметь место лишь при $n\geqslant 2$ и, следовательно, заданная нагрузка p_z' должна удовлетворять условию

$$p_z'<-\sigma_e^0\left(5+2\frac{a^2}{b^2}\right). \qquad (*)$$

Исследовав таким же приемом отрезок прямой, соответственный числам $i=n$ и $j=1$, мы найдем, что если заданная нагрузка p_z' удовлетворяет условию

$$p_z'>\sigma_e^0\left(4\frac{a^4}{b^4}-1\right) \qquad (*)$$

и лежит в пределах

$$\sigma_e^0\left[n^2(n+1)^2\frac{a^4}{b^4}-1\right]\text{ и }\sigma_e^0\left[n^2(n-1)^2\frac{a^4}{b^4}-1\right],$$

то отвечающая ей нагрузка p_y' должна удовлетворять неравенству

$$-\sigma_e^0\left[(2n^2+2n+1)\frac{a^2}{b^2}+2\right]<p_y'<$$

$$<-\sigma_e^0\left[(2n^2-2n+1)\frac{a^2}{b^2}+2\right]$$

и определяется выражением

$$p_y = -\frac{b^2}{n^2a^2}\,p'_z - \sigma_e^0\left(\frac{na}{b}+\frac{b}{an}\right)^2.$$

Наконец, если заданная нагрузка p'_z не удовлетворяет ни одному из указанных неравенств (*), то при разыскании p'_y мы должны в уравнении (93) положить $i=j=1$.

Пример 35. Для свободно опертой всеми четырьмя кромками пластины при отношении $b:a=2$ даны следующие нагрузки p_z:

$$p'_z = -7\sigma_e^0,\quad p''_z = -\sigma_e^0 \text{ и } p'''_z = +11\sigma_e^0;$$

найдем такие величины для p_y, при которых нагрузка на пластину делается критической.

Два неравенства (*) в нашем случае дадут:

$$\left.\begin{aligned} p_z &< -\sigma_e^0\left(5+2\frac{a^2}{b^2}\right) = -5{,}5\sigma_e^0,\\ p_z &> \sigma_e^0\left(4\frac{a^4}{b^4}-1\right) = -0{,}75\sigma_e^0; \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

первая из заданных нагрузок p'_z удовлетворяет первому из этих неравенств, и потому мы должны определять целое число n из условия

$$-\sigma_e^0[2n^2+2n+1{,}5] < -7\sigma_e^0 < -\sigma_e^0[2n^2-2n+1{,}5],$$

откуда и получим $n=2$; теперь найдем и p'_y из уравнения

$$p'_y = -\frac{n^2b^2}{a^2}\,p'_z - \sigma_e^0\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 =$$

$$= 16\cdot 7\sigma_e^0 - 8{,}5^2\sigma_e^0 = 39{,}75\sigma_e^0.$$

Вторая нагрузка $p''_z = -\sigma_e^0$ не удовлетворяет ни одному из неравенств (*); поэтому, положив $i=j=1$, мы получим:

$$p'_y = -\frac{b^2}{a^2}p''_z - \sigma_e^0\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 = 4\sigma_e^0 - 2{,}5^2\sigma_e^0 = -2{,}25\sigma_e^0.$$

Наконец, третья нагрузка $p'''_z = 11\sigma_e^0$ удовлетворяет второму неравенству (*) и потому мы находим n из неравенства

$$\sigma_e^0\left[\frac{n^2(n+1)^2}{16}-1\right] > 11\sigma_e^0 > \sigma_e^0\left[\frac{n^2(n-1)^2}{16}-1\right],$$

откуда получим $n = 4$, и потому

$$p'''_y = -\frac{b^2}{n^2a^2}p'''_z - \sigma^0_e\left(\frac{na}{b}+\frac{b}{na}\right)^2 = -2{,}75\sigma^0_e - 2{,}5^2\sigma^0_e = -9\sigma^0_e.$$

Таким образом, мы можем найти нагрузку p'_y, соответственную любой нагрузке p'_z при всяком отношении сторон опорного контура $a : b$; если же задана нагрузка p'_y, то мы найдем соответственную ей величину p'_z по тем же формулам, переменив в них, а также и в выражении σ^0_e, букву a на b и обратно.

Для случая квадратного контура наши формулы значительно упрощаются; так, например, легко показать, что если нагрузка p'_z лежит в пределах

$$-7\sigma^0_e \leqslant p'_z \leqslant 3\sigma^0_e,$$

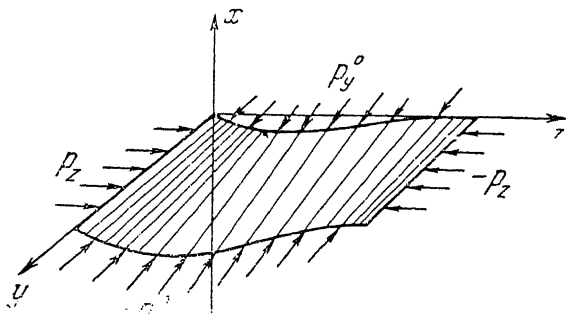
то мы будем иметь:

$$p'_z + p'_y = -4\sigma^0_e.$$

При рассмотрении вопроса об изгибе сжатых балок мы видели, что эйлерова нагрузка для них будет весьма близка к разрушающей; это заключение имело бы место и для сжатых пластин, если бы присутствие жесткого опорного контура не ограничивало перемещение их точек в средней плоскости их zoy. Поэтому для сжатой пластины, составляющей часть какой-нибудь конструкции, под эйлеровым напряжением мы будем подразумевать то наибольшее предельное напряжение, которое она способна воспринять; если же сжимающая сила получит дальнейшее приращение, то весь этот избыток пойдет на повышение напряжений не в самой пластине, а в жестком опорном контуре ее; таким образом, разрушение всей конструкции произойдет лишь тогда, когда напряжения в этом контуре достигнут значения критических или разрушающих напряжений.

Скажем еще несколько слов о влиянии начальной кривизны пластины на величину эйлеровых напряжений.

Если пластина имеет начальную погибь по цилиндрической поверхности, образующая которой будет перпендикулярна к направлению сжимающей нагрузки, например нагрузки p_z на чертеже 69 *), то эйлерово напряжение, как и в балках, будет независимо от этой погиби, если только кривизна направляющей удовлетворяет условиям, указанным на стр. 220 [1-й части Курса] [28]. Но когда сжимающая нагрузка направлена



Черт. 69.

параллельно образующей поверхности начальной погиби (нагрузка p_y на черт. 69), то жесткость пластины, а следовательно, и эйлерово напряжение ее увеличиваются примерно пропорционально возрастанию момента инерции площади сечения пластины, перпендикулярного к направлению нагрузки. Отношение между этими моментами инерции можно с погрешностью до малых порядка $h : a$ представить в виде бинома $1 + \varkappa_1 \frac{c_0^2}{h^2}$, где c_0 — наибольшая стрелка начальной погиби пластины, а $\varkappa_1$ — отвлеченное число, зависящее только от вида направляющей поверхности начальной погиби и заключающееся обыкновенно между 1 и 2; так, например, для погиби по параболе $\varkappa_1 = 16/15$, при синусоидах

$$x = c_0 \sin \frac{\pi z}{2a} \ldots \varkappa = 1{,}136,$$

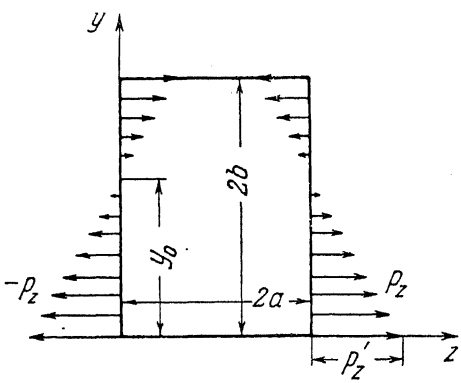
$$x = c_0 \sin^2 \frac{\pi z}{2a} \ldots \varkappa = 1{,}5.$$

*) При этом, конечно, предполагается, что и параллельные плоскости xoz стороны одного контура будут совпадать с криволинейной направляющей средней поверхности пластины.

Отсюда видно, что погибь пластины в указанном направлении весьма заметно увеличивает эйлерово напряжение, так что даже при незначительной стрелке $c_0 = h$ она повышается в 2—$2^1/_2$ раза; это обстоятельство является очень выгодным для многих обшивок судового корпуса [24].

§ 22. Жесткие пластины под действием нагрузок, направленных параллельно их средней плоскости. Случай неравномерного распределения нагрузок по кромкам контура. Случай скалывающих нагрузок. Сжимающая нагрузка для пластины, опертой на три кромки контура

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые задачи об изгибе пластин под действием нагрузок, направленных параллельно их средней плоскости, причем ограничимся лишь теми случаями, которые необходимы для расчетов двутавровых балок, составленных из тонких листов.



Черт. 70.

Рассмотрим сперва случай изгиба пластины, свободно опертой четырьмя кромками на жесткий прямоугольный контур, причем кроме равномерно распределенного изгибающего давления p_x^0 приложим к двум кромкам растягивающую или сжимающую нагрузку p_z, распределенную по всей длине этих сторон и изменяющуюся линейно относительно координаты y, так что величина ее определится соотношением

$$p_z = p_z'\left(1 - \frac{y}{y_0}\right),$$

где p_z' — нагрузка в точках, совпадающих с плоскостью xoz, а y_0 — координата точки, где нагрузка p_z обращается в нуль (черт. 70).

Дифференциальное уравнение средней поверхности пластины (5а) в данном случае напишется таким образом:

$$\Delta^2\xi_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left[p_x^0 + hp_z'\left(1-\frac{y}{y_0}\right)\frac{\partial^2\xi_0}{\partial z^2}\right],$$

а решение его мы представим в той же форме, как и раньше:

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a}, \qquad (86)$$

причем условия на контуре будут выполнены, если только наши ряды будут сходящимися на кромках пластины, а коэффициенты C_{ij} мы подберем так, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению (5а).

Подставив наше решение в это уравнение, мы получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\left[\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]^2\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a} = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{16}{\pi^2}\frac{p_x^0}{ij} - C_{ij}\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2 hp_z'\left(1-\frac{y}{y_0}\right)\right]\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a},$$

причем для выбранного нами закона распределения нагрузки p_x^0 числа i и j должны быть нечетными.

Уравнение это будет удовлетворено, если мы уравняем нулю множители при $\sin\frac{j\pi z}{2a}$, т. е. подберем коэффициенты C_{ij} так, чтобы удовлетворился ряд уравнений

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_{ij}\left[\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]^2\sin\frac{i\pi y}{2b} =$$

$$= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{16}{\pi^2}\frac{p_x^0}{ij} - hp_z'\left(1-\frac{y}{y_0}\right)C_{ij}\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]\sin\frac{i\pi y}{2b},$$

где нужно положить $j = 1, 3, 5, 7, \ldots$

Умножим эти уравнения на $\sin\frac{n\pi y}{2b}\,dy$, где n — целое число, и проинтегрируем в пределах от 0 до $2b$; тогда, заметив, что

$$\int_0^{2b}\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{n\pi y}{2b}\,dy=\begin{cases}=0, & \text{если } i \text{ не равно } n,\\ =b, & \text{если } i=n,\end{cases}$$

$$\int_0^{2b} y\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{n\pi y}{2b}\,dy=\begin{cases}=-\dfrac{16b^2}{\pi^2}\dfrac{in}{(i^2-n^2)^2}, & \\ \qquad\text{если } i\pm n \text{ — нечетное},\\ =0, \quad \text{если } i\pm n \text{ — четное},\\ =b^2, \quad \text{если } i=n,\end{cases}$$

мы будем иметь:

$$C_{nj}b\left[\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]^2=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left\{\frac{16}{\pi^2}\frac{bp_x^0}{nj}-\right.$$

$$\left.-hp_z'\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\left[C_{nj}b\left(1-\frac{b}{y_0}\right)+\frac{16}{\pi^2}\frac{b^2}{y_0}\sum_{i=1}^{\infty}C_{ij}\frac{ni}{(n^2-i^2)^2}\right]\right\},$$

причем последняя сумма распространяется лишь на те значения i, которые удовлетворяют условию: $i\pm n$ — нечетное.

Переменив местами индексы i и n, мы после некоторых преобразований получим:

$$C_{ij}\left[\left(i^2\frac{a^2}{b^2}+j^2\right)^2+\frac{p_z'}{\sigma_e^0}j^2\left(1-\frac{b}{y_0}\right)\right]+$$

$$+\frac{16}{\pi^2}\frac{p_z'}{\sigma_e^0}\frac{b}{y_0}j^2\sum_{n=1}^{\infty}C_{nj}\frac{ni}{(n^2-i^2)^2}=\frac{3072(1-\mu^2)a^4}{\pi^6Eh^3}\cdot\frac{p_x^0}{ij},\qquad(94)$$

где, как и раньше,

$$\sigma_e^0=\frac{\pi^2E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2.\qquad(90)$$

Таким образом, делая i и j равными 1, 3, 5, 7, ..., мы получим систему уравнений, в которой число неизвестных C_{ij} будет равно числу уравнений, причем все эти неизвестные будут входить линейно и, следовательно, мы будем иметь

одну, вполне определенную систему решений. Так как величины неизвестных C_{ij} будут неопределенно убывать с увеличением индексов i и j, то для решения уравнений может быть применен способ последовательных приближений примерно в том виде, как мы делали при решении системы уравнений (84) в § 20.

Не останавливаясь на дальнейшем исследовании этого вопроса, не имеющего практического значения, мы посмотрим, не может ли в данном случае нагрузка p'_z достичь такой границы, за которой пластина уже не сможет воспринять дальнейшего увеличения ее. Такая граница, как мы уже видели, характеризуется тем, что стрелки прогиба пластины ξ_0, а также и напряжения, в ней возбуждаемые, начинают неопределенно возрастать, для чего необходимо, чтобы один или несколько коэффициентов C_{ij} сделались неопределенно большими.

Из уравнений (94), служащих для нахождения этих коэффициентов, видно, что правые части уравнений, не зависящие от неизвестных C_{ij}, всегда остаются конечными; следовательно, неопределенно возрасти эти коэффициенты могут только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при C_{ij}, обратится в нуль; это условие и даст нам уравнение для нахождения критического значения нагрузки p'_z. Заметим еще, что при составлении этого определителя мы должны дать буквам i и j все значения четные и нечетные, так как четные значения пропадали у нас только при равномерно распределенной нагрузке p^0_x; начальная кривизна пластины, с которой мы не считались, также непременно введет коэффициенты C_{ij} с четными индексами.

Легко видеть, что в каждое из уравнений входят не все неизвестные сразу; так, например, дав индексу j какое-нибудь частное значение, например, сделав $j = 1$, мы можем выделить систему уравнений, куда войдут лишь коэффициенты C_{i1}, причем во все другие уравнения эти неизвестные входить не будут. Это показывает, что указанный определитель может быть представлен в виде произведения нескольких определителей, причем каждый из них при уравнивании нулю даст группу корней, определяющих критическую нагрузку p'_z; из всех этих корней мы должны выбрать тот, который дает наименьшую по абсолютной величине нагрузку p'_z.

Покажем теперь, как составляются эти определители и находятся корни, дающие эту нагрузку.

Назвав для сокращения письма

$$-\frac{\pi^2}{16}\frac{y_0}{b}\frac{\sigma_e^0}{p_z'} \text{ через } \nu, \quad \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{y_0}{b}-1\right) \text{ через } \beta$$

и

$$\left(\frac{i^2a^2}{jb^2}+j\right)^{-2} \text{ через } (i,\ j),$$

мы можем левую часть одного из уравнений группы (94), соответствующего индексам i и j, написать в таком виде:

$$[\beta-(i,\ j)^{-1}\nu]\,C_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{nj}\frac{ni}{(n^2-i^2)^2},$$

причем для индекса n должно быть соблюдено условие: $n \pm i$— нечетное; сделав в этом выражении $i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, мы для каждого значения $j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ получим определитель

$$\begin{vmatrix} \beta-(1,j)^{-1}\nu & {}^{2}/_{9} & 0 & {}^{4}/_{225} & \ldots \\ {}^{2}/_{9} & \beta-(2,j)^{-1}\nu & {}^{6}/_{25} & 0 & \ldots \\ 0 & {}^{6}/_{25} & \beta-(3,j)^{-1}\nu & {}^{12}/_{49} & \ldots \\ {}^{4}/_{225} & 0 & {}^{12}/_{49} & \beta-(4,j)^{-1}\nu & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}; \qquad (95)$$

уравнивая нулю каждый из этих определителей и решая полученные уравнения относительно буквы ν, мы получим несколько групп корней, из которых выберем наибольший по абсолютной величине положительный корень ν; он и будет соответствовать наименьшему, т. е. критическому значению нагрузки p_z'.

Решать эти уравнения мы будем путем последовательных приближений, постепенно увеличивая порядок наших определителей.

Взяв определитель первого порядка и называя полученное из него первое приближенное решение через ν_1, мы найдем:

$$(1,\ j)^{-1}\nu_1=\beta, \quad \text{или} \quad \left(\frac{a^2}{jb^2}+j\right)^2\nu_1=\beta;$$

заменяя ν и β их значениями, мы получим:

$$p'_z = -\sigma^0_e \left(\frac{a^2}{jb^2} + j\right)^2 \frac{y_0}{y_0 - b};$$

это первое грубое приближение является, однако, достаточным, если ордината y_0 будет велика сравнительно с полудлиной стороны b, т. е. в тех случаях, когда сжимающая нагрузка распределена вдоль стороны $2b$ приблизительно равномерно. В пределе при $y_0 = \infty$ это выражение будет совпадать с найденным выше для равномерно распределенной нагрузки p^0_z. Заметим еще, что величина $p'_z \frac{y_0 - b}{y_0}$ представляет давление при средине нагруженной стороны и, следовательно, предельная нагрузка в рассматриваемом случае будет определяться тою же формулой, как и для пластины, сжимаемой равномерно распределенным вдоль стороны давлением, если за критическую нагрузку мы будем считать ту, которая соответствует точкам, лежащим при средине нагруженной стороны.

Если y_0 меньше $2b$, то наше приближение дает недостаточно верные результаты, а при $y_0 < b$ — и совершенно нелепые (p'_z получается больше нуля); в этих случаях, конечно, нужно искать второе или дальнейшие приближения.

Для следующего приближения мы возьмем определители второго порядка и, назвав соответственный корень через ν_2, получим:

$$\nu_2^2 - \beta[(1,j) + (2,j)]\nu_2 + \left(\beta^2 - \frac{4}{81}\right)(1,j)(2,j) = 0;$$

наибольший по абсолютной величине корень этого уравнения будет уже близким к верному, если $y_0 \geqslant b$, но если y_0 меньше $0{,}64\,b$, то результат опять получается нелепый ($p'_z \geqslant 0$).

В третьем приближении мы получим кубичное уравнение

$$\nu_3^3 - [(1,j) + (2,j) + (3,j)]\beta\nu_3^2 + \\ + \left[(1,j)(2,j)\left(\beta^2 - \frac{4}{81}\right) + (1,j)(3,j)\beta^2 + \right. \\ \left. + (2,j)(3,j)\left(\beta^2 - \frac{36}{625}\right)\right]\nu_3 - \\ - (1,j)(2,j)(3,j)\beta\left(\beta^2 - \frac{4}{81} - \frac{36}{625}\right) = 0;$$

подобным же образом напишутся и остальные приближения.

Применим полученные уравнения к квадратной пластине, положив, например, $y_0 = b$; тогда при $j = 1$ мы получим:

$$(1, 1) = \frac{1}{4}, \quad (2, 1) = \frac{1}{25} \quad \text{и} \quad (3, 1) = \frac{1}{100};$$

величина β будет равна нулю, и потому результатом первого уравнения ($\nu_1 = 0$ и $p'_z = \infty$) пользоваться нельзя; из остальных же приближений мы найдем:

$$\nu_2 = \pm\frac{2}{9}\sqrt{(1, 1)(2, 1)} = \pm\frac{1}{45},$$

$$\nu_3 = \pm\sqrt{\frac{4}{81}(1, 1)(2, 1) + \frac{36}{625}(2, 1)(3, 1)} = \pm\frac{1{,}023}{45};$$

ввиду небольшой разницы между вторым и третьим приближением мы могли бы довольствоваться этим последним, но должны предварительно убедиться, соответствует ли выбранная нами система уравнений (при $j = 1$) наибольшему корню ν; поэтому мы найдем еще приближенные значения этого корня при $j = 2$; при этом получим:

$$(1, 2) = \frac{4}{25}, \quad (2, 2) = \frac{1}{16} \quad \text{и} \quad (3, 2) = \frac{4}{169},$$

откуда найдем:

$$\nu'_2 = \pm\frac{2}{9}\sqrt{(1, 2)(2, 2)} = \pm\frac{1}{45},$$

$$\nu'_3 = \pm\sqrt{\frac{4}{81}(1, 2)(2, 2) + \frac{35}{625}(2, 2)(3, 2)} = \pm\frac{1{,}083}{45};$$

как видим, корень ν'_3 получился больше, чем в первом случае, и так как разность между двумя последовательными приближениями и здесь получилась не очень значительной (около 8%), то для практических целей четвертое приближение беспо-

лезно *); почти очевидно также, что группа уравнений, соответственная $j=2$, выбрана нами верно (при $j=3$ корень ν_2'' получается $\frac{1}{65}$, т. е. почти в полтора раза меньше, чем для первых двух групп, и вычислять соответствующее последней группе значение корня ν_3'' не нужно) и потому мы можем принять:

$$p_z' = \frac{\pi^2}{16}\frac{y_0}{b}\frac{\sigma_e^0}{\nu_3'} = \pm 25{,}6\sigma_e^0.$$

Двойной знак перед найденным решением получается вследствие того, что при $y=b$ сжимающая нагрузка на пластину от перемены знака у p_z' меняет только свое расположение относительно координатной оси z. Из этого же решения видно, что наибольшее сжимающее давление p_z' на квадратную пластину при нагрузке по треугольнику при $y_0=b$ будет в 6,4 раза больше критического давления p_z^0, равномерно распределенного вдоль всей стороны квадрата.

Найдем еще предельное давление p_z' для случая весьма длинной пластины, положив, что нагруженная сторона $2b$ весьма мала по сравнению с другой; сделав опять $y_0=b$, возьмем выражение для корня ν в третьем приближении

$$\nu_3^2 = \frac{4}{81}(1,j)(2,j) + \frac{36}{625}(2,j)(3,j);$$

так как число j растет с увеличением стороны $2a$, то прежде всего нам нужно найти такое значение этого числа, при котором корень ν_3 или квадрат его ν_3^2 делается наибольшим.

---

*) В рассматриваемом случае ($\beta=0$) уравнение для четвертого приближения получается в таком виде:

$$\nu_4^4 - \left[\left(\frac{2}{9}\right)^2(1,j)(2,j) + \left(\frac{6}{25}\right)^2(2,j)(3,j) + \left(\frac{12}{49}\right)^2(3,j)(4,j) + \left(\frac{4}{225}\right)^2(1,j)(4,j)\right]\nu_4^2 + (1,j)(2,j)(3,j)(4,j)\left[\frac{2}{9}\frac{12}{49} - \frac{6}{25}\frac{4}{225}\right]^2 = 0;$$

для нашей пластины ($a=b$) мы получим $\nu_4' = \pm 1{,}087 : 45$, т. е. всего на $^1/_3\%$ больше чем ν_3'.

Заметив, что функция вблизи своего аналитического максимума меняется медленно, мы можем при нахождении j ограничиться весьма приближенным значением его, определив его не из третьего, а из второго приближения для ν; кроме того, найдя искомое значение j, мы будем подставлять его в нашу функцию ν_3, не обращая внимания на то, что найденное значение может и не быть целым числом.

Для определения j из условия

$$\nu_2 = \pm\frac{2}{9}\sqrt{(1, j)(2, j)} = \pm\frac{2}{9}\left(\frac{a^2}{jb^2}+j\right)^{-1}\left(\frac{4a^2}{jb^2}+j\right)^{-1} = \max$$

мы уравняем нулю производную этого выражения по изменяемости j и получим:

$$\left(1-\frac{a^2}{j_1^2b^2}\right)\left(1-\frac{4a^2}{j_1^2b^2}\right)+\left(1-\frac{4a^2}{j_1^2b^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{j_1^2b^2}\right)=0$$

или

$$\frac{4a^4}{j_1^4b^4}=1,$$

откуда и находим $j_1 = a\sqrt{2}:b$; подставляя это значение, мы будем иметь:

$$(i, j_1) = j_1^{-2}\left(\frac{i^2a^2}{j_1^2b^2}+1\right)^{-2} = \frac{b^2}{2a^2}\left(1+\frac{1}{2}i^2\right)^{-2},$$

и, следовательно,

$$\nu_3 = \pm\frac{b^2}{2a^2}\sqrt{\frac{4}{81}\frac{4}{81}+\frac{36}{625}\frac{4}{1089}} = 0{,}0257\,\frac{b^2}{a^2};$$

так как второй член под радикалом, выражающий поправку на третье приближение, составляет меньше девяти процентов от первого, то найденное значение ν_3 можно считать достаточно верным, и потому мы получим:

$$p_z' = \frac{\pi^2}{16}\,\frac{y_0}{b}\,\frac{\sigma_e^0}{\nu_3} = 24{,}0\,\frac{\pi^2E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2b}\right)^2,$$

так что p_z' будет в шесть раз больше равномерно распределенной по той же стороне нагрузки p_z^0. Нетрудно убедиться, что и при всяком отношении $a:b$, большем единицы, и при $y_0 = b$ величина $p_z':p_z^0$ колеблется между найденными пределами 6 и 6,4.

Если мы положим теперь обратно, что нагруженная сторона $2b$ весьма велика по сравнению со стороной $2a$, то в пределе найдем: $(i, j) = j^{-2}$, причем, очевидно, нужно положить $j = 1$; нахождение предельного значения для p'_z в этом случае делается трудным, так как ряд последовательных приближений весьма медленно подходит к этому пределу; но, оставаясь в границах практических потребностей ($a \geqslant 0{,}4b$), мы можем получить вполне удовлетворительные результаты, не переходя за четвертое приближение.

В нижеследующей таблице [25] даны значения коэффициента k в формуле

$$p'_z = -k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{2b}\right)^2 = -k\sigma'_e, \qquad (96)$$

определяющей наибольшую сжимающую нагрузку p'_z при различных величинах отношений $a:b$ и $y_0:b$ (см. черт. 70); для удобства поверки приведенных цифр в таблице указан порядок приближения, дающего каждое из написанных чисел (цифры в скобках), а также и соответствующее значение для j.

$a:b$ \ $y_0:b$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,4	29,1 $j=1$ (3)	18,7 $j=1$ (3)	15,1 $j=1$ (2)	13,3 $j=1$ (2)	10,8 $j=1$ (2)
0,6	24,1 $j=1$ (3)	12,9 $j=1$ (2)	9,7 $j=1$ (2)	8,3 $j=1$ (2)	7,1 $j=1$ (2)
0,8	24,4 $j=1$ (3)	11,2 $j=1$ (2)	8,1 $j=1$ (2)	6,9 $j=1$ (2)	6,0 $j=1$ (2)
1,0	25,6 $j=2$ (3)	11,0 $j=1$ (2)	7,8 $j=1$ (2)	6,6 $j=1$ (2)	5,8 $j=1$ (2)
1,5	24,3 $j=2$ (3)	11,5 $j=2$ (2)	8,4 $j=2$ (2)	7,1 $j=2$ (2)	6,1 $j=2$ (2)
2,0	23,9 $j=3$ (3)	11,0 $j=2$ (2)	7,8 $j=2$ (2)	6,6 $j=2$ (2)	5,8 $j=2$ (2)
3,0	24,1 $j=5$ (3)	11,0 $j=3$ (2)	7,8 $j=3$ (2)	6,6 $j=3$ (2)	5,7 $j=2$ (2)

При $y_0 > 3b$ можно пользоваться формулой первого приближения

$$p'_z = -\frac{\sigma^0_e y_0}{y_0 - b}\left(\frac{a^2}{jb^2} + j\right)^2 = -\frac{\sigma'_e y_0}{y_0 - b}\left(\frac{a}{jb} + \frac{jb}{a}\right)^2,$$

причем j будет целым числом, определяющимся, как и для случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, условием

$$j < a : b < j + 1;$$

при $a > b$ эта приближенная формула дает погрешности не свыше 5—6%, убывающие при увеличении отношения $y_0 : b$; при $a < b$ погрешность будет несколько бо́льшая.

Перейдем теперь к рассмотрению другого весьма важного для практических приложений случая, когда на опорном контуре пластины действует скалывающая нагрузка t_x, распределенная равномерно по опорным сечениям; при этом мы будем считать пластину свободно опертой всеми четырьмя кромками на жесткий прямоугольный контур и положим, что на нее действует еще равномерно распределенная изгибающая нагрузка p^0_x.

Дифференциальное уравнение средней поверхности пластины для рассматриваемого случая напишется в таком виде:

$$\Delta^2 \xi_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left(p^0_x - 2ht_x \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y\, \partial z}\right), \tag{5а}$$

и решение его мы будем искать, как и раньше, в виде ряда

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \sin\frac{i\pi y}{2b} \sin\frac{j\pi z}{2a}. \tag{86}$$

После подстановки выбранного решения в наше уравнение

мы получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\left[\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{2a}\right)^2\right]^2 \sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a} =$$

$$= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left[\frac{16p_x^0}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{ij}\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{j\pi z}{2a} -\right.$$

$$\left. - 2t_x h\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\left(\frac{i\pi}{2b}\right)\left(\frac{j\pi}{2a}\right)\cos\frac{i\pi y}{2b}\cos\frac{j\pi z}{2a}\right];$$

чтобы найти коэффициенты C_{ij}, при которых удовлетворялось бы это уравнение, умножим его на $\sin\frac{m\pi y}{2b}\sin\frac{n\pi z}{2a}\,dy\,dz$ и проинтегрируем соответственно в пределах от 0 до $2b$ и от 0 до $2a$; тогда, заметив, что

$$\int_0^{2b}\sin\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{m\pi y}{2b}\,dy\begin{cases}=0, & \text{если } i \text{ не равно } m,\\ =b, & \text{если } i=m,\end{cases}$$

$$\int_0^{2b}\cos\frac{i\pi y}{2b}\sin\frac{m\pi y}{2b}\,dy\begin{cases}=0, & \text{если } i\pm m \text{ — четное},\\ =\frac{4b}{\pi}\frac{m}{m^2-i^2}, & \text{если } i\pm m \text{ — нечетное},\end{cases}$$

мы будем иметь:

$$C_{mn}ab\left[\left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2\right]^2 =$$

$$= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\left[\frac{16p_x^0}{\pi^2}\frac{ab}{mn} - 2ht_x\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\frac{4mnij}{(m^2-i^2)(n^2-j^2)}\right],$$

причем в последней сумме i и j должны выбираться так, чтобы удовлетворить условию

$$\pm m \text{ — нечетное} \quad \text{и} \quad j\pm n \text{ — нечетное},$$

так что при равномерно распределенной нагрузке p_x^0 числа m и n могут быть только четными.

Переменим местами индексы i и m, а также j и n и назовем для сокращения письма

$$\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2 \quad \text{через } \sigma_e^0;$$

тогда после некоторых преобразований найдем:

$$\left(\frac{a}{b}i^2+\frac{b}{a}j^2\right)^2 C_{ij}+\frac{32}{\pi^2}\frac{b}{a}\frac{t_x}{\sigma_e^0}ij\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\frac{mn}{(m^2-i^2)(n^2-j^2)}=$$

$$=\frac{3072(1-\mu^2)a^4 p_x^0}{\pi^6 E h^3 ij}; \qquad (97)$$

давая числам i и j различные значения, мы получим группу уравнений, из которых и можем определить столько неизвестных C_{ij}, сколько необходимо для получения результатов с желаемой степенью точности; и так как величина этих неизвестных убывает с увеличением индексов i и j, то при решении уравнений может быть применен способ последовательных приближений.

Посмотрим теперь, нет ли для скалывающей нагрузки t_x такой границы, при подходе к которой стрелки прогиба пластины будут неопределенно возрастать, для чего необходимо, чтобы определитель из коэффициентов при C_{ij} был нулем, причем под индексами i и j нужно подразумевать уже все четные и нечетные целые числа.

Определитель этот разбивается на произведение двух определителей; в самом деле, назвав для сокращения письма

$$\frac{\pi^2}{32}\frac{a}{b}\frac{\sigma_e^0}{t_x} \quad \text{через } \lambda,$$

мы получим левую часть нашего уравнения в таком виде:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}i^2+\frac{b}{a}j^2\right)^2}{ij}\lambda C_{ij}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\frac{mn}{(m^2-i^2)(n^2-j^2)};$$

но так как по условию числа $i \pm m$ и $j \pm n$ должны быть нечетные, то при четной сумме индексов $i+j$ мы должны брать лишь такие члены суммы, для которых $m+n$ будет также четное, и обратно; отсюда следует, что в один опре-

делитель войдут коэффициенты только с четной суммой индексов, в другой же — лишь с нечетной; первый определитель напишется таким образом:

Коэффициенты при членах уравнения

ij	C_{11}	C_{22}	C_{13}	C_{31}	C_{24}	C_{42}
11	$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\lambda$	$+\frac{4}{9}$	0	0	$+\frac{8}{45}$	$+\frac{8}{45}\cdots$
22	$+\frac{1}{9}$	$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\lambda$	$-\frac{3}{15}$	$-\frac{3}{15}$	0	$0\ldots$
13	0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+9\frac{b}{a}\right)^2\lambda$	0	$+\frac{8}{21}$	$-\frac{8}{75}\cdots$
31	0	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{1}{3}\left(9\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\lambda$	$-\frac{8}{75}$	$+\frac{8}{21}\cdots$
24	$+\frac{1}{45}$	0	$+\frac{3}{21}$	$-\frac{3}{75}$	$2\left(\frac{a}{b}+4\frac{b}{a}\right)^2\lambda$	$0\ldots$
42	$+\frac{1}{45}$	0	$-\frac{3}{75}$	$+\frac{3}{21}$	0	$2\left(4\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\lambda\ldots$
. . . . .						

(98)

Второй определитель с нечетной суммой индексов составится таким же путем, но наибольший из его корней λ будет меньше, чем получающийся из только что написанного определителя, почему мы и не будем его рассматривать.

Посмотрим теперь, как составляется из нашего определителя уравнение, определяющее нужный нам корень λ.

Если мы ограничимся лишь двумя первыми строками и колоннами этого определителя, то, уравняв его нулю, получим:

$$\lambda_2 = \pm\frac{1}{9\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2};$$

это первое, весьма грубое приближение даст, как увидим ниже, довольно правдоподобные результаты, если a близко к b; в других же случаях применять эту формулу нельзя даже для самых приближенных расчетов.

Взяв определитель четвертого порядка и назвав для сокращения письма

$$\frac{ij\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{b}i^2+\frac{b}{a}j^2\right)^2} \quad \text{через } (i,\ j),$$

мы придем к такому уравнению:

$$\lambda_4^4 - \left\{1 + \frac{27}{25}[(1,3)+(3,1)]\right\}\lambda_2^2\lambda_4^2 = 0,$$

наибольший корень которого будет равен

$$\lambda_4 = \lambda_2\sqrt{1 + \frac{27}{25}[(1,3)+(3,1)]};$$

если λ_4 и λ_2 будут близки между собою, иначе говоря, если величина

$$\frac{27}{25}[(1,3)+(3,1)]$$

будет мала по сравнению с единицей, то можно остановиться на полученном приближении; так, например, при $a = b$ эта величина будет равна 0,2592; следовательно, λ_2 и λ_4 будут отличаться приблизительно на $12^0/_0$, что дает основание думать, что последнее число будет разниться от истинного корня определителя λ на $1—2^0/_0$, что во многих случаях является достаточно верным; но при возрастании отношения $a : b$ разница между двумя приближениями увеличивается и, например, при $a = 3b$ достигает $43^0/_0$; это указывает на недостаточность взятого приближения, почему мы и должны перейти к определителю высшего порядка.

Определитель шестого порядка дает уравнение

$$\lambda_6^6 - \left\{1 + \frac{27}{25}[(1,3)+(3,1)] + \frac{2}{25}[(1,2)+(2,1)] + \right.$$
$$+ \frac{54}{49}[(1,2)(1,3)+(2,1)(3,1)] + \frac{54}{625}\left.[(2,1)(1,3)+(1,2)(3,1)]\right\} \times$$
$$\times \lambda_2^2\lambda_6^4 + \left(\frac{864}{875}\right)^2\left\{\frac{50}{27}[(1,2)(1,3)+(2,1)(3,1)] + \right.$$
$$+ 2(1,3)(3,1)[(1,2)+(2,1)] + \frac{4}{27}(1,2)(2,1)[(1,3)+(3,1)] +$$
$$\left. + \left(\frac{36}{35}\right)^2(1,2)(1,3)(2,1)(3,1)\right\}\lambda_2^4\lambda_6^2 -$$
$$- \left(\frac{54\,336}{30\,625}\right)^2(1,2)(1,3)(2,1)(3,1) = 0;$$

при тех значениях отношения $a : b$, которые нужны для задач практического характера, наибольший корень этого уравнения будет уже достаточно близок к λ_4, а следовательно, и к истинному корню λ нашего определителя; так, например, при $a = b$ мы найдем:

$$\lambda_4 = 1{,}122\lambda_2 \quad \text{и} \quad \lambda_6 = 1{,}130\lambda_2 = 1{,}007\lambda_4,$$

и так как разница между двумя последовательными приближениями не превышает $0{,}7\%$, то мы можем принять λ_6 за истинный корень с погрешностью около $0{,}1\%$; но когда отношение между сторонами опорного контура мы положим равным трем, то будем иметь

$$\lambda_4 = 1{,}43\lambda_2 \quad \text{и} \quad \lambda_6 = 1{,}61\lambda_2 = 1{,}12\lambda_4,$$

и потому λ_6 можем считать точным лишь до 2—3%.

Таким образом, при $a < \frac{1}{3} b$ необходимо взять следующее приближение, но для нас этот случай не представляет интереса, и мы на нем не будем останавливаться.

Заметим еще, что все получающиеся из определителя уравнения будут симметричными относительно букв a и b, допуская их взаимную замену без изменения величин коэффициентов при λ; кроме того, эти уравнения будут четными по отношению к неизвестной λ *), и потому мы всегда будем иметь два равных, но противоположных по знаку корня λ, соответствующих двум противоположным направлениям скалывающей нагрузки t_x.

Когда наибольший корень λ найден, мы сейчас же получаем величину критической нагрузки t_x из соотношения

$$t_x = \frac{\pi^2}{32} \frac{a}{b\lambda} \sigma_e^0 = k' \sigma_e^0, \tag{99}$$

где

$$\sigma_e^0 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{2a}\right)^2 \quad \text{при} \quad a < b;$$

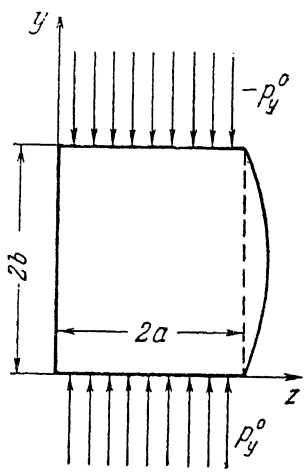
*) При нечетном порядке определителя уравнения сделаются четными относительно этой буквы после сокращения их на λ; соответствующий же им корень $\lambda = 0$ нам не нужен, так как он не может быть наибольшим.

величина множителя k' для различных значений отношения $b:a$, больших единицы, приведена в следующей табличке [26]:

$b:a$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
k'	9,8	8,4	7,7	7,3	7,1	6,9	6,6	6,3

Все приведенные здесь числа найдены по λ_6, причем последнее число (при $b=3a$) уменьшено на 2% в расчете на влияние дальнейших приближений.

Найдем, наконец, критическую нагрузку для пластины, свободно опертой тремя кромками на жесткий прямоугольный контур, причем четвертая кромка ее остается вполне свободной; сжимающую нагрузку p_y мы будем считать приложенной к двум свободно опертым кромкам пластины и распределенной вдоль них равномерно [черт. 71].



Черт. 71.

Уравнение средней поверхности этой пластины мы, как и ранее, представим в виде ряда

$$\xi=\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \sin\frac{i\pi y}{2b},$$

причем условия на кромках контура $y=0$ и $y=2b$ будут удовлетворены сами собою; для выполнения же этих условий на двух других кромках мы выберем функции Z_i так, чтобы они удовлетворяли заданиям:

$$Z_i=0,\quad Z_i''=0$$

на свободно опертой кромке $(z=0)$,

$$Z_i''-\mu\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i=0 \quad\text{и}\quad Z_i'''-(2-\mu)\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i'=0$$

на свободной кромке $(z=2a)$.

Подставляя наше решение в уравнение (5а) и уравняв нулю алгебраическую сумму коэффициентов при множителе $\sin\frac{i\pi y}{2b}$, мы получим:

$$Z_i^{IV} - 2\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 Z_i'' + \left[\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^4 + \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^2} p_y\right] Z_i = 0;$$

чтобы найти решение этого дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, составим условное уравнение

$$\lambda^4 - 2\left(\frac{i\pi}{2b}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{i\pi}{2b}\right)^4 \left[1 + \frac{12(1-\mu^2)}{i^2\pi^2 E}\left(\frac{2b}{h}\right)^2 p_y^0\right] = 0;$$

называя попрежнему

$$\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2b}\right)^2 \text{ через } \sigma_e',$$

мы можем написать корни этого уравнения в таком виде:

$$\lambda = \pm\frac{i\pi}{2b}\sqrt{1 \pm \frac{1}{i}\sqrt{-\frac{p_y^0}{\sigma_e'}}};$$

заметим теперь, что критическое напряжение для данной пластины p_y^0 должно по абсолютной величине больше чем σ_e', представляющее предельное напряжение для пластины, опертой лишь двумя кромками, и так как сжимающее напряжение p_y^0 будет отрицательным, то стоящая под радикалом величина

$$1 \pm \frac{1}{i}\sqrt{\frac{-p_y^0}{\sigma_e'}}$$

будет всегда действительной, причем при верхнем знаке будет большей нуля, при нижнем же — меньшей, если только мы положим $i = 1$.

Таким образом, наше условное уравнение будет иметь два действительных корня и два чисто мнимых, и потому, положив

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{-\frac{p_y^0}{\sigma_e'} + 1}} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{-\frac{p_y^0}{\sigma_e'} - 1}},$$

где λ_1 и λ_2 — действительные и неравные между собой величины, мы получим решение нашего дифференциального уравнения в таком виде:

$$Z_1 = C_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 \pi z}{2b} + D_1 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 \pi z}{2b} + C_1' \cos \frac{\lambda_2 \pi z}{2b} + D_1' \sin \frac{\lambda_2 \pi z}{2b};$$

входящие в эту функцию постоянные C и D мы определим из условий на контуре; так, для кромки пластины $z = 0$, мы получим:

$$Z_1(0) = C_1 + C_1' = 0;$$

$$Z_1''(0) = \left(\frac{\lambda_1 \pi}{2b}\right)^2 C_1 - \left(\frac{\lambda_2 \pi}{2b}\right)^2 C_1' = 0;$$

так как λ_1 не может быть равным λ_2, то отличных от нуля решений для C_1 и C_1' быть не может; для второй кромки пластины ($z = 2a$) мы получим:

$$Z_1''(2a) - \mu \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 Z_1(2a) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \{D_1 (\lambda_1^2 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_1 \omega - D_2 (\lambda_2^2 + \mu) \sin \lambda_2 \omega\} = 0,$$

$$Z_1'''(2a) - (2 - \mu) \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 Z_1'(2a) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2b}\right)^3 \{D_1 \lambda_1 [\lambda_1^2 - (2 - \mu)] \operatorname{ch} \lambda_1 \omega - D_2 \lambda_2 [\lambda_2^2 + (2 - \mu) \cos \lambda_2 \omega] = 0,$$

где через ω названо отношение $\pi a : b$.

Эти уравнения удовлетворяются при $D_1 = D_1' = 0$, или при конечных величинах этих постоянных, если определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, равен нулю; но нужно помнить, что вторая часть этих уравнений обратилась в нуль только потому, что мы пренебрегли влиянием действующей нормально к средней плоскости пластины нагрузки p_x, а также и начальной кривизной пластины; иначе правые части уравнений выразились бы некоторыми конечными величинами и при значениях λ_1 и λ_2, обращающих в нуль указанный определитель, коэффициенты D_1 и D_1' стали бы неопределенно большими, а вместе с ними неопределенно возросли бы и стрелки прогиба пластины ξ_0.

Поэтому наименьшая нагрузка p_y^0, определенная из условия

$$\begin{vmatrix} (\lambda_1^2 - \mu)\,\mathrm{sh}\,\lambda_1\omega & (\lambda_2^2 + \mu)\sin\lambda_2\omega \\ \lambda_1[\lambda_1^2 - (2-\mu)]\,\mathrm{ch}\,\lambda_1\omega & \lambda_2[\lambda_2^2 + (2-\mu)]\cos\lambda_2\omega \end{vmatrix} = 0,$$

будет соответствовать критической нагрузке, причем из соотношений, определяющих λ_1 и λ_2, мы имеем:

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 2$$

и

$$p_y^0 = -\frac{1}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2\sigma_e' = -(\lambda_1^2 - 1)^2\sigma_e';$$

получающееся из определителя уравнение может быть несколько упрощено; в самом деле, нетрудно видеть, что

$$\lambda_1^2 - \mu = \lambda_2^2 + (2-\mu)$$

и

$$\lambda_2^2 + \mu = \lambda_1^2 - (2-\mu),$$

и потому это уравнение представится в таком виде:

$$\left(\frac{\lambda_1^2 - \mu}{\lambda_2^2 + \mu}\right)^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\mathrm{tg}\,\lambda_2\omega}{\mathrm{th}\,\lambda_1\omega},$$

где $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1^2 - 2}$.

Непосредственное решение такого уравнения относительно λ_1 невозможно, причем и применение обычных в таких случаях приемов не всегда приводит к достаточно простому получению результатов; поэтому здесь мы поступим таким образом.

Взяв ряд разных значений для λ_2 *) и найдя для них соответственные λ_1, мы приведем наше уравнение к виду

$$\frac{\mathrm{tg}\,\lambda_2\omega}{\mathrm{th}\,\lambda_1\omega} = k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,$$

*) Рядом непосредственных попыток нетрудно убедиться, что в пределах практических задач достаточно изменять λ_2 в пределах от 0 до 2 или $2^1/_2$.

где k_1, k_2, k_3 — известные нам величины; считая в этих уравнениях величину ω за неизвестную, мы определим ее приблизительно из соотношения

$$\omega_i = \lambda_2^{-1} \operatorname{arctg} k_i,$$

если только ω_i не близко к нулю, так как при $\omega_i > 1$ дуга $\lambda_1\omega$ будет близка к 2 и, следовательно, $\operatorname{th}\lambda_1\omega$ — к единице; зная же приближенно ω_i, мы легко определим и нужные поправки для нее по способу последовательных приближений; таким образом, мы можем установить ряд значений λ_1 и ω, удовлетворяющих нашему уравнению, а по ним найти и ряд величин p_y^0 для разных значений отношения $a : b$, сделав это для нескольких величин коэффициента Пуассона μ, колеблющихся близ среднего его значения (0,3); полученные результаты можно представить графически, а еще лучше — в виде аналитического выражения p_y^0 через величины $a : b$ и μ, причем сделать это можно тем точнее, чем сложнее будет выбранная зависимость.

Если мы положим

$$p_y^0 = -\sigma_e'\left[1 + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\frac{b}{a}}{4+\frac{b^2}{a^2}}\right], \qquad (100)$$

то получим приближенную зависимость, которая при изменении μ в пределах $\frac{1}{3} \geqslant \mu \geqslant \frac{1}{4}$, а отношения $\frac{b}{a}$ в пределах $0{,}3 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 3$ не дает погрешностей свыше $\pm\frac{1}{2}\%$ от определяемой величины; но и вне этих границ для отношения $b : a$ формула дает очень хорошие результаты, хотя с несколько большей ошибкой; в предельных случаях, когда отношение $b : a$ неопределенно мало, мы получим: $p_y = -\sigma_e'$, т. е. результат вполне точный; когда же отношение $b : a$ весьма велико, то формула (100) дает:

$$p_y = -\frac{6(1-\mu)}{\pi^2}\frac{b^2}{a^2}\sigma_e' = -\frac{6(1-\mu)}{\pi^2}\sigma_e^0;$$

нетрудно убедиться, что и этот результат будет неопределенно приближаться к точному; в самом деле, если отношение $b : a$

велико, то величина ω будет соответственно мала; допустив, что при этом и дуги $\lambda_1\omega$ и $\lambda_2\omega$ будут также малы, мы получим из написанного выше уравнения

$$\left(\frac{\lambda_1^2-\mu}{\lambda_2^2+\mu}\right)^2 = 1 + \frac{4(1-\mu)}{\lambda_2^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\operatorname{tg}\lambda_2\omega}{\operatorname{th}\lambda_1\omega} = \frac{1+{}^1/_3\lambda_2^2\omega^2}{1-{}^1/_3\lambda_1^2\omega^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\omega^2;$$

отсюда находим:

$$(\lambda_1^2-2)(\lambda_1^2-1) = \frac{6(1-\mu)}{\omega^2},$$

что показывает, что величина λ_1 будет весьма велика, произведения же $\lambda_1\omega$ и $\lambda_2\omega$ будут действительно малыми величинами порядка $\sqrt{\omega}$, и потому с ошибкою порядка ω мы будем иметь:

$$(\lambda_1^2-2)(\lambda_1^2-1) = -p_y^0 : \sigma_e' = \frac{6(1-\mu)}{\omega^2},$$

что и получено из нашей формулы.

Таким образом, каково бы ни было отношение сторон опорного контура $a:b$, формула (100) дает результаты, вполне пригодные для наших целей; так, например, положив при $\mu = 0{,}3$

$$a:b = 3,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2}\ \text{и}\ \frac{1}{3},$$

мы найдем по этой формуле:

$$-p_y^0 = 1{,}036\sigma_e',\quad 1{,}090\sigma_e',\quad 1{,}397\sigma_e',\quad 2{,}666\sigma_e'\ \text{и}\ 4{,}797\sigma_e';$$

точные же результаты будут:

$$-p_y^0 = 1{,}032\sigma_e',\quad 1{,}088\sigma_e',\quad 1{,}393\sigma_e',\quad 2{,}679\sigma_e'\ \text{и}\ 4{,}795\sigma_e',$$

так что погрешность не превышает ${}^1/_2{}^0/_0$, как и было указано.

Попробуем еще сравнить найденные числа с критической нагрузкой на пластину, свободно опертую всеми четырьмя кромками, сжимаемую нагрузкой p_y^0, но у которой сторона $2a$

будет в два раза больше, чем в только что рассмотренном случае; таким образом, положив

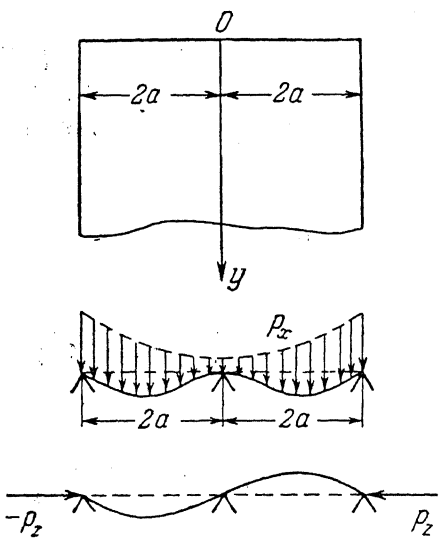
$$a : b = 6,\ 4,\ 2,\ 1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{3},$$

мы по формуле (92) найдем:

$$-p_y^0 = 1{,}056\sigma_e',\quad 1{,}129\sigma_e',\quad 1{,}562\sigma_e',\quad 4{,}000\sigma_e' \text{ и } 9{,}766\sigma_e'.$$

Сравнивая первые числа в обоих случаях, мы должны заключить, что, разрезая сжимаемую вдоль короткой стороны пластину на две равные части линией, перпендикулярной к длинной стороне, мы не слишком изменяем ее критическую нагрузку, если только $a > 2b$; это лишний раз подтверждает сделанное выше замечание о сравнительно слабом влиянии на обстоятельства изгиба пластины достаточно удаленных от средины коротких сторон опорного контура.

Определяя величину эйлеровых напряжений в связанных с прямоугольным контуром пластинах, мы все время считали опорные сечения пластины свободно опертыми или вполне свободными; употребляя приемы, подобные показанным выше, можно было бы найти критическую нагрузку и для тех случаев, когда одна или несколько кромок пластины будут вполне закрепленными; но мы не будем останавливаться на подобных задачах, потому что не имеем средств практически осуществить конструкцию, которая могла бы в достаточной мере помешать свободному повороту опорных сечений по всей длине кромки контура. При изгибе пластины нагрузкою p_x мы, однако, имеем право в некоторых случаях ожидать, что опорное сечение не повернется; так, например, если мы возьмем два соприкасающихся контура равной ширины

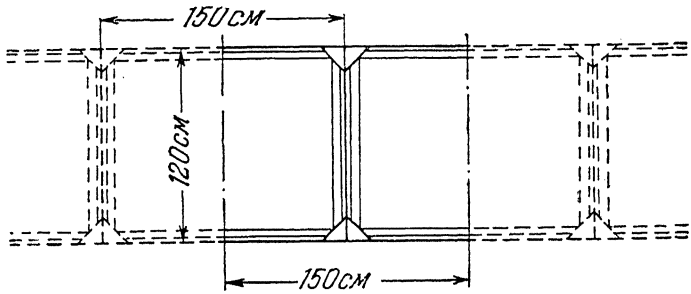


Черт. 72.

(см. черт. 72) и нагрузим оба участка пластины симметрично относительно оси Oy нагрузкой p_x, то опорное сечение пластины, совпадающее с этой осью, не будет повернуто, хотя бы мы и не приняли никаких мер к его закреплению; но если вместо изгибающей нагрузки p_x мы возьмем сжимающую p_z, то она повернет это сечение, и упругая кривая примет вид, показанный на нижнем чертеже 72 *). Скрепляя разными способами пластину с опорным контуром, мы можем до некоторой степени помешать этому повороту, но возникающие при этом опорные пары m_z всегда будут далеки от тех, которые соответствуют идеальному закреплению, и потому при расчетах ими приходится пренебречь, считая опорные сечения свободно опертыми.

В нижеследующем примере показано применение полученных нами результатов к расчету двутавровых балок с широкими поясами, встречающимися повсюду в судовых конструкциях.

Пример 36. Дано плоское перекрытие под равномерно распределенной нагрузкой, состоящее из ряда идущих параллельно двутавровых балок с пролетом в 15 метров, свободно



Черт. 73.

опертых на жесткий контур (черт. 73). Балки расположены в расстоянии 150 *см* друг от друга и состоят из стенок высотою 120 *см* при толщине в 8 *мм* и одинаковых поясков

*) С подобным обстоятельством мы уже встречались, рассматривая изгиб при сжатии трехопорных и многоопорных балок (см. примеры 20 и 21 в § 11 [1-й части Курса, изд. 1912 г.]) [27].

шириною 150 *см* при толщине 14 *мм*; пояски каждой балки, соединяясь с поясками двух соседних балок, образуют две параллельные плоскости, составленные из прочно связанных между собою листов, которые и воспринимают нагрузку на перекрытие; между балками в расстоянии 150 *см* друг от друга заведены диафрагмы, мешающие перекосу всей системы, а также взаимному сближению поясков и стенок балок.

Определим, выдержит ли это перекрытие без явных следов разрушения, но допуская остающиеся деформации, нагрузку столбом воды высотою в 12 *м*, и если нет, — то как надо изменить размеры его составных частей, чтобы достичь этого.

Допускаемые напряжения при указанном условии прочности можно уравнять критическим, и мы положим, что предел вытягивания и сжимания нашего материала будет 2000 *am*, аналогичный же предел для скалывающих напряжений — 1540 *am*.

Чтобы не осложнять задачу побочными обстоятельствами, мы пренебрежем теми напряжениями в поясках, которые возникают от непосредственного приложения к ним распределенной нагрузки, а также влиянием уголков, крепящих стенки и пояски, и заклепочных отверстий.

При заданных условиях все балки будут находиться в одинаковых условиях и, следовательно, будут гнуться независимо друг от друга, что сводит нашу задачу к расчету одной из этих балок.

Наибольшая нагрузка Q на каждую балку будет равна

$$Q = 1{,}2 \times 150 \times 1500 = 270\,000 \text{ кг} = 270 \text{ т},$$

наибольшая срезывающая сила будет в два раза меньше, а наибольший изгибающий момент при средине пролета будет равен

$$\frac{1}{8} \times 270 \times 1500 \approx 50\,600 \text{ т см}.$$

Что же касается момента сопротивления балки W и площади приведенной стенки ω_1, то, положив в формулах (49а) и (50а) *) $s = 149{,}2 \times 1{,}4 = 209$ *кв. см*, $\omega = 120 \times 0{,}8 = 96$ *кв. см* и $t = 1{,}4$ *см*, мы получим:

$$W = 26\,400 \text{ см}^3 \text{ и } \omega_1 = 91{,}3 \text{ см}^2.$$

*) См. стр. 292 и 293 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [28].

Соответственно найденным числам мы будем иметь:

$$\sigma_{max} = \frac{50\,600\,000}{26\,400} = 1920 \; am \text{ и } \tau_{max} = \frac{135\,000}{91{,}3} = 1480 \; am.$$

Эти напряжения будут несколько ниже критических, и так как наибольшие косые напряжения в нашем случае не могут превысить их *), то мы должны были бы заключить о достаточности размеров частей профиля нашей балки для нагрузки столбом воды высотою в 12 метров.

Теперь посмотрим, смогут ли сжатый поясок и стенка воспринять допущенные напряжения.

Мы видели, что пояски балок нашего подкрепления образуют плоскость, которая поддерживающими ее диафрагмами и стенками балок будет разбита на ряд квадратов размерами 150×150 *см*; таким образом, сжатый поясок может воспринять лишь такую сжимающую нагрузку, какая соответствует пластине толщиною в 1,4 *см*, свободно опертой на квадратный контур ($2a = 2b = 150$ *см*). Определяя эту нагрузку по формулам (92а) и (90а), мы найдем:

$$-p_z = 4 \times 2 \times 10^6 \left(\frac{1{,}4}{150}\right)^2 = 697 \; am.$$

Полученное нами сжимающее напряжение σ_{max} не будет одинаково по всей длине пояска, убывая до нуля к опорным сечениям балки пропорционально изгибающим моментам; но так как функция, представляющая эти моменты, имеет аналитический максимум в среднем сечении балки **), то изменяется она около этого сечения очень медленно, причем по эпюру моментов нетрудно убедиться, что такое изменение в пределах одного квадрата не превысит 4% от наибольшей величины функции. Отсюда мы заключаем, что если сжимающая нагрузка на участки сжатого пояса, соответствующие двум средним квадратам, изменяется в пределах от 1920 *am* до $1920 \times 0{,}96 = 1840$ *am*, а этот поясок не может воспринять свыше 700 *am*, то выбранная для него толщина (14 *мм*) является недостаточной даже и для половинной нагрузки.

---

*) См. пример 25 на стр. 297 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [29].

**) См. эпюр моментов для случая V на стр. 111 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [30].

Перейдем теперь к проверке толщины стенки балки на сжимающие и скалывающие напряжения. Площадь этой стенки разбивается диафрагмами на ряд прямоугольников 120×150 *см*, причем эти участки будут нагружены растягивающей и сжимающей нагрузкой, приложенной к вертикальным кромкам контура, т. е. по высоте балки, как показано на чертеже 70; величина этой нагрузки для разных участков стенки будет пропорциональна изгибающим моментам в соответствующих сечениях и, следовательно, будет наибольшей при середине балки, где и будет меняться в пределах от $+1920$ *ат* в точках близ растянутого пояска до -1920 *ат* — близ сжатого пояска; посмотрим, соответствует ли такая нагрузка эйлеровым напряжениям для пластины толщиною 8 *мм*, опертой на контур размерами 120×150; по формуле (96) и таблице на стр. 199 мы получим искомое напряжение равным ($y_0 = b$ и $a : b = 5 : 4$)

$$25 \times 2 \times 10^6 \left(\frac{0{,}8}{120}\right)^2 = 2220 \text{ ат},$$

так что в отношении сжимающих напряжений наша стенка является достаточно прочной.

Наибольшие скалывающие напряжения, как мы знаем, возникнут на крайних участках стенки, прилегающих к опорному контуру, причем они будут меняться по длине участка вдоль оси балки пропорционально величине срезывающей силы, а в нашем случае — прямо пропорционально расстоянию до среднего сечения балки; следовательно, близ первой диафрагмы они будут на 20% меньше, чем у опорного контура, изменяясь таким образом на длине крайнего участка в пределах от 1480 *ат* на $1480 \times 0{,}80 = 1180$ *ат*. Но предельная скалывающая нагрузка для пластины размерами 150×120 *см* при толщине 0,8 *см* по формуле (99) и таблице на стр. 206 будет равна ($a : b = 5 : 4$, $k'' = 8{,}2$)

$$8{,}2 \times 2 \times 10^6 \left(\frac{0{,}8}{120}\right)^2 = 730 \text{ ат}$$

и потому выбранная толщина стенки будет недостаточной.

Таким образом, предельной нагрузкой для нашего перекрытия будет давление столба не свыше 4,5 *м*, и, желая

увеличить эту нагрузку, мы должны поднять жесткость сжатых поясков и стенок наших балок.

Достичь этого можно или увеличением толщины этих частей профиля, или сближением стенок и диафрагм; так, в данном случае, утолстив стенки до 10 *мм*, мы понизим наибольшие скалывающие напряжения при заданном давлении примерно до 1080 *am*, тогда как предельная скалывающая нагрузка поднимется при этой толщине пластины до 1140 *am*; точно так же, утолстив сжатый поясок до 20 *мм* и утоняя растянутый до 13 *мм*, мы получим почти тот же момент сопротивления балки W, но сжимающие напряжения в пояске понизятся приблизительно в отношении 5 : 7, т. е. до 1370 *am*, вследствие смещения центра тяжести площади профиля по направлению к более толстому пояску *); вместе с тем утолщение этого пояска повысит предельную нагрузку его в отношении квадратов толщин листов, т. е. до предела

$$697 \times \left(\frac{20}{14}\right)^2 = 1420 \ am,$$

и следовательно, при таких изменениях прочность балки будет достаточной. Заметим, что при этом общий вес поясков и стенки возрастет на 19%.

Такого же увеличения прочности можно достичь введением промежуточных диафрагм; так, например, заводя для средних участков сжатого пояска по две полудиафрагмы **) между основными, мы уменьшим размер этих участков до 150×50 *см*, причем предельная сжимающая нагрузка на них возрастет до

$$2 \times 10^6 \left(\frac{1{,}4}{50}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{50}{150}\right)^2\right]^2 = 1940 \ am.$$

В крайних участках балки, близ опорного контура, достаточно будет ввести по одной промежуточной диафрагме, чтобы подразделить площадь стенки на более узкие прямоугольники и тем повысить ее предельную скалывающую нагрузку. По эпюрам изгибающих моментов и срезывающих

*) Соответственные формулы см. на стр. 291 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [31].

**) То-есть диафрагмы, идущие лишь в половину высоты балки, примыкая к сжатому поясу.

сил нетрудно отметить, в каких именно пределах по длине пролета нужно ставить добавочные диафрагмы. Заметим еще, что вес их может быть доведен до 12—15% от общего веса поясков и стенок, и эта прибавка представляется весьма умеренной по сравнению с возрастанием общей прочности балки почти в три раза.

---

§ 23. Гибкие пластины. Случай пластины, связанной с прямоугольным весьма длинным контуром. Уравнения, определяющие лишние неизвестные. Изучение вспомогательных функций и их таблица [32]

Гибкою пластиной мы условились называть такую, в которой при изгибе от нагрузки p_x развиваются настолько значительные напряжения p_y и p_z, направленные параллельно средней плоскости ее, что обстоятельства изгиба пластины заметно изменяются; ниже мы придем к некоторым другим определениям этого термина.

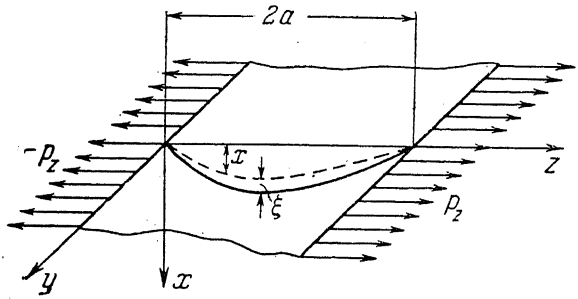
Задача об изгибе таких пластин решена в настоящее время лишь для тех случаев, когда опорный контур пластины представляет круг или весьма длинный прямоугольник [33]; мы остановимся лишь на этом последнем случае, как наиболее важном для наших целей, причем в дальнейшем попытаемся выяснить приближенно и влияние коротких сторон контура. Кроме того, оставаясь в пределах практических потребностей, мы ограничимся случаем равномерного распределения нагрузки p_x по всей площади контура; но применяемые нами приемы нетрудно распространить и на всякий другой способ распределения нагрузки.

Один из размеров прямоугольного контура, параллельный оси z, мы обозначим через $2a$ и будем называть пролетом пластины (черт. 74), другой же размер мы будем считать весьма большим, так что изогнутую поверхность пластины можно будет принять за цилиндрическую и все производные стрелки прогиба ξ по координате y считать нулями. Кроме равномерно распределенной изгибающей нагрузки p_x^0 мы приложим к длинным торцевым кромкам пластины равномерно распределенную нагрузку p_z^0, растягивающую или сжимающую

нашу пластину по направлению ее короткого размера. При этом, чтобы выяснить весьма заметное влияние начальной кривизны пластины, которым мы пренебрегали при изучении изгиба жестких пластин, мы предположим, что средняя плоскость нашей пластины согнута в цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси y; эту поверхность мы зададим уравнением

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \sin \frac{i\pi z}{2a}, \qquad (101)$$

причем число n членов этого ряда будем считать каким угодно, но при выборе коэффициентов c_i поставим условием,



Черт. 74.

чтобы стрелки прогиба x были по отношению к пролету $2a$ малыми величинами того же порядка, как и стрелки прогиба ξ; то же условие мы сохраним и для производных этих стрелок по координате z, подобно тому как делали для балок малой кривизны *). Заметим еще, что, давая числу i лишь нечетные значения, мы получим кривую, симметричную относительно линии $z = a$.

Говоря о жестких пластинах, мы считали их опорный контур также жестким, т. е. не допускающим перемещений точек опорных сечений пластины по направлению оси x, перпендикулярной к средней плоскости пластины, не считаясь вместе с тем с возможными перемещениями этих точек параллельно плоскости yz; теперь, сохраняя первое допущение,

*) См. стр. 220 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [33].

мы положим, что длинные кромки нашего контура при действии на пластину изгибающей нагрузки p_x^0 и растягивающей или сжимающей нагрузки p_z^0 могут смещаться в плоскости yz, но смещения эти происходят не свободно, а ограничены некоторыми специальными приспособлениями, которые мы будем называть распорами; при стремлении кромок контура сблизиться между собою эти распоры будут сжиматься, вызывая реакцию, растягивающую нашу пластину; обратно, при расхождении кромок возникает реакция, сжимающая пластину. Эту реакцию, отнесенную к единице площади опорного сечения пластины, мы обозначим через p_z' и будем называть цепным напряжением, полное же напряжение в пластине по оси z, равное $p_z^0 + p_z'$, мы обозначим через p_z. Если устройство распор таково, что длинные стороны опорного контура смещаются в своей плоскости, не искривляясь, и остаются параллельными их начальному положению, то напряжения p_z и p_z' будут распределены равномерно по площади опорных сечений и, следовательно, будут независимы от координаты y.

Совокупность всех сделанных допущений указывает, что цилиндрическая до изгиба средняя поверхность пластины останется цилиндрической и после приложения нагрузок p_x^0 и p_z^0, изменив лишь кривизну своей направляющей; это обстоятельство позволяет нам вместо изогнутой пластины рассматривать балку-полоску, выделенную двумя плоскостями, перпендикулярными к оси y, причем расстояние между ними мы возьмем равным единице. Таким образом, мы сведем нашу задачу к вопросу об изгибе балки малой кривизны под действием изгибающей равномерно распределенной по пролету нагрузки $2p_x^0 a$ и неизвестной осевой силы $p_z h$; при этом, как неоднократно указывалось выше *), в выражение момента инерции прямоугольного профиля этой балки $h^3 : 12$ нам придется ввести близкий к единице делитель $1 - \mu^2$, учитывающий влияние соседних с выделенной балкой полосок.

Дифференциальное уравнение, определяющее перемещения ξ точек изогнутой оси подобной балки, уже было получено

*) См. стр. 134 и 163.

нами [34] в таком виде:

$$\xi'' - k^2\xi = k^2\left(\frac{m_y}{hp_z} + x\right),$$

где через m_y назван изгибающий момент для нашей балки от равномерно распределенной нагрузки p_x^0, а величина k^2 равна

$$k^2 = \frac{12(1-\mu^2)p_z}{Eh^2};$$

ограничиваясь случаем полной симметрии нашей балки относительно плоскости xy, проходящей через ее среднее сечение (при $z = a$), мы можем написать:

$$m_y = m_0 - p_x^0 az\left(1 - \frac{z}{2a}\right),$$

где m_0 — пара закрепления на опорных сечениях балки; для дальнейших исследований нам будет удобнее представить эту зависимость в виде рядов Фурье, положив

$$m_y = m_0\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2a}}{i} - p_x^0 a^2\frac{16}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2a}}{i^3},$$

причем число i принимает лишь нечетные значения.

Тогда общий интеграл нашего уравнения, удовлетворяющий начальным условиям $\xi = 0$ при $z = 0$ и при $z = 2a$, получится в таком виде:

$$\xi = -4u^2\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i\sin\frac{i\pi z}{2a}}{4u^2+\pi^2i^2} - \frac{m_0u^2}{p_zh}\frac{16}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2a}}{i(4u^2+\pi^2i^2)} + \\ + \frac{p_x^0a^2u^2}{p_zh}\frac{64}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2a}}{i^3(4u^2+\pi^2i^2)}; \qquad (102)$$

в этих суммах число $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$, а аргумент u, как и раньше, равен ka, так что мы можем написать:

$$u^2 = \frac{12(1-\mu^2)p_za^2}{Eh^2} = \frac{p_z}{\sigma_e}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \qquad (103)$$

причем через σ_e обозначена абсолютная величина эйлерова напряжения для рассматриваемой пластины при сжатии ее нагрузкой p_z, когда ее кромки $z=0$ и $z=2a$ свободно оперты на контуре.

При растягивающей пластину нагрузке ($p_z > 0$) аргумент u будет действительным и может изменяться от нуля до бесконечности; при сжимающем же напряжении p_z аргумент становится мнимым и, как увидим ниже, не может перейти за некоторый предел, лежащий между $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$ и $\pi\sqrt{-1}$, так как при подходе его к этому пределу перемещение ξ и его производные по z начинают неопределенно возрастать.

Рассматриваемая балка-полоска будет двукратно неопределимой и за лишние неизвестные естественнее всего было бы взять опорную пару m_0 и осевую реакцию $p_z'h$; но эта последняя величина входит в уравнение упругой кривой (102) лишь через посредство напряжения p_z и связанного с ним аргумента u, ввиду чего мы и возьмем за неизвестное этот аргумент. Заметим при этом, что величина u входит в уравнение (102) не линейно, а в знаменатели членов бесконечных рядов *), вследствие чего решение уравнений, определяющих лишние неизвестные, представит значительные трудности; займемся теперь составлением этих уравнений.

Для раскрытия неопределимости мы воспользуемся нашим обычным приемом, связывая величины искомых неизвестных с теми ограничениями свободных перемещений опорных сечений балки, которые вызываются тем или иным устройством опор. Если, как и раньше мы назовем через $\mathfrak{a}$ коэффициент жесткости опорного контура по отношению к повороту лежащих над ним сечений, то условие $(\xi')_{z=0} = \mathfrak{a}m_0$ и даст нам

---

*) При помощи приемов, указанных в § 8 (стр. 184—191 [1-й части Курса, изд. 1912 г.]), эти ряды могут быть суммированы, и суммы их будут выражаться через тригонометрические или гиперболические функции, под знаком которых и войдет искомый аргумент u; мы уже не раз пользовались подобными преобразованиями [35].

первое уравнение для раскрытия неопределимости; определяя ξ' из уравнения (102), мы будем иметь:

$$(\xi')_{z=0} = -\frac{2\pi u^2}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{ic_i}{4u^2+\pi^2i^2} - \frac{m_0u^2}{p_zh}\frac{8}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4u^2+\pi^2i^2} +$$

$$+\frac{p_x^0au^2}{p_zh}\frac{32}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2(4u^2+\pi^2i^2)} = \mathfrak{a}m_0;$$

отсюда, суммируя два последних ряда, найдем:

$$m_0 = \frac{p_x^0a^2(u-\operatorname{th}u) - 2\pi u^3p_zh\sum\frac{ic_i}{4u^2+\pi^2i^2}}{u(u\operatorname{th}u+\mathfrak{a}p_zah)}; \qquad (104)$$

из этого выражения легко найти пару m_0, если известна вторая лишняя неизвестная (p_z или u) и начальная кривизна пластины, определяемая коэффициентами c_i.

При идеальном закреплении опорных сечений балки-полоски в отношении поворота их, т. е. при $\mathfrak{a}=0$, пара закрепления m_0 получится наибольшей по величине, если только по опорному контуру пластины не приложено других пар; эта наибольшая пара равна

$$(m_0)_{\max} = \frac{1}{3}p_x^0a^2\left[\frac{3(u-\operatorname{th}u)}{u^2\operatorname{th}u}\right] - \frac{2\pi u}{\operatorname{th}u}p_zh\sum_{i=1}^{n}\frac{ic_i}{4u^2+\pi^2i^2}. \qquad (104a)$$

Выражение, заключенное в большие скобки, зависящее лишь от аргумента u, будет часто нам встречаться в дальнейшем, и для сокращения письма мы назовем его через $\chi(u)$; нетрудно показать, что если напряжение p_z будет растягивающим, т. е. при $u^2>0$, эта функция будет меньше единицы, неопределенно убывая с увеличением аргумента; при $p_z=0$ функция обращается в единицу, а при сжатии пластины давлением p_z, т. е. при мнимых значениях аргумента, функция будет больше единицы, обращаясь в бесконечность при $u=\pi\sqrt{-1}$.

Пару m_0 можно представить как некоторую часть наибольшей пары $(m_0)_{\max}$, положив

$$m_0 = \varkappa (m_0)_{\max} = \frac{1}{3} \varkappa \chi (u) p_x^0 a^2 - 2\pi\varkappa \frac{u}{\operatorname{th} u} p_z h \sum_{i=1}^{n} \frac{ic_i}{4u^2 + \pi^4 i^4}, \tag{104b}$$

причем величина $\varkappa$ будет правильной дробью, и мы будем называть ее, как и раньше, коэффициентом опорной пары *); величина эта определяется выражением

$$\varkappa = \frac{u \operatorname{th} u}{\mathfrak{a} p_z a h + u \operatorname{th} u}, \tag{104c}$$

или при замене p_z через соотношение (103) —

$$\varkappa = \frac{\operatorname{th} u}{\frac{\mathfrak{a}}{a} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} u + \operatorname{th} u}; \tag{104d}$$

проследим при помощи этого соотношения, как меняется коэффициент пары $\varkappa$ при изменении аргумента u, или, что то же, нагрузки p_z, если характеризующая жесткость опорного контура величина $\mathfrak{a}$ будет заданной.

Так как $\operatorname{th} u$ при действительных значениях аргумента будет меньше u, приближаясь к единице по мере возрастания этой величины, то коэффициент $\varkappa$ будет падать с увеличением аргумента и при больших значениях его будет малою величиною порядка $\frac{1}{u}$; так, например, положив

$$\mathfrak{a} = \frac{12(1-\mu^2) a}{Eh^3},$$

мы найдем:

при $u =$	0	1	2	5	10
$\varkappa =$	0,500	0,432	0,325	0,167	0,091;

отсюда мы заключаем, что при значительных растягивающих напряжениях p_z нужно иметь чрезвычайно большую жесткость контура (т. е. очень малое $\mathfrak{a}$), чтобы получить заметные пары

*) См. стр. 280 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [36].

закрепления m_0. Обратно, при сжимающих напряжениях p_z коэффициент $\varkappa$, определяемый выражением

$$\varkappa = \frac{\operatorname{tg} u_1}{\frac{a}{a}\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}u_1 + \operatorname{tg} u_1}, \quad \text{при} \quad u^2 = -u_1^2 < 0$$

будет возрастать с увеличением аргумента и при $u_1 = \frac{1}{2}\pi$ обратится в единицу; при дальнейшем возрастании сжимающей нагрузки этот коэффициент обратится в бесконечность, если соответственное значение для u_1 определить из уравнения

$$\frac{a}{a}\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}u_1 + \operatorname{tg} u_1 = 0\ ^*),$$

но так как неопределенно большому коэффициенту $\varkappa$ будет соответствовать такая же пара m_0 и неопределенно возрастающие стрелки ξ, то найденное значение аргумента определит эйлерово напряжение для нашей пластины. Так, например, для выбранного выше значения a последнее уравнение примет вид

$$u_1 + \operatorname{tg} u_1 = 0,$$

откуда мы и найдем $u_1 = 2{,}029$; таким образом, для контура такой жесткости это напряжение будет в $(\pi : 2{,}029)^2 = 2{,}4$ раза меньше, чем для контура абсолютно жесткого.

Заметим еще, что вместо опорной пары m_0 за лишнюю неизвестную для нашей пластины можно взять ее коэффициент $\varkappa$, связанный с другой лишней неизвестной аргументом u посредством соотношения (104d); такая замена представит некоторые удобства, так как искомая неизвестная будет отвлеченным числом, лежащим в заранее известных пределах.

Перейдем теперь к составлению второго уравнения, служащего для раскрытия неопределимости рассматриваемой балки-полоски; так как за вторую неизвестную мы приняли

---

*) Это уравнение совпадает с выражением, определяющим эйлерову нагрузку для балок, найденным выше (см. стр. 251 [1-й части Курса, изд. 1912 г.]) [37].

аргумент u или пропорциональную квадрату его полную осевую нагрузку p_z, то для получения этого уравнения нам нужно рассмотреть соответственное этой нагрузке перемещение опорного сечения в направлении оси z; мы уже указали, что для ограничения свободы этих перемещений между длинными сторонами опорного контура устанавливаются особые распоры, обыкновенно в равных расстояниях друг от друга; частное, полученное от деления площади поперечного сечения каждой из этих распор на расстояние между ними, иначе говоря — площадь распоры, приходящуюся на единицу длины пластины по направлению длинной стороны контура, мы будем называть приведенной площадью распоры и обозначим буквою t; кроме того, мы предположим, что на эти распоры действует та же сжимающая или растягивающая нагрузка p_z^0, как и на всю пластину.

При этих условиях на каждый участок распоры площадью t, приходящийся на единицу длины пластины, будут действовать: a) сжимающая или растягивающая сила $p_z^0 t$ и b) сила, уравновешивающая осевую реакцию полоски-балки, равная $(-p_z' h)$.

Таким образом, смещение опорного контура в направлении оси z будет равно

$$\frac{p_z^0 t - p_z' h}{Et} a = \frac{p_z^0 (t+h) - p_z h}{Et} a;$$

но так как в большинстве случаев распоры конструируются в виде пластин, перемещения точек которых параллельно их средней плоскости не будут вполне свободными, то, как мы видели выше, действительные перемещения точек контура получатся умножением найденного выражения на близкий к единице множитель $(1 - \mu^2)$.

Рассмотрим теперь криволинейную ось нашей балки-полоски, которая до изгиба ее определялась уравнением (101); длина дуги этой кривой от несмещенного еще опорного сечения до среднего сечения балки определится известным выражением

$$\int_0^a \sqrt{1 + (x')^2}\, dz;$$

но так как по условию производная x' является величиной малой, то, разложив наш радикал по формуле бинома и отбросив малые члены четвертого и высших порядков относительно малой x', мы получим такое выражение для длины рассматриваемой части оси:

$$a + \frac{1}{2}\int_0^a (x')^2\, dz;$$

после приложения нагрузок p_x^0 и p_z длина этой линии должна получить приращение, во-первых, от изменения ее кривизны, а во-вторых, вследствие удлинения или укорочения всей балки от осевой нагрузки p_z; это последнее изменение, очевидно, равно

$$(1-\mu^2)\frac{p_z}{E}\left[a + \frac{1}{2}\int_0^a (x')^2 dz\right],$$

причем второй член в скобках, как малая величина высшего порядка по сравнению с первым, может быть отброшен; при изменении же стрелок x нашей кривой на $x+\xi$ длина ее будет равна

$$a + \frac{1}{2}\int_0^a (x'+\xi')^2\, dz,$$

вследствие чего проекция дуги на ось z укоротится на величину

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^a (x'+\xi')^2\, dz - \int_0^a (x')^2\, dz\right] = \frac{1}{2}\int_0^a (2x'\xi' + \xi'^2)\, dz.$$

Таким образом, полное изменение в длине проекции нашей дуги на ось z определится выражением

$$(1-\mu^2)\frac{p_z a}{E} - \frac{1}{2}\int_0^a (2x'\xi' + \xi'^2)\, dz$$

и вместе с тем должно быть равно найденному выше перемещению опорного контура в направлении этой оси, так как среднее сечение балки-полоски в этом направлении по симметрии не смещается.

Уравняв указанные выражения друг другу, мы после некоторых преобразований получим:

$$\int_0^1 (2x'\xi' + \xi'^2)\, d\left(\frac{z}{a}\right) = 2(1-\mu^2)\frac{h+t}{t}\frac{p_z - p_z^0}{E}; \qquad (105)$$

это и будет второе уравнение для нахождения лишних неизвестных, причем входящие в него функции x' и ξ' определятся по выражениям (101) и (102).

Входящий в правую часть полученного уравнения делитель $t:(t+h)$ мы обозначим буквою K и будем называть коэффициентом распора, так как он характеризует степень влияния распор; при весьма прочных по сравнению с листом распорах (t велико сравнительно с h) этот коэффициент будет близок к единице, при слабых же распорах — близок к нулю. Таким образом, число K будет удовлетворять неравенству

$$0 \leqslant K \leqslant 1,$$

причем для определения обстоятельств изгиба нашей балки-полоски его величина должна быть задана.

Найдем теперь интеграл, стоящий в левой части последнего уравнения.

В выражения (101) и (102), определяющие x и ξ, координата z входит только под знаками функции $\sin\frac{i\pi z}{2a}$, где i — нечетное число; следовательно, в первую производную функций x и ξ по этой координате она войдет не иначе, как под знаком функции $\cos\frac{i\pi z}{2a}$.

При нахождении выражений $x'\xi'$ и ξ'^2 нам придется перемножать между собою ряды, подобные входящим в формулы (101) и (102), причем одни из членов получаемых выражений будут иметь множителем произведение косинусов разной кратности

$$\cos\frac{i\pi z}{2a}\cos\frac{j\pi z}{2a}, \quad \text{где } i \text{ не равно } j,$$

другие же члены будут множиться на $\cos^2 \frac{i\pi z}{2a}$; после умножения на $d\left(\frac{z}{a}\right)$ и интегрирования в пределах от нуля до единицы все члены первой категории обратятся в нуль, остальные же умножатся на

$$\int_0^1 \cos^2 \frac{i\pi z}{2a}\, d\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{2},$$

и, таким образом, мы получим:

$$\int_0^1 (2x'\xi' + \xi'^2)\, d\left(\frac{z}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p_z h}\right)^2 \left(\frac{8}{a}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(m_0 - \frac{4p_z^0 a^2}{\pi^2 i^2}\right)^2 \frac{1}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2} -$$

$$- \frac{u^2}{p_z h} \frac{4\pi^3}{a^2} \sum_{i=1}^{n} \left(m_0 - \frac{4p_x^0 a^2}{\pi^2 i^2}\right) \frac{i^3 c_i}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2} -$$

$$- \frac{\pi^2 u^2}{a^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(2u^2 + \pi^2 i^2)\, i^2 c_i^2}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2}; \qquad (106)$$

заменив здесь m_0 и p_z через найденные выше выражения

$$m_0 = \frac{1}{3} \varkappa \chi(u)\, p_x^0 a^2 - 2\pi\varkappa \frac{u}{\operatorname{th} u}\, p_z h \sum_{j=1}^{n} \frac{j c_j}{4u^2 + \pi^2 j^2}, \qquad (104b)$$

$$p_z = \frac{u^2 E h^2}{12(1-\mu^2)\, a^2}, \qquad (103)$$

мы представим уравнение (105) в таком виде, что кроме величин, характеризующих рассматриваемую пластину (a, h, K, c_i и пр.) и приложенную к ней нагрузку (p_x^0 и p_z^0), в него войдут только выбранные лишние неизвестные u и $\varkappa$; поэтому в связи с найденным выше уравнением (104d) оно и послужит нам для получения этих неизвестных.

Не останавливаясь здесь ни на указанных преобразованиях уравнения (105), ни на тех способах, которые дают возможность решить его совместно с уравнением (104d) относительно неизвестных u и $\varkappa$, мы обратимся к изучению некоторых частных случаев, имеющих особое значение для задач строительной механики корабля, на которых и выясним те приемы, которые могут привести нас к цели и при рассмотрении общего случая.

Прежде всего мы разберем случай, когда начальная кривизна пластины является столь малой, что влиянием ее можно пренебречь.

Если начальная кривизна пластины является пренебрежимо малой, то, полагая в наших формулах

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \ \ldots, \ c_n = 0,$$

мы будем иметь:

$$\xi = -\frac{m_0 u^2}{p_z h}\frac{16}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2a}}{i\,(4u^2+\pi^2 i^2)} + \frac{p_x^0 a^2 u^2}{p_z h}\frac{64}{\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2a}}{i^3\,(4u^2+\pi^2 i^2)}, \tag{102a}$$

$$m_0 = \frac{1}{3}\varkappa\chi(u)\,p_x^0 a^2 = \frac{1}{3}\varkappa p_x^0 a^2\left[\frac{3\,(u-\operatorname{th} u)}{u^2\operatorname{th} u}\right], \tag{104b}$$

откуда после подстановки m_0 и суммирования входящих в наши выражения рядов мы найдем:

$$\xi = \frac{p_x^0 a^2}{p_z h}\frac{\operatorname{th} u + \varkappa\,(u-\operatorname{th} u)}{u^2\operatorname{th} u}\left[\frac{\operatorname{ch} u\left(1-\frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch} u} - 1\right] + \frac{p_x^0 z\,(2a-z)}{2p_z h}. \tag{102b}$$

По этому уравнению мы можем определить как стрелку прогиба ξ, так и ее производные по координате z для любого сечения пластины; что же касается лишних неизвестных $\varkappa$ и u, то они определятся из уравнений (104d) и (105), причем последнее уравнение может быть преобразовано и значительно упрощено; займемся теперь этими преобразованиями.

Возьмем выражение (106)

$$\int_0^1 (2x'\xi' + \xi'^2)\, d\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p_z h}\right)^2 \left(\frac{8}{a}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(m_0 - \frac{4p_x^0 a^2}{\pi^2 i^2}\right)^2 \frac{1}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2} \qquad (106)$$

и заменим в нем m_0 и p_z при помощи соотношения (104b) и (103); тогда мы получим:

$$\int_0^1 (2x'\xi' + \xi'^2)\, d\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{96(1-\mu^2)p_x^0 a^3}{Eh^3}\right]^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{3}\varkappa\chi(u) - \frac{4}{\pi^2 i^2}}{4u^2 + \pi^2 i^2}\right]^2;$$

подставляя это выражение в уравнение (105), мы после некоторых преобразований найдем:

$$\frac{108}{u^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{3}\varkappa\chi(u) - \frac{4}{\pi^2 i^2}}{4u^2 + \pi^2 i^2}\right]^2 = \frac{1}{K(1-\mu^2)^2} \left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^8 \left(1 - \frac{p_z^0}{p_z}\right). \qquad (105a)$$

Все множители в правой части этого уравнения, кроме последнего, будут заключать лишь заданные величины, характеризующие размеры нашей пластины, упругие свойства ее материала и изгибающую ее нагрузку; последний же множитель содержит еще и неизвестное напряжение p_z. Левая же часть уравнения после того, как будет выполнено суммирование, будет зависеть только от двух величин — аргумента u и коэффициента опорной пары $\varkappa$, почему мы и назовем ее через $F(\varkappa, u)$; при этом аргумент u войдет в левую часть уравнения под знаком дробных и трансцендентных функций ($\operatorname{th} u$), по отношению же к букве $\varkappa$ выражение $F(\varkappa, u)$ будет

целой рациональной функцией второй степени и может быть представлено в таком виде:

$$F(\varkappa, u) = (1 - \varkappa) U_0 + \varkappa U_1 - \varkappa (1 - \varkappa) U_2, \qquad (107)$$

где U_0, U_1 и U_2 будут зависеть лишь от аргумента u и могут быть получены из общего выражения функций $F(\varkappa, u)$; при этом заметим, что $F(0, u) = U_0$ и $F(1, u) = U_1$.

Развертывая левую часть уравнения (105а) и суммируя получающиеся ряды, мы найдем:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{1728}{\pi^4 u^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4 (4u^2 + \pi^2 i^2)^2} = \\ &= \frac{9}{8u^6} - \frac{27}{16} \frac{5(u - \operatorname{th} u) - u \operatorname{th}^2 u}{u^9}, \\ U_1 &= \frac{12}{u^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left[\chi(u) - \frac{12}{\pi^2 i^2}\right]^2}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2} = \\ &= \frac{45}{16u^6} - \frac{27}{16} \frac{(u - \operatorname{th} u)(u + 4 \operatorname{th} u)}{u^8 \operatorname{th}^2 u}, \\ U_2 &= \frac{12}{u^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi^2(u)}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2} = \\ &= \frac{27}{16} \frac{(u - \operatorname{th} u)^2}{u^9 \operatorname{th}^2 u} (u \operatorname{th}^2 u - u + \operatorname{th} u); \end{aligned}\right\} \qquad (107а)$$

займемся теперь исследованием функций F и U.

При малых значениях аргумента u все три функции U могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням аргумента, если мы вместо $\operatorname{th} u$ подставим его разложение

$$\operatorname{th} u = u - \frac{1}{3} u^3 + \frac{2}{15} u^5 - \frac{17}{315} u^7 + \frac{62}{2835} u^9 - \ldots$$

при $-\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 < u^2 < \infty$; тогда получим:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{51}{280u^2}\left(1 - \frac{124}{153} u^2 + \frac{1382}{2805} u^4 - \ldots\right), \\ U_1 &= \frac{1}{140u^2}\left(1 - \frac{1}{5} u^2 + \frac{1}{33} u^4 - \ldots\right), \\ U_2 &= \frac{1}{8u^2}\left(1 - \frac{14}{15} u^2 + \frac{65}{105} u^4 - \ldots\right); \end{aligned}$$

из этих рядов видно, что при $u = 0$ все функции обращаются в бесконечность и при действительных значениях аргумента в сопредельности с нулем они будут положительными, для мнимых же значений его — отрицательными, причем по абсолютной величине первая функция будет больше второй. Далее, заметив, что при возрастании аргумента функция $\operatorname{th} u$ неопределенно и быстро приближается к единице, мы найдем такие приближенные выражения этих функций при действительных и больших значениях аргумента *):

$$U_0 = \frac{9}{8u^6} - \frac{27\,(4u-5)}{16u^9},$$

$$U_1 = \frac{9}{8u^6} - \frac{27\,(3u-4)}{16u^8},$$

$$U_2 = \frac{27}{16u^7} - \frac{27\,(2u-1)}{16u^9};$$

из этих выражений мы видим, что с возрастанием аргумента все три функции неопределенно подходят к нулю, оставаясь положительными, причем последняя функция стремится к нулю быстрее двух первых, которые подходят к общему пределу $\frac{9}{8u^6}$.

Наконец, при мнимых значениях аргумента, когда $\operatorname{th} u$ заменится через $\sqrt{-1}\operatorname{tg} u_1$, где $u_1^2 = -u^2$, легко видеть, что первая функция обратится в $-\infty$ при $u_1 = \frac{1}{2}\pi - 0$, вторая подойдет к тому же пределу при $u_1 = \pi - 0$, а третья будет равна $-\infty$ при $u_1 = \frac{1}{2}\pi - 0$; графически все эти функции представлены на чертеже 75.

Посмотрим теперь, при каком значении x функция $F(x, u)$ становится наибольшей или наименьшей, если x изменяется в нужных нам пределах $0 \leqslant x \leqslant 1$; взяв производную этой функции по x, мы получим:

$$\frac{dF}{dx} = -U_0 + U_1 - U_2 + 2x_1 U_2 = 0,$$

---

*) Например, при $u = 5$ $\operatorname{th} u = 0{,}9999092$ и наши выражения при $u > 5$ будут точны до $0{,}1\%$.

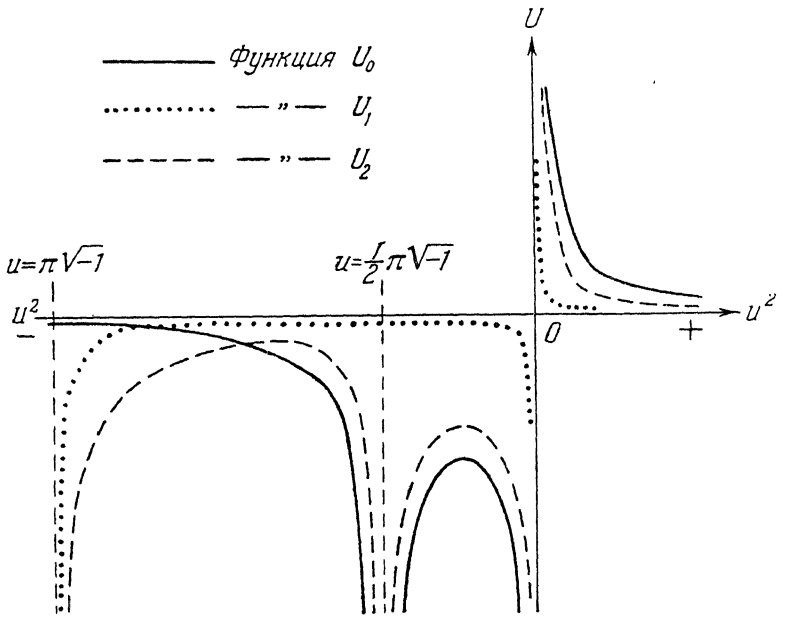
откуда

$$0 \leqslant x_1 = \frac{U_0 - U_1 + U_2}{2U_2} \leqslant 1;$$

при действительных значениях аргумента функция $U_2 > 0$ и потому аргумент, соответствующий искомому максимуму или минимуму функции $F(x, u)$, должен удовлетворять условиям

$$0 < U_0 - U_1 + U_2 < 2U_2;$$

подставив вместо функций U их выражения (107а), мы после



Черт. 75.

некоторых преобразований и сокращений на положительные множители u, $\operatorname{th} u$ и $u - \operatorname{th} u$ получим:

$$0 < -u\operatorname{th}^3 u - 3\operatorname{th}^2 u + 3u\operatorname{th} u < -u\operatorname{th}^3 u + \\ + u^2\operatorname{th}^2 u - \operatorname{th}^2 u + 2u\operatorname{th} u - u^2;$$

первое неравенство выполняется при $u > 1{,}5$, второе же может быть написано в таком виде:

$$0 < u^2\operatorname{th}^2 u + 2\operatorname{th}^2 u - u\operatorname{th} u - u^2,$$

или

$$(2u)^2 + 2u\operatorname{sh} 2u < 4(\operatorname{ch} 2u - 1);$$

развертывая $\operatorname{sh} 2u$ и $\operatorname{ch} 2u$ в ряды по степеням аргумента, мы найдем:

$$(2u)^2 + (2u)^2 + \frac{(2u)^4}{3!} + \frac{(2u)^6}{5!} + \frac{(2u)^8}{7!} + \ldots <$$

$$< \frac{4}{2}(2u)^2 + \frac{4}{4}\frac{(2u)^4}{3!} + \frac{4}{6}\frac{(2u)^6}{5!} + \frac{4}{8}\frac{(2u)^8}{7!} + \ldots;$$

сократив члены с u^2 и u^4, мы увидим, что такое неравенство не может иметь места при $u^2 > 0$ и, следовательно, величина $\varkappa_1$, при которой $F(\varkappa, u)$ обращается в максимум или минимум, лежит вне нужных нам пределов. Но так как $F(0, u) = U_0$ и $F(1, u) = U_1$, причем, как мы видели, $U_0 > U_1$, то мы можем заключить, что $U_0 > F(\varkappa, u) > U_1$ при $u^2 > 0$, причем $F(\varkappa, u)$ непрерывно убывает с возрастанием $\varkappa$, если этот коэффициент лежит в пределах $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. К подобному же выводу, лишь с переменой знаков неравенства, мы можем прийти и для мнимых значений аргумента, если только $u^2 > -\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2$.

Заметим еще, что при действительных и больших значениях аргумента функции U_0 и U_1 стремятся к одинаковому пределу $\frac{9}{8u^6}$; к тому же пределу будет подходить в силу найденного неравенства и функция $F(\varkappa, u)$ независимо от величины коэффициента $\varkappa$, если только он не выходит из указанных границ. При мнимых же значениях аргумента функция $F(\varkappa, u)$ обратится в $-\infty$ при аргументе, лежащем в пределах $\frac{1}{2}\pi < u_1 < \pi$.

Теперь мы можем вернуться к исследованию нашего уравнения (105а)

$$F(\varkappa, u) = \frac{1}{(1-\mu^2)^2}\frac{1}{K}\left(\frac{E}{p_x}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8\left(1 - \frac{p_z^0}{p_z}\right),$$

причем прежде всего выясним знак величин $p_z - p_z^0 = p_z'$ и p_z.

Положим, что на нашу пластину действует только изгибающая нагрузка p_x, направленная же параллельно плоскости пластины нагрузка p_z^0 равна нулю; тогда правая часть нашего

уравнения всегда будет положительной, а потому, называя соответствующий аргумент через u_0, мы будем иметь:

$$F(\varkappa, u_0) > 0 \quad \text{и} \quad u_0^2 > 0;$$

таким образом, цепное напряжение p_z', равное в данном случае p_z, будет всегда положительным, т. е. растягивающим пластину.

Сделаем теперь нагрузку p_z^0 растягивающей, т. е. положим $p_z^0 > 0$; так как при этом напряжение p_z не может сделаться сжимающим, то мы должны положить и $p_z > 0$, а следовательно,

$$u^2 > 0 \quad \text{и} \quad F(\varkappa, u) > 0;$$

последнее неравенство показывает, что множитель

$$1 - \frac{p_z^0}{p_z} > 0$$

и потому $p_z > p_z^0 > 0$, $p_z' > 0$; но так как этот множитель вместе с тем должен быть менее единицы, то

$$F(\varkappa, u) < F(\varkappa, u_0) \text{ и } u_0 < u < \infty.$$

Отсюда видно, что аргумент u может сделаться мнимым только при нагрузках, сжимающих пластину, причем нетрудно найти и ту границу для p_z^0, при которой u^2 и p_z становятся отрицательными; в самом деле, на этой границе аргумент u должен обратиться в нуль, а функция $F(\varkappa, u)$ — в бесконечность, и потому вблизи этой границы мы будем иметь:

$$F(\varkappa, u) = (1 - \varkappa)\frac{51}{280u^2} + \varkappa\frac{1}{140u^2} - \varkappa(1 - \varkappa)\frac{1}{8u^2};$$

но для того чтобы функция $F(\varkappa, u)$ была велика, множитель

$$\left[1 + \frac{(-p_z^0)}{p_z}\right]$$

также должен быть очень большим, что возможно только при p_z, близком к нулю; заметив, что при этом первый член нашего множителя (единица) делается ничтожно малым по

сравнению со вторым, мы можем написать правую часть уравнения (105а) в таком виде:

$$\frac{1}{(1-\mu^2)^2}\frac{1}{K}\left(\frac{E}{p_x}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8\frac{p_z^0}{p_z},$$

или, подставляя вместо p_z его величину из формулы (103), вместо написанного выражения мы найдем:

$$\frac{12}{1-\mu^2}\frac{1}{K}\frac{E}{p_x^2}\left(\frac{h}{2a}\right)^6\frac{p_z^0}{u_1^2};$$

сравнивая теперь обе части нашего уравнения, мы после сокращения на $\frac{1}{u^2}$ получим следующее выражение для предельной сжимающей нагрузки $(p_z^0)_1$, при повышении которой аргумент становится мнимым:

$$(p_z^0)_1 = -\frac{1}{3360}(1-\mu^2)K\frac{p_x^2}{E}\left(\frac{2a}{h}\right)^6[51(1-\varkappa)+2\varkappa-35\varkappa(1-\varkappa)].$$

Таким образом, если

$$0 > p_z^0 > (p_z^0)_1,$$

то

$$u_0 > u > 0,\ p_z > 0 \quad \text{и} \quad p_z' > 0;$$

если же

$$p_z^0 < (p_z^0)_1 < 0,$$

то

$$u^2 < 0,\quad p_z < 0,\quad F(\varkappa,\ u) < 0 \quad \text{и} \quad p_z' > 0.$$

Из сказанного видно, что, какова бы ни была нагрузка p_z^0, мы всегда имеем:

$$p_z' = p_z - p_z^0 > 0.$$

Теперь посмотрим, какими свойствами будет обладать пластина, если соответственный ей аргумент u_0 примет свои предельные значения, т. е. нуль и бесконечность. Заметим, что уравнение (105а) мы можем теперь переписать в таком виде:

$$F(\varkappa,\ u) = F(\varkappa,\ u_0)\left(1-\frac{p_z^0}{p_z}\right) = F(\varkappa,\ u_0)\frac{p_z'}{p_z}; \quad (105а')$$

выберем такую пластину, для которой аргумент u_0 будет очень мал и, следовательно, функция $F(\varkappa, u_0)$, равная

$$\frac{1}{(1-\mu^2)^2}\cdot\frac{1}{K}\left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8,$$

будет весьма велика; для этого, очевидно, нужно или понизить коэффициент распора K, т. е. поставить сравнительно слабые распоры, или уменьшить нагрузку p_x^0, или, наконец, увеличить отношение $\frac{h}{a}$, т. е. взять пластину сравнительно толстую. Тогда, чтобы уравнение (105а′) могло иметь место, мы должны предположить:

1) или что функция $F(\varkappa, u)$ также велика и, стало быть, аргумент u и напряжение p_z близки к нулю,

2) или что цепное напряжение p_z' очень мало.

Разберем, возможно ли первое предположение; так как при малых значениях аргумента функция $F(\varkappa, u)$ будет равна $\frac{(\varkappa)}{u^2}$, где через $(\varkappa)$ назван множитель

$$\frac{1}{280}[51(1-\varkappa)+2\varkappa-35\varkappa(1-\varkappa)],$$

остающийся всегда конечным, а напряжение p_z связано с аргументом соотношением (103)

$$p_z=\frac{u^2Eh^2}{12(1-\mu^2)a^2},$$

то, подставляя эти выражения в уравнение (105а′) и сокращая на $\frac{1}{u^2}$, мы найдем:

$$(\varkappa)Eh^2=12(1-\mu^2)a^2F(\varkappa, u_0)p_z';$$

из этого равенства видно, что с возрастанием величины $F(\varkappa, u_0)$ цепное напряжение также должно неопределенно уменьшаться; таким образом, заданная нагрузка $p_z^0=p_z-p_z'$ оказывается равной разности двух неопределенно убывающих величин, чего, конечно, быть не может; ввиду этого наше первое предположение отпадает, и мы должны остановиться на втором предположении о малости величины p_z'.

Таким образом, с возрастанием функции $F(\varkappa, u_0)$ или, что то же, с понижением аргумента u_0 цепные напряжения p_z' уменьшаются и, следовательно, наша пластина становится жесткой; ниже мы установим предельную величину этого аргумента, при которой влияние цепных напряжений будет пренебрежимо малым для расчетов практического характера.

Нетрудно показать, что уравнение средней поверхности пластины (102а) при замене в нем p_z на p_z^0 и при $m_0 = 0$ совпадет с аналогичным уравнением (89) для жесткой пластины, которое было найдено в § 21 (см. стр. 175).

Положим теперь, что функция $F(\varkappa, u_0)$ для нашей пластины сделалась величиной очень малой, что может иметь место при пластине очень тонкой или сильно нагруженной изгибающей нагрузкой p_x^0, и пусть нагрузка p_z^0 будет растягивающей. Тогда уравнение (105а′)

$$F(\varkappa, u) = F(\varkappa, u_0)\frac{p_z'}{p_z}$$

может быть удовлетворено только в том случае, когда функция $F(\varkappa, u)$ мала и, следовательно, аргумент u велик, так как множитель $p_z' : p_z$, равный $p_z' : (p_z' + p_z^0)$, при $p_z^0 > 0$ будет меньше единицы; но если $u^2 > 0$ и велико, то, как мы видели,

$$F(\varkappa, u) = \frac{9}{8u^6} = \frac{9}{8} : \left[\frac{12(1-\mu^2)a^2 p_z}{Eh^2}\right]^3 = \frac{1}{24(1-\mu^2)^3}\left(\frac{E}{p_z}\right)^3\left(\frac{h}{2a}\right)^6,$$

и, подставляя это выражение в уравнение (105а), получим:

$$p_z^3 - p_z^0 p_z^2 = \frac{KEp_x^2}{24(1-\mu^2)}\left(\frac{2a}{h}\right)^2;$$

решая это кубическое уравнение относительно p_z, мы найдем аргумент u и цепное напряжение p_z'; нетрудно убедиться, что этот аргумент будет больше u_0, возрастая с увеличением p_z^0, а вместе с тем будет увеличиваться и напряжение p_z.

Найдем теперь напряжение σ_z для рассматриваемых пластинок, определяемое по общей формуле

$$\sigma_z = p_z + \frac{Ex_1}{1-\mu^2}\xi'',$$

где x_1 — расстояние какой-нибудь точки пластины до ее средней плоскости; определив ξ'' из формулы (102a), мы получим:

$$\sigma_z = p_z\left[1 + \frac{Ep_x^0 x_1}{(1-\mu^2)\,p_z^2 h}\left(\frac{\operatorname{th} u + \varkappa(u - \operatorname{th} u)}{\operatorname{th} u}\,\frac{\operatorname{ch} u\left(1-\frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch} u} - 1\right)\right];$$

для всех значений координаты z в пролете пластины $(0 < z < 2a)$ множитель $\operatorname{ch} u\left(1-\frac{z}{a}\right) : \operatorname{ch} u$ будет неопределенно убывать с возрастанием аргумента и особенно быстро для средних сечений пластины (z близко к a); следовательно, выражение в круглых скобках будет приближаться к -1; поэтому при больших значениях аргумента мы получим:

$$\sigma_z = p_z\left[1 - \frac{Ep_x^0 x_1}{(1-\mu^2)\,p_z^2 h}\right] \qquad \text{при } 0 < z < 2a;$$

но, заметив, что если u велико, то

$$\frac{1}{\sqrt{F(\varkappa, u)}} = (1-\mu^2)\sqrt{K}\,\frac{p_x^0}{E}\left(\frac{2a}{h}\right)^4\sqrt{\frac{p_z}{p_z'}} = \frac{2\sqrt{2}\,u^3}{3},$$

а вместе с тем

$$\frac{1}{p_z^2} = \frac{144\,(1-\mu^2)^2\,a^4}{E^2h^4u^4},$$

мы найдем:

$$\sigma_z = p_z\left[1 - 6\sqrt{\frac{2}{K}\,\frac{p_z'}{p_z}}\,\frac{1}{u}\,\frac{x_1}{h}\right];$$

легко видеть, что второе слагаемое в скобках неопределенно убывает с увеличением аргумента u, так что при достаточно больших значениях его мы можем положить $\sigma_z = p_z$.

Отсюда видно, что для пластин, характеризуемых высокими значениями аргумента u_0 напряжения, пропорциональные расстоянию x_1, являются пренебрежимо малыми по сравнению с растягивающими напряжениями p_z, так что напряжения будут распределены почти равномерно по всему объему пла-

стины и не будут зависеть от коэффициента $\varkappa$, т. е. способа закрепления опорных сечений пластины *). Обладающие такими свойствами пластины мы будем называть вполне гибкими, в противоположность вполне жестким пластинам, где напряжения от изгиба, т. е. пропорциональные расстояниям x_1, выступают на первый план и в значительной мере зависят от коэффициента $\varkappa$.

Найдем еще уравнение средней поверхности после изгиба для весьма гибких пластин, для чего в уравнении (102b)

$$\xi = p_x^0 a^2 \frac{\operatorname{th} u + \varkappa (u - \operatorname{th} u)}{u^2 p_z h \operatorname{th} u} \left[\frac{\operatorname{ch} u \left(1 - \frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{p_x^0 z (2a - z)}{2hp_z}$$

положим $u = \infty$; нетрудно видеть, что при этом первый член правой части пропадет, и мы получим:

$$\xi = \frac{p_x^0 z (2a - z)}{2hp_z};$$

это выражение показывает, что направляющая цилиндрической поверхности, в которую обратится средняя плоскость весьма гибкой пластины, будет параболой второй степени, вершина которой лежит в плоскости $z = a$.

Наименьший радиус кривизны ρ_0 этой параболы будет соответствовать точке, совпадающей с ее вершиной; определяя его обычным путем, мы найдем:

$$\rho_0 = \frac{hp_z}{p_x^0}.$$

Эта формула совпадает с выражением, определяющим тангенциальное напряжение в стенках весьма тонкой трубы, подвергнутой равномерно распределенному внутреннему давлению p_x^0, так что наша гибкая пластина представляет как

*) Если коэффициент $\varkappa \neq 0$, то эти выводы будут неверны для самых опорных сечений пластины ($z = 0$ и $z = 2a$) и весьма близких к ним; ниже мы рассмотрим вопрос о распределении напряжений в частях пластины, прилегающих к ее опорному контуру.

бы часть такой трубы, выделенную двумя образующими в расстоянии $2a$ друг от друга *).

Особый интерес представляет частный случай сопротивления вполне гибкой пластины, когда растягивающая нагрузка p_z^0 обращается в нуль. Тогда в полученном выше кубическом уравнении, определяющем p_z, пропадает член $p_z^0 p_z^2$, и мы будем иметь:

$$p_z = \sigma_z = \sqrt[3]{\frac{KEp_x^2}{24(1-\mu^2)}\left(\frac{2a}{h}\right)^2},$$

а стрелка прогиба ξ определится выражением

$$\xi = 2a\sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{K}\frac{p_x^0}{E}\frac{2a}{h}\frac{z}{2a}\left(1-\frac{z}{2a}\right)};$$

из этих формул видно, как велико различие между изгибом вполне жесткой и вполне гибкой пластины; в то время как в первой пластине напряжения растут пропорционально нагрузке p_x^0 и не зависят от модуля упругости E, во второй они пропорциональны корню кубичному из произведения квадрата этой нагрузки на модуль E; точно так же и стрелки ξ, в пластине вполне жесткой пропорциональные отношению $p_x^0 : E$, в гибкой пластине пропорциональны кубичному корню из этого отношения. Столь же резко различие и в зависимости напряжений и стрелок от пролета пластины и ее толщины.

Рассмотренные случаи изгиба вполне жесткой и вполне гибкой пластин являются предельными, и результаты, получаемые для всякой пластины конечной гибкости, характеризуемой не близким к нулю и не слишком большим аргумен-

---

*) Упоминаемая парабола в пределах $0 \leqslant z \leqslant 2a$ является весьма близкой к дуге круга радиуса ρ_0, так что наибольшая разница между ординатами этих кривых не превосходит малой величины $\frac{1}{4}\frac{a^2}{\rho_0^2}\xi_{max}$; эта разница вызывается тем, что для трубы давления p_x^0 предполагаются направленными по радиусам, а для пластины — параллельными оси x.

том u_0, будут промежуточными между этими предельными. Укажем здесь еще раз на обстоятельства, способствующие повышению аргумента u_0 и развитию в пластине растягивающих напряжений p_z.

1) Аргумент u_0 растет с повышением коэффициента распора K, достигая наибольшей величины при $K=1$; обратно, уменьшение площади распор, препятствующих сближению длинных сторон контура, понижает напряжение p_z, причем при $K=0$ пластина изгибается как бесконечно жесткая.

2) При заданных размерах пластины аргумент u_0 растет с повышением изгибающей нагрузки p_x^0, так что мы всегда можем выбрать столь малую нагрузку p_x^0, при которой пластина будет гнуться как вполне жесткая, а также и повысить p_x^0 настолько, чтобы наша пластина подошла сколь угодно близко к вполне гибкой; но, конечно, при таком подборе мы совершенно не считаемся с величиною возникающих в пластине напряжений, которые для всякой реальной пластины ограничены некоторыми пределами. Поэтому мы будем называть пластину жесткой или гибкой, смотря по тому, малы или велики значения аргумента u_0, соответствующие таким нагрузкам p_x^0, которые вызывают в пластине допускаемые рабочие напряжения.

3) Уменьшение отношения $\frac{h}{2a}$ поднимает значение аргумента u_0, так что сравнительно толстые пластины по характеру изгиба будут подходить к вполне жестким, а очень тонкие пластины — к вполне гибким.

4) Наконец, полученное нами неравенство

$$U_0 > F(\varkappa, u) > U_1 \quad \text{при} \quad u^2 > 0$$

указывает, что при всех прочих одинаковых условиях аргумент u_0 будет наибольшим при $\varkappa = 0$, т. е. для пластины со свободно поворачивающимися опорными сечениями; увеличение же коэффициента $\varkappa$ повышает жесткость пластины.

Ниже мы рассмотрим некоторые приемы решения уравнений (104d) и (106), определяющих выбранные нами лишние неизвестные $\varkappa$ и u; теперь же, предположив, что эти

величины уже найдены, будем искать выражения для наибольшей стрелки прогиба и наибольших напряжений в рассматриваемых пластинах.

Наибольшая стрелка ξ_{max} получится, очевидно, в среднем сечении пластины (при $z = a$) и легко найдется из уравнения (102b)

$$\xi_{max} = \frac{p_x^0 a^2}{p_z h}\left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{th} u + \varkappa(u - \operatorname{th} u)}{u^2 \operatorname{th} u}\,\frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u}\right];$$

заменив здесь p_z при помощи соотношения (103) и положив для сокращения письма

$$\left.\begin{aligned} &\frac{12}{5u^2}\left(1 - \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u^2 \operatorname{ch} u}\right) = f_0(u), \\ &\frac{12}{u^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th}\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right) = f_1(u) \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

и

$$\frac{5}{32}(1 - \varkappa) f_0(u) + \frac{1}{32}\varkappa f_1(u) = f(\varkappa, u),$$

мы получим:

$$\xi_{max} = \frac{(1 - \mu^2)\, p_x^0 (2a)^4}{Eh^3} f(\varkappa, u);$$

вспомогательные функции f_0 и f_1 зависят лишь от аргумента u и могут быть вычислены заранее для разных значений его, после чего нахождение функции $f(\varkappa, u)$ становится весьма простым; множители при этих функциях подобраны таким образом, что

$$f(0, u) = \frac{5}{32} f_0(u); \quad f(1, u) = \frac{1}{32} f_1(u);$$

$$f_0(0) = 1; \quad f_1(0) = 1 \quad \text{и} \quad f(\varkappa, 0) = \frac{5 - 4\varkappa}{32}.$$

Нетрудно убедиться, что при действительных значениях аргумента u (при $u^2 > 0$) функции f_0 и f_1 становятся меньше единицы, неопределенно убывая с увеличением аргумента и подходя к пределам $\frac{12}{5u^2}$ и $\frac{12}{u^2}$, причем функция $f(\varkappa, u)$ неопределенно приближается к пределу $3 : 8u^2$, независимому

от коэффициента $\varkappa$, как это уже было установлено нами по отношению к весьма гибким пластинам.

При мнимых значениях аргумента функции f_0 и f_1 будут больше единицы и обращаются в бесконечность — первая при $u = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, вторая при $u = \pi\sqrt{-1}$; эти значения и соответствуют эйлеровым нагрузкам для рассматриваемых случаев.

Заметим еще, что с одной из вспомогательных функций f_0 мы уже встречались, рассматривая изгиб жестких пластин под нагрузками p_x^0 и p_z (см. формулу (89 b) на стр. 176), причем там мы выражали эту функцию при помощи тригонометрического ряда. Разница была лишь в постановке задачи: там нагрузка p_z считалась заданной и, следовательно, аргумент u — известным, теперь же эта последняя величина является лишней неизвестной, для нахождения которой нам пришлось составить уравнение (105).

Наибольшие нормальные напряжения возникнут на поверхностях пластины $\left(x_1 = \pm\frac{1}{2}h\right)$ в среднем сечении ее (по симметрии) или в опорных сечениях. Поэтому, если в найденном выше выражении для σ_z мы положим $z = a$ и $x_1 = \pm\frac{1}{2}h$, то будем иметь:

$$(E\varepsilon_z)'_{\max} = (1-\mu^2)\sigma_z = $$
$$= (1-\mu^2)p_z \pm \frac{Ep_x^0}{2p_z}\left[\frac{\operatorname{th} u + \varkappa(u - \operatorname{th} u)}{\operatorname{sh} u \cdot} - 1\right];$$

заменив здесь p_z при помощи соотношения (103) и положив для сокращения письма

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{u^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u}\right) &= \varphi_0(u), \\ \frac{6}{u^2}\left(1 - \frac{u}{\operatorname{sh} u}\right) &= \varphi_1(u) \end{aligned}\right\}$$

и

$$\varphi(\varkappa, u) = \frac{3}{4}(1-\varkappa)\varphi_0(u) + \frac{1}{4}\varkappa\varphi_1(u), \qquad (109)$$

мы получим:

$$(E\varepsilon'_z)_{\max} = \frac{1}{3}Eu^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2 \pm (1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varphi(\varkappa, u);$$

по этой формуле мы и найдем наибольшее приведенное напряжение для точек среднего сечения пластины, причем верхний знак будем брать при $u^2 > 0$; первый член этой суммы назовем напряжением от растяжения или сжатия (смотря по знаку u^2), второй — напряжением от изгиба; в пластинах вполне гибких это последнее напряжение отсутствует, в пластинах вполне жестких первый член равен $(1-\mu^2)p_z^0$ и не зависит от изгибающей нагрузки p_x^0.

Функции φ_0 и φ_1 подобно предыдущему подобраны таким образом, что

$$\varphi(0,\ u)=\frac{3}{4}\varphi_0(u);\qquad \varphi(1,\ u)=\frac{1}{4}\varphi_1(u);$$

$$\varphi_0(0)=1;\ \varphi_1(0)=1 \quad \text{и} \quad \varphi(\varkappa,\ 0)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\varkappa.$$

Нетрудно также видеть, что

$$\varphi_0(u)<1 \quad \text{и} \quad \varphi_1(u)<1, \qquad \text{если } u^2>0,$$
$$\varphi_0(u)>1 \quad \text{и} \quad \varphi_1(u)>1, \qquad \text{если } u^2<0;$$

при возрастании аргумента (при $u^2>0$) эти функции подходят соответственно к пределам $2:u^2$ и $6:u^2$, т. е. неопределенно убывают; функция же $\varphi(\varkappa,\ u)$ стремится к пределу $3:2u^2$, независимому от коэффициента $\varkappa$.

При мнимых значениях аргумента функция φ_0 обращается в бесконечность при $u=\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, а функция φ_1 — при $u=\pi\sqrt{-1}$.

Для опорных сечений пластины напряжения получаются из той же формулы для σ_z, если положить в ней $z=0$ или $z=2a$, но можно воспользоваться также и найденным выше выражением (104 b) для опорной пары; таким образом, мы получим:

$$(E\varepsilon_z)^0_{\max}=\frac{1}{3}Eu^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2\pm\frac{1}{2}(1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varkappa\chi(u),$$

где для сокращения письма положено

$$\chi(u)=\frac{3}{u^2}\left(\frac{u}{\operatorname{th}u}-1\right), \qquad (109a)$$

причем, как и в предыдущих случаях, $\chi(0)=1$; при действительных значениях аргумента функция $\chi(u)$ меньше единицы

и при возрастании аргумента неопределенно убывает, приближаясь к пределу $3 : u$; таким образом, эта функция будет малой первого порядка по отношению к дроби $1 : u$, тогда как функции f и φ были малыми второго порядка, иначе говоря, убывали быстрее при увеличении аргумента u. При мнимых значениях аргумента функция $\chi(u)$ будет больше единицы и обратится в бесконечность при $u = \pi\sqrt{-1}$.

Наконец, напряжение в распорках сложится:

a) из растягивающего или сжимающего пластину и распору заданного напряжения p_z^0 и

b) из сжимающего напряжения, уравновешивающего цепное напряжение в пластине и равного $-p_z' \frac{h}{t}$.

Таким образом, приведенное напряжение в распоре определится выражением

$$(1-\mu^2)\left(p_z^0 - p_z' \frac{h}{t}\right) = (1-\mu^2)\left(\frac{p_z^0}{K} - p_z \frac{h}{t}\right) = \frac{1-\mu^2}{K}[p_z^0 - (1-K)p_z]. \qquad (110)$$

Ниже приводится таблица функций $f_0(u)$, $f_1(u)$, $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$ и $\chi(u)$ для различных значений аргумента u, что позволяет очень быстро найти функции $f(\varkappa, u)$ и $\varphi(\varkappa, u)$, если известны u и $\varkappa$. Подобным же образом можно составить также и таблицу функций U_0, U_1 и U_2, позволяющую найти численную величину функции $F(\varkappa, u)$, но ввиду того, что эти функции при возрастании аргумента изменяются довольно резко и, стало быть, таблицы их будут неудобны для интерполяции, мы даем десятичные логарифмы квадратных корней из абсолютных величин этих функций, причем, чтобы избежать отрицательных характеристик в логарифмах, к ним придана четверка.

Для нахождения численных значений приведенных в таблице восьми функций по заданному аргументу u можно пользоваться обычными формулами интерполяции, ограничиваясь в них членами с первыми и вторыми конечными разностями. Назовем через Ф одну из этих функций, все равно которую, и найдем ее числовое значение для заданного

аргумента u; для этого прежде всего найдем в одной из крайних колонн таблицы такое значение аргумента u', которое удовлетворяло бы условию

$$u' < u < u' + 0{,}5;$$

далее подыскиваем в таблице три значения нашей функции Φ:

$$\Phi', \ \Phi'' \ \text{и} \ \Phi''',$$

которые отвечают трем табличным значениям аргумента:

$$u', \ u' + 0{,}5 \ \text{и} \ u' + 1{,}0;$$

тогда искомое значение функции Φ для заданного аргумента u определится формулой

$$\Phi = \Phi' - 2(u - u')(\Phi' - \Phi'') - \\ - 2(u - u')(u' + 0{,}5 - u)(\Phi' - 2\Phi'' + \Phi'''),$$

причем, ввиду сделанного нами выбора аргумента u', мы всегда имеем:

$$0 \leqslant 2(u - u') \leqslant 1;$$

$$0 \leqslant 2(u - u')(u' + 0{,}5 - u) \leqslant \frac{1}{8};$$

последний член этой формулы дает обыкновенно малую поправку в несколько единиц последнего знака.

Пусть, например, нам нужно определить $f(2{,}67)$; из таблицы находим:

$$u' = 2{,}5, \ \Phi' = f_0(2{,}5) = 0{,}281; \quad \Phi'' = f_0(3{,}0) = 0{,}213;$$

$$\Phi''' = f_0(3{,}5) = 0{,}166; \quad \Phi' - \Phi'' = 0{,}068;$$

$$\Phi' - 2\Phi'' + \Phi''' = 0{,}021;$$

$$2(u - u') = 0{,}34$$

и

$$2(u - u')(u' + 0{,}5 - u) = 0{,}34 \cdot 0{,}33 = 0{,}11;$$

отсюда получаем:

$$f_0(2{,}67) = 0{,}281 - 0{,}34 \times 0{,}068 - 0{,}11 \times 0{,}021 = \\ = 0{,}281 - 0{,}023 - 0{,}002 = 0{,}256,$$

с погрешностью, редко превышающей две единицы последнего знака.

Обратная задача — нахождение аргумента u, соответствующего заданному значению функции Φ, может быть решена при помощи той же формулы, но вычисления значительно упростятся, если мы применим формулу для обратной интерполяции. Пусть заданное значение функции Φ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi' > \Phi > \Phi'' > \Phi''',$$

причем помещенные в таблицах значения Φ', Φ'' и Φ''' соответствуют аргументам

$$u', \quad u' + 0{,}5 \quad \text{и} \quad u' + 1{,}0;$$

тогда искомый аргумент определится формулой

$$u = u' + \frac{1}{2}\frac{\Phi' - \Phi}{\Phi' - \Phi''} - \left(\frac{1}{2}\frac{\Phi' - \Phi}{\Phi' - \Phi''}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\Phi - \Phi''}{\Phi' - \Phi''}\right)\left(\frac{\Phi' - 2\Phi'' + \Phi'''}{\Phi' - \Phi''}\right),$$

в которой последний член является также незначительной по величине поправкой; каждый из двух первых множителей этого члена будет меньше половины, сумма их будет равна половине, а произведение должно быть меньше $\frac{1}{16}$.

Пусть, например, нам дано $\lg \sqrt{U_1} + 4 = 1{,}850$ и требуется найти соответственное значение аргумента; находим из таблицы:

$$u' = 4{,}0; \qquad \Phi' = 1{,}916, \qquad \Phi'' = 1{,}801 \quad \text{и} \quad \Phi''' = 1{,}694;$$

далее определяем:

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi' - \Phi}{\Phi' - \Phi''} = \frac{1}{2}\frac{0{,}066}{0{,}115} = 0{,}29,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi - \Phi''}{\Phi' - \Phi''} = \frac{1}{2}\frac{0{,}049}{0{,}115} = 0{,}21 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\Phi' - \Phi}{\Phi' - \Phi''},$$

$$\frac{\Phi' - 2\Phi'' + \Phi'''}{\Phi' - \Phi''} = \frac{0{,}008}{0{,}115} = 0{,}07,$$

откуда и найдем:

$$u = 4{,}0 + 0{,}29 - 0{,}29 \times 0{,}21 \times 0{,}07 = 4{,}29;$$

как видно, в данном случае последний член формулы оказался меньше 0,01 и потому должен быть отброшен, так как

Таблица вспомогательных функций для нахождения наибольших стрелок и напряжений в пластинах конечной гибкости

u	$\lg\sqrt{U_0}+4$	$\lg\sqrt{U_1}+4$	$\lg\sqrt{U_2}+4$	Для $(\xi_0)_{max}$		Для напряжения при средине		Для напряжения на опорах	u
				$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi(u)$	
3,0 *	2,731 *	3,502 *	3,563 *	— 0,386	11,201	— 0,449	13,49	7,348	3,0 *
2,5 *	3,047 *	2,962 *	3,294 *	— 0,660	2,703	— 0,720	3,05	2,086	2,5 *
2,0 *	3,536 *	2,850 *	3,110 *	— 1,621	1,672	— 1,702	1,799	1,436	2,0 *
1,5 *	4,509 *	2,862 *	4,500 *	+11,380	1,291	+11,677	1,343	1,192	1,5 *
1,0 *	3,856 *	2,973 *	3,803 *	+ 1,684	1,111	+ 1,702	1,130	1,074	1,0 *
0,5 *	3,978 *	3,239 *	3,903 *	+ 1,113	1,026	+ 1,116	1,030	1,017	0,5 *
0	∞	∞	∞	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
0,5	3,889	3,217	3,801	0,908	0,976	0,905	0,972	0,984	0,5
1,0	3,483 (406)	2,886 (331)	3,376 (425)	0,711	0,909	0,704	0,894	0,939	1,0
1,5	3,173 (310)	2,663 (223)	3,040 (336)	0,532	0,817	0,511	0,788	0,876	1,5
2,0	2,911 (262)	2,481 (182)	2,748 (292)	0,380	0,715	0,367	0,673	0,806	2,0
2,5	2,684 (227)	2,320 (161)	2,491 (257)	0,281	0,617	0,268	0,563	0,736	2,5
3,0	2,486 (198)	2,174 (146)	2,263 (228)	0,213	0,529	0,200	0,467	0,672	3,0
3,5	2,311 (175)	2,040 (134)	2,061 (202)	0,166	0,453	0,153	0,386	0,614	3,5
4,0	2,155 (156)	1,916 (124)	1,881 (180)	0,132	0,388	0,120	0,320	0,563	4,0
4,5	2,014 (141)	1,801 (115)	1,718 (163)	0,107	0,335	0,097	0,267	0,519	4,5
	(128)	(107)	(148)						

5,0	1,886	1,694	1,570	0,088	0,291	0,079	0,224	0,480	5,0
5,5	118 1,768	100 1,594	135 1,435	0,074	0,254	0,066	0,189	0,446	5,5
6,0	108 1,660	93 1,501	124 1,311	0,063	0,223	0,055	0,162	0,417	6,0
6,5	100 1,560	88 1,413	115 1,196	0,054	0,197	0,047	0,139	0,391	6,5
7,0	93 1,467	82 1,331	107 1,089	0,047	0,175	0,041	0,121	0,367	7,0
7,5	87 1,380	78 1,253	100 0,989	0,041	0,156	0,036	0,106	0,347	7,5
8,0	82 1,298	74 1,179	94 0,895	0,036	0,141	0,031	0,093	0,328	8,0
8,5	77 1,221	70 1,109	89 0,806	0,032	0,127	0,028	0,083	0,311	8,5
9,0	73 1,148	67 1,042	83 0,723	0,029	0,115	0,025	0,074	0,296	9,0
9,5	69 1,079	63 0,979	80 0,643	0,026	0,105	0,022	0,066	0,283	9,5
10,0	65 1,014	61 0,918	75 0,568	0,024	0,096	0,020	0,060	0,270	10,0
10,5	63 0,951	58 0,860	72 0,496	0,021	0,088	0,018	0,054	0,259	10,5
11,0	59 0,892	55 0,805	69 0,427	0,020	0,081	0,017	0,050	0,248	11,0
11,5	57 0,835	54 0,751	65 0,362	0,018	0,075	0,015	0,045	0,238	11,5
12,0	55 0,780	51 0,700	63 0,299	0,016	0,069	0,014	0,042	0,229	12,0

Значок * указывает на отрицательный знак величин u^2, U_0, U_1 и U_2.

наши таблицы определяют аргумент с погрешностью, достигающей 0,01—0,02.

Обе приведенные формулы можно употреблять:

a) для функций $\lg \sqrt{U_0}$, $\lg \sqrt{U_1}$ и $\lg \sqrt{U_2}$ — при действительных значениях аргумента, превышающих 0,5;

b) для функций f_0 и φ_0 — при всех действительных значениях аргумента, а также и при мнимых, отмеченных в таблице звездочкой, если эти последние не превышают единицы ($u^2 > -1$);

c) для функций f_1, φ_1 и χ — при всех действительных значениях аргумента, а также и при мнимых, не превышающих 2,5 ($u^2 > -2{,}5^2$).

В двух последних случаях мнимые аргументы при интерполяции можно считать за отрицательные.

Первые три функции для аргумента, лежащего в пределах $-1 < u^2 < 1$, можно вычислять при помощи приведенных выше рядов *), причем для обратной интерполяции можно воспользоваться методом последовательных приближений.

При действительных значениях аргумента, превышающих 12, для вычисления всех восьми функций можно пользоваться данными выше весьма простыми приближенными выражениями. Для мнимых же аргументов, лежащих вне указанных границ, нахождение функций при помощи таблицы невозможно, и их нужно вычислять по общим формулам; впрочем, при решении задач практического характера этот последний случай встречается не очень часто.

Главнейшие формулы:

$$p_z = \frac{Eu^2}{3(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2, \tag{103}$$

$$\varkappa = \frac{\operatorname{th} u}{\frac{a}{a}\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}u + \operatorname{th} u}, \tag{104d}$$

$$\frac{1}{K(1-\mu^2)^2}\left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8\left(1-\frac{p_z^0}{p_z}\right) = F(\varkappa, u), \tag{105a}$$

$$F(\varkappa, u) = (1-\varkappa)U_0 + \varkappa U_1 - \varkappa(1-\varkappa)U_2, \tag{107}$$

*) См. стр. 232.

при $p_z^0 = 0$

$$\frac{10^4}{(1-\mu^2)\sqrt{K}}\frac{E}{p_x^0}\left(\frac{h}{2a}\right)^4 = \begin{cases} 10^4\sqrt{U_0}, & \text{если } \varkappa = 0, \\ 10^4\sqrt{U_1}, & \text{если } \varkappa = 1; \end{cases}$$

$$F(\varkappa, u) = F(\varkappa, u_0)\left(1 - \frac{p_z^0}{p_z}\right). \qquad (105a')$$

Наибольшая стрелка прогиба

$$\left.\begin{aligned} \xi_{max} &= (1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\cdot\frac{(2a)^4}{h^3}f(\varkappa, u), \\ f(\varkappa, u) &= \frac{5}{32}(1-\varkappa)f_0(u) + \frac{1}{32}\varkappa f_1(u). \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Наибольшее приведенное напряжение в среднем сечении

$$\left.\begin{aligned} (E\varepsilon_z)'_{max} &= \frac{1}{3}Eu^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2 \pm (1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varphi(\varkappa, u), \\ \varphi(\varkappa, u) &= \frac{3}{4}(1-\varkappa)\varphi_0(u) + \frac{1}{4}\varkappa\varphi_1(u). \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Наибольшее приведенное напряжение на контуре

$$(E\varepsilon_z)^0_{max} = \frac{1}{3}Eu^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2 \pm \frac{1}{2}(1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varkappa\chi(u). \qquad (109a)$$

Приведенное напряжение в распоре

$$\frac{1-\mu^2}{K}[p_z^0 - (1-K)p_z]. \qquad (110)$$

---

§ 24. Гибкие пластины. Примеры расчета пластин, не имеющих начальной кривизны. Влияние коэффициента опорной пары $\varkappa$ и коэффициента распора K

Займемся теперь нахождением лишних неизвестных для пластин, рассмотренных в предыдущем параграфе. Применяя все наши уравнения к весьма гибким пластинам, мы уже видели, как резко отличаются обстоятельства их изгиба от тех, которые имели место при вполне жестких пластинах; естественно ожидать, что для пластин конечной гибкости

влияние цепных напряжений внесет еще большую сложность в изучаемое нами явление; поэтому рассмотрение вопроса об изгибе таких пластин нам нужно начать с наиболее простых случаев.

Положим сперва, что выделенная из пластины полоска-балка, ось которой до изгиба была прямой, будет однократно неопределимой и коэффициент $\varkappa$ ее опорной пары будем считать заданным; тогда у нас останется только одна лишняя неизвестная — аргумент u, для нахождения которого мы имеем уравнение (105а)

$$F(\varkappa,\ u) = \frac{1}{K(1-\mu^2)^2}\left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8\left(1-\frac{p_z^0}{p_z}\right);$$

левая часть этого уравнения при заданном коэффициенте $\varkappa$ будет зависеть лишь от аргумента u и легко может быть вычислена при помощи приведенных выше таблиц (см. стр. 250) и соотношения (107) для любого значения аргумента; правая же часть написанного уравнения зависит только от размеров пластины ($2a$ и h), модулей, характеризующих ее материал (E и μ), и действующих на нее нагрузок (p_x^0 и p_z^0), исключая делитель в последнем биноме p_z, пропорциональный квадрату аргумента. Таким образом, задавая наудачу ряд значений аргумента, мы можем попытаться найти между ними такое, которое удовлетворило бы нашему уравнению; но, конечно, подобный прием может быть допущен лишь в том случае, если мы сумеем наперед указать те границы, в которых лежит искомое значение аргумента, и, кроме того, будем уверены, что полученный нами корень уравнения (105а) будет единственным, удовлетворяющим всем условиям поставленной задачи.

Для выяснения указанных границ мы разберем простейший случай, когда нагрузка p_z^0 обращается в нуль и, следовательно, правая часть уравнения делается независимой от аргумента и известной нам численно. В нижеследующих примерах указаны приемы, которыми нужно пользоваться в этом случае.

Пример 37. Пластина толщиною $h = 8$ *мм* перекрывает пролет $2a = 120$ *см* и нагружена давлением столба воды высотою H. Найдем наибольшую стрелку прогиба и наиболь-

шие напряжения, возникающие в пластине при разных величинах высоты H, если материал пластины характеризуется модулем $E = 2\,150\,000\ am$ и коэффициентом $\mu = 0{,}3$; коэффициент распора $K = \frac{1}{2}$ и опорные сечения пластины могут поворачиваться вполне свободно ($\varkappa = 0$).

При этих заданиях мы имеем: $p_x^0 = 0{,}1H\ am$, если нагрузка производится столбом пресной воды *), а высота H выражена в метрах; далее мы должны положить

$$F(\varkappa,\ u_0) = F(0,\ u_0) = U_0$$

и, следовательно,

$$10^4 \sqrt{U_0} = \frac{10^4}{(1-\mu^2)\sqrt{K}} \frac{E}{p_x^0} \left(\frac{h}{2a}\right)^4; \qquad (105a)$$

подставляя в правую часть вместо букв соответственные им заданные числа, получим:

$$10^4 \sqrt{U_0} = \frac{660}{H}$$

или

$$\lg (10^4 \sqrt{U_0}) = 2{,}820 - \lg H;$$

таким образом, для каждого значения высоты H мы сейчас же находим соответственное значение функции $\lg (10^4 \sqrt{U_0})$, после чего подыскиваем по таблице вспомогательных функций и величину аргумента u_0, пользуясь для интерполяции приведенными на стр. 249 формулами.

Так, например, положив $H = 5\ м$, мы получим:

$$\lg (10^4 \sqrt{U_0}) = 2{,}820 - 0{,}699 = 2{,}121;$$

из таблицы сразу видно, что $4 < u_0 < 4{,}5$, интерполяционная же формула дает:

$$u_0 = 4 + \frac{1}{2}\frac{34}{141} - \frac{1}{4}\frac{34}{141}\frac{107}{141}\frac{13}{141} = 4 + 0{,}121 - 0{,}004 \sim 4{,}12.$$

---

*) Если вода соленая, то наше выражение для p_x^0 нужно умножить на ее плотность; средняя плотность океанской воды — 1,025.

Другого значения аргумента, удовлетворяющего нашему уравнению, быть не может, так как $u_0^2 > 0$, функция же U_0 при действительных значениях аргумента непрерывно убывает (см. черт. на стр. 234).

Когда аргумент u_0 найден, то наибольшая стрелка прогиба легко определяется по формуле (108)

$$\xi_{\max} = (1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{(2a)^4}{h^3} f(\varkappa, u_0) = 2{,}68\, H f_0(u_0) \text{ в } см,$$

причем $f_0(u_0)$ подыскивается в тех же таблицах; так, при $H = 5$ $м$ и $u_0 = 4{,}12$ мы найдем $f_0(u_0) = 0{,}126$ и, следовательно,

$$\xi_{\max} = 2{,}68 \cdot 5 \cdot 0{,}126 = 1{,}7 \; см;$$

заметим, что при отсутствии распор мы должны были бы положить $u_0 = 0$, $f_0(0) = 1$ и стрелка была бы равна 13,4 $см$, т. е. почти в восемь раз больше.

Подобным же образом определится и наибольшее приведенное напряжение для среднего сечения пластины по формуле (109)

$$(E\varepsilon_z)'_{\max} = \frac{1}{3} E u_0^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + (1-\mu^2) p_x^0 \left(\frac{2a}{h}\right)^2 \varphi_0(\varkappa, u_0) =$$

$$= 31{,}9\, u_0^2 + 1535\, H \varphi_0(u_0) \text{ в } am;$$

полагая $H = 5$ $м$ и $u_0 = 4{,}12$, мы найдем $\varphi_0(u_0) = 0{,}114$ и потому

$$(E\varepsilon_z)'_{\max} = 541 + 876 = 1417 \; am;$$

при отсутствии же распор ($u_0 = 0$ и $\varphi_0(u_0) = 1$) это напряжение достигло бы 7670 am, т. е. было бы слишком в пять раз больше.

Из найденных чисел видно, как велико влияние цепных напряжений в рассматриваемом случае.

В нижеследующей таблице приведены величины аргументов u_0, наибольшие стрелки прогиба и наибольшие приведенные напряжения в рассматриваемой пластине для разных

напоров H от 1 до 12 *м*. Тут же для сравнения даны те же величины для вполне жесткой пластины без цепных напряжений ($u_0 = 0$) [38].

H в *м*	$\lg \sqrt{U_0} + 4$	u_0	$f_0(u_0)$	$\varphi_0(u_0)$	Растягивающие напряжения	Напряжения от изгиба	$(E\varepsilon_x)'_{max}$	Напряжения при $u_0 = 0$ *)	ξ_{max}	ξ_{max} при $u_0 = 0$
					в атмосферах				в *см*	
1	2,820	2,20	0,337	0,324	154	498	652	1535	0,9	2,7
2	2,519	2,92	0,223	0,210	272	645	917	3070	1,2	5,4
3	2,343	3,41	0,175	0,162	371	746	1117	4605	1,4	8,0
4	2,218	3,80	0,145	0,133	460	817	1277	6140	1,6	10,7
5	2,121	4,12	0,126	0,114	541	876	1417	7675	1,7	13,4
6	2,042	4,40	0,112	0,101	618	930	1548	9210	1,8	16,0
8	1,917	4,88	0,092	0,083	760	1020	1780	12280	2,0	21,4
10	1,820	5,28	0,080	0,072	890	1100	1990	15350	2,1	26,8
12	1,741	5,63	0,071	0,063	1010	1160	2170	18420	2,3	32,2
14	1,674	5.94	0,064	0,056	1120	1200	2320	21490	2,4	37,5

Пример 38. Пластина тех же размеров и из такого же материала, как и в предыдущем примере, нагружена давлением столба воды высотою H. Найдем наибольшие стрелки прогиба и наибольшие напряжения для этой пластины, полагая, как и раньше, $K = \frac{1}{2}$, но при условии, что опорные сечения пластины не могут поворачиваться ($\varkappa = 1$).

При вполне закрепленных опорных сечениях мы имеем:

$$F(\varkappa, u_0) = F(1, u_0) = U_1,$$

*) См. примечание автора к таблице, приведенной на стр. 258 *(Прим. ред.)*

и потому, пользуясь выкладками, сделанными в предыдущем примере, получим:

$$\lg\left(10^4\sqrt{U_1}\right) = 2{,}820 - \lg H;$$

нахождение из этого условия аргумента u_0 при разных значениях высоты H, а также наибольших стрелок и напряжений при помощи вспомогательных функций $f_1(u_0)$, $\varphi_1(u_0)$ и $\chi(u_0)$ делается совершенно так же, как и в рассмотренном выше случае.

Числовые результаты приведены в нижеследующей таблице.

H в $м$	u_0	Растягивающие напряжения	в среднем сечении: Напряжения от изгиба	в среднем сечении: $(E\varepsilon_z)'_{max}$	в среднем сечении: Напряжения при $u_0 = 0$	на контуре: Напряжения от изгиба *)	на контуре: $(E\varepsilon_z)^0_{max}$ *)	на контуре: Напряжения при $u_0 = 0$	ξ_{max}	ξ_{max} при $u_0 = 0$
		в атмосферах				в атмосферах			в сантиметрах	
1	1,15	42	440	482	512	940	982	1 023	0,5	0,5
2	1,88	113	715	828	1 023	1 702	1 815	2 047	0,8	1,1
3	2,41	185	894	1 079	1 535	2 300	2 485	3 070	1,0	1,6
4	2,85	259	1 011	1 270	2 047	2 820	3 080	4 090	1,2	2,1
5	3,20	326	1 107	1 433	2 558	3 310	3 640	5 120	1,3	2,7
6	3,49	390	1 190	1 580	3 070	3 780	4 170	6 140	1,5	3,2
8	4,00	510	1 310	1 820	4 090	4 590	5 100	8 180	1,7	4,3
10	4,42	620	1 410	2 030	5 120	5 380	6 000	10 240	1,8	5,4
12	4,78	730	1 490	2 220	6 140	6 090	6 820	12 280	2,0	6,4
14	5,10	830	1 550	2 380	7 160	6 780	7 610	14 320	2,1	7,5

Пример 39. Пластина, тождественная с рассмотренной в двух предыдущих примерах, закреплена на опорном контуре так, что коэффициент опорной пары $\varkappa = \frac{1}{2}$; найдем наибольшие стрелки и напряжения для такой пластины.

*) Вычисленные в этих столбцах напряжения при значительных напорах превышают критическую точку предела вытягивания современных строительных материалов и потому все числа последних строк не имеют реального значения, но понадобятся нам при дальнейшем исследовании вопроса.

Решение этой задачи будет несколько сложнее, чем в предыдущих случаях, так как в таблице не имеется числовых значений функции $F\left(\frac{1}{2},\ u_0\right)$; но, пользуясь найденным выше неравенством

$$U_0 > F\left(\frac{1}{2},\ u_0\right) > U_1,$$

мы должны заключить, что аргумент, удовлетворяющий уравнению (105а), при условии $0 < \varkappa < 1$ лежит между теми двумя значениями его, которые соответствуют предельным случаям $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$.

Поэтому, положив, например, $H = 5$ *м* и, следовательно,

$$\lg\left[10^4 \sqrt[4]{F\left(\frac{1}{2},\ u\right)}\right] = 2{,}820 - \lg H = 2{,}121,$$

мы получим для искомого аргумента u_0 неравенство

$$4{,}12 > u_0 > 3{,}20,$$

и потому, определив при помощи таблицы вспомогательных функций (см. стр. 250) и уравнения (107)

$$F(1/2,\ 3\,1/2) = 0{,}000236 \quad \text{и} \quad \lg\left[10^4 \sqrt[4]{F(1/2,\ 3\,1/2)}\right] = 2{,}187,$$
$$F(1/2,\ 4) = 0{,}000121 \quad \text{и} \quad \lg\left[10^4 \sqrt[4]{F(1/2,\ 4)}\right] = 2{,}042,$$

мы найдем интерполяцией и величину искомого аргумента

$$u_0 = 3{,}5 + \frac{1}{2}\frac{66}{145} = 3{,}73;$$

теперь нетрудно получить и наибольшую стрелку прогиба пластины по формулам

$$\left.\begin{aligned} f(1/2,\ 3{,}73) &= \frac{5}{32}\frac{1}{2} f_0(3{,}73) + \frac{1}{32}\frac{1}{2} f_1(3{,}73) = 0{,}0182, \\ \xi_{\max} &= \frac{(1-\mu^2)\, p_x^0\, (2a)^4}{Eh^3} f(1/2,\ 3{,}73) = \\ &= 85{,}7 \cdot 0{,}0182 = 1{,}56\ см; \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

подобным же образом мы найдем и наибольшее приведенное напряжение в среднем сечении пластины:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(1/2,\ 3{,}73) &= \frac{3}{4}\frac{1}{2}\varphi_0(3{,}73)+\frac{1}{4}\frac{1}{2}\varphi_1(3{,}73)=0{,}0196,\\ (E\varepsilon_z)'_{\max} &= \frac{1}{3}Eu_0^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2+(1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varphi(1/2,\ 3{,}73)=\\ &= 440+980=1420\ am\end{aligned}\right\}\quad(109)$$

и, наконец, наибольшее напряжение на контуре

$$(E\varepsilon_z)^0_{\max}=\frac{1}{3}Eu_0^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2+\frac{1}{2}(1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\frac{1}{2}\chi(3{,}73)=$$
$$=440+1510=1950\ am.\qquad(109а)$$

Таким же путем мы получим наибольшие стрелки и напряжения и при всяком другом напоре; результаты этих вычислений приведены в нижеследующей таблице.

H в $м$	u_0	Растягивающие напряжения	в среднем сечении: Напряжения от изгиба	в среднем сечении: $(E\varepsilon_z)'_{\max}$	в среднем сечении: Напряжения при $u_0=0$	на контуре: Напряжения от изгиба	на контуре: $(E\varepsilon_z)^0_{\max}$	на контуре: Напряжения при $u_0=0$	$\xi_{\max}$	$\xi_{\max}$ при $u_0=0$
			в атмосферах			в атмосферах			в сантиметрах	
1	1,83	107	498	605	1024	424	531	512	0,8	1,6
2	2,53	204	690	894	2050	749	953	1024	1,1	3,2
3	3,02	290	810	1100	3070	1030	1320	1540	1,3	4,8
4	3,40	370	910	1280	4100	1280	1650	2050	1,4	6,4
5	3,73	440	980	1420	5120	1510	1950	2560	1,6	8,0
6	4,00	510	1040	1550	6140	1730	2240	3070	1,7	9,6
8	4,48	640	1150	1790	8190	2130	2770	4090	1,9	12,9
10	4,88	760	1230	1990	10 240	2500	3260	5120	2,1	16,1
12	5,23	870	1310	2180	12 290	2850	3720	6140	2,2	19,3
14	5,57	990	1360	2350	14 340	3160	4150	7160	2,3	22,5

Обратимся теперь к изучению тех числовых результатов, которые получены нами в рассмотренных примерах.

Прежде всего отметим то огромное влияние, которое оказывают возникающие в пластине цепные напряжения, в особенности при свободно опертых сечениях пластины; стрелки прогиба и напряжения сравнительно с вполне жесткой пластиной уменьшаются во много раз, причем пропорциональность между этими величинами и нагрузкою p_x^0, имеющая место для жестких пластин (при $p_z^0 = 0$), здесь совершенно исчезает, так что, например, удвоение нагрузки (при $H > 5$ *м*) вызывает повышение стрелок и напряжений всего на 40—20% и менее.

Степень влияния цепных напряжений зависит от величины аргумента; чем больше u_0, тем резче разница между вполне жесткой и гибкой пластинами; в предыдущем параграфе (см. стр. 243) мы видели, что этот аргумент будет тем больше, чем тоньше пластина, чем сильнее она нагружена и чем больше коэффициент распора K; рассмотрение же приведенной там таблицы по отношению к функциям $f_0(u)$ и $\varphi_0(u)$, от которых и зависит главным образом уменьшение стрелок и напряжений, убеждает нас, что лишь при самых незначительных величинах аргумента ($u_0 < 0{,}5$) является возможность пренебречь влиянием цепных напряжений, в большинстве же случаев, и притом захватывающих бо́льшую часть вопросов практического характера, подобное пренебрежение совершенно недопустимо.

Для пластины с вполне закрепленными опорными сечениями влияние цепных напряжений значительно слабее, в особенности по отношению к напряжениям, возникающим в этих сечениях. Соответствующие заданным давлениям H значения аргументов u_0 получаются меньшими, чем для случая $\varkappa = 0$, а кроме того, и функции $f_1(u)$, $\varphi_1(u)$, а особенно $\chi(u)$ убывают с повышением аргумента более медленно; только при больших напорах и соответственно высоких значениях аргумента указанная разница несколько уменьшается, и то не по отношению к последней функции, которая, как мы видели, будет малой первого порядка относительно дроби $\frac{1}{u}$, тогда как все остальные функции f и φ будут малыми второго порядка. Это ослабление влияния цепных напряжений приводит нас к некоторым с виду парадоксальным выводам; так, например, присутствие опорных пар в балках и жестких пластинах

непременно уменьшает наибольшее напряжение в среднем сечении; в данном же случае, как легко видеть из таблиц примеров 37 и 38, даже при малых напорах ($H = 1$ *м*) наблюдается обратное явление.

В случае неполной пары закрепления (например, при $\varkappa = \frac{1}{2}$) стрелки прогиба и напряжения будут заключаться между предельными величинами, соответствующими случаям $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$.

Таким образом, опорные пары увеличивают жесткость пластины; нетрудно выяснить, чем обусловливается это обстоятельство.

Различие между вполне жесткой и гибкой пластинами есть результат развивающихся в этой последней цепных напряжений, зависящих от разности в длинах дуги упругой кривой и пролета пластины $2a$; но в дугах малой кривизны эта разность зависит главным образом от наибольшей стрелки прогиба и приблизительно пропорциональна квадрату ее *), а так как всякая пара закрепления уменьшает эту стрелку, то тем самым понижается цепное напряжение в пластине и характеризующий ее жесткость аргумент u_0. Как мы видели, при весьма малых нагрузках всякая пластина гнется как вполне жесткая, а для жестких пластин под равномерно распределенной нагрузкой стрелка ξ_{max} при отсутствии пар закрепления будет в пять раз больше, чем при вполне заделан-

---

*) Для дуг малой кривизны, подобных изображенным на черт. 80 (см. стр. 295), разность между длиной дуги и хордой $2a$ может быть определена выражением $\beta \frac{\xi_{max}^2}{2a}$, где β — число, колеблющееся обыкновенно в пределах между 2 и 3; так, например, для дуг круга, параболы и цепной линии $\beta = \frac{8}{3} = 2{,}666\ldots$; для синусоид

$$\xi = \xi_{max} \sin \frac{\pi z}{2a} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{1}{2} \xi_{max} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{a}\right)$$

число β равно $\frac{1}{4}\pi^2 = 2{,}467\ldots$

Для дуг одинакового вида, в которых соответственные координаты приблизительно пропорциональны наибольшим стрелкам прогиба, число β с большой степенью точности можно считать постоянным, т. е. независимым от ξ_{max}.

ных опорных сечениях; следовательно, и цепные напряжения при таких нагрузках будут в первом случае примерно в 25 раз больше. При увеличении нагрузки отношение наибольших стрелок и цепных напряжений, как видно из таблиц в примерах 37 и 38, довольно быстро падает и при значительных нагрузках неопределенно приближается к единице, так что пластина с закрепленными опорными сечениями будет изгибаться почти тождественно со свободно опертой пластиной. При неполном закреплении опорных сечений ($0 < \varkappa < 1$), конечно, будет иметь место то же самое, и чем меньше коэффициент $\varkappa$, тем при меньших нагрузках обнаружится указанное совпадение.

В толстых пластинах, довольно близко подходящих к жестким ($2a : h < 60$), это совпадение может получиться лишь при очень больших нагрузках, вызывающих напряжения, далеко превосходящие предел пропорциональности и даже предел текучести обычных судостроительных материалов, и потому не имеет никакого практического значения. Но в более тонких пластинах, в особенности при отношении $2a : h > 200$, уже при нагрузках, вызывающих вполне допустимые во многих случаях напряжения, указанное совпадение является достаточно близким для практических соображений, что позволяет нам совершенно игнорировать влияние пар закрепления. О влиянии коэффициента распора K мы будем говорить ниже.

В только что изложенных выводах мы обошли вопрос о тех чрезвычайно быстро растущих напряжениях, которые возникают в опорных сечениях пластины и даже при небольших нагрузках подходят к критическим точкам материала; выясним теперь, как пластина будет в этом случае изгибаться при бо́льших нагрузках.

Сравнивая наибольшие напряжения от изгиба в опорном сечении, определяемые при полной паре закрепления формулой

$$\frac{1}{2}(1-\mu^2)\,p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\chi(u),$$

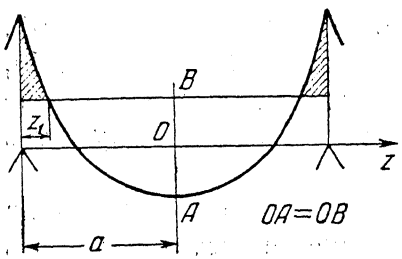
с наибольшими напряжениями от изгиба в среднем сечении для той же пластины

$$\frac{1}{4}(1-\mu^2)\,p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varphi_1(u),$$

мы увидим, что отношение их, равное

$$\frac{2\chi(u)}{\varphi_1(u)} = \frac{u\,\mathrm{ch}\,u - \mathrm{sh}\,u}{\mathrm{sh}\,u - u},$$

для жестких пластин будет близко к двум и, повышаясь с увеличением аргумента, будет неопределенно приближаться к величине u; следовательно, чем больше изгибающая пластину нагрузка, тем значительнее разница в наибольших напряжениях на контуре пластины и в ее среднем сечении. Найдем, на какой части длины пролета пластины близ опорных сечений наибольшее напряжение будет превышать по абсолютной величине то, которое возникает в среднем сечении пластины; заметив, что при этом достаточно сравнить лишь напряжения от изгиба, определяемые выражением



Черт. 76.

$$\frac{3}{2}p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\frac{1}{u^2}\left[\frac{u\,\mathrm{ch}\,u\left(1-\frac{z}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,u} - 1\right],$$

и что при $z = 0$ и $z = a$ напряжения получаются разных знаков (см. эпюр этих напряжений на черт. 76), мы после некоторых сокращений получим такое уравнение, определяющее координату z_1 искомого сечения:

$$\left[\frac{u\,\mathrm{ch}\,u\left(1-\frac{z_1}{a}\right)}{\mathrm{sh}\,u} - 1\right] = -\left(\frac{u}{\mathrm{sh}\,u} - 1\right),$$

откуда найдем:

$$\mathrm{ch}\,u\left(1-\frac{z_1}{a}\right) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,u}{u} - 1;$$

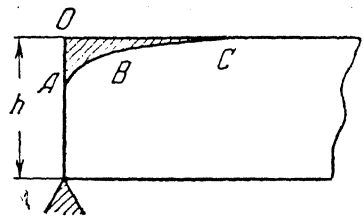
для весьма жестких пластин (u_0 близко к нулю) мы найдем:

$$\frac{z_1}{a} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}1835,$$

для пластин конечной жесткости эта величина при возрастании аргумента сперва несколько увеличивается (до 0,1932),

затем начинает уменьшаться, подходя к пределу $\frac{1}{u}\ln\frac{u}{2}$, иначе говоря — неопределенно убывает.

Таким образом, в пластине можно выделить объем клинообразной формы (черт. 77), на поверхности ABC которого напряжения будут одинаковы с наибольшими напряжениями в среднем сечении пластины; по направлению же к точке O эти напряжения быстро растут, достигая в ней наибольшей величины; поэтому при увеличении нагрузки p_x^0 на пластину, вполне закрепленную по контуру, мы найдем такую нагрузку, при которой в точке O и близких к ней возникнут напряжения, равные пределу вытягивания, в то время как наибольшие напряжения в среднем сечении пластины будут еще далеки от этой границы. Но, как известно, за пределом вытягивания материала деформации в нем начинают расти почти без увеличения напряжений и потому при дальнейшем увеличении нагрузки опорное сечение начнет искривляться в тех частях его площади около точки O, где напряжения сравнялись с пределом вытягивания [39], сами же напряжения за этот предел не перейдут; при этом разрушения пластины по этому сечению произойти не может, так как для разрыва материала необходимо, во-первых, повышение напряжений до разрывающих, чего в данном случае нет, а во-вторых, весьма значительное развитие удлинений, чему препятствует присутствие сравнительно слабо напряженных частей пластины вне заштрихованного объема. Если мы будем еще больше повышать нагрузку p_x^0, объем захваченного критическими напряжениями клина будет увеличиваться, причем, конечно, будут расти и напряжения во всей пластине; но даже при таких нагрузках, когда наибольшее напряжение в среднем сечении пластины подойдет к критическому, объем нашего клина будет еще незначителен по сравнению со всем объемом пластины, так как мы будем иметь:



Черт. 77.

$$OC = z_1 < \frac{1}{5}a \quad \text{и} \quad OA < \frac{1}{2}h.$$

Но так как на участке OA опорного сечения напряжения будут распределены равномерно, не возрастая пропорционально расстоянию x его точек до средней плоскости пластины, как это было до появления напряжений, равных критическим, то, очевидно, момент опорной пары m_0 будет меньше того, который получается по нашим формулам, выведенным в предположении, что материал пластины вполне упруг. Иначе говоря, в этом сечении будет приложена не полная опорная пара $(m_0)_{\max}$, а некоторая часть ее, которую мы положим равной

$$\varkappa (m_0)_{\max}, \text{ где } \varkappa < 1.$$

Но напряжения в сечениях, достаточно удаленных от опорного контура, например лежащих около середины пролета, изменятся ничтожно мало, если изгибающие моменты в сечениях, близких к опорным, мы заменим статически эквивалентными им парами и будем считать наши опорные сечения не вполне закрепленными, а припишем опорным парам некоторый коэффициент $\varkappa$, меньший единицы.

Таким образом, вполне закрепленную по контуру пластину, наибольшие напряжения в опорных сечениях которой возросли до предела вытягивания, мы будем рассматривать как имеющую неполные пары закрепления; но, как мы видели, наибольшая стрелка прогиба такой пластины, а также и наибольшее напряжение в среднем сечении ее почти не зависят от коэффициента $\varkappa$, если только соответственный ее размерам и нагрузке аргумент u_0 достаточно велик; поэтому, если, рассчитав предельные величины $\xi_{\max}$ и $(E\varepsilon_z)'_{\max}$ для случаев $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$, мы убедимся, что они достаточно близки друг к другу, то будем с достаточною во многих случаях точностью знать те же величины и для рассматриваемой пластины, хотя возбужденные в некоторой части объема ее напряжения и подошли к критической точке материала, а истинная величина коэффициента пары остается нам не известной; конечно, это заключение будет справедливо лишь до тех пор, пока наибольшие напряжения в среднем сечении пластины не достигли критической точки.

После прекращения действия нагрузки p_x^0 такая пластина не придет в первоначальное положение и вызываемая надломом ее у опорных сечений погибь останется в ней, причем материал в пределах заштрихованного на черт. 77 клина из-

менит свое строение. Ниже, в главе о допускаемых напряжениях, мы увидим, что во многих случаях эти обстоятельства не влияют на прочность сооружения и, следовательно, вызывающие их нагрузки могут быть причислены к допустимым.

Для тонких пластин с неполным закреплением опорных сечений ($\varkappa < 1$ или $\alpha \neq 0$) мы можем с еще меньшей погрешностью пренебрегать влиянием опорных пар.

Посмотрим теперь, как отражаются на величине наибольших стрелок и напряжений, возникающих в пластине, изменения коэффициента распора K.

Из найденной выше формулы, определяющей аргумент u_0,

$$F(\varkappa, u_0) = \frac{1}{K(1-\mu^2)^2} \left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^8 \qquad (105a)$$

нетрудно убедиться, что уменьшение величины K, повышая значение $F(\varkappa, u)$, понижает величину аргумента; поэтому стрелка прогиба, определяемая выражением

$$\xi_{\max} = (1-\mu^2)\, \frac{p_x^0}{E}\, \frac{(2a)^4}{h^3}\, f(\varkappa, u_0), \qquad (108)$$

будет увеличиваться при уменьшении коэффициента распора. Что же касается наибольшего напряжения в среднем сечении пластины, выражающегося суммою двух членов

$$(E\varepsilon_z)'_{\max} = \frac{1}{3} E u_0^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + (1-\mu^2)\, p_x^0 \left(\frac{2a}{h}\right)^2 \varphi(\varkappa, u_0), \qquad (109)$$

то здесь нельзя указать наперед, возрастет или уменьшится эта сумма при изменении коэффициента K, потому что увеличение аргумента u_0 повышает первый член ее (приведенное цепное напряжение), уменьшая в то же время второй, выражающий напряжения от изгиба.

Представим теперь эту формулу в таком виде:

$$(E\varepsilon_z)'_{\max} = \left\{ \left[\frac{E}{(1-\mu^2)p_x^0}\right]^{1/2} \left(\frac{h}{2a}\right)^2 \frac{u_0^2}{3} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{(1-\mu^2)p_x^0}{E}\right]^{1/2} \left(\frac{2a}{h}\right)^2 \varphi(\varkappa, u_0) \right\} \sqrt{(1-\mu^2) E p_x^0}$$

и, заметив, что

$$\left[\frac{E}{(1-\mu^2)\,p_x^0}\right]^{1/2}\left(\frac{h}{2a}\right)^2=\sqrt[4]{KF(\varkappa,\ u_0)}\,,$$

мы получим:

$$(E\varepsilon_z)'_{\max}=\left\{\sqrt[4]{KF(\varkappa,\ u_0)}\ \frac{u_0^2}{3}+\frac{\varphi(\varkappa,\ u_0)}{\sqrt[4]{KF(\varkappa,\ u_0)}}\right\}\sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0}\,. \qquad (109a)$$

Исследуем, как будет меняться выражение, стоящее в больших скобках при изменении K, причем ограничимся случаем столь больших значений аргумента u_0, при которых имеют место найденные нами выше приближенные формулы

$$F(\varkappa,\ u)=\frac{9}{8u^6}\quad\text{и}\quad\varphi(\varkappa,\ u)=\frac{3}{2u^2};$$

тогда выражение в скобках перепишется таким образом:

$$\frac{\sqrt[4]{18Ku_0^2}}{6}+\frac{3}{\sqrt[4]{18Ku_0^2}};$$

легко видеть, что полученный бином имеет аналитический минимум при $Ku_0^2=18$, причем обращается в $\sqrt{2}$; в действительных конструкциях коэффициент K обыкновенно не выходит из пределов 0,2—0,8 и, следовательно, соответственный минимуму аргумент будет заключаться в пределах 4,7—9,5, т. е. будет близок к тем значениям, которые обычно получаются в тонких пластинах судового корпуса; а так как всякая функция близ аналитического минимума изменяется сравнительно медленно, то мы вообще можем заключить, что величина нашего бинома при изменении Ku_0^2 в нужных нам границах колеблется незначительно и потому полное приведенное напряжение при средине листа лишь в слабой мере зависит от коэффициента распора K.

Конечно, неточность употребленных нами выражений для $F(\varkappa,\ u)$ и $\varphi(\varkappa,\ u)$ при небольших значениях аргумента внесет некоторые погрешности как в величину аргумента, соответствующего минимуму исследуемого выражения, так и в найденную нами наименьшую величину нашего бинома; но эти погрешности не колеблют только что сделанного нами вывода.

Итак, если мы назовем для сокращения письма

$$\sqrt[4]{KF(\varkappa, u_0)}\,\frac{u_0^2}{3} \quad \text{через} \quad A$$

и

$$\sqrt[4]{KF(\varkappa, u_0)}\,\frac{u_0^2}{3}+\frac{\varphi(\varkappa, u_0)}{\sqrt[4]{KF(\varkappa, u_0)}} \quad \text{через} \quad B,$$

то приведенное цепное напряжение в пластине определится выражением

$$A\sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0},$$

наибольшее же приведенное напряжение в среднем сечении пластины будет равно

$$B\sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0},$$

причем величина B будет близка к $\sqrt{2}=1{,}41\ldots$

Введенные нами множители A и B будут зависеть лишь от трех величин: K, $\varkappa$ и u_0, так что можно составить таблицу их для разных числовых значений этих параметров, но такая таблица будет слишком громоздкой и неудобной для пользования. Для обхода этих затруднений мы употребим нижеследующий прием.

Если заданы размеры пластины, способ закрепления ее на контуре и изгибающая нагрузка p_x^0, то по уравнению (105а) и при помощи таблицы вспомогательных функций мы найдем и характеризующий эту пластину аргумент u_0; обратно, задав какое-нибудь числовое значение аргумента, мы без труда можем подобрать какое угодно число пластин, которые характеризовались бы этим значением аргумента; поэтому за основной параметр, по которому мы будем составлять таблицу множителей A и B, можно взять не размеры пластины и не величину действующей на нее нагрузки, а величину аргумента u_0. Но так как этот аргумент для заданной пластины зависит и от величины коэффициента K, то будет проще всего принять за основной параметр аргумент, отвечающий наивысшей величине этого коэффициента $K=1$; такой аргумент мы назовем через u_0', причем с размерами и нагрузкой характеризуемой им пластины он будет связан уравнением

$$F(\varkappa, u_0')=\frac{1}{(1-\mu^2)^2}\left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8. \qquad (105а)$$

Изменим теперь для той же пластины коэффициент распора до некоторой величины K; тогда ей будет соответствовать некоторое новое и меньшее значение аргумента u_0, определяемое из того же уравнения

$$F(\varkappa, u_0) = \frac{1}{K} \frac{1}{(1-\mu^2)^2} \left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^8, \qquad (105a)$$

откуда мы сейчас же находим:

$$K = \frac{F(\varkappa, u_0')}{F(\varkappa, u_0)}.$$

Задавая теперь ряд произвольных значений u_0', мы по найденному соотношению сейчас же найдем и такие величины коэффициентов распора, при которых эти аргументы будут соответствовать той же самой пластине; и если при этом значения u_0' и u_0 мы будем выбирать из числа помещенных в таблице, то входящие в это соотношение, также и в формулы для A и B, функции $F(\varkappa, u)$ и $\varphi(\varkappa, u)$ мы можем находить без интерполяции, что в значительной мере облегчает вычисление наших множителей и повышает их точность.

Приводимая ниже таблица величин A и B составлена именно таким способом. Взято десять значений основного аргумента u_0' *):

2,5 3,0 3,5 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 10,0 и 12,0,

и к каждому из них подобран ряд значений u_0; затем для каждого из этих значений вычислены по найденному соотношению коэффициенты распора K и множители A и B. Такие вычисления сделаны для двух предельных случаев $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$, для промежуточных же значений этого коэффициента можно с допустимой в наших целях погрешностью ограничиться интерполяцией приведенных в таблице чисел, считая их изменения пропорциональными коэффициенту $\varkappa$.

Применение таблицы к решению числовых задач не представляет затруднений. Найдем, например, цепные и наибольшие напряжения для пластины, рассмотренной в примере 37 **),

*) В таблице на стр. 273 они выделены рамкой из толстых линий.
**) См. стр. 254.

при давлении H в 5 и 10 $м$. Из полученного там соотношения

$$10^4 \sqrt{U_0} = \frac{660}{H} \quad \text{при} \quad K = \frac{1}{2}$$

мы найдем:

$$10^4 \sqrt{U_0} = \frac{660}{\sqrt{2}\,H} = \frac{467}{H} \quad \text{при} \quad K = 1,$$

и следовательно,

$$\lg(10^4 \sqrt{U_0}) = 1{,}970, \quad u_0' = 4{,}67 \quad \text{при} \quad H = 5\ м,$$
$$\lg(10^4 \sqrt{U_0}) = 1{,}669, \quad u_0' = 5{,}96 \quad \text{при} \quad H = 10\ м.$$

Ищем теперь в нашей таблице (см. стр. 273) при основных аргументах 4 и 5 соответственную условиям задачи величину $K = 0{,}5$ и выписываем стоящие против них множители A и B:

$u_0' = 4{,}0$			$u_0' = 5{,}0$		
K	A	B	K	A	B
0,49	0,49	1,45	0,55	0,59	1,42
			0,40	0,53	1,45

Интерполируя на глаз эти числа для случая $K = 0{,}5$ и $u_0' = 4{,}67$, мы найдем $A = 0{,}54$ и $B = 1{,}44$, откуда и получим приведенное цепное напряжение при $H = 5$ $м$

$$A \sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0} = 0{,}54 \sqrt{0{,}91 \times 2{,}15 \times 10^6 \times 0{,}5} = 530\ am$$

и полное напряжение

$$B \sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0} = 1420\ am;$$

подобным же образом при $H = 10$ $м$ и $u_0' = 5{,}96$ мы найдем:

$u_0' = 6{,}0$		
K	A	B
0,61	0,68	1,41
0,35	0,56	1,44,

откуда при $K = 0{,}5$ мы получим $A = 0{,}63$ и $B = 1{,}42$ и, следовательно,

$$A \sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0} = 880\ am,$$
$$B \sqrt{(1-\mu^2)\,Ep_x^0} = 1990\ am.$$

Сравнивая четыре найденных напряжения с вычисленными непосредственно в таблице на стр. 257, мы убедимся, что разница между ними едва превышает 10 *am*, что для практических расчетов не имеет никакого значения.

В задачах строительной механики корабля далеко не всегда удается установить с достаточной точностью величину коэффициента K, и часто мы можем наметить для него лишь довольно широкие границы. В этих случаях наша таблица множителей A и B дает возможность очень быстро установить те пределы, из которых не могут выйти цепное и полное напряжения в рассматриваемой пластине.

Так, например, положим, что коэффициент $K = 0{,}5$ в только что рассмотренном нами случае назначен нами предположительно, в действительности же он может заключаться между 0,3 и 0,7; найдем теперь границы интересующих нас напряжений.

Для случая $H = 5$ *м* мы будем иметь:

$u_0' = 4{,}0$			$u_0' = 5{,}0$		
K	A	B	K	A	B
0,70	0,56	1,41	0,75	0,66	1,41
0,49	0,49	1,45	0,55	0,59	1,42
0,33	0,42	1,52	0,40	0,53	1,45
0,22	0,36	1,61	0,29	0,47	1,50

Интерполируя на $u_0' = 4{,}67$, мы сейчас же найдем, что при заданных пределах для K множители A и B будут удовлетворять неравенствам

$$0{,}45 < A < 0{,}61 \quad \text{и} \quad 1{,}41 < B < 1{,}51;$$

для случая $H = 10$ *м* мы подобным же образом нашли бы:

$$0{,}53 < A < 0{,}71 \quad \text{и} \quad 1{,}41 < B < 1{,}47.$$

Подобный результат подтверждает сделанный нами вывод о слабом влиянии коэффициента K на величину полного напряжения в пластине, т. е. на множитель B; несмотря на исключительно широкие границы для коэффициента распора *), пределы для B отличаются от их средней арифметической всего на $3^1/_2{}^0/_0$ в первом случае и менее чем на $2^0/_0$ — во втором.

*) Этим пределам для K соответствуют приведенные толщины распоры t, равные 3,5 и 18,7 *мм* при толщине листа в 8 *мм*.

Таблица множителей A и B для нахождения приведенных цепных и полных напряжений в пластинах конечной гибкости

u	K	A	B	K	A	B	u	K	A	B	K	A	B
	$\varkappa = 0$			$\varkappa = 1$				$\varkappa = 0$			$\varkappa = 1$		
2,50	1,00	0,46	1,37	1,00	0,30	1,28	3,00	1,00	0,52	1,38	1,00	0,37	1,32
2,25	0,60	0,37	1,44	0,70	0,24	1,31	2,75	0,64	0,44	1,43	0,72	0,31	1,36
2,00	0,35	0,29	1,54	0,48	0,19	1,36	2,50	0,40	0,36	1,51	0,51	0,26	1,41
1,75	0,20	0,22	1,70	0,32	0,15	1,41	2,25	0,24	0,30	1,64	0,35	0,21	1,47
1,50	0,11	0,17	1,91	0,21	0,11	1,47	2,00	0,14	0,23	1,81	0,24	0,16	1,54
3,50	1,00	0,58	1,39	1,00	0,43	1,35	4,00	1,00	0,64	1,39	1,00	0,49	1,37
3,25	0,68	0,50	1,42	0,74	0,37	1,38	3,75	0,70	0,56	1,41	0,76	0,43	1,39
3,00	0,45	0,43	1,48	0,54	0,31	1,43	3,50	0,49	0,49	1,45	0,56	0,37	1,43
2,75	0,29	0,36	1,57	0,39	0,26	1,49	3,25	0,33	0,42	1,52	0,42	0,32	1,49
2,50	0,18	0,30	1,70	0,28	0,22	1,56	3,00	0,22	0,36	1,61	0,30	0,27	1,56
2,25	0,11	0,24	1,86	0,19	0,18	1,65	2,75	0,14	0,30	1,75	0,22	0,23	1,64
5,00	1,00	0,73	1,41	1,00	0,59	1,38	6,00	1,00	0,81	1,42	1,00	0,67	1,39
4,75	0,75	0,66	1,41	0,78	0,53	1,39	5,75	0,78	0,74	1,41	0,81	0,62	1,40
4,50	0,55	0,59	1,42	0,61	0,47	1,42	5,50	0,61	0,68	1,41	0,65	0,57	1,41
4,25	0,40	0,53	1,45	0,47	0,42	1,46	5,00	0,35	0,56	1,44	0,41	0,47	1,47
4,00	0,29	0,47	1,50	0,36	0,37	1,51	4,50	0,20	0,46	1,53	0,25	0,38	1,56
3,50	0,14	0,36	1,67	0,20	0,29	1,66	4,00	0,10	0,36	1,70	0,15	0,30	1,72
7,00	1,00	0,88	1,45	1,00	0,76	1,41	8,00	1,00	0,95	1,48	1,00	0,83	1,43
6,75	0,81	0,82	1,43	0,83	0,70	1,40	7,75	0,83	0,89	1,45	0,84	0,78	1,42
6,50	0,65	0,76	1,42	0,69	0,65	1,40	7,50	0,69	0,82	1,43	0,71	0,73	1,41
6,00	0,41	0,65	1,42	0,46	0,56	1,43	7,00	0,46	0,73	1,42	0,50	0,63	1,41
5,50	0,25	0,55	1,46	0,30	0,47	1,49	6,50	0,30	0,63	1,42	0,34	0,55	1,44
5,00	0,15	0,45	1,54	0,19	0,38	1,59	6,00	0,19	0,54	1,47	0,23	0,47	1,51
							5,50	0,11	0,45	1,55	0,15	0,39	1,61
10,0	1,00	1,07	1,54	1,00	0,96	1,48	12,0	1,00	1,18	1,60	1,00	1,08	1,54
9,5	0,74	0,97	1,48	0,76	0,87	1,44	11,5	0,78	1,08	1,54	0,79	0,99	1,49
9,0	0,54	0,87	1,44	0,57	0,78	1,42	11,0	0,60	0,99	1,49	0,62	0,90	1,46
8,5	0,39	0,77	1,42	0,42	0,69	1,41	10,5	0,45	0,90	1,46	0,48	0,82	1,43
8,0	0,27	0,68	1,41	0,30	0,61	1,42	10,0	0,34	0,82	1,43	0,37	0,75	1,42
7,5	0,19	0,60	1,43	0,21	0,54	1,46	9,5	0,25	0,74	1,41	0,28	0,67	1,41
7,0	0,12	0,52	1,48	0,15	0,47	1,52	9,0	0,18	0,66	1,42	0,21	0,60	1,43

Из установленного нами выше и рельефно подтверждаемого таблицей вывода о весьма слабой зависимости множителя B от аргумента u_0 вытекает еще одно замечательное свойство тонких пластин — весьма малое влияние отношения $2a : h$ на величину наибольших напряжений в пластине при заданной нагрузке p_x^0.

Для наглядного выяснения этого важного вывода мы возьмем несколько основных аргументов u_0', например:

$$2{,}5 \quad 5{,}0 \quad 8{,}0 \quad \text{и} \quad 12{,}0,$$

и по формуле (105а) рассчитаем, каково должно быть отношение $2a : h$ в тех пластинах, которым соответствуют эти аргументы при некоторой заданной нагрузке на них, например в одну атмосферу ($H = 10$ *м*); затем подберем по нашей таблице множители A и B, отвечающие каким-нибудь заданным значениям коэффициента распора K, например: 0,3, 0,5 и 0,7; вычисление сделаем для двух предельных случаев: $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$.

Результаты этих расчетов сгруппированы в нижеследующей табличке:

$p_x^0 = 1$ *am*	$u_0' = 2{,}5$		$u_0' = 5{,}0$		$u_0' = 8{,}0$		$u_0' = 12{,}0$	
	$\varkappa = 0$	$\varkappa = 1$	$\varkappa = 0$	$\varkappa = 1$	$\varkappa = 0$	$\varkappa = 1$	$\varkappa = 0$	$\varkappa = 1$
$2a : h =$	84	103	132	148	186	199	250	262
A при $K = 0{,}7$	0,39	0,24	0,64	0,50	0,82	0,73	1,04	0,94
A при $K = 0{,}5$	0,34	0,19	0,57	0,43	0,74	0,63	0,93	0,83
A при $K = 0{,}3$	0,27	0,14	0,47	0,34	0,63	0,52	0,78	0,69
B при $K = 0{,}7$	1,42	1,31	1,41	1,40	1,43	1,41	1,52	1,48
B при $K = 0{,}5$	1,48	1,36	1,43	1,45	1,42	1,41	1,47	1,43
B при $K = 0{,}3$	1,59	1,42	1,50	1,57	1,42	1,46	1,42	1,41

Из этой таблички ясно, что для пластин, толщина которых составляет $^1/_{100}$ часть от пролета и менее, множитель B изменяется очень мало и, следовательно, уменьшение толщины пла-

стины даже в $2^1/_2$—3 раза отзывается на величине полных напряжений весьма незначительно, причем в некоторых случаях (при малых значениях K) утонение пластины может и уменьшать эти напряжения. Так, например, для наиболее толстой пластины ($2a : h \sim 100$) множитель B в зависимости от величины коэффициентов K и $\varkappa$ будет колебаться в пределах 1,31—1,59, соответственно чему наибольшее напряжение, равное

$$B\sqrt{(1-\mu^2)Ep_x^0},$$

будет изменяться от 1830 до 2220 *am*, тогда как в самой тонкой из рассмотренных пластин ($2a : h \sim 250$) соответственные колебания множителя B будут от 1,41 до 1,52, а напряжения будут заключены в пределах от 1970 до 2130 *am*. Если бы эти пластины были вполне жесткими, то напряжения для более тонкой пластины возросли бы в 6—9 раз.

Что касается цепных напряжений, то они непрерывно растут по мере уменьшения толщины пластины и коэффициента $\varkappa$, а также и при повышении коэффициента распора K. Таким образом, различие между изгибом толстой и тонкой пластины (при $2a : h > 100$) под одинаковой нагрузкой сводится лишь к тому, что в первой будут преобладать напряжения от изгиба, а во второй — цепные напряжения, причем полное суммарное напряжение остается почти постоянным.

Отсюда мы заключаем, что увеличение толщины пластины или уменьшение ее пролета, если при этом отношение $2a : h$ остается больше ста, не могут понизить наибольших напряжений в ней, которые получаются близкими к

$$\sqrt{2(1-\mu^2)Ep_x^0};$$

если же такое понижение напряжений необходимо, то нужно значительно уменьшить отношение $2a : h$ (до 40—60), сделав, таким образом, пластину близкой к абсолютно жесткой, для которой уже не будет иметь места полученный нами вывод.

Рассмотрев обстоятельства изгиба плоской пластины под действием одной лишь изгибающей нагрузки p_x^0, мы можем перейти к более сложному случаю, когда на такую же

пластину действует и растягивающая или сжимающая нагрузка p_z^0.

Уравнение, определяющее аргумент u, для этого случая мы представили в таком виде:

$$F(\varkappa, u) = F(\varkappa, u_0)\left(1 - \frac{p_z^0}{p_z}\right), \qquad (105a')$$

причем исследованием этого уравнения в предыдущем параграфе мы установили такие границы для искомого аргумента:

$$\begin{aligned} &\text{если } p_z^0 > 0, && \text{то } u_0 < u < \infty, \\ &\text{если } 0 > p_z^0 > (p_z^0)_1, && \text{то } u_0 > u > 0 \\ &\text{и если } p_z^0 < (p_z^0)_1, && \text{то } u^2 < 0, \end{aligned}$$

где $(p_z^0)_1$ определяется из соотношения

$$(p_z^0)_1 = -\frac{1-\mu^2}{3360} K \frac{p_x^2}{E}\left(\frac{2a}{h}\right)^6 [51(1-\varkappa) + 2\varkappa - 35\varkappa(1-\varkappa)];$$

таким образом, если рассматриваемая балка-полоска, выделенная из нашей пластины, будет однократно неопределимой (коэффициент $\varkappa$ считается заданным), то наша задача сведется к решению трансцендентного уравнения (105a'), причем границы искомого корня, хотя и очень просторные, нам известны.

Самое решение этого уравнения не может быть выполнено иначе, как путем последовательных проб, причем всего удобнее будет представить его в таком виде:

$$p_z^0 = p_z\left[1 - \frac{F(\varkappa, u)}{F(\varkappa, u_0)}\right];$$

выберем теперь ряд значений для искомого аргумента

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n,$$

удовлетворяющих указанным неравенствам, и будем вычислять правую часть уравнения, пользуясь таблицей вспомогательных функций и соотношением (103)

$$p_z = \frac{Eu^2}{3(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2;$$

когда нам удастся найти два таких значения аргумента, положим u_k и u_{k+1}, которые удовлетворят условию

$$p_z\left[1-\frac{F(\varkappa, u_k)}{F(\varkappa, u_0)}\right] < p_z^0 < p_z\left[1-\frac{F(\varkappa, u_{k+1})}{F(\varkappa, u_0)}\right],$$

то искомый аргумент будет лежать между этими значениями и может быть найден интерполяцией с такой степенью точности, какую допускают упомянутые таблицы.

Когда же аргумент найден, то уравнения (108), (109) и (110) дадут нам наибольшую стрелку прогиба и наибольшие напряжения в пластине и распорах. По таблицам, приведенным в нижеследующем примере, нетрудно проследить, как изменяются эти величины при различных нагрузках p_z^0.

Пример 40. Найдем наибольшие стрелки и напряжения в пластине, подвергнутой постоянной изгибающей нагрузке $p_x^0 = 0{,}6$ *am* и переменной нагрузке p_z^0, колеблющейся в пределах ± 1200 *am*. При этом рассмотрим два случая:

a) Размеры пластины, ее материал и способ закрепления те же, что и в примере 37.

b) Толщина пластины увеличена до 20 *мм* при сохранении всех остальных размеров и чисел.

Для первого случая мы найдем из таблички, приведенной в указанном примере *), $u_0 = 4{,}40$; теперь возьмем ряд действительных значений аргумента, меньших и бо́льших этого числа **), и подыщем для них по таблице вспомогательных функций логарифмы функции $F(\varkappa, u)$, равной в данном случае U_0; затем мы найдем:

$$\lg\frac{F(\varkappa, u)}{F(\varkappa, u_0)} = \lg\frac{U_0(u)}{U_0(u_0)} = 2\left[\lg\sqrt{U_0(u)} - \lg\sqrt{U_0(u_0)}\right] =$$
$$= 2\left[\lg 10^4\sqrt{U_0(u)} - 2{,}042\right];$$

определив отсюда численные значения выражения

$$1-\frac{F(\varkappa, u)}{F(\varkappa, u_0)}$$

*) См. стр. 257.

**) Мнимых значений аргумента в данном случае брать не нужно, так как по приведенной выше формуле нетрудно убедиться, что предельное давление $(p_z^0)_1$ для рассматриваемой пластины будет около — 14 000 *am*.

и умножив их на ряд значений p_z, вычисленных по формуле

$$p_z = \frac{1}{3}\frac{Eu^2}{1-\mu^2}\left(\frac{h}{2a}\right)^2 = 35u^2 \text{ в атмосферах},$$

мы получим ряд бо́льших и меньших нуля значений нагрузки p_z^0, которым будут соответствовать выбранные нами аргументы; если при этом наибольшее и наименьшее из найденных значений для p_z^0 не перекроет заданных пределов изменения этой нагрузки (± 1200 *am*), то мы должны добавить к выбранным нами значениям аргумента одно или несколько новых значений. Затем, подыскав в таблице величины функций φ и f, соответственные выбранным значениям аргумента, мы сейчас же найдем и величины наибольших стрелок и напряжений, соответственные нагрузке $p_x^0 = 0{,}6$ *am* и только что найденным значениям нагрузки p_z^0.

Все эти вычисления удобнее всего делать в табличной форме, располагая их, например, по такой схеме:

u	$\lg + \sqrt{U_0(u)} + 4$	$\lg \frac{\sqrt{U_0(u)}}{\sqrt{U_0(u_0)}}$	$\lg \frac{U_0(u)}{U_0(u_0)}$	$\frac{U_0(u)}{U_0(u_0)}$	$\frac{p_z^0}{p_z}$	p_z	p_z^0
						в атмосферах	
3,4	2,344	0,302	0,604	4,02	—3,02	405	—1220
3,6	2,279	0,237	0,474	2,98	—1,98	455	— 900
3,8	2,216	0,174	0,348	2,23	—1,23	505	— 620
4,0	2,155	0,113	0,226	1,683	—0,683	560	— 380
4,2	2,097	0,055	0,110	1,288	—0,288	615	— 180
4,4	2,042	0,000	0,000	1,000	0,000	680	0
5,0	1,886	$\bar{1}$,844	$\bar{1}$,688	0,488	+0,512	875	+ 450
5,5	1,768	$\bar{1}$,726	$\bar{1}$,452	0,283	+0,717	1060	+ 760
6,0	1,660	$\bar{1}$,618	$\bar{1}$,236	0,172	+0,828	1260	+1040
6,5	1,560	$\bar{1}$,518	$\bar{1}$,036	0,109	+0,891	1480	+1320

u	$\varphi_0(u)$	$f_0(u)$	Приведенные напряжения в *am*			ξ_{max} *см*	Напряжения в распорах	p_z^0
			от растяжения	от изгиба	полные		в атмосферах	
3,4	0,161	0,174	370	1480	1850	2,8	—2580	—1220
3,6	0,146	0,158	410	1340	1750	2,5	—2050	— 900
3,8	0,132	0,145	460	1220	1680	2,3	—1590	— 620
4,0	0,120	0,132	510	1100	1610	2,1	—1200	— 380
4,2	0,110	0,121	560	1010	1570	1,9	— 890	— 180
4,4	0,101	0,112	620	930	1550	1,8	—620	0
5,0	0,079	0,088	800	730	1530	1,4	+ 20	+ 450
5,5	0,066	0,074	960	610	1570	1,2	+ 420	+ 760
6,0	0,055	0,063	1150	510	1660	1,0	+ 740	+1040
6,5	0,047	0,054	1350	430	1780	0,9	+1060	+1320

Из рассмотрения полученных чисел видно, что растягивающая нагрузка p_z^0 уменьшает стрелку прогиба, распрямляя изогнутую нагрузкой p_x^0 пластину, сжимающая же нагрузка увеличивает прогиб и кривизну пластины; в соответствии с этим и напряжения от изгиба падают при растяжении пластины, возрастая при сжатии ее; что же касается напряжений p_z, то они изменяются в обратном направлении, понижаясь при сжатии пластины. Полные наибольшие напряжения изменяются сравнительно очень мало, всего на 300 и 230 *am*, при изменении нагрузки p_z^0 от —1220 до +1320 *am*, причем в обоих случаях эти напряжения знака не меняют и увеличиваются как от растяжения, так и от сжатия пластины.

Сжимающие напряжения в распорах при отсутствии нагрузки p_z^0 при растяжении пластины уменьшаются, меняют знак и при возрастании p_z^0 сближаются с нею по величине;

обратно, сжимающая нагрузка p_z^0 весьма быстро увеличивает напряжения в распорах, так как пластина, пока p_z остается положительным, в сущности совсем не воспринимает этой нагрузки, переводя соответствующую ей часть сжимающих усилий на распоры.

Таким образом, нагрузка p_z^0, растягивающая изогнутую давлением p_x^0 тонкую пластину, почти не увеличивает возникающих в ней наибольших напряжений и лишь переводит часть напряжений от изгиба в распределенные по всей площади сечения пластины напряжения p_z; сжимающая же нагрузка p_z^0 воспринимается главным образом распорами *), в пластине же производит обратный перевод напряжений p_z в напряжения от изгиба.

Перейдем теперь к случаю более толстой пластины ($h = 20$ *мм*), которая по своей значительной толщине ($2a : h = 60$) должна ближе подходить к жестким пластинам, чем только что рассмотренная; прежде всего мы найдем предельное давление $(p_z^0)_1$, определяемое в данном случае ($\varkappa = 0$) формулой

$$(p_z^0)_1 = -\frac{17}{1120} K \frac{p_x^2}{E} \left(\frac{2a}{h}\right)^6 = -216 \text{ } am,$$

откуда заключаем, что для сжимающей нагрузки от -216 до -1200 *am* мы должны задать ряд мнимых значений аргумента.

Затем находим аргумент u_0 из уравнения

$$10^4 \sqrt{U_0} = \frac{10^4}{(1-\mu^2)\sqrt{K}} \frac{E}{p_x^0} \left(\frac{h}{2a}\right)^4 = 4295;$$

отсюда получим $\lg \sqrt{U_0} + 4 = 3{,}633$ и, сделав подыскание в таблице вспомогательных функций, найдем $u_0 = 0{,}80$; следовательно, для растягивающей нагрузки нам нужно будет взять ряд действительных значений аргумента, бóльших 0,8. Дальнейшие расчеты сделаны в нижеследующей таблице.

*) Это обстоятельство станет вполне ясным, если мы припомним, что наивысший предел сжимающих напряжений, которые может воспринять наша пластина при условии свободного сближения длинных сторон опорного контура, не должен превзойти эйлерова напряжения, которому будет соответствовать аргумент $u = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$; в рассматриваемом примере эйлерово напряжение будет всего около 86 атмосфер.

u	$\lg\sqrt{U_0(u)}+4$	$\lg\frac{\sqrt{U_0(u)}}{\sqrt{U_0(u_0)}}$	$\lg\frac{U_0(u)}{U_0(u_0)}$	$\frac{U_0(u)}{U_0(u_0)}$	$\frac{p_z^0}{p_z}$	p_z	p_z^0
						в атмосферах	
1,15*	3,903*	0,270*	0,540*	—3,47	4,47	—289	—1294
1,00*	3,856*	0,223*	0,446*	—2,79	3,79	—219	— 830
0,75*	3,868*	0,235*	0,470*	—2,95	3,95	—123	— 486
0,50*	3,978*	0,345*	0,690*	—4,90	5,90	— 55	— 323
0	∞	∞	∞	∞	∞	0	— 216
0,50	3,889	0,256	0,512	3.25	—2.25	+ 55	— 123
0,80	3,633	0,000	0,000	1,000	0,000	+140	0
1,25	3,322	$\bar{1}$,689	$\bar{1}$,378	0,239	0,761	+ 342	+ 260
1,50	3,173	$\bar{1}$,540	$\bar{1}$,080	0,120	0,880	+ 493	+ 434
1,75	3,038	$\bar{1}$,405	$\bar{2}$,810	0,065	0,935	+ 670	+ 626
2,00	2,911	$\bar{1}$,278	$\bar{2}$,556	0,036	0,964	+ 875	+ 844
2,25	2,793	$\bar{1}$,160	$\bar{2}$,320	0,021	0,979	+1108	+1085
2,50	2,684	$\bar{1}$,051	$\bar{2}$,102	0,013	0,987	+1368	+1350

u	$\varphi_0(u)$	$f_0(u)$	Приведенные напряжения в атмосферах			ξ_{max}	Напряжения в распорах	p_z^0
			от растяжения	от изгиба	полные	*см*	в атмосферах	
1,15*	2,190	2,160	—263	—3228	—3491	2,22	—2090	—1294
1,00*	1,702	1,684	—199	—2510	—2709	1,73	—1312	— 830
0,75*	1,304	1,296	—112	—1922	—2034	1,33	— 773	— 486
0,50*	1,116	1,113	— 50	—1645	—1695	1,15	— 538	— 323
0	1,000	1,000	0	±1474	±1474	1,03	— 393	— 216
0,50	0,905	0,908	+ 50	+1335	+1385	0,93	— 268	— 123
0,80	0,788	0,793	+127	+1162	+1289	0,82	—127	0
1,25	0,601	0,618	+ 311	+886	+1197	0,64	+ 162	+ 260
1,50	0,511	0,532	+ 447	+753	+1200	0,55	+ 341	+ 434
1,75	0,433	0,449	+ 609	+638	+1247	0,45	+ 530	+ 626
2,00	0,367	0,380	+ 795	+541	+1336	0,39	+ 740	+ 844
2,25	0,314	0,327	+1008	+463	+1471	0,34	+ 967	+1085
2,50	0,268	0,281	+1243	+395	+1638	0,29	+1212	+1350

Как и следовало ожидать, наибольшие напряжения в этом случае меняются более согласно с нагрузкою p_z^0, чем это было для сравнительно тонкой пластины, но абсолютные величины их, а также и границы их колебаний получаются более значительными, несмотря на бо́льшую толщину пластины, напряжения же в распорах изменяются не так резко.

Изложенный здесь прием дает полное решение поставленной задачи об изгибе пластины при каких угодно нагрузках p_x^0 и p_z^0.

§ 25. Гибкие пластины. Влияние начальной кривизны; редукционные коэффициенты. Влияние конечного отношения сторон опорного контура

Общие формулы, определяющие обстоятельства изгиба тонкой пластины, имеющей начальную кривизну, уже были найдены нами в § 23 *), но получить из них сколько-нибудь показательные выводы представляется очень трудным ввиду значительной громоздкости и сложности найденных выражений; поэтому мы решим сперва поставленную задачу для частного случая, задав какое-нибудь произвольное выражение для начальной кривизны пластины, а потом укажем, какие из полученных нами выводов будут иметь место при всякой, но, конечно, достаточно малой начальной кривизне.

Пусть, например, цилиндрическая поверхность, с которой совпадает средняя поверхность нашей пластины до изгиба, будет иметь параболическую направляющую, определяемую уравнением

$$x = 2c_0 \frac{z}{a}\left(1 - \frac{z}{2a}\right),$$

где c_0 — наибольшая стрелка начальной погиби при $z = a$.

Найдем уравнение этой поверхности после изгиба пластины нагрузками p_x^0 и p_z^0, а также и уравнения, определяющие лишние неизвестные балки-полоски $\varkappa$ и u.

---

*) См. формулы (102), (104), (105) и (106).

Если мы напишем заданное уравнение параболы в виде тригонометрического ряда

$$x = \frac{32c_0}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2a}}{i^3} \text{ *)}$$

и сравним его с формулой (101), то увидим, что

$$c_i = \frac{32c_0}{\pi^3 i^3}, \text{ где } i = 1, 3, 5, 7, \ldots;$$

подставляя это значение коэффициентов c_i в формулу (104a), определяющую полную пару закрепления, мы найдем:

$$(m_0)_{\max} = \frac{1}{3} p_x^0 a^2 \chi(u) - \frac{2\pi u}{\operatorname{th} u} p_z h \sum_{i=1}^{\infty} \frac{32c_0}{\pi^3 i^2 (4u^2 + \pi^2 i^2)},$$

или, суммируя последний ряд,

$$(m_0)_{\max} = \frac{1}{3} p_x^0 a^2 \chi(u) - \frac{2}{3} p_z h c_0 \chi(u);$$

назвав теперь для сокращения письма

$$\frac{2p_z h c_0}{p_x^0 a^2} \text{ через } \varepsilon$$

и положив, как и раньше, что на опорном контуре пластины возникает неполная пара закрепления m_0 с коэффициентом $\varkappa$, мы найдем такое выражение для этой пары:

$$m_0 = \frac{1}{3} \varkappa (1 - \varepsilon) p_x^0 a^2 \chi(u),$$

причем коэффициент $\varkappa$ связан с коэффициентом жесткости опорного контура α через соотношение (104d), не зависящее от начальной кривизны пластины.

Подставим теперь найденные выражения для c_i и m_0 в уравнение (102), определяющее перемещения ξ точек средней

*) См. третью формулу второго столбца на стр. 189 [1-й части Курса, изд. 1912 г.] [40].

поверхности пластины, и после некоторых упрощений получим:

$$\xi = (1-\varepsilon)\frac{p_x^0 a^2 u^2}{p_z h}\frac{16}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{4}{\pi^2 i^2}-\frac{1}{3}\varkappa\chi(u)}{4u^2+\pi^2 i^2}\sin\frac{i\pi z}{2a};$$

легко видеть, что это выражение отличается от найденного выше для пластин без начальной кривизны лишь множителем $1-\varepsilon$, зависящим от заданной наибольшей стрелки погиби пластины c_0 и неизвестного аргумента u, для нахождения которого мы должны обратиться к уравнению (105).

Подставляя в это уравнение наши выражения для производных ξ' и x', мы после различных преобразований найдем:

$$\frac{9\varepsilon(1-\varepsilon)}{4u^6}\left\{1-\left[\varkappa+(1-\varkappa)\frac{\operatorname{th} u}{u}\right]\chi(u)\right\}+(1-\varepsilon)^2 F(\varkappa, u)=$$
$$=\frac{1}{K(1-\mu^2)^2}\left(\frac{E}{p_x^0}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^8\left(1-\frac{p_z^0}{p_z}\right);$$

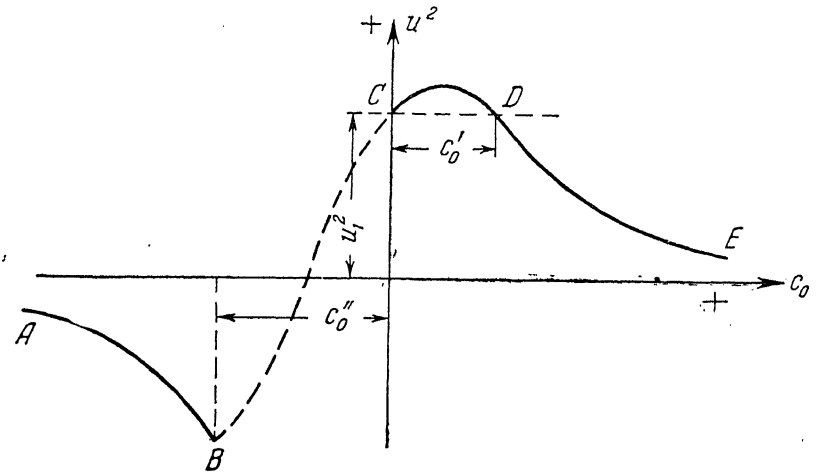
это уравнение соответствует общему уравнению (106) и может быть получено из него непосредственно.

Решение этого уравнения относительно аргумента u, когда величины c_0 и p_z^0 являются заданными, представляется довольно сложным; проще всего обойти встречающиеся при этом затруднения при помощи приема, которым мы уже пользовались в предыдущем параграфе для случая пластины без начальной кривизны (см. пример 40); именно, можно задать ряд значений аргумента u и искать соответствующую им нагрузку p_z^0, пока мы не получим величины, достаточно близкой к заданной. Тот же прием мы применим и для простейшего случая $p_z^0=0$, когда наше уравнение примет такой вид:

$$\frac{9\varepsilon(1-\varepsilon)}{4u^6}\left\{1-\left[\varkappa+(1-\varkappa)\frac{\operatorname{th} u}{u}\right]\chi(u)\right\}+$$
$$+(1-\varepsilon)^2 F(\varkappa, u)=F(\varkappa, u_1),$$

где через u_1 названо значение аргумента, отвечающее случаю пластины без начальной кривизны ($c_0=0$ и $\varepsilon=0$), и для того чтобы исследовать связь между величинами ε и u, мы будем

решать это уравнение относительно буквы ε, считая аргумент u заданным; так как полученное уравнение по отношению к величине ε будет квадратным, то каждому значению аргумента будут отвечать два корня ε или, что то же, два значения стрелки прогиба c_0; при этом возможно, что оба корня будут мнимыми, и это покажет, что выбранное значение аргумента вообще не может иметь места для данной пластины. Не останавливаясь подробно на аналитическом исследовании рассматриваемой зависимости, мы приведем лишь наиболее важные выводы, которые проще всего иллюстрируются графическим изображением этой зависимости, представленной на чертеже 78 кривою *ABCDE*. Вертикальная ось, на которой мы будем откладывать величины u^2, пересечется нашей



Черт. 78.

кривой в точке u_1^2, причем соответственная положительным стрелкам прогиба ветвь кривой *CDE* сперва несколько повышается до некоторого аргумента $u_{\max}^2$, для больших же стрелок c_0 — падает, так что соответственный аргумент будет неопределенно подходить к нулю; при этом стрелка c_0', отвечающая аргументу $u = u_1$, будет малою не ниже третьего порядка относительно величины $1 : u_1$, а разность $u_{\max} - u_1$ быстро убывает с увеличением u_1; значениям аргумента, бо́льшим $u_{\max}$, будут отвечать мнимые значения величин ε и c_0.

При отрицательных стрелках погиби пластины кривая состоит из двух ветвей, причем ветвь BC соответствует неустойчивому равновесию пластины, при стрелках же, превышающих по абсолютной величине критическую стрелку c_0'', пластина будет устойчивой (ветвь AB). При этой критической стрелке в пластине под действием изгибающей нагрузки p_z^0 возникнут сжимающие напряжения p_z, равные эйлеровым, и мнимый аргумент u достигнет своего предельного значения $\left(u = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}\right.$ при $\varkappa = 0$ и $u = \pi\sqrt{-1}$ при $\varkappa = 1$); всякое дальнейшее увеличение нагрузки p_z^0 заставит пластину изменить свою кривизну на обратную, так что стрелка c_0 станет положительной и равновесие пластины — устойчивым.

Нетрудно показать, что в пограничной точке B наше уравнение имеет двойной корень $\varepsilon = 1$, так что критическая стрелка c_0'' определится выражением

$$c_0'' = \frac{p_x^0 a^2}{2p_z h},$$

и потому при $\varkappa = 0$ мы получим:

$$c_0'' = -\frac{3(1-\mu^2)}{2\pi^2}\frac{p_x^0}{E}\frac{(2a)^4}{h^3} \text{ *)};$$

при полной паре закрепления ($\varkappa = 1$) эта стрелка будет в четыре раза меньше.

Таким образом, пластина, имеющая начальную погибь по параболе с наибольшей стрелкой c_0, при действии изгибающей нагрузки p_z^0 будет находиться в устойчивом равновесии, если эта стрелка удовлетворяет условию $c_0 < c_0''$ или $c_0 > 0$;

---

*) Это выражение совпадает с известной формулой для критического распора в сводах

$$p_z = \frac{p_x^0 \rho}{h} = \frac{p_x^0 a^2}{2c_0 h} = \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{2a}\right)^2,$$

где через ρ обозначен радиус кривизны средней линии свода; конечно, эта формула имеет место лишь для пологих сводов, для которых отношения $a:\rho$ и $h:a$ достаточно малы.

в противном же случае она изменит свою кривизну на обратную. Разыскание аргумента u, соответственного заданной стрелке, может быть сделано при помощи полученного выше уравнения путем последовательных проб, после чего мы без труда найдем перемещения ξ_0 и наибольшие напряжения в нашей пластине. Нижеследующий пример дает представление о тех изменениях в этих величинах, которые вызываются начальной кривизной пластины.

Пример 41. Найдем наибольшие стрелки прогиба и напряжения, возникающие в пластинах толщиною 16 *мм*, свободно опертых на весьма длинный контур при пролете $2a = 120$ *см*, под изгибающей нагрузкой в одну атмосферу; пластины эти имеют начальную погибь по параболе и отличаются друг от друга лишь величиною наибольшей стрелки c_0; материал их характеризуется модулем $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ *am* и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}3$; коэффициент распора $K = 0{,}5$.

Критическая стрелка начальной погиби для таких пластин определится из найденного выше соотношения

$$c_0'' = -\frac{3(1-\mu^2)}{2\pi^2}\frac{p_x^0}{E}\frac{(2a)^4}{h^3} = -3{,}27 \text{ см}$$

и получается столь значительной, что едва ли может иметь место в действительных конструкциях; поэтому все практически возможные отрицательные стрелки прогиба пластин, как соответствующие их неустойчивому равновесию, будут изменены нагрузкою p_x^0 на обратные, и мы могли бы таким образом ограничиться рассмотрением пластин с положительными стрелками c_0. Тем не менее для полного освещения вопроса мы рассмотрим и такие пластины, начальная погибь которых значительно превышает возможную в судовых конструкциях.

Для всех наших пластин (при $\varkappa = 0$) мы будем иметь:

$$F(\varkappa, u) = U_0(u);$$

$$\frac{10^4}{(1-\mu^2)\sqrt{K}}\frac{E}{p_x^0}\left(\frac{h}{2a}\right)^4 = 10^4\sqrt{U_0(u_1)} = 1051,$$

откуда найдем:

$$\lg\sqrt{U_0(u_0)} + 4 = 3{,}022; \quad U_0(u_1) = 0{,}01106 \quad \text{и} \quad u_1 = 1{,}78.$$

Теперь мы зададим ряд значений аргумента u и по формуле

$$\frac{9}{4}\left[1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\chi(u)\right]\varepsilon(1-\varepsilon)+u^6U_0(u)(1-\varepsilon)^2=u^6U_0(u_1),$$

которую для упрощения письма мы представим в таком виде:

$$A\varepsilon(1-\varepsilon)+B(1-\varepsilon)^2=C,$$

найдем ряд величин ε, по которым без труда вычислим и стрелки c_0, соответствующие выбранным значениям аргумента u при помощи соотношения

$$c_0=\frac{\varepsilon p_x^0 a^2}{2p_z h}=\frac{3}{8}(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{(2a)^4}{h^3}\frac{\varepsilon}{u^2}=8{,}07\frac{\varepsilon}{u^2}\text{ в }см.$$

Эти вычисления сгруппированы в нижеследующей таблице.

u	$\frac{\operatorname{th} u}{u}\chi(u)$	A	B	C	ε	ε'	c_0	c_0'
							сантиметры	
1,50*	11,202	—22,96	118,8	—0,1258	0,994	*+0,847*	—3,5	*—3,0*
1,25*	2,703	— 3,83	3,31	—0,0422	0,989	*+0,476*	—5,1	*—2,5*
1,00*	1,675	— 1,519	0,515	— 0,01106	0,993	*+0,260*	—8,0	*—2,1*
1,00	0,715	+0,641	0,0922	+0,01106	0,983	*—0,152*	+7,9	*—1,2*
1,25	0,617	+0,862	0,1681	+0,0422	0,952	*—0,194*	+4,9	*—1,0*
1,50	0,529	+1,059	0,2522	+0,1258	0,835	*—0,197*	+3,0	*—0,7*
1,78	0,444	+1,251	0,352	+0,352	0,608	0	+1,5	0
1,85	0,425	+1,294	0,377	+0,444	0,410	+0,178	+1,0	+0,4
1,86	0,422	+1,300	0,380	+0,459	0,294	+0,294	+0,7	+0,7

Цифры в столбцах 7-м и 9-м, набранные курсивом, соответствуют величинам ε' и $(c_0)'$, характеризующим неустойчивое равновесие пластины (см. пунктирную ветвь BC на черт. 78) и не представляют для нас интереса. Для всех же остальных стрелок начальной погиби мы легко найдем наибольшее

перемещение $(\xi_0)_{max}$ по формуле (108)

$$(\xi_0)_{max} = \frac{5}{32}(1-\varepsilon)(1-\mu^2)\frac{p_x^0}{E}\frac{(2a)^4}{h^3}f_0(u) = 3{,}36\,(1-\varepsilon)f_0(u) \text{ в } см,$$

наибольшие же приведенные напряжения в среднем сечении определятся выражением (109)

$$(E\varepsilon_z)_{max} = \frac{1}{3}Eu^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2 \pm \frac{3}{4}(1-\varepsilon)(1-\mu^2)p_x^0\left(\frac{2a}{h}\right)^2\varphi_0(u) =$$
$$= 127u^2 \pm 3840\,(1-\varepsilon)\varphi_0(u) \text{ в } am.$$

Результаты этих вычислений приведены в нижеследующей таблице.

c_0 см	u	$1-\varepsilon$	$(1-\varepsilon)\varphi_0(u)$	Приведенные напряжения в атмосферах: растягивающие	от изгиба	полные	$(1-\varepsilon)f_0(u)$	$(\xi_0)_{max}$ см
—8,0	1,00*	0,0073	0,012	—130	— 50	—180	0,012	0,04
—5,1	1,25*	0,0111	0,031	—200	—120	—320	0,030	0,10
—3,5	1,50*	0,0057	0,066	—290	—250	—540	0,065	0,22
—3,3	$^1/_2\pi$*	0*)	0,079	—310	—300	—610	0,077	0,26
0	1,78	1,000	0,425	400	1630	2030	0,441	1,48
+0,4	1,85	0,822	0,333	430	1280	1710	0,345	1,16
+0,7	1,86	0,706	0,285	440	1090	1530	0,295	0,99
+1,0	1,85	0,590	0,239	430	920	1350	0,248	0,83
+1,5	1,78	0,392	0,167	400	640	1040	0,173	0,58
+3,0	1,50	0,165	0,084	290	320	610	0,088	0,30
+4,9	1,25	0,042	0,029	200	110	310	0,026	0,10
+7,9	1,00	0,017	0,012	130	50	180	0,012	0,04

*) Стрелка начальной погиби c_0'' этой строки будет весьма близка к предельной для устойчивого равновесия пластины.

Из рассмотрения приведенных в таблице цифр ясно, что всякая начальная погибь пластины, при которой она остается в устойчивом равновесии, понижает как перемещения ξ_0, так и возникающие в пластине напряжения и притом в тем большей мере, чем значительнее начальная кривизна пластины, т. е. абсолютная величина стрелки c_0. При этом увеличение растягивающих напряжений p_z будет иметь место лишь при незначительных положительных стрелках c_0 и вообще будет тем меньше, чем гибче пластина, иначе говоря — чем больше характеризующий ее аргумент u_1.

Нетрудно также убедиться, что при малых отрицательных стрелках прогиба, соответствующих неустойчивому равновесию пластины, перемещения ξ_0 и напряжения $E\varepsilon_z$ будут превышать те, которые получаются для плоской пластины, и тем значительнее, чем ближе стрелка c_0 подходит к критической стрелке c_0''.

Мы рассмотрели случай пластины с параболической начальной погибью; подобным же путем можно было бы исследовать и другие виды этой погиби, хотя решение при этом в большинстве случаев получилось бы более сложным, чем только что показанное. Из подобных исследований можно было бы установить, что величины критической стрелки, а также и перемещений ξ_0 лишь в слабой степени зависят от вида начальной кривизны, конечно, если она соответствует обычно встречающейся в действительных конструкциях*); но местные напряжения, в особенности в местах наибольшей и наименьшей кривизны пластины, могут довольно значительно отличаться от найденных для рассмотренного случая.

Нам остается еще разобрать один очень важный для практических приложений вопрос о влиянии начальной кривизны пластины при действии на нее растягивающей или сжимающей нагрузки p_z^0, причем, чтобы не осложнять получаемого решения чрезмерной громоздкостью формул и выкладок, мы отбросим изгибающую нагрузку p_x^0; кроме того, мы уже имели

*) См. ниже, черт. 80 на стр. 295.

случай указывать (см. стр. 213), что в практически выполняемых конструкциях при нагрузке p_z^0 почти невозможно получить заметно влияющую на обстоятельства изгиба пластины опорную пару m_0, и потому при дальнейшем решении вопроса мы положим $m_0 = 0$ и $\varkappa = 0$.

При этих условиях уравнение (102), определяющее перемещение ξ точек средней поверхности пластины, напишется таким образом:

$$\xi = -4u^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i \sin \frac{i\pi z}{2a}}{4u^2 + \pi^2 i^2},$$

а уравнения (105) и (106), из которых может быть найдено напряжение p_z, примут такой вид:

$$-\frac{\pi^2 u^2}{a^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(2u^2 + \pi^2 i^2)\, i^2 c_i^2}{(4u^2 + \pi^2 i^2)^2} = \frac{2(1-\mu^2)}{KE}(p_z - p_z^0);$$

заменим теперь величину u^2 ее выражением из соотношения (103):

$$u^2 = \frac{12(1-\mu^2)\, p_z a^2}{Eh^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{p_z}{\sigma_e},$$

где

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{2a}\right)^2,$$

и назовем для сокращения письма $\frac{p_z}{\sigma_e}$ через v и $\frac{p_z^0}{\sigma_e}$ через v_0; тогда из последнего уравнения мы найдем:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2} v + i^2\right) i^2 c_i^2}{(v + i^2)^2} = \frac{1}{6} \frac{h^2}{K} \left(1 - \frac{v_0}{v}\right); \qquad (111)$$

это и будет условие, определяющее неизвестную величину v, когда даны размеры пластины, величины K и c_i и нагрузка p_z^0.

Из полученного уравнения нетрудно видеть, что

а) по мере уменьшения начальной кривизны пластины, характеризуемой коэффициентами c_i, левая часть уравнения неопределенно убывает и, следовательно, v приближается к v_0,

а напряжение p_z — к p_z^0, если только выполнено условие $v > -1$ или $p_z > -\sigma_e$; так как при этом левая часть остается отрицательной, то мы всегда получим:

$$1 - \frac{v_0}{v} < 0 \quad \text{или} \quad |v| < |v_0|;$$

b) по мере приближения величины v к -1 левая часть по абсолютной величине неопределенно растет*), оставаясь отрицательной, что может быть только при увеличении v_0 до $-\infty$, или, иначе говоря — при неопределенном возрастании сжимающей нагрузки p_z^0;

c) при возрастании величины v левая часть уравнения неопределенно убывает как малая порядка $1 : v$, а потому величины v и v_0 сближаются друг с другом, какова бы ни была начальная кривизна пластины; это, конечно, может быть только при $v_0 > 0$, так как при больших отрицательных значениях v_0 мы сейчас нашли для v совсем другой предел.

Из сказанного мы заключаем, что весьма значительная растягивающая нагрузка ($p_z^0 = \infty$) почти полностью воспринимается пластиной, при сжимающих же усилиях пластина не может воспринять нагрузки, превосходящей эйлерову, и этого предела достигает лишь при неопределенном возрастании сжимающей нагрузки ($p_z^0 = -\infty$).

Если зависимости между v_0 и v, или, что то же, между p_z^0 и p_z мы представим графически, то для пластины, имеющей ничтожно малую начальную кривизну, эта зависимость изобразится ломаной линией $ABOC$ (черт. 79),

$$v = v_0 \quad \text{при} \quad -1 < v_0 < +\infty$$

и

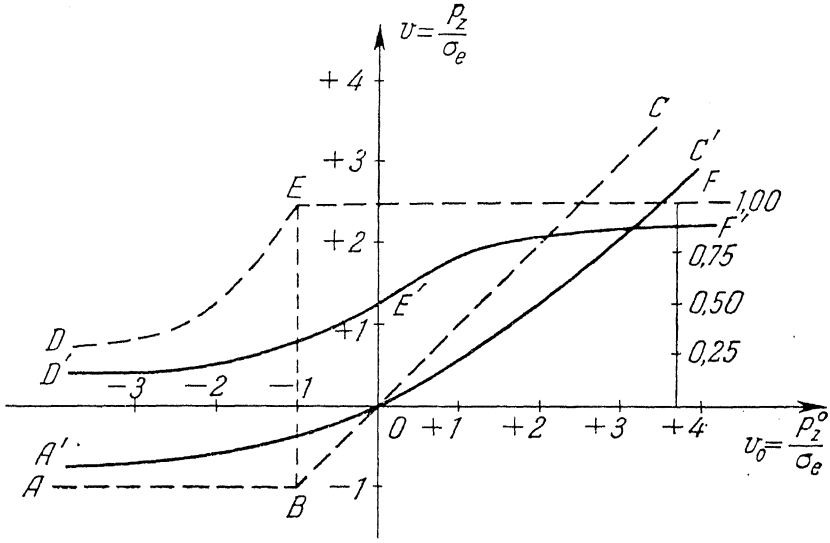
$$v = -1 \quad \text{при} \quad -1 > v_0 > -\infty,$$

---

*) Такое возрастание не могло бы иметь места, если бы мы положили $c_1 = 0$; но необходимо помнить, что уравнение (101) определяет некоторую неизбежную во всякой конструкции начальную кривизну пластины, которую мы можем различными приемами уменьшать, но не имеем средств изменить по своему выбору или совершенно уничтожить; естественно, что при этом коэффициент c_1, соответственный синусоиде низшей степени кратности, может быть величиной малой, но не нулем.

при заметной же начальной кривизне пластины вместо этой ломаной мы получим непрерывную кривую $A'OC'$, тем теснее сближающуюся с нею, чем меньше начальная кривизна.

Отношение величин $v : v_0$, или напряжений $p_z : p_z^0$, мы будем называть редукционным коэффициентом пластины [41]; этот коэффициент, указывающий, какая часть растягивающей или сжимающей нагрузки воспринимается ею, всегда будет меньше



Черт. 79.

единицы; ближе всего он будет подходить к этому пределу (см. кривую $D'E'F'$ на черт. 79) при значительных растягивающих напряжениях, уменьшаясь при падении нагрузки; при нагрузках, весьма близких к нулю, редукционный коэффициент равен

$$\frac{h^2}{h^2+6K\sum c_i^2},$$

при значительных сжимающих нагрузках — будет малой величиной, близкой к $1 : (-v_0)$. Легко видеть, что уменьшение начальной кривизны пластины повышает этот коэффициент до его предельного значения, изображаемого линией DEF.

Заметим еще, что напряжение p_z и величина редукционного коэффициента не зависят от знаков коэффициентов c_i, потому что в определяющие их выражения буква c_i входит в квадрате.

Так как при умеренных нагрузках p_z^0 числовые значения редукционного коэффициента значительно отличаются от тех, которые соответствуют пластинам без начальной кривизны (т. е. 1 и $1 : (-\nu_0)$), то нам необходимо установить хотя бы очень приближенно его значения при подобных нагрузках.

Как видно из полученного выше уравнения (111), редукционный коэффициент зависит от величины всех коэффициентов c_i, определяющих начальную погибь пластины через соотношение (101). Вместе с тем эта погибь, являясь неотъемлемым свойством тонкой пластины, не может быть задана и выполнена по нашему выбору и усмотрению и потому коэффициенты c_i для практически выполняемой конструкции будут нам неизвестны *); в лучшем случае мы можем требовать такой пригонки и сборки частей судового корпуса, при которой наибольшая стрелка погиби листов была бы ограничена известным пределом. Поэтому нам остается выяснить вопрос, насколько широки границы изменения редукционного коэффициента для пластин, имеющих разную начальную погибь, но при условии одинаковости наибольшей стрелки этой погиби.

Подробное аналитическое исследование этого вопроса представляет много затруднений, почему мы ограничимся одним приближенным приемом, дающим, однако, достаточное представление о порядке указанных изменений.

Выберем для стрелок погиби x несколько по возможности простых выражений, определяющих наиболее резко отличающиеся между собой кривые, положив, например (черт. 80),

$$x = c_1 \sin \frac{\pi z}{2a},$$

$$x = c_1' \left(\sin \frac{\pi z}{2a} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi z}{2a} \right),$$

$$x = c_1'' \left(\sin \frac{\pi z}{2a} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi z}{2a} \right),$$

*) Искусственно придаваемая пластине погибь в направлении, перпендикулярном действию сжимающих или растягивающих сил, в значительной мере понижает эти коэффициенты и, кроме того, как мы видели выше (см. стр. 189), весьма повышает эйлерово напряжение пластины. Этим обстоятельством следует всегда пользоваться в тех случаях, когда нужно заставить тонкую пластину работать наивыгоднейшим образом на растяжение или сжатие.

причем из условия равенства наибольших стрелок прогиба мы будем иметь:

$$c_1' = \frac{4}{9}\sqrt{3}\,c_1 \quad \text{и} \quad c_1'' = \frac{3}{4}\,c_1.$$

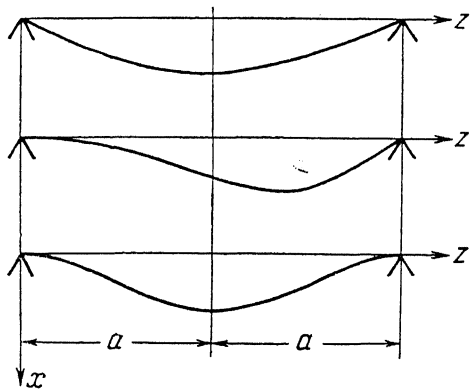
Уравнения (111), определяющие величины v при такой начальной кривизне пластины, напишутся таким образом:

$$v = v_0 - 3K\left(\frac{c_1}{h}\right)^2\left[1 - \frac{1}{(v+1)^2}\right],$$

$$v = v_0 - \frac{16}{9}K\left(\frac{c_1}{h}\right)^2\left[2 - \frac{1}{(v+1)^2} - \frac{16}{(v+4)^2}\right],$$

$$v = v_0 - \frac{27}{16}K\left(\frac{c_1}{h}\right)^2\left[2 - \frac{1}{(v+1)^2} - \frac{81}{(v+9)^2}\right].$$

Зададим теперь несколько частных значений для наибольшей стрелки прогиба этих пластин (например, $c_1 = h$, $\frac{1}{2}h$



Черт. 80.

и $\frac{1}{4}h$ при $K = 1$) и вычислим соответственные им редукционные коэффициенты при разных значениях величины v_0; результаты этих вычислений сгруппированы в нижеследующей табличке.

v_0	$c_1 = h$			$c_1 = \frac{1}{2} h$			$c_1 = \frac{1}{4} h$		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
+12	0,75	0,72	0,75	0,94	0,93	0,94	0,98	0,98	0,98
+ 8	0,64	0,61	0,67	0,91	0,90	0,91	0,98	0,97	0,98
+ 4	0,37	0,40	0,49	0,82	0,82	0,85	0,95	0,95	0,96
0	0,14	0,18	0,21	0,40	0,47	0,52	0,73	0,78	0,81
— 2	0,10	0,13	0,14	0,22	0,25	0,26	0,33	0,36	0,36
— 4	0,08	0,10	0,11	0,14	0,16	0,18	0,20	0,20	0,21

Из сравнения приведенных чисел нетрудно видеть, что границы изменения редукционного коэффициента тем шире, чем больше наибольшая стрелка прогиба c_1 и чем ближе к нулю пропорциональное нагрузке p_z^0 число v_0; при этом если величина редукционного коэффициента значительна (больше половины), то колебания его в зависимости от начальной кривизны пластины сравнительно малы и, следовательно, он почти не зависит от этой кривизны; при меньших значениях коэффициента эти колебания несколько больше, и наименьшая величина его соответствует простейшей кривой, определяемой выражением

$$x = c_1 \sin \frac{\pi z}{2a}.$$

Таким образом, если мы составим таблицу редукционных коэффициентов при разных значениях чисел v_0 и $K\frac{c_1^2}{h^2}$ для пластины, изогнутой по этой последней кривой, то можем пользоваться ею при всякой практически возможной естественной кривизне пластины, причем для значительных величин этого коэффициента (больше половины) мы будем иметь результат, довольно близкий к действительному, для меньших же значений коэффициента наши числа не превысят действительных значений его и, следовательно, пластина воспримет часть нагрузки, не меньшую определенной при помощи таблицы.

Таблица редукционных коэффициентов для оценки влияния начальной кривизны пластин на величину воспринимаемой ими растягивающей или сжимающей нагрузки

$(b : a = \infty)$

$K\left(\frac{c_1}{h}\right)^2$ / v_0	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	$K\left(\frac{c_1}{h}\right)^2$ / v_0
+12	1,00	0,99	0,98	0,96	0,95	0,93	0,90	0,88	0,85	0,80	0,75	+12
+10	1,00	0,99	0,97	0,96	0,94	0,91	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	+10
+ 8	1,00	0,98	0,96	0,95	0,93	0,89	0,85	0,82	0,78	0,71	0,64	+ 8
+ 6	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,85	0,81	0,76	0,71	0,62	0,53	+ 6
+ 4	1,00	0,96	0,93	0,89	0,86	0,79	0,72	0,65	0,59	0,47	0,37	+ 4
+3,0	1,00	0,95	0,91	0,86	0,82	0,73	0,65	0,57	0,50	0,38	0,29	+3,0
+2,0	1,00	0,93	0,87	0,81	0,75	0,64	0,54	0,46	0,38	0,29	0,22	+2,0
+1,5	1,00	0,92	0,84	0,77	0,70	0,57	0,47	0,39	0,33	0,25	0,20	+1,5
+1,0	1,00	0,89	0,79	0,70	0,63	0,50	0,41	0,34	0,29	0,22	0,17	+1,0
+0,5	1,00	0,85	0,72	0,62	0,54	0,42	0,34	0,29	0,25	0,19	0,16	+0,5
0	1,00	0,77	0,63	0,53	0,45	0,36	0,29	0,25	0,22	0,17	0,14	0
—0,5	1,00	0,65	0,51	0,43	0,38	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,13	— 0,5
—1,0	1,00	0,51	0,42	0,36	0,32	0,26	0,22	0,19	0,17	0,14	0,12	— 1,0
—1,5	0,67	0,41	0,34	0,30	0,27	0,23	0,20	0,17	0,16	0,13	0,11	— 1,5
—2,0	0,50	0,34	0,29	0,26	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	— 2,0
—3,0	0,33	0,25	0,22	0,20	0,19	0,16	0,14	0,13	0,12	0,10	0,09	— 3,0
— 4	0,25	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,11	0,09	0,08	— 4
— 6	0,17	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07	— 6
— 8	0,13	0,11	0,10	0,09	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	— 8
—10	0,10	0,09	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	—10
—12	0,08	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04	—12

Когда число v найдено при помощи этой таблицы или непосредственно из уравнения (111), то перемещения точек оси балки-полоски определятся по найденному выше уравнению (102)

$$\xi = -4u^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i \sin \frac{i\pi z}{2a}}{4u^2 + \pi^2 i^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{v c_i \sin \frac{i\pi z}{2a}}{v + i^2},$$

так что для простейшего случая, когда все коэффициенты c_i обращаются в нуль, кроме первого, мы найдем:

$$\xi = -\frac{v}{v+1} c_1 \sin \frac{\pi z}{2a} = -\frac{vx}{v+1};$$

мы видели, что при значительных растягивающих нагрузках (v_0 велико) величина v неопределенно возрастает и, следовательно, перемещение ξ приближается к $(-x)$, иначе говоря, изогнутая ось балки-полоски выпрямляется; при значительных же сжимающих нагрузках величина v приближается к (-1) и, следовательно, перемещения ξ неопределенно возрастают.

Наибольшее приведенное напряжение $(E\varepsilon_z)_{\max}$ мы найдем по общей формуле

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = (1-\mu^2) p_z \pm \frac{1}{2} Eh\xi'',$$

которая для простейшего случая $(c_2 = c_3 = c_4 = \ldots = 0)$ примет такой вид:

$$(E\varepsilon_z)_{\max} = (1-\mu^2) p_z \pm \frac{\pi^2}{8} \frac{hc_1}{a^2} \frac{v}{v+1} E;$$

нетрудно видеть, что с увеличением растягивающей нагрузки p_z^0 второй член этого выражения стремится к пределу

$$\pm \frac{\pi^2}{8} \frac{hc_1}{a^2} E,$$

при значительной же сжимающей нагрузке он будет неопределенно возрастать.

Вопрос о величине редукционных коэффициентов для растягиваемых или сжимаемых пластин имеет очень большое значение в расчетах прочности судового корпуса, но приме-

нение только что полученных нами выводов при этом очень осложняется тем обстоятельством, что рассматриваемые пластины опираются не на бесконечно длинный контур ($b : a = \infty$), как мы предполагали, а на контур с конечным отношением сторон $2b : 2a$.

Общий вид диаграммы редукционных коэффициентов DEF (см. черт. 79) для таких пластин, если они не имеют начальной кривизны, будет такой же, как и в рассмотренном нами случае, но с тем отличием, что точка слома кривой E с абсциссою $v_0 = -1$ передвинется влево и абсцисса ее возрастет по абсолютной величине во столько раз, во сколько эйлерово напряжение для пластины с конечным отношением сторон контура $2a : 2b$ будет больше такого же напряжения при бесконечно длинном контуре. При пластине, свободно опертой на все четыре кромки и сжимаемой вдоль короткой стороны, это отношение k, как мы видели, равно *)

$$k = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad \text{при} \quad a < b,$$

и соответственно указанному переходу точки E ординаты ветви DE нашей диаграммы будут определяться выражением

$$k : (-v_0) = -k \frac{p_z^0}{E} \frac{12(1-\mu^2)}{\pi^2} \left(\frac{2a}{h}\right)^2.$$

Что касается диаграммы $D'E'F'$, соответствующей пластине с начальной кривизной, то при весьма больших положительных значениях v_0 она будет асимптотически приближаться к прямой EF, при больших же отрицательных значениях v_0 — к гиперболе DE. Некоторые соображения, на которых мы здесь не будем останавливаться, показывают, что мы не превысим величины действительных редукционных коэффициентов, если и в рассматриваемом случае будем определять их по приведенной выше таблице, но относя указанные в ней цифры к абсциссам $v_0 - k + 1$ вместо v_0, т. е. как бы сдвигая нашу диаграмму влево на величину $k - 1$. Кроме того, для сжимающих нагрузок, характеризуемых

*) См. стр. 184.

соотношением $-k > v_0 > -\infty$, цифры таблицы нужно умножать на множитель

$$1 + \left(\frac{v_0 + k}{v_0 - 1}\right)^2 (k - 1),$$

колеблющийся в пределах от единицы до k.

Таким образом, положив, например, $K\left(\frac{c_0}{h}\right)^2 = 0{,}5$, мы получим такие приближенные величины для редукционных коэффициентов при разных отношениях $b : a$ сторон опорного контура:

$k =$	1	2	3	4
$b/a =$ / v_0	∞	1,55	1,17	1,00
+6	0,76	0,79	0,82	0,84
+5	0,71	0,76	0,79	0,82
+4	0,65	0,71	0,76	0,79
+3	0,57	0,65	0,71	0,76
+2	0,46	0,57	0,65	0,71
+1	0,34	0,46	0,57	0,65
0	0,25	0,34	0,46	0,57
—1	0,19	0,25	0,34	0,46
—2	0,16	0,19	0,25	0,34
—3	0,13	0,17	0,19	0,25
—4	0,11	0,15	0,17	0,19
—5	0,10	0,14	0,16	0,17
—6	0,09	0,13	0,15	0,16

Теперь мы попробуем оценить, хотя бы приближенно, влияние конечного отношения сторон опорного контура $2b : 2a$ на все те выводы, которые получены нами для гибких пластин при допущении $b : a = \infty$.

Рассматривая изгиб жестких пластин, мы установили, что влияние коротких сторон контура на обстоятельства изгиба

балки-полоски, ось которой совпадает с линией, соединяющей средины длинных сторон контура, будет тем слабее, чем больше отношение $b:a$, причем если это отношение будет равно двум или превысит эту цифру, то указанным влиянием можно пренебречь с погрешностью, допустимой в расчетах практического характера. Кроме того, растягивающие пластину силы p_z^0, а также и пары закрепления m_y в сечениях, опертых на длинные стороны контура, еще значительно уменьшают это влияние, так что в некоторых случаях им можно бывает пренебречь даже при $a = b$.

Поэтому для гибких пластин, в особенности при $p_z > 0$ (т. е. при действительных значениях аргумента), мы в большинстве случаев можем пренебрегать влиянием коротких сторон, но относя при этом все наши формулы не ко всей пластине, а лишь к тем частям ее, которые расположены близ линии, соединяющей средины длинных сторон опорного контура.

Таким образом, стрелки прогиба или перемещения ξ для этих частей гибкой пластины будут весьма близки к тем, которые определяются полученными выше формулами, но для балок-полосок, лежащих ближе к коротким сторонам, эти стрелки, конечно, будут соответственно меньше, доходя до нуля для полосок, граничащих с этими сторонами. Точно так же и напряжения p_z и $(E\varepsilon_z)$, определяемые нашими формулами, будут верны лишь для средних полосок, соответственно понижаясь для крайних. Это последнее обстоятельство имеет особенно важное значение для пластин с закрепленными по длинным сторонам контура сечениями, близ которых, как мы видели, даже при малых нагрузках p_x^0 развиваются напряжения, весьма быстро достигающие предела текучести материала; понижение этих напряжений в полосках, подходящих к коротким сторонам, в значительной мере уменьшает ту часть объема пластины (см. черт. 77 на стр. 265), в которой могут возникнуть эти весьма значительные напряжения.

Кроме того, присутствие коротких сторон контура может значительно повысить и величину коэффициента распора K. В самом деле, цепные напряжения p_z', которыми сжимаются распоры, препятствующие сближению длинных сторон, будут достигать определяемой нашими формулами величины лишь

для средних балок-полосок, для крайних же, граничащих с короткими сторонами контура, эти напряжения упадут до нуля и, следовательно, полное сжимающее усилие в наших распорах будет меньше найденного выше, или, что то же, величина коэффициента распора K будет больше той, которая определяется найденным в § 23 соотношением $t:(h+t)$.

Для приближенной оценки этого повышенного значения коэффициента K в пластинах без начальной кривизны ($x=0$) мы употребим такой прием: разрежем мысленно нашу пластину на ряд балок-полосок с пролетом, равным короткой стороне контура, и попробуем для каждой из них рассчитать соответствующее цепное напряжение; затем просуммируем полученные усилия для всех этих балок и по сжатию распор этим суммарным усилием определим и новое значение для коэффициента K.

Возьмем, например, балку-полоску шириною dy в расстоянии y от угла пластины, принимаемого нами за начало координат, и пусть p'_z будет величина возбужденного в ней цепного напряжения, полное же осевое напряжение пусть будет $p_z=p_z^0+p'_z$; при этом величины p_z и p'_z будут функциями от координаты y, нагрузка же p_z^0 будет от нее независима. Тогда на участок распоры bt, соответствующий полудлине пластины b, будут действовать:

a) растягивающая или сжимающая сила $p_z^0 bt$ и

b) сила, уравновешивающая сумму осевых реакций для всех балок-полосок, лежащих на длине b, равная

$$-h\int_0^b p'_z\,dy;$$

отсюда мы и найдем смещение опорного контура по направлению оси z:

$$\zeta_0=\frac{a(1-\mu^2)}{Ebt}\left[p_z^0 bt-h\int_0^b p'_z\,dy\right].$$

С другой стороны, изменение в длине проекции оси полоски на то же направление, считая на длине полупролета,

определится, как найдено выше, выражением

$$\frac{(1-\mu^2)\,ap_z}{E} - \frac{1}{2}\int_0^a (\zeta')^2\,dz;$$

последний член этого выражения представляет разность между длинами полудуги и полухорды и может быть, как мы видели*), заменен через $\beta\xi_m^2 : 2a$, где ξ_m — наибольшая стрелка прогиба рассматриваемой балки-полоски (при $z = a$), а β — отвлеченное число, зависящее от вида упругой кривой оси балки, но близкое к 2,5; в первом же члене напряжение p_z мы можем заменить суммою $p_z^0 + p_z'$ и тогда будем иметь:

$$\frac{(1-\mu^2)\,ap_z^0}{E} + \frac{(1-\mu^2)\,ap_z'}{E} - \frac{\beta\xi_m^2}{2a}.$$

Полученное выражение представляет перемещение опорного сечения балки-полоски ζ по оси z, и если длинная сторона опорного контура сместится, не искривляясь, параллельно самой себе, как мы допускали для случая весьма длинной пластины**), то величина ζ будет независима от координаты y и равна ζ_0; таким образом, из полученного выражения мы сейчас же найдем и цепное напряжение p_z':

$$p_z' = \frac{E\zeta_0}{(1-\mu^2)\,a} - p_z^0 + \frac{\beta E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\xi_m}{a}\right)^2,$$

откуда получим

$$\int_0^b p_z'\,dy = \frac{Eb\zeta_0}{(1-\mu^2)\,a} - p_z^0 b + \frac{\beta E}{2(1-\mu^2)\,a^2}\int_0^b \xi_m^2\,dy\ ***).$$

---

*) См. сноску на стр. 262.

**) Это допущение будет иметь место в особенно важном для нас случае, когда рассматриваемая пластина представляет один из участков перекрытия, разделенного сетью взаимно перпендикулярных балок на прямоугольники размерами $2a \times 2b$.

***) Так как все сечения средней поверхности изогнутой пластины плоскостями, параллельными xoz, будут одинакового вида, то множитель β будет почти независим от координаты y и потому вынесен нами за знак интеграла.

Подставляя этот интеграл в найденное выше выражение для смещения опорного контура ζ_0, мы после различных упрощений будем иметь:

$$\zeta_0 = \frac{(1-\mu^2)\, p_z^0 a}{E} - \frac{h}{t+h}\,\frac{\beta}{2ab}\int_0^b \xi_m^2\, dy.$$

Возьмем теперь балку-полоску, ось которой совпадает с прямой, соединяющей средины длинных сторон опорного контура, и пусть наибольшая стрелка прогиба ее будет ξ_{max}, а возникшее в ней цепное напряжение $(p'_z)_{max}$; тогда смещение опорного сечения этой балки ζ_0 будет связано с этими величинами найденным выше соотношением

$$\zeta_0 = \frac{(1-\mu^2)\, p_z^0 a}{E} + \frac{(1-\mu^2)\, a}{E}(p'_z)_{max} - \frac{\beta \xi_{max}^2}{2a};$$

сравнивая это выражение для ζ_0 с только что найденным, мы получим:

$$(p'_z)_{max} = \frac{\beta E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\xi_{max}}{a}\right)^2\left[1 - \frac{h}{t+h}\int_0^1 \left(\frac{\xi_m}{\xi_{max}}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right)\right];$$

нетрудно видеть, что выражение в больших скобках будет отвлеченным положительным числом, меньшим единицы, и, назвав его для сокращения письма через K_1, мы будем иметь:

$$(p'_z)_{max} = \frac{K_1 \beta E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\xi_{max}}{a}\right)^2 = \frac{K_1 E}{2(1-\mu^2)}\int_0^1 (\xi'_1)^2\, d\left(\frac{z}{a}\right),$$

где ξ_1 — стрелка прогиба средней полоски-балки.

Сравнивая это уравнение с найденным выше для весьма длинной пластины уравнением (105)

$$p'_z = \frac{KE}{2(1-\mu^2)}\int_0^1 (\xi')^2\, d\left(\frac{z}{a}\right),$$

в котором положено $x = 0$, мы увидим, что они почти тождественны по виду; а принимая во внимание сделанное выше

замечание о близости стрелок ξ_1 и напряжения $(p'_z)_{\max}$ к соответственным величинам для очень длинной пластины (при $u^2>0$), мы можем заключить, что полученное уравнение может служить для нахождения аргумента u, соответственного средней балке-полоске, совершенно так же, как и уравнение (105) для длинной пластины; различие будет заключаться лишь в величине коэффициента распора K_1, который для рассматриваемой пластины с конечным отношением сторон контура $2a : 2b$ определяется выражением

$$K_1 = 1 - \frac{h}{t+h}\int_0^1 \left(\frac{\xi_m}{\xi_{\max}}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right); \qquad (112)$$

займемся исследованием этой формулы.

Если размер b весьма велик по сравнению с a, то для значительного числа балок-полосок, кроме прилегающих к коротким сторонам контура, стрелка ξ_m будет близка к $\xi_{\max}$ и потому наш интеграл с увеличением стороны b будет неопределенно приближаться к единице, а коэффициент K_1 — к найденной уже величине $K = t : (t+h)$, обращающейся в нуль при отсутствии распор $(t=0)$; но если отношение $b : a$ конечно, то стрелки ξ_m будут меньше $\xi_{\max}$, величина интеграла — меньше единицы, а следовательно, K_1 будет больше найденного предела; по мере увеличения площади распоры t и уменьшения величины интеграла этот коэффициент будет подходить к своему верхнему пределу $(K_1 = 1)$, но и при весьма малой площади распор $(t=0)$ он не обратится в нуль; таким образом, мы всегда будем иметь:

$$\frac{t}{t+h} < K_1 < 1.$$

Заменяя в полученных выше выражениях для ζ_0 и p'_z величину интеграла

$$\int_0^b \xi_m^2\, dy$$

при помощи соотношения (112), мы найдем:

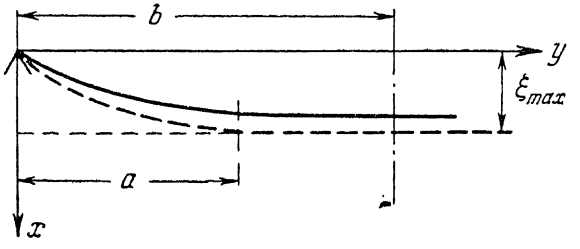
$$\zeta_0 = \frac{(1-\mu^2)\,p_z^0 a}{E} - \frac{\beta \xi_{\max}^2}{2a}(1-K_1)$$

и

$$p'_z = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{\beta}{2a^2}[\xi_m^2 - (1-K_1)\xi_{\max}^2];$$

нетрудно видеть, что последнее выражение в скобках для средних балок-полосок (ξ_m близко к $\xi_{\max}$) будет положительным, для крайних же полосок, лежащих близ коротких сторон (ξ_m близко к нулю), — отрицательным; иначе говоря, эти последние полоски будут исполнять назначение распор, уравновешивая растягивающие цепные напряжения в средних полосках; это обстоятельство объясняет и только что полученный нами вывод о том, что коэффициент K_1 не обращается в нуль даже при отсутствии распор.

Для нахождения величины K_1 мы должны знать функциональную зависимость между стрелками ξ_m и координатой y;



Черт. 81.

но разыскание этой зависимости представляет значительные трудности, и мы обойдем их, найдя приближенное значение для K_1 при помощи нижеследующего приема.

Зададим приближенно выражение для ξ_m, удовлетворяющее условиям [черт. 81]

$$\xi_m = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\xi_m \leqslant \xi_{\max} \text{ и } \frac{\partial \xi_m}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b,$$

причем выберем это выражение так, чтобы определяемые им стрелки были больше действительных; например, положим:

$$\xi_m = \xi_{\max} \sin\frac{\pi y}{2a} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant a,$$

$$\xi_m = \xi_{\max} \quad \text{при} \quad a \leqslant y \leqslant b;$$

но если ξ_m будут больше действительных стрелок, то и величина интеграла

$$\int_0^b \xi_m^2\, dy$$

будет больше истинной, и потому найденное таким образом значение K_1 будет меньше действительной его величины; при выбранных выражениях для ξ_m мы получим:

$$\int_0^b \left(\frac{\xi_m}{\xi_{\max}}\right)^2 dy = \int_0^a \sin^2\frac{\pi y}{2a}\, dy + \int_a^b dy = b - \frac{1}{2}a,$$

и следовательно,

$$K_1 = \frac{2bt + ah}{2b\,(t+h)} \quad \text{при} \quad a < b, \tag{112a}$$

причем это значение будет несколько меньше истинного.

При очень слабых распорах ($t = 0$) мы найдем:

$$K_1 = \frac{a}{2b} < \frac{1}{2},$$

при прочных распорах K_1 будет приближаться к единице.

Подставляя найденные значения для K_1 в выражения для ζ_0 и p'_z, мы будем иметь:

$$\zeta_0 = \frac{(1-\mu^2)\,p_z^0 a}{E} - \frac{\beta\xi_{\max}^2}{4ab}\,\frac{h\,(2b-a)}{t+h},$$

$$p'_z = \frac{2\beta E}{1-\mu^2}\left(\frac{\xi_{\max}}{2a}\right)^2\left[\frac{2bt+ah}{2b\,(t+h)} - \cos^2\frac{\pi y}{2a}\right] \text{ при } 0 \leqslant y \leqslant a,$$

$$p'_z = \frac{2\beta E}{1-\mu^2}\left(\frac{\xi_{\max}}{2a}\right)^2 \frac{2bt+ah}{2b\,(t+h)} \quad \text{при} \quad a \leqslant y \leqslant b;$$

отсюда нетрудно найти среднее значение величины p'_z:

$$\frac{1}{b}\int_0^b p'_z\, dy = \frac{\beta E}{1-\mu^2}\left(\frac{\xi_{\max}}{2a}\right)^2 \frac{t\,(2b-a)}{b\,(t+h)},$$

а также и формулу для приведенного напряжения в распорах:

$$(1-\mu^2)\,p_z^0 - \beta E\left(\frac{\xi_{\max}}{2a}\right)^2 \frac{(2b-a)\,h}{b\,(t+h)}. \tag{110a}$$

Таким образом, все полученные нами формулы для изгиба тонких пластин, лежащих на весьма длинном прямоугольном контуре, могут быть применены и при конечном отношении сторон прямоугольника $2b : 2a$, если характеризующий обстоятельства изгиба аргумент u — действительный; при этом стрелки прогиба ξ и их производные по координате z, а также и напряжения p_z, p'_z и $E\varepsilon_z$, определяемые этими формулами, будут иметь место лишь для среднего участка пластины, расположенного около линии, соединяющей средины длинных сторон контура; относительно же остальных участков мы можем утверждать, что возникающие в них стрелки и напряжения будут меньше, чем для среднего участка. Но, применяя эти формулы, мы должны коэффициент распора K заменить величиною K_1, определяемою соотношением (112) *).

Точность получаемых при этом результатов будет возрастать с увеличением аргумента u и отношения $b : a$.

---

*) Исключение представляет поправка на редукционный коэффициент (см. стр. 299), для которой влияние коротких сторон учтено иначе.

К разделам курса «Строительная механика корабля»

[1] (К стр. 101.) В Военно-Морском архиве сохранились материалы, относящиеся к изданию книги И. Г. Бубнова «Строительная механика корабля».

В январе 1910 года А. Н. Крылов как представитель морского министерства сообщил письменно И. Г. Бубнову о том, что министерство решило издать предложенное Бубновым «Руководство по строительной механике корабля». И. Г. Бубнов передал типографии морского министерства рукопись первой части книги в апреле 1910 года. В марте 1911 года было отпечатано 13 печ. листов. В январе 1912 года было закончено печатание первой части объемом в 21 печ. лист, тиражом в 400 экземпляров. Весь тираж очень быстро разошелся (на протяжении двух-трех месяцев). Книга вызвала исключительный интерес со стороны всех корабельных инженеров, работников заводов, преподавателей и учащихся Политехнического и других институтов, слушателей Морской академии и Морского училища и т. д.

Вторая часть книги была сдана в печать И. Г. Бубновым в 1912 году. В феврале 1913 года было напечатано 12 печ. листов,

Книга общим объемом в 20 печ. листов вышла из печати в апреле 1914 года тиражом в 400 экземпляров и также весьма быстро разошлась.

В настоящем сборнике приведены выдержки из введения к курсу, взятые из первой части, а также весь материал второй части, относящийся к теории пластин (стр. 431—640).

При подготовке к переизданию этого текста в нем были устранены, насколько это удалось, опечатки издания 1914 года.

Нумерация параграфов, формул и чертежей оставлена той же, что и в основном тексте. Ссылки на разделы, помещенные в настоящем сборнике, приводятся с указанием страниц сборника. В случаях, когда ссылки относятся к отсутствующим в сборнике разделам, это особо отмечено в сносках и примечаниях, с приведением того текста или тех формул, на которые делаются ссылки.

[-] (К стр. 102.) Говоря о «символическом выражении» допущений и ограничений, положенных в основу вывода той или иной формулы, автор имеет в виду использование математических символов для описания реальных физических явлений.

[3] (К стр. 104, 105.) Под критическими точками диаграммы растяжения автор понимает, вообще говоря, начальные точки площадок текучести при растяжении и сжатии. «Критическое напряжение» по современной терминологии — предел текучести. Допуск для деформации при определении условного предела текучести и теперь принимается равным 0,002. В дальнейшем автор в некоторых случаях (как, например, на стр. 105) считает предел текучести совпадающим с пределом пропорциональности, принимая прямолинейный участок диаграммы как бы продолженным до площадки текучести.

[4] (К стр. 105.) Эту главу автор предполагал включить в третью часть Курса. Основные положения, относящиеся к выбору допускаемых напряжений, были изложены И. Г. Бубновым в докладе «О нормах допускаемых напряжений в различных судовых конструкциях» (1908 г.) и в книге «Дополнение к курсу строительной механики корабля» (1909 г.).

[5] (К стр. 106.) Все расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии автор проводит, пользуясь теорией прочности наибольших удлинений («второй теорией прочности»). Как было впоследствии установлено, эта теория применима главным образом для некоторых хрупких материалов (легированный чугун, высокопрочные стали после отпуска при низкой температуре). Для пластичных материалов расчет должен производиться по теории наибольших касательных напряжений или по теории октаэдрических напряжений. См. более подробно об этом в «Справочнике машиностроителя», т. III, изд. 1951 г., стр. 335.

[6] (Стр. 107.) В настоящем сборнике выпущен последующий раздел введения, относящийся к теории балок.

[7] (К стр. 108.) В настоящее время применяются термины «срединная плоскость» и «срединная поверхность».

[8] (К стр. 109.) Оператор Лапласа, примененный к некоторой функции f переменных y и z, равен

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Двойной оператор Лапласа

$$\Delta^2 f = \nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial y^2\,\partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4}.$$

[9] (К стр. 115.) При рассмотрении теории изгиба балок (в первой части Курса) автор под ξ_1 понимает стрелу прогиба, вычисленную с учетом изгибающих моментов в сечениях балки (нормальных напряжений), под ξ_2 — дополнительную стрелу прогиба, отвечающую поперечной силе (касательным напряжениям или сдвигам), под ξ_3 — дополнительную стрелу прогиба, вызываемую упругой осадкой опор.

[10] (К стр. 121.) Автор ссылается на пример определения изогнутой линии балки с помощью тригонометрических рядов, приведенный в § 8 первой части Курса.

[11] (К стр. 123.) И. Г. Бубнов имеет в виду следующие разложения в тригонометрический ряд, приведенный в первой части Курса:

при $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\varphi}{i} = \frac{\pi}{2},$$

при $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\sin i\varphi}{i} = \frac{\varphi}{2}.$$

[12] (К стр. 133.) Автор ссылается здесь на таблицу, содержащую выражения для стрелок прогиба балок, лежащих на двух опорах, под различными нагрузками. Случай V относится к балке, загруженной равномерно распределенной нагрузкой по всему пролету.

[13] (К стр. 135.) Данные для определения главных напряжений в опасных точках (вместо «приведенных» напряжений, указанных в таблице) приведены в «Справочнике машиностроителя», т. III, изд. 1951 г., стр. 138.

[14] (К стр. 137.) Эта задача была впервые поставлена и решена И. Г. Бубновым. Полученные автором данные для расчета пластин с одной свободной кромкой полностью сохранили значение до настоящего времени; они приводятся в учебной и справочной литературе.

[15] (К стр. 140.) Имеется в виду таблица, содержащая выражения для стрелок прогиба балок, закрепленных одним концом. Случай XII относится к балке, испытывающей действие равномерно распределенной нагрузки по всему вылету.

[16] (К стр. 144.) Полное решение задачи об изгибе защемленной по всем кромкам пластины с произвольным отношением сторон при действии равномерно распределенной нагрузки было дано И. Г. Бубновым впервые в литературе (одна частная задача в этой области была решена ранее Б. М. Кояловичем). В дальнейшем эта задача рассматривалась С. П. Тимошенко (1916 г.), Б. Г. Галеркиным (1933 г.), Ю. А. Шиманским (1934 г.) и рядом других авторов, причем результаты исследований И. Г. Бубнова служили для оценки точности полученных решений.

[17] (К стр. 148.) Автор ссылается здесь на следующее разложение в тригонометрический ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos i\varphi}{i^4} = \frac{\pi^4}{720}\left(8 - 60\frac{\varphi^2}{\pi^2} + 60\frac{\varphi^3}{\pi^3} - 15\frac{\varphi^4}{\pi^4}\right)$$

при $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

[18] (К стр. 148.) Имеется в виду следующее разложение в тригонометрический ряд, полученное в § 8 первой части Курса:

$$[a_1^2\pi^2 \cos a_1\varphi - 2\sin^2 a_1\pi +$$

$$+ a_1\pi \sin a_1\pi \cos a_1(\pi - \varphi) - a_1^2\pi\varphi \sin a_1\pi \sin a_1(\pi - \varphi)]\,(4a_1^4 \sin^2 a_1\pi)^{-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos i\varphi}{(i^2 - a^2)^2},$$

при $i = 1, 2, 3, 4 \ldots$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

[19] (К стр. 176.) Указанная в сноске формула после отбрасывания ненужных в данном случае членов получает вид

$$\xi_1 = QB\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\,\frac{\sin\dfrac{i\pi z}{l}}{4u^2+i^2\pi^2};$$

под Q понимается нагрузка, равномерно распределенная по всему пролету балки, под $B=\dfrac{l^3}{EI}$ — коэффициент жесткости балки.

[20] (К стр. 176.) Речь идет о следующем разложении в тригонометрический ряд:

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{\cos a_1\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\cos\dfrac{a_1\pi}{2}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\sin i\varphi}{i^2-a_1^2},$$

где $i=1, 3, 5, 7, \ldots$ и $0<\varphi<\pi$.

[21] (К стр. 177.) И. Г. Бубнов имеет в виду раздел § 10 первой части Курса, в котором рассматривается случай сжато-изогнутой балки при сжимающей нагрузке, приближающейся к эйлеровой.

[22] (К стр. 184.) Полное решение задачи об устойчивости пластины при одновременном действии усилий по двум направлениям дано автором впервые. Теория устойчивости конструкций при одновременном действии нагрузок различного вида была развита в последующем П. Ф. Папковичем (1933—1941 гг.).

[23] (К стр. 189.) Автор ссылается здесь на § 10 первой части Курса, в котором рассматривается изгиб балок малой кривизны. Условия, о которых говорится в тексте, состоят в следующем:

а) стрелки начальной погиби балки малы по сравнению с пролетом, причем они имеют тот же порядок малости, что и стрелки дополнительного прогиба, возникающего при деформации балки;

б) производные от стрелок начальной погиби по длине балки имеют тот же порядок малости, что и производные от стрелок дополнительного прогиба.

[24] (К стр. 190.) Как было установлено впоследствии с помощью *линейной* теории оболочек, критическое напряжение сжатия $\sigma_{кр}$ для слабо искривленной цилиндрической панели, очерченной по дуге круга, определяется формулой

$$\sigma_{кр}=\sigma_{пл}\left(1+0{,}45\,\frac{c_0^2}{h^2}\right).$$

Здесь через $\sigma_{пл}$ обозначено эйлерово напряжение для плоской пластины, через c_0 стрелка начальной погиби, через h — толщина пластины; $c_0 \leqslant 1{,}5\,h$.

Однако в последнее время выяснилось, что для расчета цилиндрических панелей на устойчивость необходимо пользоваться *нелинейной* теорией, т. е. рассматривать оболочки как гибкие; см. об этом в сборнике «Расчет пространственных конструкций» под ред. А. А. Уманского, т. I, стр. 285, Машстройиздат, 1950.

[25] (К стр. 199.) Задача об устойчивости пластины при неравномерном распределении усилий по кромкам (в частности, при чистом изгибе) была впервые поставлена и решена И. Г. Бубновым. Данные таблицы на стр. 199 приводятся в справочных и учебных книгах.

[26] (К стр. 206.) Вопрос об устойчивости пластин с конечным отношением сторон при сдвиге был впервые рассмотрен И. Г. Бубновым.

В дальнейшем этому вопросу были посвящены исследования С. П. Тимошенко, П. Ф. Папковича и других авторов. Были найдены уточненные величины критических напряжений путем введения в приближенное выражение для прогиба (86) некоторых дополнительных членов.

В настоящее время принимают для квадратной пластины ($b:a = 1$) коэффициент k' равным 9,34, а для весьма длинной пластины ($b:a = \infty$) $k' = 5{,}35$. При ином соотношении сторон может быть использована приближенная формула

$$k' = 5{,}35 + 4\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

[27] (К стр. 213.) Содержание примеров 20 и 21 излагается в обзоре научных трудов И. Г. Бубнова (см. стр. 365 настоящего сборника).

[28] (К стр. 214.) Формула (49а), на которую ссылается автор, приведена в первой части Курса. Она служит для приближенного определения момента сопротивления W двутаврового симметричного профиля:

$$W = h\left(s + \frac{\omega}{6}\right) - 2st; \qquad (49а)$$

под ω и h подразумеваются площадь и высота стенки, под s и t — площадь и средняя толщина пояска (стенка считается продолженной до верхней и нижней граней двутавра).

Формула (50а) определяет коэффициент k_1, стоящий в выражении для максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{max} = \frac{V}{k_1 \omega},$$

где через V обозначена перерезывающая сила.

Коэффициент k_1 может быть для симметричного двутаврового профиля определен по приближенной формуле

$$k_1 = 1 - \frac{1}{3}\frac{\omega}{4s+\omega} - \frac{t}{h}. \qquad (50a)$$

[29] (К стр. 215.) Под косыми напряжениями автор подразумевает максимальные главные напряжения в стенке двутавра, у места перехода в полку.

В примере 25 показано, что в случае однопролетных балок двутаврового сечения с шарнирно закрепленными концами проверка на главные напряжения является излишней, если нагрузка распределена по всему пролету равномерно или по закону трапеции.

[30] (К стр. 215.) Эта эпюра моментов приведена в таблице, содержащей выражения для изгибающих моментов и стрел прогиба различных статически определимых балок.

[31] (К стр. 217.) Автор ссылается здесь на приближенные формулы, определяющие момент сопротивления W двутаврового сечения, имеющего пояса различной площади s и s_1, причем $s_1 > s$, при расстоянии $x_{\max}$ от центра тяжести сечения до грани меньшего пояса.

Формулы имеют вид

$$W = h\left(s + \frac{\omega}{6}\frac{4s_1 - 2s + \omega}{2s_1 + \omega}\right), \qquad x_{\max} = \frac{1}{2}h\frac{2s_1 + \omega}{s + s_1 + \omega};$$

через ω и h здесь обозначены площадь и высота стенки двутавра.

[32] (К стр. 218.) В §§ 23—25 Курса И. Г. Бубнов развивает теорию гибких пластин, разработанную им ранее в работе «Напряжения в обшивке судов от давления воды». При сравнении расчетных формул и таблиц, приведенных в §§ 23—25, с аналогичными формулами и таблицами труда «Напряжения в обшивке судов...» следует учесть, что в Курсе «Строительная механика корабля» автор пользуется совершенно иными обозначениями.

В приведенной ниже (стр. 418) таблице сделано сопоставление важнейших обозначений, относящихся к задаче об изгибе гибкой пластины, связанной с весьма длинным прямоугольным контуром.

Под *распорой* (распоркой) автор понимает жесткую связь, препятствующую взаимному смещению кромок пластины; под *распором* подразумевается усилие в этой связи. Степень влияния жестких связей характеризуется *коэффициентом распора*.

[33] (К стр. 219.) Автор имеет в виду решение задачи об изгибе гибкой пластины прямоугольного и круглого очертания, данное им в труде «Напряжения в обшивке судов от давления воды» (1902 г.). Для случая удлиненной прямоугольной пластины это решение было развито И. Г. Бубновым в курсе «Теория упругости» (1908 г.).

	«Напряжения в обшивке судов...»	«Строительная механика корабля»
Длина пролета (размер короткой стороны пластины)	$2a$	$2a$
Ось, направленная вдоль пролета	x	z
Толщина пластины	t	h
Ось, нормальная к плоскости пластины	y	x
Прогиб	y	ξ
Давление, нормальное к плоскости пластины (равномерно распределенное по ее площади)	p	p_x^0
Напряжение в срединной поверхности	q	p_z
Площадь сечения распорки, приходящаяся на единицу длины контура пластины (по удлиненной стороне)	T (настоящее издание) τ (издание 1904 г.)	t
Коэффициент распора	$\frac{T}{T+t}$ (настоящее издание) $\frac{\tau}{\tau+t}$ (издание 1904 г.)	$\frac{t}{t+h}=K$
Параметр, зависящий от поперечной нагрузки	$\frac{12(1-\mu^2)qa^2}{Et^2}=u$	$\frac{12(1-\mu^2)p_z a^2}{Eh^2}=u^2$
Функция, входящая в исходные уравнения	$\frac{1632}{35}\left(\frac{p}{E}\right)^2\left(\frac{a}{t}\right)^8\times$ $\times(1-\mu)^2\frac{T}{T+t}=F_1(u)$	$\frac{E}{p_x^0}\left(\frac{h}{2a}\right)^8\frac{10^8}{(1-\mu^2)^2}\frac{t+h}{t}=U_0;$ $U_0\approx\frac{1}{6F_1(u)}$
Вспомогательные функции, входящие в расчетные таблицы	$\frac{12}{5u}\left(\frac{2}{u\operatorname{ch}\sqrt{u}}-\frac{2}{u}+1\right)=\varphi_1(u)$	$\frac{12}{5u^2}\left(\frac{2}{u^2\operatorname{ch}u}-\frac{2}{u^2}+1\right)=f_0(u)$
	$\frac{12}{u}\left(1-\frac{\operatorname{th}\frac{\sqrt{u}}{2}}{\frac{\sqrt{u}}{2}}\right)=\varphi_2(u)$	$\frac{12}{u^2}\left(1-\frac{\operatorname{th}\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)=f_1(u)$
	$\frac{2}{u}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{u}}\right)=\chi_1(u)$	$\frac{2}{u^2}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}u}\right)=\varphi_0(u)$
	$\frac{3}{u}\left(\frac{\sqrt{u}}{\operatorname{th}\sqrt{u}}-1\right)=\chi_2(u)$	$\frac{3}{u^2}\left(\frac{u}{\operatorname{th}u}-1\right)=\chi(u)$

[34] (К стр. 221.) Вывод дифференциального уравнения изогнутой оси балки, имеющей начальную кривизну, приводится в § 10 Курса и состоит в следующем.

Пусть через x обозначается стрелка начальной погиби балки, через ξ — дополнительный прогиб при деформации, через m_y — изгибающий момент от поперечной нагрузки и через P_z — растягивающая осевая сила.

Основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки может быть записано в виде

$$EI\xi'' = m_y + P_z(\xi + x).$$

Вводя обозначение $\frac{P_z}{EI} = k^2$, приходим к уравнению

$$\xi'' - k^2\xi = k^2\left(\frac{m_y}{P_z} + x\right).$$

В случае пластины необходимо заменить P_z на hp_z и I на $\frac{h^3}{12(1-\mu^2)}$.

[35] (К стр. 222.) Преобразования тригонометрических рядов, которые имеет в виду автор, заключаются в интегрировании некоторых основных рядов по переменной, стоящей под знаком тригонометрической функции, или в дифференцировании их по параметру, входящему в ряд.

[36] (К стр. 224.) Автор ссылается здесь на приведенный в § 12 Курса расчет рамы. Введенный в этом решении для ригеля рамы коэффициент $\varkappa$ указывает, какую часть от полной, соответствующей идеальному закреплению опорных сечений, пары можно получить в данной конструкции.

[37] (К стр. 225.) И. Г. Бубнов ссылается на пример 19 (первой части Курса), в котором рассматривается устойчивость сжатой силой P_z двухопорной балки, опорные сечения которой заделаны упруго. Если реактивные пары в обоих опорных сечениях связаны с углами поворота с помощью коэффициента α, то критическая сила определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} u_1 = -\frac{\alpha P_z l}{2u_1},$$

где l — длина балки; через u_1 обозначена величина

$$u_1 = \sqrt{\frac{P_z l^2}{4EI}}.$$

Выражая в этом уравнении P_z через u_1 и подставляя вместо I величину $\frac{h^3}{12(1-\mu^2)}$, а вместо l размер $2a$, получим уравнение, приведенное в тексте.

[38] (К стр. 257.) Эта таблица, а также следующая, пересчитана П. Ф. Папковичем на действительные напряжения (вместо приведенных); см. его «Строительную механику корабля», ч. II, изд. 1941 г., стр. 150—152.

[39] (К стр. 265.) Под «пределом вытягивания» понимается предел текучести.

[40] (К стр. 283.) Имеется в виду следующее разложение в тригонометрический ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\varphi}{i^3} = \frac{\pi^3}{8}\left(\frac{\varphi}{\pi} - \frac{\varphi^2}{\pi^2}\right),$$

где $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

[41] (К стр. 293.) Понятие редукционного коэффициента, нашедшее в дальнейшем широкое применение при расчете корабельных и авиационных конструкций, было введено И. Г. Бубновым впервые. Положения, установленные здесь автором, развиты в книге П. Ф. Папковича «Строительная механика корабля», ч. II, изд. 1941 г. (стр. 105 и сл.).

БИБЛИОТЕКА РУССКОЙ НАУКИ

математика
механика
физика
астрономия

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1953

И. Г. БУБНОВ

ТРУДЫ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИН

С приложением очерка
А. С. ВОЛЬМИРА
о жизни и деятельности
И. Г. Бубнова

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1953