

СТЕРЖНИ И ПЛАСТИНКИ

РЯДЫ В НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК*

(Петроград, 1915)

1. Некоторые вопросы упругого равновесия стержней и пластинок как статического, так и динамического приводят к дифференциальным уравнениям, преимущественно 2-го — 4-го порядков. Общее решение этих уравнений не всегда легко найти, но и в тех случаях, когда решение найти нетрудно или оно известно, решение не всегда удовлетворяет условиям задачи. Приходится найденное решение дифференциального уравнения приспособлять к условиям физической задачи, что не всегда удается выполнить с достаточной степенью точности. Например, решение, данное Морисом Леви для тонких прямоугольных пластинок^[1], если и удовлетворяет уравнению Кирхгофа, то должно быть в каждом отдельном случае приспособлено к заданным для наружного обвода пластинки условиям, — в результате получим точное решение дифференциального уравнения^[2], но в общем приближенное решение задачи теории упругости. В отдельных случаях, например, для пластинки, свободно опертой по краям, решение может быть взято сравнительно легко с любой степенью точности, но для пластинки с закрепленными краями получение хотя бы приближенных результатов требует громадной затраты труда, на что указывают произведенные работы. И. Г. Бубнова^[3], Генки^[4] и автора^[5].

Есть и другой путь. Можно подобрать решение в виде ряда с неопределенными коэффициентами, каждый член которого удовлетворяет условиям на концах или по краям, а коэффициенты определить так, чтобы, в общем, решение являлось приближенным решением дифференциального уравнения (решение Леви может быть сведено к рядам с неопределенными коэффициентами, каждый член которого удовлетворяет дифференциальному уравнению, коэффициенты же подбираются так, чтобы решение удовлетворяло условиям по краям пластинки).

Из приближенных методов решений широкое применение получил в последнее время метод Ритца^[6, 7]. Этот метод сводится вкратце к следующему.

* Опубликовано в журнале «Вестник инженеров», 1915, № 19, стр. 897—908.

Задаемся уравнением упругой линии стержня или упругой поверхности пластинки

$$w = \sum A_n \varphi_n \quad (a)$$

где φ_n — функция, зависящая от координат и удовлетворяющая условиям на концах стержня или по краям пластинки, $A_1, A_2, \dots, A_n$ — неопределенные коэффициенты. Пользуясь уравнением (a), составляем выражение для потенциальной энергии системы V , затем находим T — работу внешних сил по взятой кривой оси или поверхности. Как V , так и T , очевидно, будут заключать неопределенные коэффициенты A_n , которые определяются затем из условия

$$\frac{dV}{dA_n} - \lambda \frac{dT}{dA_n} = 0$$

где λ — постоянный коэффициент. Если $V = T$, то коэффициент λ в вопросах теории упругости равен двум.

С. П. Тимошенко^[8] разработал и применил этот метод к ряду вопросов устойчивости упругих систем; им рассмотрено громадное число этих вопросов, многие из которых впервые получили свое блестящее освещение в его работах.

Этот метод применен Хагером^[9], Лоренцем^[10] и другими к изгибу пластинок¹.

2. Эта статья посвящена разработке и применению другого метода приближенного решения некоторых задач упругого равновесия, исходящего непосредственно из уравнения упругой линии или поверхности, именно метода Навье. Сущность этого метода состоит в следующем^[12].

Пусть прямоугольная пластинка, находящаяся под распределенной нагрузкой $p = f(x, y)$, свободно оперта по краям.

Задаемся уравнением упругой поверхности

$$w = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (b)$$

Начало координат взято в одной из вершин, и оси координат направлены по сторонам прямоугольника.

¹ Здесь необходимо указать, что в работе Хагера имеется ряд существенных ошибок, лишающих некоторые его выводы какого-либо значения (например, плиты, опертой по трем сторонам (стр. 60) и опертой в четырех точках (стр. 72), выбранные ряды не удовлетворяют необходимым условиям по краям). Но, помимо этого, в ней имеется один основной недостаток, подрывающий значение всех его выводов. Этот недостаток работы Хагера состоит в способе применения им метода Ритца-Тимошенко: составляя выражение для работы внутренних сил, Хагер опускает работу сил касательных и перерезывающих.

Недостатки работы Хагера чрезвычайно важно подчеркнуть потому, что работа его, очевидно, по недоразумению, удостоилась одобрительного отзыва Фейпля^[11] и лестной рекомендации в одном из лучших курсов по железобетонным мостам на русском языке.

Уравнение (b) удовлетворяет условиям на концах:

$$w = 0 \quad \text{при } x = 0, y = 0, x = a, y = b$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b$$

Подставляя выражение w в дифференциальное уравнение упругой поверхности изогнутой пластинки

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f(x, y) \quad (c)$$

получим

$$\frac{m^2 E h^3 \pi^4}{12(m^2 - 1)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{kn} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y) \quad (d)$$

В общем случае w , очевидно, не удовлетворяет уравнению (c) и w может быть только приближенным решением вопроса. Для определения коэффициентов A_{kn} умножаем уравнение (d) на

$$\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

и интегрируем в пределах от 0 до a и от 0 до b ; тогда получим

$$\frac{m^2 E h^3 \pi^4}{12(m^2 - 1)} A_{kn} \frac{ab}{4} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = T_{kn} \quad (e)$$

Отсюда

$$A_{kn} = \frac{48(m^2 - 1) a^3 b^3}{m^2 E h^3} \frac{T_{kn}}{(k^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \quad (f)$$

Рассматривая уравнение (b), заметим, что

$$w = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{kn} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

где

$$w_{kn} = A_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

т. е. упругая поверхность w состоит из ряда упругих поверхностей, как бы наложенных одна на другую. И в этом случае правая половина равенства (e)

$$T_{kn} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

есть работа внешних поперечных сил при искривлении пластинки по упругой поверхности w_{kn} при $A_{kn} = 1$.

Решение здесь приближенное, ибо в действительности искривленную форму (b) пластинка примет под действием сил не $f(x, y)$, а $f_1(x, y)$. Если бы решение удовлетворяло уравнению (с), $f_1(x, y)$ не отличалось бы при известных условиях от $f(x, y)$. Для определения неизвестных коэффициентов A_{kn} в уравнении (b) мы, собственно, приравниваем работу сил $f_1(x, y)$ при изгибе пластинки по кривой поверхности w_{kn} , при $A_{kn} = 1$ работе сил $f(x, y)$ при изгибе по той же поверхности.

Если бы вопрос шел об изгибе от сжатия, когда поперечные силы являются не только функциями координат, но и действительной искривленной формы пластинки w , в этом случае T_{kn} нельзя рассматривать как работу внешних сил по кривой w_{kn} , но определение коэффициентов A_{kn} могло бы вестись тем же путем.

Обобщая этот прием, можем прийти к следующему. Задаемся искривленной формой пластинки

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x, y) \quad (1)$$

так, чтобы каждый член φ_n удовлетворял условиям по краям, затем подставляем значение w в уравнение

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f(x, y, w) \quad (2)$$

Тогда получим

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial y^4} \right) = \Phi(x, y)$$

Умножая теперь обе половины равенства на $\varphi_k dx dy$ и интегрируя по всей площади пластинки, получим n уравнений вида

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \iint \left(\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial y^4} \right) \varphi_k dx dy = \iint \Phi(x, y) \varphi_k dx dy \quad (3)$$

из которых определим коэффициенты A_n .

Если вопрос идет об изгибе или устойчивой форме стержня при сжатии, мы можем поступить точно так же.

Подберем соответственным образом упругую линию

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \quad (4)$$

затем подставим y в дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f(x, y) \quad (5)$$

Тогда получим

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} = \Phi(x)$$

Умножив это равенство на $\varphi_k dx$, а затем просуммировав и проинтегрировав по всей длине стержня, получим n уравнений вида

$$\sum \sum A_n EI \int \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} \varphi_k dx = \sum \int \Phi(x) \varphi_k(x) dx \quad (6)$$

из которых определим¹ коэффициенты A_n . Заметим здесь, что

$$\varphi_k = \frac{\partial w}{\partial A_k}$$

соответствует случаю пластинок, а

$$\varphi_k = \frac{\partial y}{\partial A_k}$$

случаю стержней. Метод этот может быть применен как в вопросах об упругих колебаниях, так и вопросах статики стержней и пластинок.

В дальнейшем приведем несколько примеров употребления этого метода в вопросах статики стержней и пластинок.

В качестве примера для изгиба пластинок мы выбрали пластинку с закрепленными краями, опертую по всему внешнему обводу. Обычно решения ищут в тригонометрических и гиперболических функциях. Получаемые решения сложны, и для практических результатов необходимы чрезвычайно кропотливые и длительные вычисления, что можно видеть на примерах вычислений Хагера и Д. Пистрякова^[13].

Для решения вопроса о пластинке с закрепленными краями мы выбрали ряд алгебраических. Полученные результаты почти совпадают с результатами, полученными Генки и нами иным путем; результаты эти показывают, что для практических целей метод Леви и развитый здесь метод, равно как и метод Ритца, должны считаться равноценными. Затем результаты эти показывают, что ряд решений следует искать в алгебраических рядах.

Следует здесь оговорить, что приводимые ниже случаи продольного изгиба и изгиба приводятся только как примеры применения развитого здесь метода.

¹ Пользование уравнением (5), очевидно, возможно только тогда, когда EI величина постоянная или по всей длине или на некоторых участках. Если EI переменная величина, можно пользоваться уравнением упругой линии 2-го порядка

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M$$

и коэффициенты A_n определять из уравнения

$$\int EI \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} dx = \pm \int M \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} dx \quad (7)$$

где интеграл распространен на всю длину стержня. Когда вопрос идет об изгибе поперечными силами

$$\int EI \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} dx$$

есть потенциальная энергия системы при изгибе по кривой $y = \varphi_k$, в случае же изгиба продольной силой — производная от потенциальной энергии изгиба по A_k .

I. СТЕРЖНИ

А. Устойчивость при сжатии

3. Стержень, один конец которого закреплен, а другой свободно вращается, скользя по направлению силы.

К концам стержня AB постоянного сечения приложена сила P (фиг. 1).

Дифференциальное уравнение упругой линии будет

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Q(l - x) - Py \quad (8)$$

Продифференцировав это равенство два раза, получим

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -P \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (8')$$

Общее решение этого уравнения известно; в связи с условиями на концах, оно и даст точное решение рассматриваемой задачи.

Воспользуемся изложенным выше приближенным методом решения.

А именно, задаемся упругой линией стержня, соблюдая условия на концах. Пусть ¹

$$y = \sum A_n \left(\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right) \quad (9)$$

Каждый член этого ряда

$$y_n = A_n \left(\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right)$$

удовлетворяет условиям на концах

$$y_n = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = l$$

$$\frac{dy_n}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

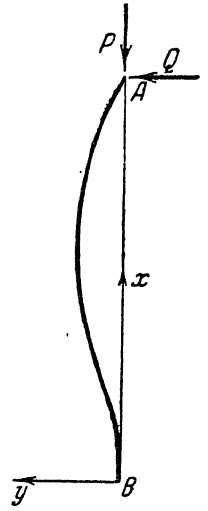
$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

Уравнение упругой линии выбрано так, что y не удовлетворяет уравнению (8').

Вставив выбранное значение y в уравнение (8'), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{16l^4} EI \sum \left[(2n-1)^4 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - (2n+1)^4 \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] = \\ & = \frac{P\pi^2}{4l^2} \sum A_n \left[(2n-1)^2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] \end{aligned}$$

¹ Здесь и в дальнейшем суммирование ведется по n от 1 до ∞ .



Фиг. 1

По формуле (6) получим для определения коэффициентов A_n уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \sum A_n \int_0^l \left[(2n-1)^4 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - (2n+1)^4 \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] \times \\ \times \left(\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} - \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right) dx = \\ = P \sum A_n \int_0^l \left[(2n-1)^2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] \times \\ \times \left(\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} - \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right) dx \end{aligned}$$

Если ограничимся одним сложным членом (y_1) выбранного ряда, то получим¹

$$\frac{\pi^2}{4l^2} A_1 EI (1 + 3^4) \frac{l}{2} = P A_1 (1 + 3^2) \frac{l}{2}$$

Отсюда

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{41}{20} = \frac{2.05\pi^2 EI}{l^2}$$

Это и есть критическая нагрузка стержня. Как известно, точное решение дает

$$P_{кр} = \frac{2.046\pi^2 EI}{l^2}$$

Если возьмем два члена ряда, получим два уравнения

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2} (82A_1 - 81A_2) = P (10A_1 - 9A_2)$$

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2} (-81A_1 + 706A_2) = P (-9A_1 + 34A_2)$$

или

$$\begin{aligned} A_1 \left(40P - \frac{82\pi^2 EI}{l^2} \right) - A_2 \left(36P - \frac{81\pi^2 EI}{l^2} \right) = 0 \\ - A_1 \left(36P - \frac{81\pi^2 EI}{l^2} \right) + A_2 \left(136P - 706 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

¹ Мы могли бы получить тот же результат, исходя из уравнения (8), умножив обе половины уравнения на

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} dx = -\frac{\pi^2}{4l^2} \left[(2n-1)^2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} - (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] dx$$

и проинтегрировав обе половины в пределах от 0 до l , т. е. пользоваться для определения критической нагрузки формулой (7). Когда $EI = \text{const}$, проще пользоваться уравнением 4-го порядка.

Для того чтобы A_1 и A_2 были отличны от нуля, необходимо, чтобы

$$\left(40P - \frac{82\pi^2 EI}{l^2}\right) \left(136P - 706 \frac{\pi^2 EI}{l^2}\right) - \left(36P - \frac{81\pi^2 EI}{l^2}\right)^2 = 0$$

Решая это уравнение, найдем

$$P_1 = \frac{2.047\pi^2 EI}{l^2}, \quad P_2 = \frac{6.0513\pi^2 EI}{l^2}$$

Здесь P_1 — критическая эйлерова нагрузка — мало отличается от точно вычисленной; P_2 — критическая нагрузка для второй искривленной, неустойчивой формы равновесия стержня. Вычисленная выше

$$P_2 = \frac{6.0513\pi^2 EI}{l^2}$$

мало отличается от точной [14]

$$P_2 = \frac{2.4592\pi^2 EI}{l^2} = \frac{6.0466\pi^2 EI}{l^2}$$

4. К стержню со свободно вращающимися концами приложены две силы.

К стержню AB (фиг. 2) приложены две силы: P_1 в точке A и P_2 в точке C , середине стержня. Пусть EI_1 — жесткость части AC и EI_2 — жесткость части CB .

Дифференциальное уравнение упругой линии будет:

от A до C

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Qx - P_1 y$$

или

$$EI_1 \frac{d^4 y}{dx^4} = -P \frac{d^2 y}{dx^2}$$

от C до B

$$EI_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Qx - P_1 y + P_2 (\delta - y)$$

или

$$EI_2 \frac{d^4 y}{dx^4} = -P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - P_2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Фиг. 2

Здесь δ — прогиб в середине стержня. Задаемся уравнением упругой линии

$$y = \sum y_n = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (10)$$

Коэффициенты A_n определим из уравнений вида

$$EI_1 \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{d^4 y}{dx^4} y_k dx + EI_2 \int_{\frac{1}{2}l}^l \frac{d^4 y}{dx^4} y_k dx = -P_1 \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{d^2 y}{dx^2} y_k dx - P_2 \int_{\frac{1}{2}l}^l \frac{d^2 y}{dx^2} y_k dx$$

куда надо подставить значения y из уравнения (10).

Ограничиваясь одним членом ряда (10), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 E I_1}{l^4} \int_0^{\frac{1}{2}l} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{\pi^4 E I_2}{l^4} \int_{\frac{1}{2}l}^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \\ & = P_1 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l^2} dx + \frac{P_2 \pi^2}{l^2} \int_{\frac{1}{2}l}^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

или

$$\frac{\pi^2 E (I_1 + I_2)}{2l^2} = P_1 + \frac{1}{2} P_2 \quad (11)$$

Если положим

$$I_2 = \gamma I_1, \quad P = P_1 + P_2, \quad P_1 = \frac{P}{k}, \quad P_2 = \frac{(k-1)P}{k}$$

и вставим эти значения в формулу (11), то получим

$$P = \frac{\pi^2 E I_2}{l^2} \frac{(1 + \gamma) k}{(1 + k) \gamma}$$

Эта формула совпадает с формулой, выведенной Тимошенко¹, и дает результаты, довольно близко подходящие к результатам Ф. С. Ясинского [15].

5. Стойка, одним концом закрепленная, под равномерно распределенной по оси нагрузкой p и нагрузкой P , приложенной к концу.

Сечение стойки берем постоянным. Уравнение упругой линии (фиг. 3) будет

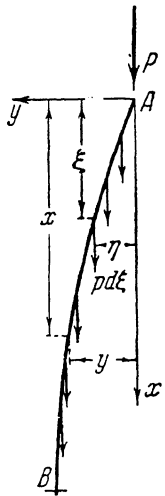
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - \int_0^x p d\xi (y - \eta) - Py = - p y x + p \int_0^x \eta d\xi - Py$$

или

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = - p \frac{dy}{dx} - p x \frac{d^2 y}{dx^2} - P \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (12)$$

Берем

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$



Фиг. 3

и вставляем в уравнение (12). После простых, очевидных вычислений имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 EI}{16l^4} \sum A_n (2n-1)^4 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} = \\ & = - p \frac{\pi}{2l} \sum A_n (2n-1) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} + \\ & + \frac{p x \pi^2}{4l^2} \sum A_n (2n-1)^2 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} + \\ & + \frac{P \pi^2}{4l^2} \sum A_n (2n-1)^2 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \end{aligned}$$

¹ См. С. П. Тимошенко [8], стр. 17.

Ограничиваясь одним членом ряда y , мы по формуле (6), т. е. умножая обе половины на

$$\sin \frac{\pi x}{2l} dx$$

и интегрируя в пределах от 0 до l , получим

$$\frac{\pi^3 EI}{8l^3} \frac{l}{2} = -\frac{pl}{\pi} + \frac{p\pi}{2l} \left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{\pi^2} \right) + \frac{P\pi}{2l} \frac{l}{2}$$

Отсюда

$$P + 2pl \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

или

$$P + 0.2976 pl = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Полагая всю нагрузку

$$P + pl = R \quad \text{и} \quad \frac{pl}{P} = k$$

получим

$$P = \frac{R}{1+k}, \quad pl = \frac{Rk}{1+k}$$

Вставляя эти значения в последнюю формулу, получим

$$R = \frac{1+k}{1+0.2976k} \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Когда $k = 0$

$$R = P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

т. е. получаем критическую нагрузку для стержня, закрепленного одним концом и сжатого силой P .

Для других значений k имеем:

при $k = 0.5$

$$R = 1.5P = \frac{1.5}{1.1488} \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 1.3057 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

при $k = 1$

$$R = 2P = \frac{2}{1.2976} \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 1.5413 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

при $k = 2$

$$R = 3P = \frac{3}{1.5952} \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 1.8806 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

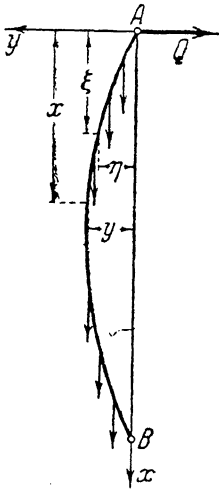
при $k = \infty$

$$R = pl = \frac{1}{0.2976} \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 0.84 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{1}{1.092} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Если p есть вес единицы длины стержня, критическая длина

$$l = \sqrt[3]{\frac{0.84\pi^2 EI}{p}}$$

6. Стойка со свободно вращающимися, но не смещающимися концами под равномерно распределенной по оси нагрузкой ($EI = \text{const}$).



Фиг. 4

Дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь следующий вид (фиг. 4)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Qx - \int_0^x p d\xi (y - \eta) = -Qx - pyx + p \int_0^x \eta d\xi$$

или

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -p \frac{dy}{dx} - px \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (13)$$

Выражение

$$y = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

будет отвечать условиям на концах. Ограничиваясь членом

$$A_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

и вставляя его в дифференциальное уравнение упругой линии 4-го порядка, мы по формуле (6) получим

$$\frac{\pi^4 EI}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{p\pi}{l} \int_0^l \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi x}{l} dx + \frac{p\pi^2}{l^2} \int_0^l x \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx$$

или

$$\frac{\pi^2 EI}{2l^2} = \frac{pl}{4}$$

Отсюда

$$pl = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

Критическая длина, если p есть вес единицы длины стойки, равна

$$l = \sqrt[3]{\frac{2\pi^2 EI}{p}}$$

При одном и том же сечении отношение критической длины l_1 стержня с двумя опертыми концами к критической длине стержня с одним свободным концом l_2 (см. предыдущий параграф)

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt[3]{\frac{2}{0.84}} = 1.3352$$

7. Устойчивость сжатого стержня с опертыми концами в упругой среде ($EI = \text{const}$).

Уравнение упругой линии будет

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Qx - Py - \int_0^x q d\xi (x - \xi)$$

где q — интенсивность упругих реакций среды. Если β — коэффициент жесткости среды, то

$$q = \beta \eta$$

уравнение упругой линии можно представить так:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Qx - Py - \beta \int_0^x \eta d\xi (x - \xi) = Qx - Py - \beta x \int_0^x \eta d\xi + \beta \int_0^x \eta \xi d\xi$$

или

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -P \frac{d^2 y}{dx^2} - \beta y \quad (14)$$

Последнее уравнение легко интегрируется. Применим приближенный способ решения. Берем

$$y = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Вставим значение y в уравнение (14), получим

$$\frac{\pi^4 EI}{l^4} \sum A_n n^4 \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi^2 P}{l^2} \sum A_n n^2 \sin \frac{n\pi x}{l} - \beta \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Отсюда ¹

$$\frac{EI n^4 \pi^4}{l^4} = \frac{\pi^2 P n^2}{l^2} - \beta$$

или

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{\beta l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right)$$

Когда $\beta = 0$ (жесткость упругой среды ничтожна)

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

и критическая нагрузка

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Критическая нагрузка зависит от жесткости среды и не всегда отвечает искривленной форме с полуволной; с увеличением жесткости увеличивается число волн, отвечающих критической нагрузке.

В самом деле, для того чтобы критическая нагрузка отвечала $n + 1$ -й искривленной форме, необходимо, чтобы [8]

$$(n + 1)^2 + \frac{\beta l^4}{(n + 1)^2 \pi^2 EI} \leq n^2 + \frac{\beta l^4}{n^2 \pi^2 EI}$$

или

$$\beta \geq \frac{\pi^2 EI}{l^4} n^2 (n + 1)^2$$

¹ Так как $\sin \frac{n\pi x}{l}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (14) при условии

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{\beta l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right)$$

то применение формулы (6) здесь излишне.

В. Изгиб стержней

8. Балка, свободно опертая обоими концами, нагружена равномерно распределенной нагрузкой.

Дифференциальное уравнение упругой линии будет

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p$$

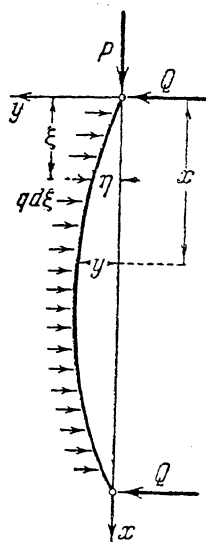
где EI — постоянная жесткость, p — нагрузка на единицу длины.

Взяв начало координат в середине балки, выбираем

$$y = \sum A_k \cos \frac{(2k-1) \pi x}{l}$$

Если $x = \pm \frac{1}{2} l$, то

$$y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$



Фиг. 5

Вставляя значение y в дифференциальное уравнение упругой линии, получим

$$\frac{\pi^4 EI}{l^4} \sum A_k (2k-1)^4 \cos \frac{(2k-1) \pi x}{l} = p$$

Умножая это равенство на

$$\cos \frac{(2n-1) \pi x}{l} dx$$

и интегрируя в пределах от $-\frac{1}{2} l$ до $+\frac{1}{2} l$, получим

$$\frac{\pi^4 EI}{l^4} A_n (2n-1)^4 \frac{l}{2} = \frac{2pl(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$$

Отсюда

$$A_n = \frac{4pl^4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5 \pi^5 EI}$$

Поэтому

$$y = \frac{4pl^4}{\pi^5 EI} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} \cos \frac{(2n-1) \pi x}{l}$$

Отсюда был бы нетруден переход к точной формуле упругой линии, ибо

$$\frac{4pl^4}{\pi^5 EI} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} \cos \frac{(2n-1) \pi x}{l} = \frac{p}{384} (16x^4 - 24l^2 x^2 + 5l^4)$$

Воспользуемся приближенной формулой для определения стрелы прогиба. При $x = 0$

$$y = \frac{4pl^4}{\pi^5 EI} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} = \frac{4pl^4}{\pi^5 EI} \frac{5\pi^5}{1536} = \frac{5pl^4}{384EI}$$

Изгибающий момент

$$M_x = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4pl^2}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

При $x = 0$

$$M_{\max} = \frac{4pl^2}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{pl^2}{8}$$

9. Балка, свободно опертая обоими концами, нагружена посредине сосредоточенной силой P .

Уравнение упругой линии для всех точек, кроме точки приложения груза, будет

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

Задаемся, как и в предыдущем параграфе

$$y = \sum A_k \cos \frac{(2k-1)\pi y}{l}$$

При изгибе по кривой

$$\cos \frac{(2k-1)\pi y}{l}$$

работа внешней силы равна $P \cos 0 = P$; следовательно, по формуле (6)

$$EI \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{d^4 y}{dx^4} \frac{dy}{dA_n} dx = P$$

Вставляя значение y , получим

$$\frac{EI\pi^4}{l^4} (2n-1)^4 A_n \frac{l}{2} = P$$

Отсюда

$$A_n = \frac{2Pl^3}{(2n-1)^4 \pi^4 EI}$$

$$y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum \frac{1}{(2n-1)^4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

Прогиб в центре ($x = 0$)

$$y_0 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \frac{\pi^4}{96} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Изгибающий момент

$$M_x = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

при $x = 0$

$$M_x = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{Pl}{4}$$

10. Балка с закрепленными концами под равномерно распределенной нагрузкой.

За уравнение упругой линии выбираем

$$y = \sum A_k \left[1 - (-1)^k \cos \frac{2k\pi x}{l} \right]$$

Уравнение это удовлетворяет условиям на концах, так как при $x = \pm \frac{1}{2} l$

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

Вставляя выбранный ряд в уравнение

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p$$

получим

$$-\frac{16\pi^4}{l^4} \sum A_k (-1)^k k^4 \cos \frac{2k\pi x}{l} = p$$

Умножаем это равенство на

$$\left[1 - (-1)^n \cos \frac{2n\pi x}{l} \right] dx$$

и интегрируем в пределах от $-\frac{1}{2} l$ до $+\frac{1}{2} l$, получим

$$\frac{16\pi^4 EI n^4}{l^4} \frac{l}{2} A_n = pl$$

Отсюда

$$A_n = \frac{pl^4}{8n^4\pi^4 EI}$$

$$y = \frac{pl^4}{8\pi^4 EI} \sum \left[1 - (-1)^n \cos \frac{2n\pi x}{l} \right] \frac{1}{n^4}$$

При $x = 0$

$$y = \frac{pl^4}{8\pi^4 EI} 2 \sum \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{pl^4}{4\pi^4 EI} \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{384} \frac{pl^4}{EI}$$

Изгибающий момент

$$M_x = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{pl^2}{2\pi^2} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{l}$$

При $x = 0$ изгибающий момент

$$M_x = -\frac{pl^2}{2\pi^2} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{pl^2}{2\pi^2 EI} \left(-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots \right) = \frac{pl^2}{24}$$

При $x = \frac{1}{2} l$

$$M_x = -\frac{pl^2}{2\pi^2 EI} \sum \frac{1}{n^2} = -\frac{pl^2}{12}$$

11. Балка с закрепленными концами нагружена сосредоточенной силой P , приложенной посредине.

Как и в предыдущем параграфе, берем

$$y = \sum A_k \left[1 - (-1)^k \cos \frac{2k\pi x}{l} \right]$$

Вставляя это выражение в уравнение

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

получим

$$-\frac{16\pi^4 EI}{l^4} \sum A_k (-1)^k k^4 \cos \frac{2k\pi x}{l} = 0$$

за исключением точки $x = 0$, где $p \neq 0$.

При изгибе по кривой

$$1 - (-1)^n \cos \frac{2n\pi x}{l}$$

работа внешней силы P равняется

$$P [1 - (-1)^n \cos 0] = P [1 - (-1)^n]$$

Поэтому по формуле (6) получим

$$-\frac{16\pi^4 EI}{l^4} \sum A_k \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} (-1)^k k^4 \cos \frac{2k\pi x}{l} \left[1 - (-1)^n \cos \frac{2n\pi x}{l} \right] dx = P [1 - (-1)^n]$$

Отсюда

$$\frac{16\pi^4 EI}{l^4} A_n n^4 \frac{l}{2} = P [1 - (-1)^n], \quad \text{или} \quad A_n = \frac{P [1 - (-1)^n] l^3}{8n^4 \pi^4 EI}$$

При n четном $A_n = 0$, почему можно написать

$$A_k = \frac{Pl^3}{4(2k-1)^4 \pi^4 EI}$$

$$y = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EI} \sum \frac{1}{(2k-1)^4} \left(1 + \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l} \right)$$

При $x = 0$

$$y = \frac{Pl^3}{2\pi^4 EI} \sum \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{Pl^3}{2\pi^4 EI} \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EI}$$

Изгибающий момент

$$M_x = \frac{Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l}$$

При $x = 0$

$$M_x = \frac{Pl}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{Pl}{8}$$

При $x = \frac{1}{2}l$

$$M_x = -\frac{Pl}{8}$$

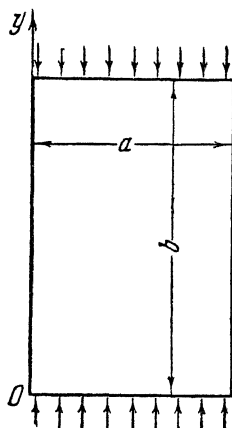
II. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ

А. Устойчивость при сжатии

12. Пластинка, свободно опертая по краям.

Пусть пластинка (фиг. 6) сжата равномерно распределенной по краям $y = 0$ и $y = b$ нагрузкой p на единицу длины.

Задаемся уравнением упругой поверхности



Фиг. 6

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Вставляем значения w в дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -p \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (15)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \pi^4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{p\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} n^2 \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

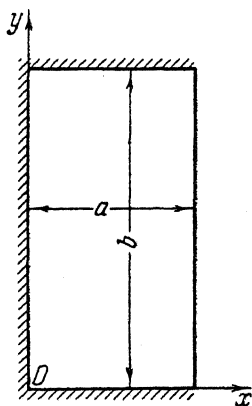
$$\frac{m^2 E h^3 \pi^2}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{p n^2}{b^2} \quad \text{или} \quad p = \frac{m^2 E h^3 \pi^2 b^2}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{1}{n^2}$$

Совершенно очевидно, что наименьшее значение для p получим при $k = 1$; следовательно, критическое значение p

$$p_k = \frac{m^2 E h^3 \pi^2 b^2}{12(m^2 - 1) n^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

Что касается значения n , то p_k в зависимости от соотношений между a и b может получиться [8] при значении $n > 1$.

13. Пластинка, свободно опертая по трем сторонам.



Фиг. 7

Опертые стороны заштрихованы (фиг. 7). Равномерно распределенную нагрузку p предполагаем приложенной по краям $y = 0$ и $y = b$. Ряд должен удовлетворять следующим условиям на концах:

1) при $y = 0$ и $y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

2) при $x = 0$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

3) при $x = a$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{2m-1}{m} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Затем заранее можно установить, что наименьшее значение критической нагрузки получится, когда в сечении $y = \text{const}$ получим кривую без точек перегиба (полуволну).

За уравнение упругой поверхности принимаем

$$w = \sum A_n \left(\sin \frac{\pi x}{4a} + g_n' \sin \frac{\pi x}{2a} + g_n'' \sin \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (16)$$

Условие

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

дает при $m = 4$

$$g_n' = -0.177 \frac{b^2 + 4n^2 a^2}{b^2 + n^2 a^2}$$

Из условия

$$\left[\frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{2m-1}{m} \frac{d^3 w}{dx dy^2} \right]_{x=a} = 0$$

получим

$$g_n'' = \frac{\sqrt{2}}{128} \frac{b^2 + 28n^2 a^2}{b^2 + 1.75n^2 a^2}$$

Вставляя значение w в уравнение (15), получим

$$\begin{aligned} & \frac{m^2 E h^3 \pi^4}{12(m^2 - 1)} \sum A_n \left[\left(\frac{1}{16a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{4a} + g_n' \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{2a} + \right. \\ & \quad \left. + g_n'' \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ & = \frac{p\pi^2}{b^2} \sum A_n n^2 \left(\sin \frac{\pi x}{4a} + g_n' \sin \frac{\pi x}{2a} + g_n'' \sin \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

Умножая это равенство на

$$\frac{dw}{dA_n} dx dy$$

и интегрируя по всей площади пластинки, получим

$$\begin{aligned} & \frac{m^2 E h^3 \pi^2}{12(m^2 - 1)} \left\{ \left(\frac{1}{16a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{a(\pi - 2)}{2\pi} + g_n'^2 \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{a}{2} + g_n''^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{a}{2} + \right. \\ & \quad + g_n' \left[\left(\frac{1}{16a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right] \frac{2a\sqrt{2}}{3\pi} + g_n'' \left[\left(\frac{1}{16a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right] \frac{8a\sqrt{2}}{15n} + g_n' g_n'' \left[\left(\frac{1}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right] \frac{4a}{3\pi} \left. \right\} \frac{b}{2} = \\ & = p \left[\frac{a(\pi - 2)}{2\pi} + g_n'^2 \frac{a}{2} + g_n''^2 \frac{a}{2} + \frac{4g_n' a \sqrt{2}}{3\pi} + \frac{16g_n'' a \sqrt{2}}{15\pi} + \frac{8g_n' g_n'' a}{3\pi} \right] \frac{n^2}{2b} \end{aligned}$$

Отсюда определим p .

Когда ширина пластинки $a = \infty$

$$p = \frac{m^2 E h^3 \pi^2}{12 (m^2 - 1) b^2}$$

получаем эйлерову нагрузку для пластинки, опертой двумя краями.

При $n = 1$ и $a = b$

$$p = \frac{m^2 E h^3 \pi^2}{12 (m^2 - 1) b^2} 1.487$$

При $n = 1$ и $a = \frac{1}{2} b$

$$p = \frac{m^2 E h^3 \pi^2}{12 (m^2 - 1) b^2} 2.830$$

Если при $E = 2.10^6$ кг/см² возьмем $\frac{a}{h} = 100$, критическое напряжение будет равно:

при $a = b$

$$\frac{p}{h} = 261 \text{ кг/см}^2$$

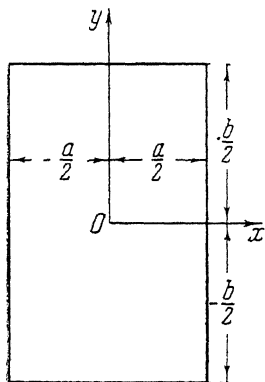
при $a = \frac{1}{2} b$

$$\frac{p}{h} = 124 \text{ кг/см}^2$$

Критическое напряжение отвечает $n = 1$; при $n > 1$ значения p возрастают.

В. Изгиб пластинки

14. Пластика с закрепленными краями, опертая по наружному обводу.



Фиг. 8

Мы рассматриваем здесь пластинку, опертую краями на неупругие опоры и нагруженную равномерно распределенной по поверхности нагрузкой p .

Начало координат взято в центре не изогнутой пластинки; оси координат направлены параллельно сторонам прямоугольника (фиг. 8).

За уравнение упругой поверхности берем

$$w = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} A_{kn} (a^2 - 4x^2)^k (b^2 - 4y^2)^n \quad (17)$$

Легко проверить, что каждый член выбранного ряда удовлетворяет условию, по которому пластинка оперта на неупругие опоры, так как:

при $x = \pm \frac{1}{2} a$

$$w = 0$$

при $y = \pm \frac{1}{2} b$

$$w = 0$$

Условие полного закрепления по краям требует, чтобы:

$$\text{при } x = \pm \frac{1}{2} a$$

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

$$\text{при } y = \pm \frac{1}{2} b$$

$$\frac{dw}{dy} = 0$$

Уравнение (15) удовлетворяет условиям полного закрепления по краям, когда $k \geq 2$ и $n \geq 2$.

Таким образом, уравнение (17) удовлетворяет необходимым условиям по краям.

В дальнейшем мы ограничиваемся четырьмя членами ряда, которые дают достаточную степень точности; берем

$$\begin{aligned} w = & A_{22} (a^2 - x^2)^2 (b^2 - 4y^2)^2 + A_{23} (a^2 - 4x^2)^2 (b^2 - 4y^2)^3 + \\ & + A_{32} (a^2 - 4x^2)^3 (b^2 - 4y^2)^2 + A_{33} (a^2 - 4x^2)^3 (b^2 - 4y^2)^3 \end{aligned} \quad (17')$$

Вставляя w из формулы (17') в дифференциальное уравнение (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \{ & A_{22} [384 (b^2 - 4y^2)^2 + 512 (a^2 - 12x^2) (b^2 - 12y^2) + 384 (a^2 - 4x^2)^2] + \\ & + A_{23} [384 (b^2 - 4y^2)^3 + 768 (a^2 - 12x^2) (b^4 - 24b^2y^2 + 80y^4) + \\ & + 1152 (a^2 - 4x^2)^2 (b^2 - 20y^2)] + A_{32} [1152 (a^2 - 20x^2) (b^2 - 4y^2)^2 + \\ & + 768 (a^4 - 24a^2x^2 + 80x^4) (b^2 - 12y^2) + 384 (a^2 - 4x^2)^3] + \\ & + A_{33} [1152 (a^2 - 20x^2) (b^2 - 4y^2)^3 + 1152 (a^2 - 24a^2x^2 + 80x^4) \times \\ & \times (b^4 - 24b^2y^2 + 80y^4) + 1152 (a^4 - 4y^2)^3 (b^2 - 20y^2)] \} = p. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая обе половины выражения (18) последовательно на

$$\begin{aligned} (a^2 - 4x^2)^2 (b^2 - 4y^2)^2 dx dy, & \quad (a^2 - 4x^2)^2 (b^2 - 4y^2)^3 dx dy \\ (a^2 - 4x^2)^3 (b^2 - 4y^2)^2 dx dy, & \quad (a^2 - 4x^2)^3 (b^2 - 4y^2)^3 dx dy \end{aligned}$$

и интегрируя в пределах для x от $-\frac{1}{2}a$ до $+\frac{1}{2}a$, для y от $-\frac{1}{2}b$ до $+\frac{1}{2}b$, получим для определения коэффициентов A_{kn} четыре уравнения; эти уравнения после некоторых упрощений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & A_{22} \left(\frac{b^4}{a^4} + \frac{4}{7} \frac{b^2}{a^2} + 1 \right) + 30A_{23}a^2 \left(\frac{1}{33} \frac{b^6}{a^4} + \frac{2}{105} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{35} \frac{b^2}{a^2} \right) + \\ & + 30A_{32}a^2 \left(\frac{1}{35} \frac{b^4}{a^4} + \frac{2}{105} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{33} \right) + 60A_{33}a^4 \left(\frac{1}{77} \frac{b^6}{a^6} + \frac{1}{105} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{77} \frac{b^2}{a^2} \right) = \\ & = \frac{21}{512} \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \end{aligned} \quad (19)$$

$$A_{22} \left(\frac{1}{33} \frac{b^4}{a^4} + \frac{2}{105} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{35} \right) + 4A_{23} a^2 \left(\frac{1}{143} \frac{b^6}{a^6} + \frac{2}{385} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{105} \frac{b^2}{a^2} \right) + \\ + \frac{2}{7} A_{32} a^2 \left(\frac{1}{11} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{15} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{11} \right) + \frac{24}{7} A_{33} a^4 \left(\frac{1}{143} \frac{b^6}{a^6} + \frac{1}{165} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{99} \frac{b^2}{a^2} \right) = \\ = \frac{3}{2560} \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4}$$

$$A_{22} \left(\frac{1}{35} \frac{b^4}{a^4} + \frac{2}{105} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{33} \right) + \frac{2}{7} A_{23} a^2 \left(\frac{1}{11} \frac{b^6}{a^6} + \frac{1}{15} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{11} \frac{b^2}{a^2} \right) + \\ + 4A_{32} a^2 \left(\frac{1}{143} + \frac{2}{385} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{105} \frac{b^4}{a^4} \right) + \frac{24}{7} A_{33} a^4 \left(\frac{1}{143} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{165} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{99} \frac{b^6}{a^6} \right) = \\ = \frac{3p}{2560} \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4}$$

$$A_{22} \left(\frac{1}{11} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{15} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{11} \right) + \frac{12}{11} A_{23} a^2 \left(\frac{1}{13} \frac{b^6}{a^6} + \frac{1}{15} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{9} \frac{b^2}{a^2} \right) + \\ + \frac{12}{11} A_{32} a^2 \left(\frac{1}{9} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{15} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{13} \right) + \frac{48}{11} A_{33} a^4 \left(\frac{1}{39} \frac{b^6}{a^6} + \frac{1}{55} \frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{39} \frac{b^2}{a^2} \right) = \\ = \frac{9}{2560} \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4}.$$

При $b/a = 1$ получим три следующих уравнения ($A_{23} = A_{32}$):

$$A_{22} + 1.8182 A_{23} a^2 + 0.8283 A_{33} a^4 = 0.015950 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 2.0257 A_{23} a^2 + 1.0211 A_{33} a^4 = 0.015045 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \quad (19') \\ A_{22} + 2.2364 A_{23} a^2 + 1.2199 A_{33} a^4 = 0.014148 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4}$$

Когда $b/a = 1.5$, для определения A будем иметь четыре следующих уравнения: (19'')

$$A_{22} + 2.0646 A_{23} a^2 + 0.8892 A_{32} a^2 + 1.8396 A_{33} a^4 = 0.005582 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 2.2659 A_{23} a^2 + 0.8907 A_{32} a^2 + 2.0291 A_{33} a^4 = 0.005211 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 2.0694 A_{23} a^2 + 1.2286 A_{32} a^2 + 2.5423 A_{33} a^4 = 0.005381 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 2.2775 A_{23} a^2 + 1.2283 A_{32} a^2 + 2.7498 A_{33} a^4 = 0.005014 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4}$$

При $b/a = 2$ значения A определяются из следующих четырех уравнений: (19''')

$$A_{22} + 3.6688 A_{23} a^2 + 0.8767 A_{32} a^2 + 3.2216 A_{33} a^4 = 0.002127 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 3.8589 A_{23} a^2 + 0.8824 A_{32} a^2 + 3.4018 A_{33} a^4 = 0.001988 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 3.6746 A_{23} a^2 + 1.2789 A_{32} a^2 + 4.6932 A_{33} a^4 = 0.002079 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4} \\ A_{22} + 3.8735 A_{23} a^2 + 1.2771 A_{32} a^2 + 4.9016 A_{33} a^4 = 0.001940 \frac{p(m^2 - 1)}{m^2 E h^3 a^4}$$

Таблица 1

$\frac{b}{a}$	1	1.5	2	Множитель при числовых значениях
A_{22}	0.028867	0.011845	0.005239	$\frac{p(m^2-1)}{m^2 E h^3 a^4}$
A_{23}	-0.009753	-0.002795	-0.000823	$\frac{p(m^2-1)}{m^2 E h^3 a^6}$
A_{32}	-0.009753	-0.002691	-0.000525	$\frac{p(m^2-1)}{m^2 E h^3 a^6}$
A_{33}	0.005814	0.001033	0.000114	$\frac{p(m^2-1)}{m^2 E h^3 a^8}$

Значения A , вычисленные для $b/a = 1, 1.5$ и 2 , приведены в табл. 1.

Прогиб в центре ($x = 0, y = 0$)

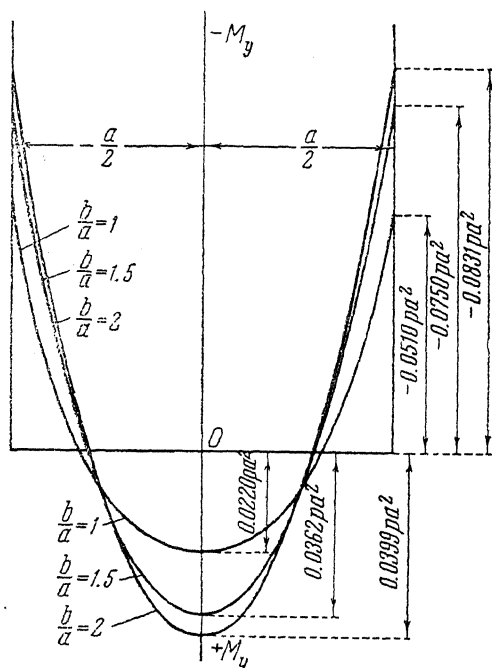
$$W_{00} = a^4 b^4 (A_{22} + A_{23} b^2 + A_{32} a^2 + A_{33} a^2 b^2)$$

В табл. 2 приведены значения прогибов W_{00} центра пластинки, выраженных в pa^4/Eh^3 ; рядом поставлены значения по И. Г. Бубнову¹ и значения, вычисленные нами в работе^[5].

Значения наибольшего прогиба пластинки, вычисленные с помощью алгебраического ряда, мало отличаются от таковых же значений, полученных как И. Г. Бубновым, так и автором совсем иным способом.

В любой точке напряжение

$$\sigma_x = -\frac{m^2 E z}{2(m^2 - 1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$



Фиг. 9

Таблица 2

$\frac{b}{a}$	$\sigma = \frac{1}{m}$	W_{00} (в pa^4/Eh^3)		
		Вычисленные здесь	Вычисленные по Бубнову [3]	Вычисленные в работе [5]
1	0.3	0.0138	0.0138	0.0138
	0.25	0.0142	0.0142	0.0143
1.5	0.3	0.0239	0.0240	0.0241
	0.25	0.0246	0.0247	0.0248
2	0.3	0.0273	0.0276	—
	0.25	0.0282	0.0285	—

¹ См. И. Г. Бубнов [3], стр. 490.

Таблица 3

$\frac{b}{a}$	$\sigma = \frac{1}{m}$	M_y (в pa^2) по прямой $y=0$				
		$x=0$	$x = \frac{1}{8}a$	$x = \frac{1}{4}a$	$x = \frac{3}{8}a$	$x = \frac{1}{2}a$
1	0.3	0.0229	0.0206	0.0106	—0.0102	—0.0510
	0.25	0.0220	0.0198	0.0101	—0.0104	—0.0510
1.5	0.3	0.0367	0.0308	0.0112	—0.0224	—0.0750
	0.25	0.0362	0.0304	0.0110	—0.0224	—0.0750
2	0.3	0.0401	0.0330	0.0110	—0.0267	—0.0831
	0.25	0.0399	0.0329	0.0110	—0.0267	—0.0831

полагая $z = \frac{1}{2}h$, получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{4m^2 E h}{m^2 - 1} \left(\sum A_{kn} k (a^2 - 4x^2)^{k-2} [a^2 - 4(2k-1)x^2] (b^2 - 4y^2)^n + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m} \sum A_{kn} n (a^2 - 4x^2)^k (b^2 - 4y^2)^{n-2} [b^2 - 4(2n-1)y^2] \right) = \\
 &= \frac{4m^2 E h}{m^2 - 1} \left(2A_{22} (a^2 - 12x^2) (b^2 - 4y^2)^2 + \right. \\
 &\quad + 2A_{23} (a^2 - 12x^2) (b^2 - 4y^2)^3 + 3A_{32} (a^2 - 4x^2) (a^2 - 20x^2) (b^2 - 4y^2)^2 + \\
 &\quad + 3A_{33} (a^2 - 4x^2) (a^2 - 20y^2) (b^2 - 4y^2)^3 + \\
 &\quad + \frac{1}{m} [2A_{22} (a^2 - 4x^2)^2 (b^2 - 12y^2) + 3A_{23} (a^2 - 4x^2)^2 (b^2 - 4y^2) (b^2 - 20y^2) + \\
 &\quad \left. + 2A_{32} (a^2 - 4x^2)^3 (b^2 - 12y^2) + 3A_{33} (a^2 - 4x^2)^3 (b^2 - 4y^2) (b^2 - 20y^2)] \right) \quad (20)
 \end{aligned}$$

Если положим $y=0$, получим значения σ_x в точках прямой $y=0$, $z = \frac{1}{2}h$. Полагая $y=0$, получим из формулы (20)

$$\begin{aligned}
 [\sigma_x]_{y=0} &= \frac{4m^2 E h}{m^2 - 1} \left\{ 2A_{22} (a^2 - 12x^2) b^4 + 2A_{23} (a^2 - 12x^2) b^6 + \right. \\
 &\quad + 3A_{32} (a^2 - 4x^2) (a^2 - 20x^2) b^4 + 3A_{33} (a^2 - 4x^2) (a^2 - 20x^2) b^6 + \\
 &\quad + \frac{1}{m} [2A_{22} (a^2 - 4x^2)^3 b^2 + 3A_{23} (a^2 - 4x^2)^2 b^4 + \\
 &\quad \left. + 2A_{32} (a^2 - 4x^2)^3 b^2 + 3A_{33} (a^2 - 4x^2)^3 b^4] \right\} \quad (20')
 \end{aligned}$$

В табл. 3 приведены значения $M_y = \frac{1}{6} \sigma_x h^2$ для $y=0$, вычисленные при помощи формулы (20').

На фиг. 9 представлен графически момент M_y при $y=0$ для $\sigma=0.25$.

Таблица 4

$\frac{b}{a}$	$\sigma = \frac{1}{m}$	M_x (в ρa^2) по прямой $y = 0$				
		$x = 0$	$x = \frac{1}{8}a$	$x = \frac{1}{4}a$	$x = \frac{3}{8}a$	$x = \frac{1}{2}a$
1	0.3	0.0229	0.0212	0.0116	0.0001	-0.0153
	0.25	0.0220	0.0204	0.0112	0.0007	-0.0128
1.5	0.3	0.0198	0.0176	0.0069	-0.0053	-0.0250
	0.25	0.0181	0.0162	0.0064	-0.0041	-0.0188
2	0.3	0.0143	0.0121	0.0039	-0.0077	-0.0277
	0.25	0.0123	0.0105	0.0034	-0.0063	-0.0208

Для значений σ_y получим формулу, подобную формуле (18), а именно

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{4m^2 E h}{m^2 - 1} \{ & 2A_{22}(a^2 - 4x^2)^2(b^2 - 12y^2) + \\ & + 3A_{23}(a^2 - 4x^2)^2(b^2 - 4y^2)(b^2 - 20y^2) + \\ & + 2A_{32}(a^2 - 4x^2)^3(b^2 - 12x^2) + \\ & + 3A_{33}(a^2 - 4x^2)^3(b^2 - 4y^2)(b^2 - 20y^2) + \\ & + \frac{1}{m}[2A_{22}(a^2 - 12x^2)(b^2 - 4y^2)^2 + \\ & + 2A_{23}(a^2 - 12x^2)(b^2 - 4y^2)^3 + \\ & + 3A_{32}(a^2 - 4x^2)(a^2 - 20x^2)(b^2 - 4y^2)^2 + \\ & + 3A_{33}(a^2 - 4x^2)(a^2 - 20x^2)(b^2 - 4y^2)^3] \} \end{aligned} \quad (21)$$

При $y = 0$

$$\begin{aligned} [\sigma_y]_{y=0} = \frac{4m^2 E h}{m^2 - 1} \{ & 2A_{22}(a^2 - 4x^2)b^2 + 3A_{23}(a^2 - 4x^2)^2b^4 + \\ & + 2A_{32}(a^2 - 4x^2)^3b^2 + 3A_{33}(a^2 - 4x^2)^3b^4 + \frac{1}{m}[2A_{22}(a^2 - 12x^2)b^4 + \\ & + 2A_{23}(a^2 - 12x^2)b^6 + 3A_{32}(a^2 - 4x^2)(a^2 - 20x^2)b^4 + \\ & + 3A_{33}(a^2 - 4x^2)(a^2 - 20x^2)b^6] \} \end{aligned} \quad (21')$$

В табл. 4 помещены значения

$$M_x = \frac{\sigma_y h^2}{6}$$

для $y = 0$, вычисленные при помощи формулы (21').

Из формулы (20) получим для края $x = \frac{1}{2}a$

$$|\sigma_x|_{x=\frac{1}{2}a} = -\frac{16m^2 E h a^2}{m^2 - 1} [A_{22}(b^2 - 4y^2)^2 + A_{23}(b^2 - 4y^2)^3]$$

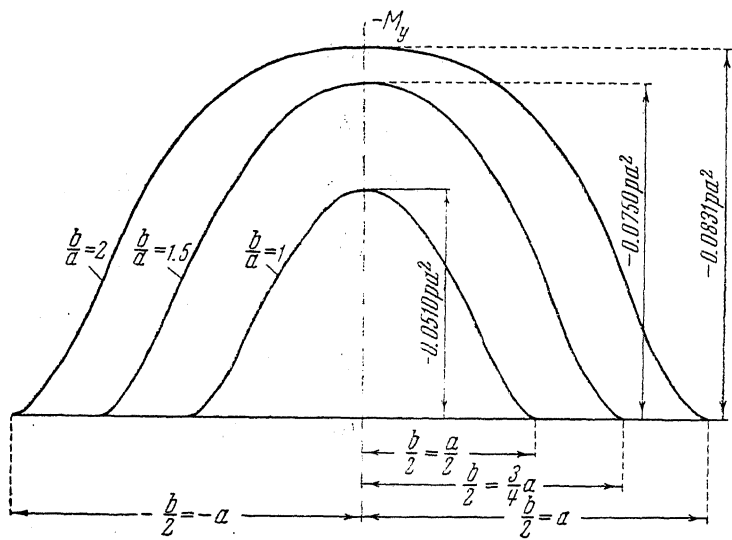
В табл. 5 приведены значения опорного момента

$$M_y = \frac{\sigma_x h^2}{6}$$

Таблица 5

$\frac{q}{a}$	M_y (в pa^2) по краю $x = \frac{1}{2} a$				
	$y = 0$	$y = \frac{1}{8} b$	$y = \frac{1}{4} b$	$y = \frac{3}{8} b$	$y = \frac{1}{2} b$
1	−0.0510	−0.0462	−0.0323	−0.0125	0
1.5	−0.0750	−0.0706	−0.0541	−0.0235	0
2	−0.0831	−0.0807	−0.0665	−0.0310	0

для различных точек края $x = \frac{1}{2} a$. Значения M_y для края не зависят от m .



Фиг. 10

На фиг. 10 представлен графически опорный момент по краю $x = \frac{1}{2} a$. Положив в формуле (21) $y = \frac{1}{2} b$, получим напряжение σ_y для другого края

$$|\sigma_y|_{y=\frac{1}{2} b} = -\frac{16m^2 Ehb^2}{m^2 - 1} [A_{22} (a^2 - 4x^2)^2 + A_{32} (a^2 - 4x^2)^3]$$

В табл. 6 приведены значения опорного момента

$$M_x = \frac{\sigma_y h^2}{6}$$

для края $y = \frac{1}{2} b$.

Таблица 6

$\frac{b}{a}$	M_x (в pa^2) по краю $y = \frac{1}{2} b$				
	$x = 0$	$x = \frac{1}{8} a$	$x = \frac{1}{4} a$	$x = \frac{3}{8} a$	$x = \frac{1}{2} a$
1	−0.0510	−0.0462	−0.0323	−0.0125	0
1.5	−0.0549	−0.0492	−0.0332	−0.0123	0
2	−0.0503	−0.0445	−0.0291	−0.0102	0

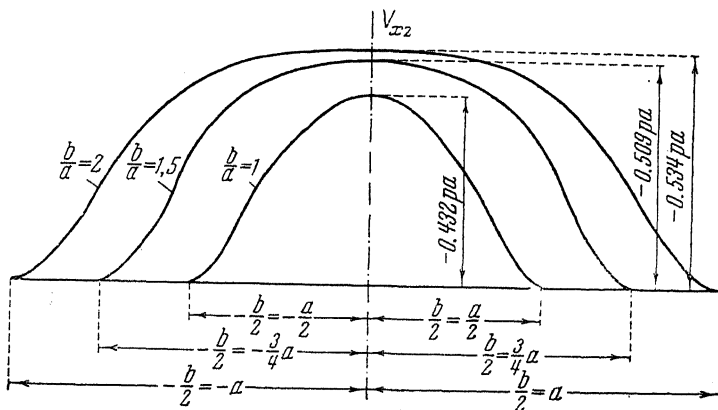
Таблица 7

$\frac{b}{a}$	V_{xz} (в pa) на опоре $x = \frac{1}{2} a$				
	$y = 0$	$y = \frac{1}{8} b$	$y = \frac{1}{4} b$	$y = \frac{3}{8} b$	$y = \frac{1}{2} b$
1	-0.432	-0.398	-0.291	-0.120	0
1.5	-0.509	-0.496	-0.422	-0.193	0
2	-0.534	-0.528	-0.452	-0.218	0

Реакции опор равны по величине перерезывающим силам на опорах. На опоре $x = \frac{1}{2} a$ перерезывающая сила

$$V_{xz} = -\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\frac{16m^2 E h^3 a}{m^2 - 1} [A_{22}(b^2 - 4y^2)^2 + A_{23}(b^2 - 4y^2)^3 - 2A_{32}a^2(b^2 - 4y^2)^2 - 2A_{33}a^2(b^2 - 4y^2)^3] \quad (22)$$

В табл. 7 приведены значения перерезывающих сил V_{xz} для опоры $x = \frac{1}{2} a$.



Фиг. 11

На фиг. 11 представлены графически перерезывающие силы V_{xz} на опоре $x = \frac{1}{2} a$.

На опоре $y = \frac{1}{2} b$ перерезывающие силы

$$V_{yz} = -\frac{16m^2 E h^3 b}{m^2 - 1} [A_{22}(a^2 - 4x^2)^2 - 2A_{23}b^2(a^2 - 4x^2)^2 + A_{32}(a^2 - 4x^2)^3 - 2A_{33}b^2(a^2 - 4x^2)^3] \quad (23)$$

В табл. 8 приведены значения перерезывающих сил V_{yz} , вычисленные для нескольких точек опоры.

Таблица 8

$\frac{b}{a}$	V_{yz} (в pa) на опоре $y = \frac{1}{2}b$				
	$x = 0$	$x = \frac{1}{8}a$	$x = \frac{1}{4}a$	$x = \frac{3}{8}a$	$x = \frac{1}{2}a$
1	-0.432	-0.398	-0.291	-0.120	0
1.5	-0.410	-0.293	-0.168	-0.046	0
2	-0.332	-0.282	-0.161	-0.044	0

Таблица 9

$\frac{b}{a}$	Источник	В центре		На опоре			
		M_y pa^2	M_x pa^2	M_y pa^2	M_x pa^2	V_{xz} pa	V_{yz} pa
1	Результаты настоящей статьи . . .	0.0229	0.0229	-0.0510	-0.0510	-0.432	-0.432
	Результаты работы Генки [4]	0.0230	0.0230	-0.0512	-0.0512	-0.440	-0.440
	Результаты работы автора [5]	0.0229	0.0229	-0.0517	-0.0517	-0.452	-0.452
1.5	Результаты настоящей статьи . . .	0.0367	-0.0198	-0.0750	-0.0549	-0.509	-0.410
	Результаты работы Генки [4]	0.0370	-0.0200	-0.0765	-0.0565	-0.525	-0.475
	Результаты работы автора [5]	0.0368	-0.0204	-0.0753	-0.0515	-0.517	-0.457

В заключение приводим табл. 9, в которой сопоставлены значения M_x и M_y в точке $x = 0$, $y = 0$, M_y , M_x , V_{xz} и V_{yz} для середины опор, вычисленные здесь и вычисленные Генки [4], а также в работе автора [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lévy M. Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire.— Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1889, t. 129, p. 555—559. Estanave Thèses. 1900.
2. Коялович Б. М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. СПб., 1902.
3. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Ч. 2, СПб., 1914.
4. Hencky H. Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. München, 1913, VI, 94 S.
5. Галеркин Б. Г. Прямоугольные пластинки, опертые по краям.— Изв. СПб. политехн. ин-та, 1915, т. 24, вып. 1, с. 219—282.

6. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.— *Journal f. reine u. angewandte Mathematik*, 1908, Bd. 135, S. 1—61.
7. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.— *Annalen der Physik*, 1909, Bd. 28, N. 4, S. 737—786.
8. Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем. Киев, 1910, 186 с.
9. Hager K. Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen. München, 1911, VII, 94 S.
10. Lorenz H. Technische Elastizitätslehre. München, 1913, XXIV, 692 S.
11. Föppl A. Die Biegung einer kreisförmigen Platte.— *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Math.-Phys. Klasse*, 1912, Bd. 45, S. 155—190.
12. Clebsch R. F. Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris, 1883.
13. Пястряков Д. Изгиб тонкой пластинки. Дипломная работа, выполненная под руководством проф. С. П. Тимошенко.— *Изв. Киевск. политехн. ин-та*, 1910, Отдел инженерно-механический, кн. 3, с. 309—373.
14. Галеркин Б. Г. Теория продольного изгиба и опыт применения теории продольного изгиба к многоэтажным стойкам, стойкам с жесткими соединениями и системам стоек.— *Изв. СПб. политехн. ин-та*, 1909, т. 12, вып. 1, с. 167—241; вып. 2, с. 383—451.
15. Ясинский Ф. С. О сопротивлении продольному изгибу. Собрание сочинений. Т. 1, СПб., 1902 (Сборник Ин-та инж. путей сообщения. Вып. 56).

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Б. Г. ГАЛЕРКИН



СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

ТОМ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1952

СПИСОК ТРУДОВ Б. Г. ГАЛЕРКИНА

1901

1. К вопросу о паровозных топках из литого железа.— Изв. Южно-русс. об-ва технол., 1901, № 8—9, с. 108—110.

1909

2. Теория продольного изгиба, опыт применения теории продольного изгиба к многоэтажным стойкам, стойкам с жесткими соединениями и системам стоек.— Изв. СПб. политехн. ин-та. Отд. техн., ест. и мат., 1909, т. 12, в. 1, с. 167—241, фиг.; т. 12, в. 2, с. 384—453, фиг.

1910

3. Изгиб и сжатие.— Изв. СПб. политехн. ин-та, Отд. техн., ест. и мат., 1910, т. 13, в. 3, с. 733—775, табл.

1911

4. Рец.: Н е п п е б е r g, L. *Die graphische Statik der Statik-Systeme*. Teubner, 1911, 727 S., 394 Fig. — Вестн. Об-ва технол., 1911, т. 18, № 7, с. 295—299, фиг.

1912

5. Опорные моменты неразрезанных балок.— Изв. СПб. политехн. ин-та, Отд. техн., ест. и мат., 1912, т. 17, в. 1, с. 89—105, фиг.

6. К теории поляр.— Там же, с. 107—110, фиг.

6а. Рец.: М е h r t e n s, G. C. *Statik und Festigkeitslehre*. Bd. 3, H. 1, 1912.— Вестн. Об-ва технол., 1912, № 11, с. 475.

1913

7. Рец.: М е h r t e n s, G. C. *Statik und Festigkeitslehre*. Bd. 3, H. 1, 1912.— Вестн. Об-ва технол., 1913, т. 20, № 2, с. 63—64.

8. Рец.: L a n d s b e r g, Th. *Das Verfahren der Einflusslinien*. Berlin, W. Ernst u. Sohn 1912. 103 S., 99 Fig.— Вестн. Об-ва технол., 1913, т. 20, № 4, с. 131.

9. Рец.: П е р е д е р и й, Г. П. Курс железобетонных мостов. 536 с., 534 фиг.— Вестн. Об-ва технол., 1913, т. 20, № 6, с. 198.

1915

10. Графическое определение усилий в стержнях плоского шарнирного многоугольника. — Вестн. инж., 1915, т. 1, № 9, с. 384—385, фиг.

11. Казариш плоского 250-тонного крана.— Вестн. инж., 1915, т. 1, № 17, с. 829.

✓ 12. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок.— Вестн. инж., 1915, т. 1, № 19, с. 897—908, фиг., табл.

13. Прямоугольные пластинки, опертые по краям.— Изв. СПб. политехн. ин-та, 1915, т. 14, с. 219—282.

1916

14. Изгиб прямоугольных пластинок и стенок.— Изв. Пг. политехн. ин-та, Отд. техн., ест. и мат., 1916, т. 26, с. 124—254, фиг., табл.