1. La rete stradale più breve che collega le città

Martin J. Gander, Kévin Santugini e Antonio Steiner

The problem of finding the shortest road network is very old, the first written record goes back to a letter of Gauss replying to a question posed by Schumacher. After a historical review, we study the minimal road network problem using elementary mathematics, and show solutions for several examples.

1. Introduzione

Il problema di trovare la rete stradale più breve che collega le città può essere fatto risalire a una corrispondenza tra Schumacher e Gauss nel 1836. In una prima lettera (Schumacher H.C., 1836a) questi propone a Gauss un problema apparentemente semplice (vedere figura 1):

«Mir ist neulich ein Paradox vorgekommen, das ich so frei bin Ihnen vorzulegen. Bekanntlich ist, wenn man bei einem Vierecke ABCD einen Punct sucht, von dem die Summe der an die Winkelpuncte gezogenen Linien ein Minimum sey, der gesuchte Punct der Durchschnittspunct der Diagonalen E. Lässt man nun die Puncte A, B in den Linien DA, BC immer mehr hinaufrücken, bis sie am Ende in F zusammenfallen, so fällt auch E zugleich in F, das Viereck verwandelt sich in das Dreieck DFC, und man hätte den Punct F als denjenigen, von dem die Summe der an die Winkelpuncte F, C, D des Dreiecks gezogenen Linien ein Minimum sey. Das ist aber bekanntlich nur wahr, wenn der Winkel F>120˚».

Traduzione:

«Mi sono trovato di fronte a un nuovo paradosso, che mi permetto di presentarle. Sai sa che, dato un quadrilatero ABCD, se si considera un suo punto e lo si congiunge con i vertici mediante tre segmenti, la somma delle loro lunghezze è minima quando il punto coincide con l'intersezione E delle diagonali. Ora, se si prolungano i lati DA e CB fino a incontrarsi in un punto F, anche il punto E va a coincidere con F, il quadrilatero si trasforma nel triangolo DFC e il punto F dovebbe essere quello per il quale la somma delle sue distanze dai vertici F, C, D del triangolo è minima. Notoriamente ciò è però vero solo se l'ampiezza dell'angolo in F è maggiore o uguale a 120˚».

Solo due giorni dopo, Gauss risponde adducendo la seguente spiegazione (Schumacher H.C., 1836b):

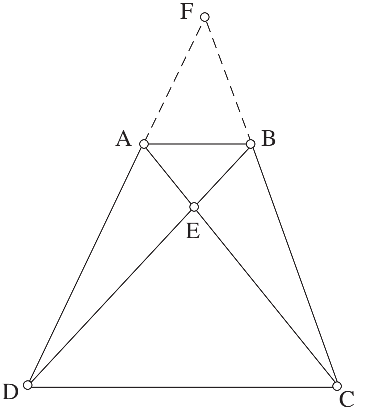

Figura 1 Esempio inviato da Gauss a Schumacher nel 1836.

«Was Ihr Viereck betrifft, so heisst doch die Aufgabe so: Vier Punkte a, b, c, d sind gegeben, man soll einen 5ten x finden, so dass ax+bx+cx+dx ein Minimum wird, und das ist von den 3 Durchschnittspunkten ab mit cd, ac mit bd, ad mit bc der eine, wo man für die Auswahl die Bedingung entweder leicht auf Anschauung reduciren, oder analytisch einkleiden könnte. Lassen Sie nun a, b, c fest sein, und d dem c immer näher rücken, so bleibt diese Auflösung noch immer so lange richtig, als Sie nicht c mit d zusammenfallen lassen. Fällt aber c mit d zusammen, so erfordert Geist und Buchstabe der mathematischen Aufgabe, als solcher, dass Sie dann c zweimahl zählen, also in dem Dreieck abc ax + bx + 2cx zu einem Minimum machen, wo sich die allgemeine Auflösung noch immer als richtig ausweiset».

Traduzione:

«Per quanto concerne il Suo quadrilatero, il problema è il seguente: Dati quattro punti a, b, c, d, si deve trovarne un quinto x tale che la somma ax+bx+cx+dx sia minima, e questo dovrebbe essere uno dei tre punti di intersezione di ab con cd, ac con bd, ad con bc, la cui scelta può essere fatta semplicemente guardando la figura oppure inquadrata analiticamente. Se ora lascia fissi a, b, c e spinge d sempre più vicino a c, la soluzione rimane sempre la stessa fin quando d non coincide con c. Se però d coincide con c, allora la situazione matematica esige che c venga contato due volte, quindi nel triangolo abc dev'essere minima l'espressione ax+bx+2cx e ciò rende valida la soluzione anche in questo caso».

Il problema di Schumacher è interessante perché richiede di trovare un punto che sia connesso a un dato insieme di punti in modo che la rete di connessione abbia lunghezza minima ed è ancora attuale benché risalga al 1638, quando Descartes chiede a Fermat di studiare curve i cui punti abbiano la somma minima delle loro distanze da quattro punti dati. Interessato da questa domanda, Fermat nel 1643 riduce il problema alla ricerca della somma minima delle distanze da tre punti dati (Fermat P. de, 1891) e Torricelli è il primo a risolvere questo caso (Torricelli, 1919), per cui il problema dei tre punti è detto «Problema di Fermat-Torricelli». La soluzione del caso di quattro punti è data da G.F. Fagnano (1776), mentre la generalizzazione a n punti è dimostrata indipendentemente da P, Tédenat (1810) e da S. Lhuilier (1810) nel periodo di insegnamento della matematica all'accademia imperiale di Ginevra. Anche se è possibile costruire la soluzione con riga e compasso in casi con più di quattro punti, è stato dimostrato con l'impiego della teoria di Galois che per più di quattro punti in posizione generale una tale soluzione non è possibile.

Nella lettera di risposta a Schumacher (1836b), Gauss propone un problema diverso, ma correlato, concernente la rete di connessione minima:

«Ist bei einem 4 Eck nicht von der stricten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle von einander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, dass sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsere Studenten bei Gelegenheit abgeben könnte. Die Möglichkeit verschiedener Fälle erläutern wohl hinreichend folgende Figuren, wo in der dritten Figur die Verbindung von c nach d direct gehen muss (was wirklich bei obigem Beispiel der Fall wird)».

Traduzione:

«A proposito di un quadrilatero, se non si restringe il discorso al problema particolare di cui mi ha parlato, ma lo si allarga alla ricerca del più corto sistema di reti, si può distinguere fra più casi particolari e nasce quindi un interessante problema matematico, che non mi è sconosciuto, avendo avuto già più volte l'occasione di rifletterci a proposito della linea ferroviaria Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig e sono dell'opinione che ciò sia anche una ricca situazione didattica da proporre ai nostri studenti. L'esistenza di diversi casi è spiegata in modo sufficiente dalle seguenti figure, dove nella terza la connessione da c e d dev'essere diretta (che è il caso proposto sopra)».

Osserviamo che Gauss ha lavorato su questo problema per delle ragioni pratiche concernenti la rete ferroviaria più breve fra quattro importanti città tedesche. Questo tipo di problema appare in diverse applicazioni, in particolare nella progettazione di circuiti elettrici e nel disegno di reti, e oggi è conosciuto con la denominazione «problema dell'albero di Steiner» (Hwang F.K., Richards D.S. e Winter P., 1992), (Cieslik D., 1999), anche se non è chiaro in quale misura abbia contribuito alla risoluzione di questo problema l'eminente matematico Jakob Steiner (nato a Utzenstorf (Be), Svizzera, nel 1796). Il problema basilare dell'albero di Steiner consiste nel trovare la rete più corta che connette un insieme di punti del piano. Per ogni insieme di punti, aggiungendo un punto intersezione chiamato «punto di Steiner» è possibile ridurre la lunghezza della rete di connessione. Du e Wang (1992) dimostrano che con l'aggiunta di un punto intersezione non si può ridurre la lunghezza della rete di un fattore maggiore di $1-\sqrt{3}/2$, circa il 13%, con l'impiego di un triangolo equilatero il cui centro fa da punto intersezione. Nel 1977, Graham, Garey e Johnson dimostrano che nel caso generale il problema della scelta ottimale dei punti intersezione è del tipo NP-completo[1] (Kolata G., 1990).

1. Denominazione informatica che indica i più difficili problemi problemi «non deterministici a tempo polinomiale», per i quali, cioè, non esiste un algoritmo in grado di risolverli velocemente (cioè in tempo polinomiale).

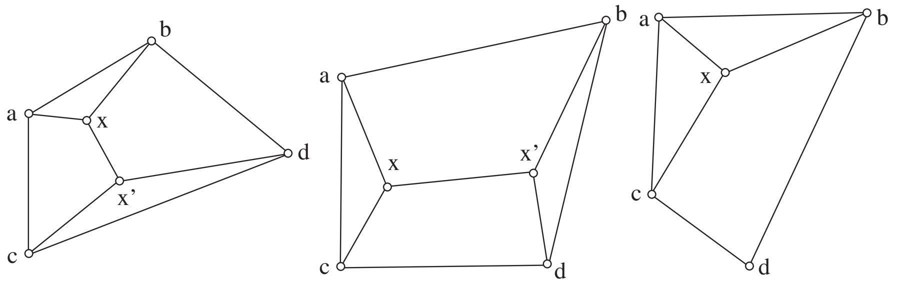

Figura 2 Illustrazione del problema delle reti minime fatta da Gauss.

In questo articolo studiamo, con mezzi matematici elementari, il problema di trovare la rete più corta che connette n città in uno spazio bi-dimensionale. In tutto l'articolo chiamiamo:

- Una **città**: un punto dell'insieme inizialmente dato.
- Un **punto di Steiner**: un punto in una rete che non è una città e che connette due o più strade (che non formino un angolo piatto).
- Un **nodo**: sia un punto di Steiner sia una città.

2. Un limite per il numero dei punti di Steiner

Nel piano la linea di lunghezza minima che congiunge due punti è la retta. Di conseguenza la rete di lunghezza minima è un'unione di segmenti e otteniamo una prima relazione fra il numero di strade e il numerodi nodi:

Lemma 2.1. Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Se p è il numero dei punti di Steiner e r quello delle strade, allora

$$r = p + n - 1$$

Dimostrazione. Una rete di lunghezza minima fatta di una collezione di segmenti non può contenere un ciclo. Se ne contenesse uno, si potrebbe togliere una strada dal ciclo e ottenere così una rete più corta. Una rete connessa senza cicli è un albero e il numero di strade r in un albero è uguale al numero di nodi meno 1.

Il prossimo lemma mostra che i punti di Steiner sono delle reali intersezioni, cioè connettono più di due strade.

Lemma 2.2. In una rete di lunghezza minima che connette n città, ogni punto di Steiner è connesso con almeno tre strade.

Dimostrazione. Se un punto P di Steiner fosse connesso con sole due strade, allora potremmo toglierlo e connettere direttamente i due nodi che erano connessi con P, ottenendo così una rete di lunghezza minima o al massimo uguale.

Lemma 2.3. Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Se p è il numero dei punti di Steiner e r quello delle strade, vale la disuguaglianza

$$r \geq \frac{3p + n}{2}$$

Dimostrazione. Contiamo le strade connesse a ogni nodo. Ogni città è connessa con almeno una strada e ogni punto di Steiner con almeno tre strade. Sommiamo secondo i nodi e siccome ogni strada è contata due volte (una per ogni estremità della strada), otteniamo $r \geq (3p + n)/2$.

Vogliamo infine perfezionare questo risultato che abbiamo studiato nel caso di una rete di lunghezza minima per tre città. Applicando il lemma precedente, possiamo trovare un estremo superiore per il numero di punti di Steiner.

Teorema 2.4. Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Sia p il numero dei punti di Steiner. Allora vale la disuguaglianza

$$p \leq n - 2$$

Dimostrazione. Questo risultato si ottiene combinando i risultati dei lemmi 2.1 e 2.3.

3. Rete minima che connette tre città

È utile studiare il caso particolare di tre città, perché si ottiene una informazione geometrica sulla struttura della rete in prossimità dei punti di Steiner.

Proposizione 3.1. Consideriamo tre città A, B e C. Allora si hanno due possibilità:

1. Se un angolo del triagnolo ha l'ampiezza maggiore di 120°, allora la rete di lunghezza minima non contiene punti di Steiner ed è composta di due strade connesse all'angolo ottuso.
2. Altrimenti, la rete di lunghezza minima è quella che connette le tre città con l'unico punto O di Steiner, che si trova all'interno del triangolo ABC, ed è tale che gli angoli
   $(OA , OB) = (OB , OC) = (OC , OA) = \pm 120°$

Dimostrazione. Sia O il punto di Steiner connesso direttamente con A, B, C. La lunghezza della rete associata con O è

$$l(O) = |OA| + |OB| + |OC|$$

Per trovare una posizione ottimale del punto O, dobbiamo conoscere la variazione di l(O) al variare di O, cioè dobbiamo calcolare la derivata prima della lunghezza della rete quando O si muove nella direzione h

$$\frac{l(O + t\vec{h})}{dt} = \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|}, \vec{h}\right) + \left(\frac{\overrightarrow{OB}}{|OB|}, \vec{h}\right) + \left(\frac{\overrightarrow{OC}}{|OC|}, \vec{h}\right)$$

E perciò

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|OB|} + \frac{\overrightarrow{OC}}{|OC|} = \vec{0}$$

Questo può accadere solo se i vettori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ formano fra loro angoli di 120°. Se il triangolo ABC ha un angolo di ampiezza superiore a 120°, allora O non può esistere e la rete minima non ha punti di Steiner. Se nessun angolo ha ampiezza maggiore di 120°, esiste un solo punto O che soddisfa la (1), che può essere costruito disegnando tre archi di cerchio, ciascuno sopra ogni lato del triangolo (vedere la figura 3), che contiene tutti i punti internidel triangolo ABC tali che l'angolo con i due estremi dell'arco sia di 120°. Il raggio di ciascun arco è $2\sqrt{3}/3$ volte la lunghezza del lato. Il punto O di Steiner si trova all'intersezione dei tre archi di cerchio (vedere la figura 3).

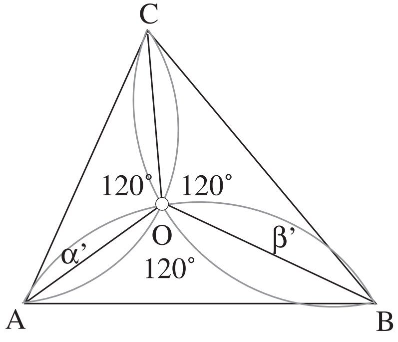

Figura 3 Costruzione del punto di Steiner ottimale per un triangolo.

La lunghezza della rete passante per O può così essere calcolata:

se indichiamo con $\alpha' = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})$ e $\beta' = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$ allora

$$|AO| = \frac{\sin(60° - \alpha')}{\sin 120°} \cdot |AC|$$

$$|BO| = \frac{\sin(60° - \beta')}{\sin 120°} \cdot |BC|$$

$$|CO| = \frac{\sin \alpha'}{\sin 120°} \cdot |AC|$$

$$|CO| = \frac{\sin \beta'}{\sin 120°} \cdot |BC|$$

Di conseguenza

$$|AO| + |BO| + |CO| = \cos\alpha' \cdot |AC| + \cos\beta' \cdot |BC|$$

La rete con un punto di Steiner in O è quindi più corta di ciascuna delle tre reti senza punto di Steiner.

4. Alcuni risultati concernenti le reti minime nel caso generale

Dal caso delle tre città deduciamo interessanti proprietà che deve avere la rete minima per n città.

Proposizione 4.1. La rete minima che connette n città ha le seguenti proprietà:

1. Due strade che connettono uno stesso nodo formano un angolo maggiore o uguale a 120˚.
2. Nessun nodo è connesso con più di tre strade.
3. Tre strade che connettono uno stesso nodo formano a due a due un angolo di 120˚.
4. Tutti i punti di Steiner sono connessi con sole tre strade.

Dimostrazione. Se due strade che connettono tre nodi A, B, C formano un angolo minore di 120˚ nel nodo B, allora, per la Proposizione 3.1, è possibile costruire un altro punto O di Steiner tale che |OA|+|OB|+|OC| sia più corta di |AB|+|BC|.

Siccome l'angolo giro ha ampiezza 360˚, se un nodo N connesso con 4 o più strade, ci sarebbero almeno due strade che formano un angolo minore di 120˚. Per la stessa ragione, se un nodo è connesso con tre strade, non vi possono essere due strade che formano un angolo maggiore di 120˚: se fosse il caso, almeno uno degli altri angoli avrebbe l'ampiezza minore di 120˚.

Per il lemma 2.2 un punto di Steiner è connesso con almeno tre strade. Abbiamo appena dimostrato che un nodo non può essere connesso con più di tre strade. Di conseguenza un punto di Steiner è sempre connesso con esattamente tre strade.

Possiamo ora enunciare il seguente:

Teorema 4.2.

Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Sia p il numero dei punti di Steiner, r il numero delle strade e sia N il numero di connessioni fra le città (una strada che connette due città è contata due volte). Allora si ha

$$N \geq n \quad \text{e} \quad r = \frac{3p + N}{2} \quad \text{e} \quad p = 2n - N - 2$$

Caso particolare, se tutte le città sono connesse con una sola strada: $p = n - 2$

5. Esempi

In questo paragrafo diamo esempi di reti di lunghezza minima.

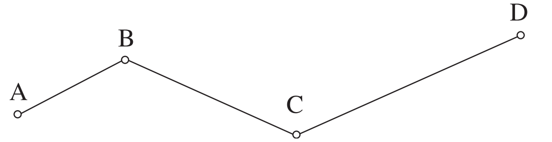

Figura 4 Una rete lineare

5.1. Rete minima per il quadrilatero

Per il teorema 2.4, possono esistere solo 0, 1 oppure 2 punti di Steiner. Enumeriamo tutte le possibilità di rete minima:

- **Nessun punto di Steiner, caso degenere**. Una città giace esattamente in un punto di Steiner delle altre tre città. Congiungendo questa città con le altre tre si ottiene la rete minima.

- **Nessun punto di Steiner, caso normale**. Due città sono connesse con due strade e le altre due città sono connesse con una sola strada. In questo caso la rete è una successione lineare di strade (vedere la figura 4).
- **Un punto di Steiner**. Il punto di Steiner è connesso con tre città. L'altra città è direttamente connessa con una delle prime tre città (vedere per esempio il terzo disegno di Gauss nella figura 2).
- **Due punti di Steiner**. Ogni punto di Steiner è connesso con due città e con l'altro punto di Steiner (vedere il primo e il secondo disegno di Gauss nella figura 2).

Consideriamo i quattro vertici di un quadrato e cerchiamo la rete minima. Sia a la lunghezza dei lati. Senza punti di Steiner, la lunghezza minima della rete è 3a.

Con un punto di Steiner, questo è connesso con tre città e la lunghezza della rete è

$$\frac{a}{2}\left(2+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\approx 2,93\ a$$

Con due punti di Steiner, ciascuno è connesso con l'altro e con due città e la lunghezza della rete è

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot a \approx 2,73\ a \quad \text{(vedere la figura 5)}$$

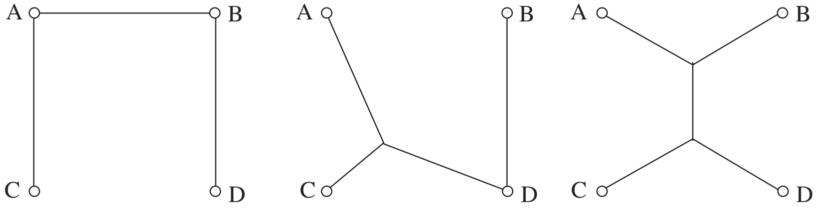

Figura 5 Rete minima per un quadrato.

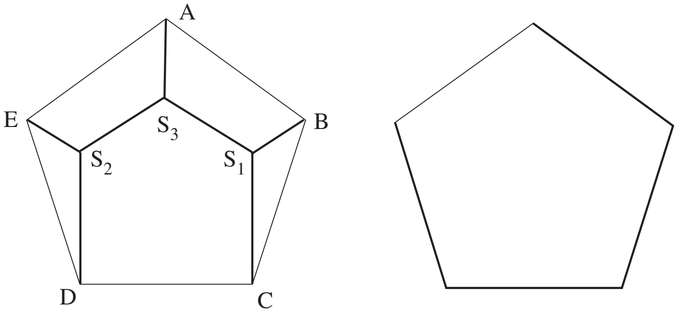

Figura 6 Reti con tre punti di Steiner e con nessuno punto di Steiner per il pentagono regolare.

5.2. Rete minima per il pentagono regolare

Calcoliamo la lunghezza della rete minima per il pentagono regolare con il numero massimo di punti di Steiner: tre. Due città non possono essere connesse direttamente se il numero di punti di Steiner è massimo. Così ogni città è connessa con un punto di Steiner. A sua volta, un punto di Steiner non può essere connesso con tre città, senza che la rete diventi sconnessa. Così abbiamo due punti di Steiner S1 e S2 connessi con due città e un punto di Steiner S3 connesso con una sola città e con gli altri due punti di Steiner (vedere figura 5.2). Indichiamo con R la distanza fra il centro del pentagono e un suo vertice. La lunghezza di ogni strada di questa rete può essere così calcolata

$$|CS_1| = |DS_2| = 2\,R\,\frac{\sin 36^\circ \cdot \sin 42^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 0{,}9083\,R$$

$$|BS_1| = |ES_2| = 2\,R\,\frac{\sin 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 0{,}4195\,R$$

$$|S_2S_3| = |S_1S_3| = 2\,R \sin 36^\circ \approx 0{,}6787\,R$$

$$|AS_3| = \left(1+\cos 36^\circ\right)R - |CS_1| - R\sin 36^\circ/\sqrt{3} \approx 0{,}5614\,R$$

La lunghezza totale della rete è quindi

$$2|CS_1| + 2|BS_1| + 2|S_2S_3| + |AS_3| = 4{,}5743\,R$$

La rete senza punti di Steiner non può essere più corta perché l'angolo tra due lati adiacenti è 112°<120°. Infatti la sua lunghezza è $8 \cdot \sin 36° \cdot R = 4{,}5743$ R. La rete senza punti di Steiner non può essere più corta, perché l'angolo tra due lati adiacenti è 112°<120°. In realtà la lunghezza è $8 \cdot \sin 36° \cdot R = 4{,}7022$ R.

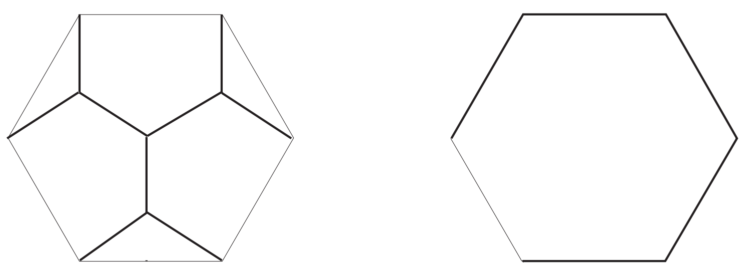

Figura 7 Reti con quattro punti di Steiner e senza punti di Steiner per l'esagono regolare.

5.3. La rete minima per l'esagono regolare

Calcoliamo la rete minima per un esagono regolare con il numero massimo di punti di Steiner: quattro. Il modo intuitivo immediato è di aggiungere tre punti di Steiner, ciascuno dei quali è connesso con due città adiacenti. Poi connettiamo questi tre punti di Steiner con il quarto punto di Steiner collocato al centro dell'esagono (vedere figura 7). Se ogni lato ha lunghezza R, allora la lunghezza di ogni strada connessa con una città è $\sqrt{3}/3 \cdot R$. La lunghezza di una strada che connette il punto di Steiner al centro dell'esagono con un altro punto di Steiner è

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) R = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

Di conseguenza la lunghezza totale della rete è $3\sqrt{3}\,R = 5{,}196\,R$. Questa è più lunga della rete senza punti di Steiner, di lunghezza 5R.

5.4. Rete minima per il poligono regolare avente $3 \cdot 2^n$ vertici

Consideriamo solo reti minime con il massimo numero di punti di Steiner e ci occupiamo dello strato esterno di punti di Steiner. Se n>1, due città del poligono sono sempre connesse con un punto di Steiner. Fissiamo il punto di Steiner S che connette due città adiacenti A e B in modo che |AS|=|BS| e

$$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right) = 120°.$$

Allora esistono $3 \cdot 2^{n-1}$ punti di Steiner: essi formano un poligono regolare, possiamo considerarli come città di un'altra rete e connetterli per mezzo di altri punti di Steiner. Per induzione, questo ci permette di calcolare la lunghezza di una tale rete.

Numero di vertici	Lunghezza della rete
3	3
6	5,19615
12	7,82894
24	10,7892
48	13,9837
96	17,3390

Tabella 1 Lunghezza di una rete con il masssimo numero di punti di Steiner per un poligono regolare.

Sia R la distanza del centro del poligono da ogni città (collocata nei vertici del poligono regolare). Per prima cosa calcoliamo la distanza dei punti esterni dal centro del poligono. Questa distanza è

$$R \cos\left(\frac{180°}{N}\right) - R\,\frac{\sin\left(\frac{180°}{N}\right)}{\tan 60°} \quad \text{con } N = 3 \cdot 2^n$$

La lunghezza di una strada che connette un punto di Steiner con una città è

$$R \cdot \frac{\sin\left(\frac{180°}{N}\right)}{\sin 60°}$$

Perciò, se chiamiamo l_n la lunghezza di una tale rete (per R=1), allora otteniamo la relazione

$$l_{n+1} = \frac{N \sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\sin 60^\circ} + \left(\cos\left(\frac{180^\circ}{N}\right) - \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\tan 60^\circ} \right) \cdot l_n \quad \text{e} \quad l_0=3.$$

Questa configurazione può essere una rete minima? Proprio no! Per un triangolo otteniamo una rete di lunghezza 3, per un esagono otteniamo la lunghezza 5,196 e per un decagono 7,83 che è maggiore di 2π: la lunghezza della circonferenza. Ciò significa che, per il dodecagono e per tutti i poligoni regolari aventi un numero maggiore di vertici la lunghezza, la rete senza punti di Steiner è la più corta (vedere la tabella 5.4).

6. Conclusione

Per concludere, usiamo i risultati ottenuti nella risoluzione del problema dei tre punti di Gauss, illustrato nella lettera a Schumacher (Schumacher H.C., 1836b). Nella figura 8 mostriamo la rete più corta ottenibile e l'ottimizzazione topologica della rete indicata da Gauss che risulta però più lunga della prima. Nel primo caso le due reti hanno lunghezza 11,6 cm e 12,6 cm (valori approssimati al millimetro); nel secondo disegno la prima rete è lunga 15,5 cm, mentre l'altra non è definita; nel terzo caso, le reti misurano nell'ordine 12,39 cm e 12,44 cm.

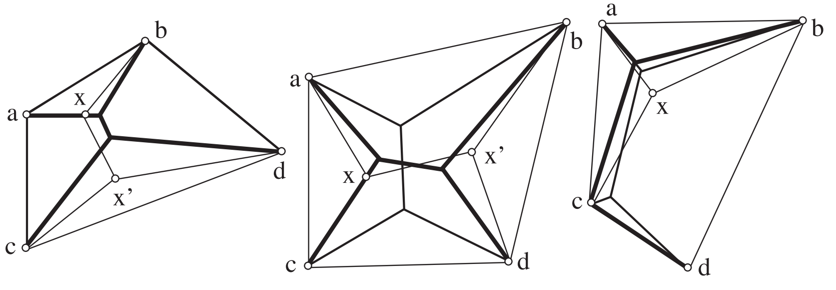

Figura 8 Le soluzioni corrette presentate da Gauss (linea di spessore 1) e quelle ottimizzate disegnate da Gauss (linea di spessore 2), più lunghe delle prime.

Schumacher H.C.
Schumacher an Gauss, Altona , 19. März 1836. In *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III*. Altona: Gustav Esch, p. 7-8, 1836.

Gauss C.F.
Antwort von Gauss an Schumacher, Altona 21. März 1836. In *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III*. Altona: Gustav Esch, p. 13-14, 1836.

Fermat P. de
Oeuvres, I. Paris: Tannery. Supplément: Paris 1922, 1891.

Torricelli E.
Opere, I/2. Faenza: Loria e Vassura, p. 90-97, 1919.

Fagnano G.F.
Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia. *In Nova Acta Eruditorum*, anni 1776.

Tédenat P.
Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume. In *Annales de mathématiques pures et appliqées*. Nîmes: Gergonne 1, p. 285-291, 1811.

Lhuilier S.
Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume. In *Annales de mathématiques pures et appliqées*. Nîmes: Gergonne 1, p. 297-301, 1811.

Hwang F.K., Winter P.
The Steiner Tree Problem. In Annals of Discrete Mathematics, vol. 53. Amsterdam: Elsevier North-Holland, 1992.