Cicli di Jones generalizzati

Fabrizio Pini, Antonio Steiner e Martin J. Gander

Abstract

We introduce a generalization of the classical cycles introduced by Jones by adding for each species weighting factor in front of the dilution term and changing the environmental condition. We show that this new model can still be solved explicitly by a transformation to the classical cycles of Jones.

1. Consideriamo un'associazione di N popolazioni x_i che godono di accrescita autonoma e che in più si catalizzano l'un l'altra formando un ciclo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_1 \ln x_N \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 + b_2 x_2 \ln x_1 \\ \vdots \; &\vdots \; \vdots \\ \dot{x}_N &= a_N x_N + b_N x_N \ln x_{N-1}. \end{aligned}$$

Teniamo però a bada questa crescita libera mediante diluizione specifica $-\lambda_i x_i \Omega$ da determinarsi in modo che sia salvaguardata la condizione ambientale $\sum_{k=1}^{N} x_k^{1/\lambda_k} = c$. In somma proponiamo il sistema

$$\dot{x}_i = a_i x_i + b_i x_i \ln x_{i-1} - \lambda_i x_i \Omega;\ x_i^0, \quad \sum_{k=1}^{N} x_k^{1/\lambda_k} = c,\ x_0 := x_N,\ a_i \geq 0,\ b_i > 0. \tag{1}$$

2. Inserendovi

$$x_i = z_i^{\lambda_i}, \quad \lambda_N = 1 \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2}$$

si ottiene

$$\dot{z}_i = \frac{a_i}{\lambda_i} z_i + \frac{b_i \lambda_{i-1}}{\lambda_i} z_i \ln z_{i-1} - z_i \Omega;\ \left(x_i^0\right)^{1/\lambda_i}, \quad \sum_{k=1}^{N} z_k = c,\ z_0 := z_N,\ \lambda_0 := \lambda_N = 1.$$

Ora la *condizione*

$$\frac{b_i \lambda_{i-1}}{\lambda_i} = \beta \quad (i = 1, \dots, N)$$

ossia

$$\lambda_1 = \frac{b_1}{\beta},\ \lambda_2 = \frac{b_2}{\beta}\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_N = \frac{b_N}{\beta}\lambda_{N-1} = 1$$

ci fornisce

$$\lambda_1 = \frac{b_1}{\beta},\ \lambda_2 = \frac{b_1 b_2}{\beta^2},\ \dots,\ \lambda_N = \frac{b_1 b_2 \dots b_N}{\beta^N} = 1,$$

vale a dire che

$$\beta = (b_1 b_2 \dots b_N)^{1/N} \tag{3}$$

sarà la *media geometrica* dei b_i. Inoltre abbiamo

$$\lambda_i = \frac{b_1 \dots b_i}{\beta^i} \quad (i = 1, \dots, N). \tag{4}$$

Il sistema (1), posto

$$\alpha_i := \frac{a_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, N) \tag{5}$$

è così ricondotto al *ciclo di B.L. Jones*

$$\dot{z}_i = \alpha_i z_i + \beta z_i \ln z_{i-1} - z_i \Omega;\ \left(x_i^0\right)^{1/\lambda_i},\ \sum_{k=1}^{N} z_k = c,\ z_0 := z_N. \tag{6}$$

3. Questo è esplicitamente risolvibile come esposto in [1] e [2]: basta infatti trovare le soluzioni del *sistema lineare*

$$\dot{\xi}_i = \alpha_i + \beta \xi_{i-1};\ \ln \left(x_i^0\right)^{1/\lambda_i},\ \xi_0 := \xi_N \quad (i = 1, \dots, N) \tag{7}$$

e con esse calcolare

$$z_i = \frac{c e^{\xi_i}}{\sum_{k=1}^{N} e^{\xi_k}}. \tag{8}$$

4. Come *esempio* scegliamo $N = 2$, $a_i = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 4$ cosicchè $\beta = 2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$. Le soluzioni x_i del *ciclo generalizzato*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1 \ln x_2 - \frac{1}{2} x_1 \Omega;\ \ x_1^0 \\ \dot{x}_2 & = & 4 x_2 \ln x_1 - x_2 \Omega;\ \ x_2^0 \end{array}, \quad x_1^2 + x_2 = c$$

si ottengono tramite le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1 & = & 2\xi_2;\ \ 2 \ln x_1^0 \\ \dot{\xi}_2 & = & 2\xi_1;\ \ \ln x_2^0 \end{array}$$

che sono

$$\xi_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad \xi_2 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t},$$

con

$$C_1 = \ln x_1^0 + \frac{1}{2} \ln x_2^0, \quad C_2 = \ln x_1^0 - \frac{1}{2} \ln x_2^0.$$

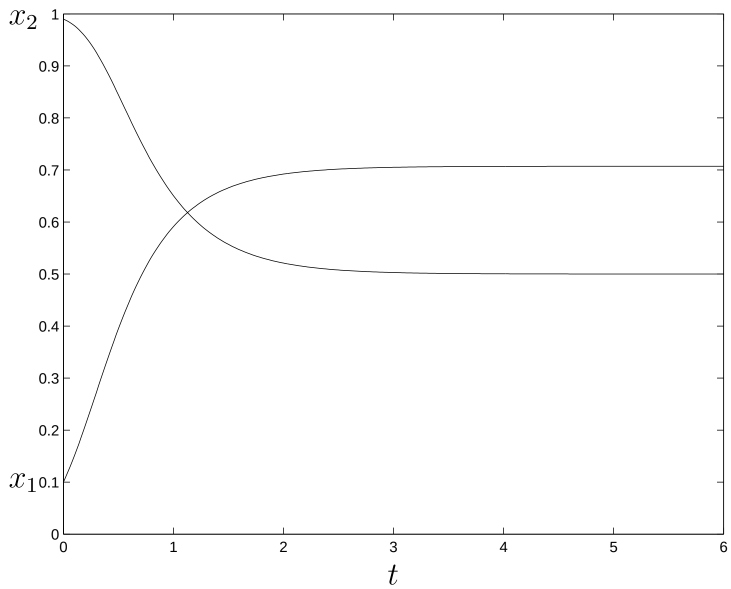

fig. 1: esempio numerico per $x_1^0 = \sqrt{0.05}$, $x_2^0 = 0.95$.

Si ottengono ora

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{c}{1+e^{-2C_2 e^{-2t}}}\right)^{1/2} \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \left(\frac{c}{2}\right)^{1/2}, \\ x_2 &= \frac{c}{e^{2C_2 e^{-2t}}+1} \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Il sistema si avvicina in modo equifinale al punto fisso stabile e concomitante

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^{1/2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{c}{2}$$

che infatti soddisfa $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Un esempio numerico e dato in figura 1.

Bibliografia

[1] B.L. Jones: A solvable Hypercycle Model for the Selection of Biological Molecules. J. Math. Biology 4, 187-193, 1977.

[2] A. Steiner: Alcune Associazioni Biologiche. Sguardo Matematico nella Biologia, Mendrisio, 1990.