

Le equazioni preda-predatore risolte

Antonio Steiner e Martin J. Gander

Introduzione

In tre distinti capitoli A,B,C partendo dalle ben note equazioni considerate in A attraverso l'intermedia studiata in B con un altro piccolo ritocco si giunge alle classiche equazioni preda-predatore trattate in C. Esse furono già proposte nel 1927 da V. Volterra. Le tre parti sono indipendenti fra di loro, tuttavia legate dal fatto che nei tre casi *uno stesso procedere* porta alla soluzione. Questo consiste essenzialmente nei seguenti passi:

1. Inizialmente mediante un'adequata trasformazione delle variabili

$$x \longleftarrow \xi, y \longleftarrow \eta$$

sii porta il sistema a cosiddetta *forma normale*, nella quale i coefficienti di crescita nonchè di decrescita sia della preda ξ che del predatore η sono uguali nelle due equazioni che descrivono le loro variazioni istantanee $\dot{\xi}$ e $\dot{\eta}$. In un sistema ridotto a questa forma la sua evoluzione una volta fissato il punto di partenza S , non dipenderà che da questi coefficienti a e c .

2. Non appena si abbia poi preso di mira una *soluzione parametrica* del problema, si offre dapprima subito quale naturale parametro la variabile ξ . Scelto il valore ξ^{min} e con esso il vertice sinistro S della traiettoria nel piano $\xi\eta$, poi grazie ad una semplice funzione $U = U(\xi)$ si riesce a determinare il valore ξ^{max} e con lui anche il vertice destro S' della traiettoria. Inoltre per ogni valore intermedio ξ sull'intervallo di variabilità di questo parametro si potrebbero calcolare due valori $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ della variabile η che vi corrispondono. In modo elementare si giunge

così ad una costruzione della traiettoria del sistema in forma normale, che mette in evidenza *delle simmetrie* non ancora conosciute. Si risale poi al piano xy delle popolazioni reali invertendo le trasformazioni iniziali.

3. Infine in *ricupero del tempo* che avevamo eliminato formando $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}}$ in parte A si esegue per integrazione diretta, in B e C per integrazione numerica.

Si è conclusa così una piacevole ricerca svoltasi durante due lustri in luogo ameno:

A

Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{a}x - \tilde{b}x \ln y \\ \dot{y} &= -\tilde{c}y + \tilde{d}y \ln x \end{aligned}, \quad \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} > 0$$

mediante la trasformazione di variabili

$$x = e^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{d}}\xi}, \quad y = e^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\eta} \tag{1}$$

si riduce a *forma normale*, che posto

$$a := \frac{\tilde{d}}{\tilde{c}}\tilde{a}, \quad c := \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\tilde{c} \tag{2}$$

si riscrive come

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(1 - \eta); \quad \xi^{min} < 1 \\ \dot{\eta} &= c(-1 + \xi); \quad 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Benchè la soluzione di questo sistema lineare sia immediata, cioè

$$\begin{aligned} \xi &= -(1 - \xi^{min}) \cos \sqrt{ac} t + 1 \\ \eta &= -\sqrt{\frac{c}{a}}(1 - \xi^{min}) \sin \sqrt{ac} t + 1 \end{aligned} \tag{4}$$

non intendiamo farne uso, se non a scopo di controllo.

Procediamo invece in modo ancor più elementare, eliminando dapprima il tempo dalla (3), formando $\frac{\dot{\eta}}{\xi} = \frac{d\eta}{d\xi}$ ed integrando. Quale *equazione di traiettoria* si ottiene così dopo aver posto

$$U(\xi) := \xi^2 - 2\xi \tag{5}$$

l'equazione quadratica

$$\eta^2 - 2\eta + \frac{c}{a}U(\xi) + K = 0 \tag{6}$$

nella quale la costante di moto sarà conforme a $S(\xi^{min}, 1)$

$$K = 1 - \frac{c}{a}U(\xi^{min}). \tag{6i}$$

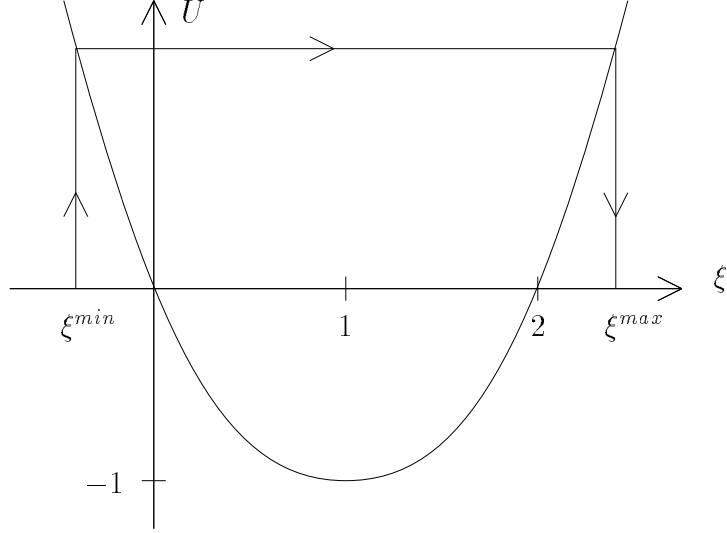


fig. 1:

Il discriminante della (6) è

$$D = 4\frac{c}{a} [U(\xi^{min}) - U(\xi)]$$

e quindi la condizione di solubilità di quest' equazione si scrive sotto forma

$$D \geq 0 \iff U(\xi^{min}) \geq U(\xi). \quad (7)$$

Essa ci serve a determinare i valori leciti di ξ , che dipendono dalla scelta arbitraria di $\xi^{min} < 1$. In i special modo da figura 1 si vede che

$$\xi^{max} = 2 - \xi^{min} \quad (7i)$$

e quindi per ogni ξ su $[\xi^{min}, \xi^{max}]$ la (6) avrà le soluzioni

$$\eta^{(1)} = 1 - \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{U(\xi^{min}) - U(\xi)}, \quad \eta^{(2)} = 1 + \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{U(\xi^{min}) - U(\xi)}. \quad (8)$$

Riscrivendo la (6) si nota subito che la traiettoria nel piano $\xi\eta$ è un' ellisse con equazione

$$\frac{(\xi - 1)^2}{(1 - \xi^{min})^2} + \frac{(\eta - 1)^2}{\left[\sqrt{\frac{c}{a}}(1 - \xi^{min})\right]^2} = 1$$

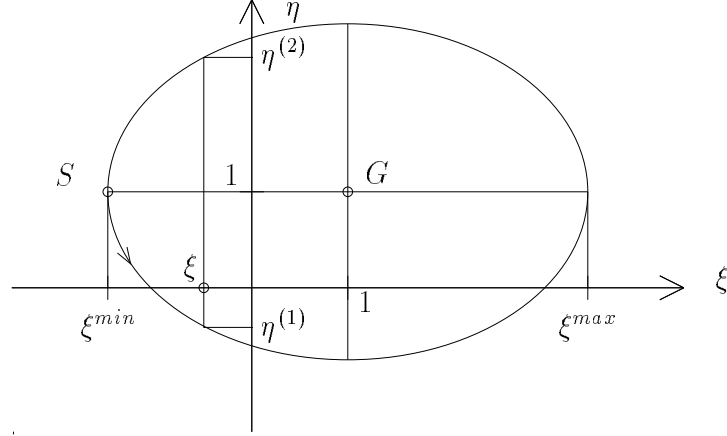


fig. 2: la traiettoria

che rappresentiamo in figura 2.

Per il *ricupero del tempo* ci serviamo della prima equazione (3): $\dot{\xi} = a(1 - \eta)$. In un primo tempo vi inseriamo $\eta = \eta^{(1)}$ lasciando aumentare ξ da ξ^{min} a ξ^{max}

$$\frac{d\xi}{dt} = a(1 - \eta^{(1)}) = \sqrt{ac}\sqrt{U(\xi^{min}) - U(\xi)}$$

per cui avremo

$$\begin{aligned} t = t^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{ac}} \int_{\xi^{min}}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{U(\xi^{min}) - U(u)}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{ac}} \arccos \frac{1-\xi}{1-\xi^{min}}, \end{aligned} \quad (9)$$

risultato facilmente controllabile tramite (4).

Lasciando poi diminuire gradualmente ξ da ξ^{max} a ξ^{min} si ha

$$\frac{d\xi}{dt} = a(1 - \eta^{(2)}) = -\sqrt{ac}\sqrt{U(\xi^{min}) - U(\xi)}$$

e perciò

$$\begin{aligned} t = t^{(2)}(\xi) &= \frac{\pi}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} \int_{\xi}^{\xi^{max}} \frac{1}{\sqrt{U(\xi^{min}) - U(u)}} du \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} - \frac{1}{\sqrt{ac}} \arccos \frac{1-\xi}{1-\xi^{min}}. \end{aligned} \quad (9i)$$

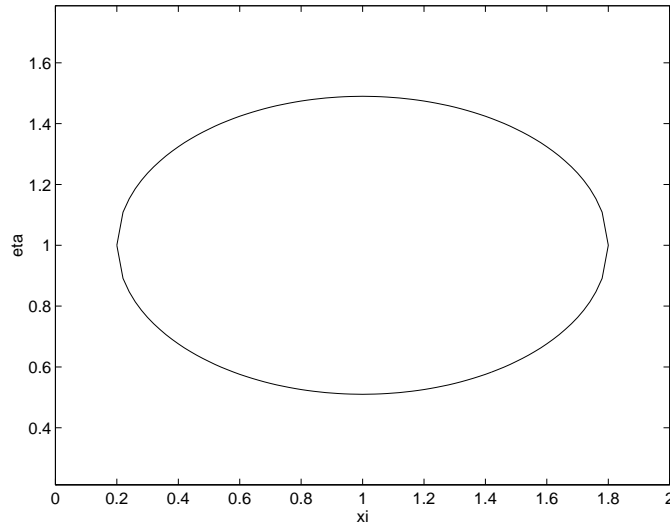


fig. 3: la traiettoria

Si tratta dunque di un moto periodico di *periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}. \quad (9ii)$$

Esempio:

$$\tilde{a} := 4, \tilde{b} := 2, \tilde{c} := 3, \tilde{d} := 3$$

$$\implies a = 4, c = \frac{3}{2}$$

$$\xi^{min} := 0.2$$

Risalendo alle *popolazioni originali* si giunge infine alla figura 5.

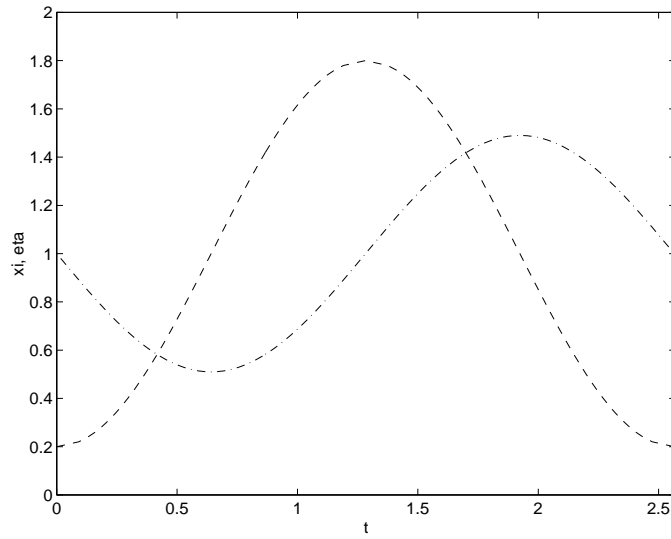


fig. 4: il ricupero del tempo

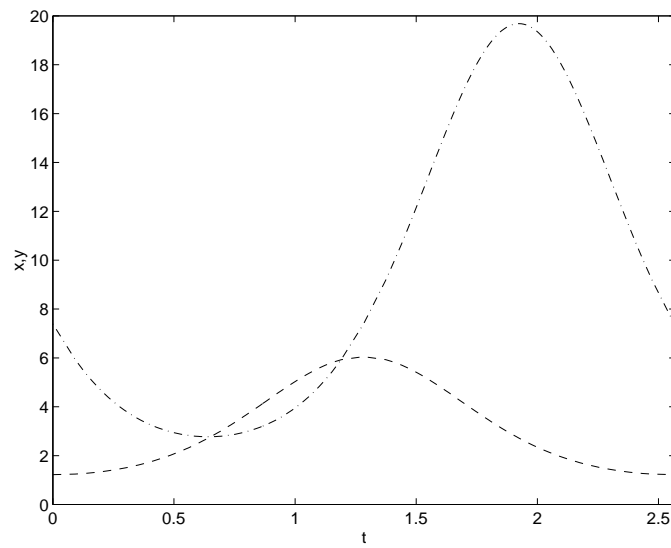


fig. 5:

B

Quale possibile *generalizzazione* del problema preda-predatore si offrono le equazioni

$$\dot{x} = x [\tilde{a} - \tilde{b}h(y)] , \quad \dot{y} = y [-\tilde{c} + \tilde{d}k(x)] .$$

In parte A di questa *trilogia* avevamo posto $h(y) = \ln y$, $k(x) = \ln x$.

Ora *trattiamo in modo analogo* il caso $h(y) = \ln y$, $k(x) = x$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\tilde{a} - \tilde{b} \ln y) \\ \dot{y} &= y(-\tilde{c} + \tilde{d}x) \end{aligned} \quad , \quad \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} > 0 \quad (1)$$

Queste equazioni mediante una *trasformazione di variabili*

$$x = \lambda \xi , \quad y = e^{\mu \eta} \quad (2)$$

dopo scelta di

$$\lambda = \frac{\tilde{c}}{\tilde{d}} , \quad \mu = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \quad (2i)$$

e posto

$$a := \tilde{a}, \quad c := \frac{\tilde{c}\tilde{b}}{\tilde{a}} \quad (2ii)$$

sono ricondotte a *forma normale*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi(1 - \eta) \\ \dot{\eta} &= c(-1 + \xi) \end{aligned} \quad (3)$$

nella quale i coefficienti di crescita e di decrescita per ambedue le popolazioni si uguagliano. Essa si rivela essere idonea a portare alla luce certe *simmetrie* della traiettoria.

Eliminando il tempo dalle (3) per divisione di $\dot{\eta}$ per $\dot{\xi}$ ed avendo posto

$$U(\xi) := \xi e^{-\xi} \quad (4)$$

troviamo dopo integrazione l'equazione

$$\eta^2 - 2\eta - 2\frac{c}{a} \ln U(\xi) + \frac{2}{a}K = 0 \quad (5)$$

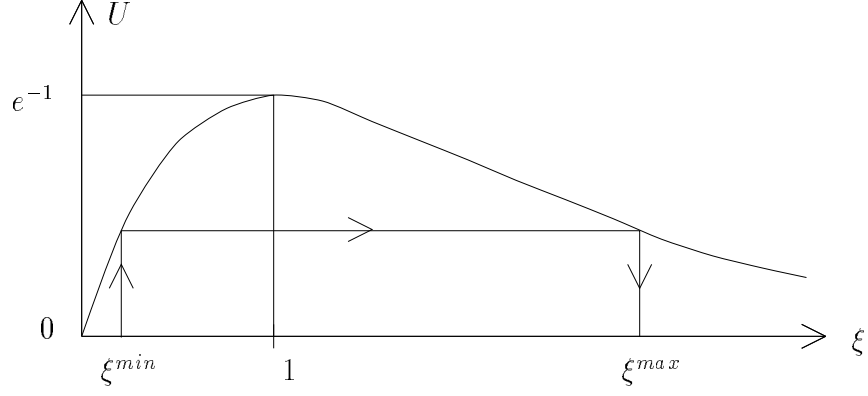


fig. 6:

con costante di moto corrispondente ai valori iniziali $S = (\xi^{min}, 1)$ con $0 < \xi^{min} < 1$ arbitrario

$$K = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{2c}{a} \ln U(\xi^{min}) \right]. \quad (5i)$$

Calcolato il discriminante della (5) quale

$$D = \frac{8c}{a} \ln \frac{U(\xi)}{U(\xi^{min})} \quad (5ii)$$

la condizione di solubilità della nostra equazione può essere scritta come

$$D \geq 0 \iff U(\xi^{min}) \leq U(\xi) \quad (6)$$

che ci determina l'intervallo $[\xi^{min}, \xi^{max}]$ come da figura 6. Per ogni ξ su di esso la (5) possiede le soluzioni

$$\eta^{(1)} = 1 - \sqrt{\frac{2c}{a}} \sqrt{\ln \frac{U(\xi)}{U(\xi^{min})}}, \quad \eta^{(2)} = 1 + \sqrt{\frac{2c}{a}} \sqrt{\ln \frac{U(\xi)}{U(\xi^{min})}}. \quad (7)$$

Solvendo la 5 anche per $U(\xi)$ si ottiene

$$U(\xi) = U(\xi^{min}) e^{\frac{a}{2c}(\eta-1)^2}, \quad (8)$$

nella quale tenendo presente che $(1, \eta^{min})$ è sulla traiettoria, si può esprimere $U(\xi^{min})$ per η^{min} :

$$U(\xi^{min}) = e^{-1 - \frac{a}{2c}(\eta^{min}-1)^2}. \quad (8i)$$

Riinserendo in (8) si giunge così a

$$U(\xi) = e^{-[1 + \frac{a}{2c}(\eta^{min}-1)^2 - \frac{a}{2c}(\eta-1)^2]}. \quad (8ii)$$

Alla luce di questa relazione si vede come ad ogni punto (ξ, η) della traiettoria d'una parte della retta $\xi = 1$ si possa farne corrispondere uno dall'altra: non vi è più simmetria assiale come per rispetto alla retta $\eta = 1$, bensì un *nuovo tipo di simmetria*, che chiameremo “*simmetria Volterriana*”:

Esempio:

$$\tilde{a} := 4, \tilde{b} := 2, \tilde{c} := 3, \tilde{d} := 3$$

$$\implies a = 4, c = \frac{3}{2}$$

$$\xi^{min} := 0.2$$

La fluttuazione delle *popolazioni originali* è raffigurata poi in figura 10.

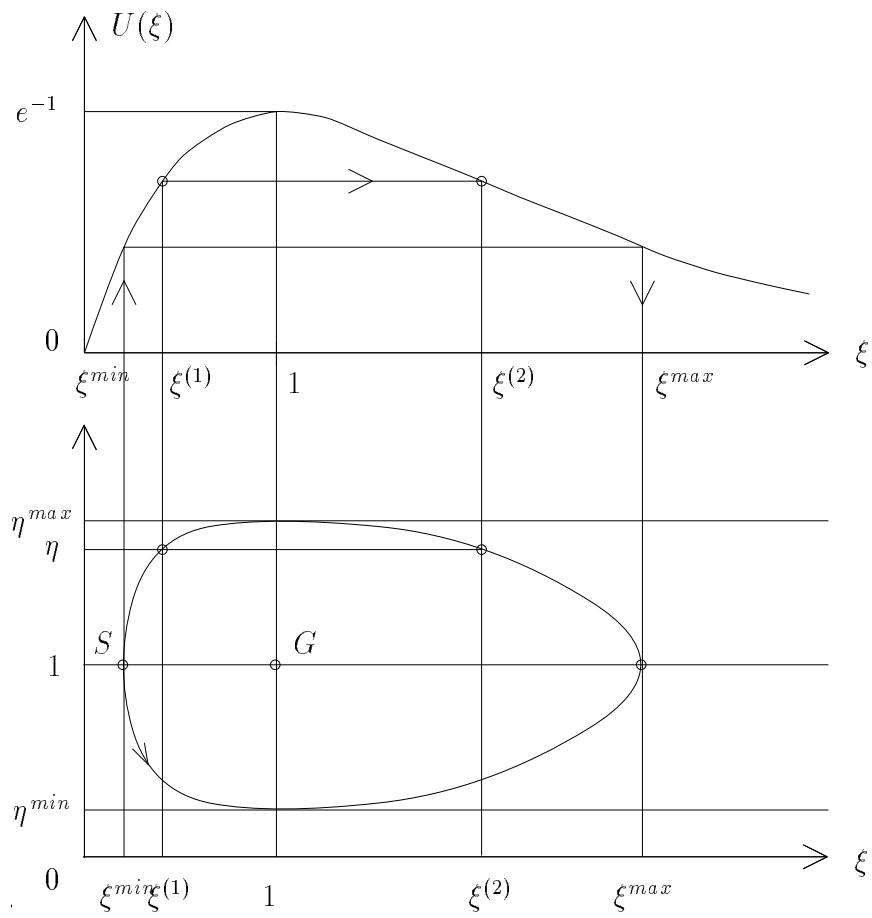


fig. 7: "Simmetria Volterriana"

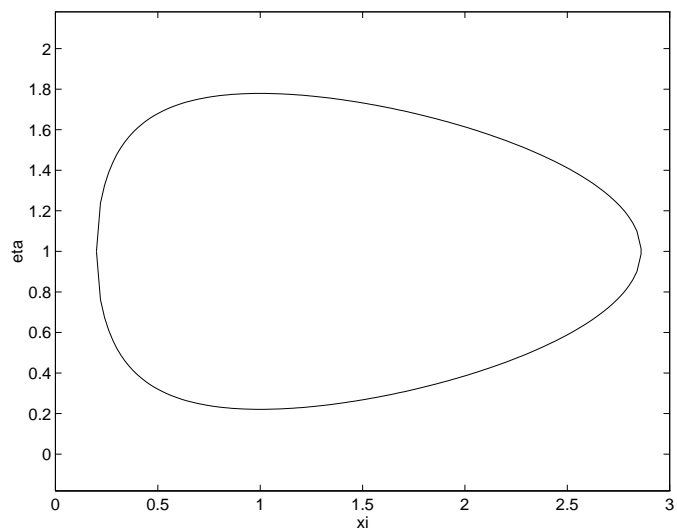


fig. 8: la traiettoria

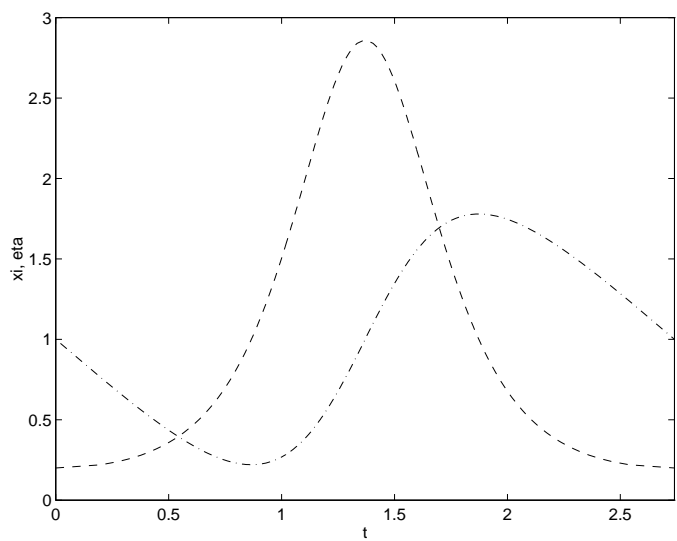


fig. 9: il ricupero del tempo

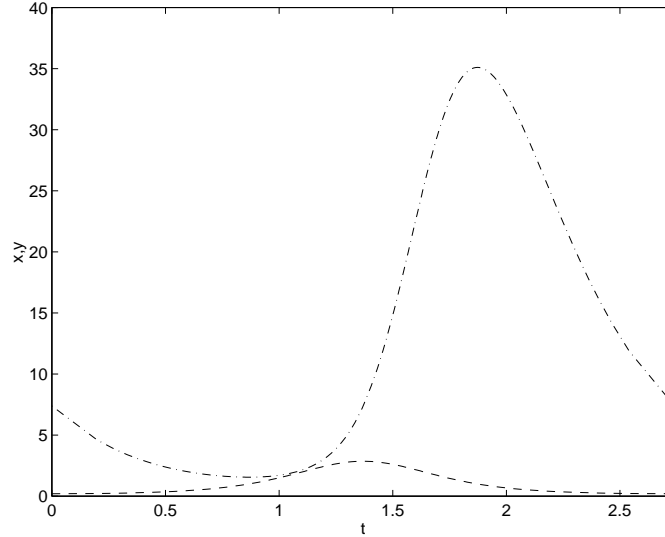


fig. 10:

C

Anche nel caso delle *classiche equazioni preda-predatore*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned} \quad a, b, c, d > 0 \quad (1)$$

il nostro modo di procedere resterà immutato: le mettiamo sotto *forma normale* mediante la *trasformazione di variabili*

$$x = \frac{c}{d}\xi, \quad y = \frac{a}{b}\eta \quad (2)$$

che porta subito a

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi(1 - \eta) \\ \dot{\eta} &= c\eta(-1 + \xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Eliminato il tempo

$$\left(\xi e^{-\xi}\right)^c \left(\eta e^{-\eta}\right)^a = K \quad (4)$$

determiniamo questa *costante di moto* sulla traiettoria nel piano $\xi\eta$ che inizia nel punto $S = (\xi^{min}, 1)$ con $0 < \xi^{min} < 1$ arbitrario quale

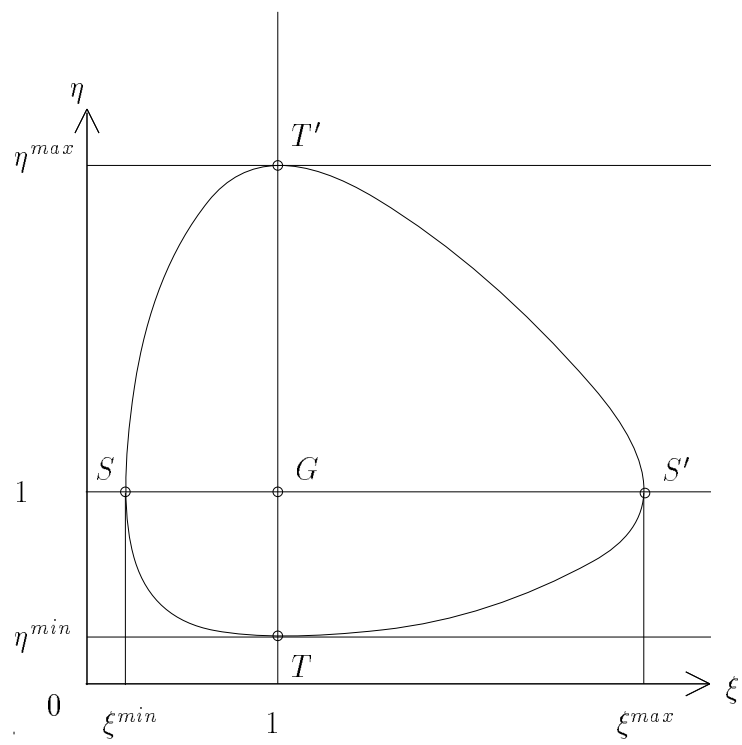


fig. 11:

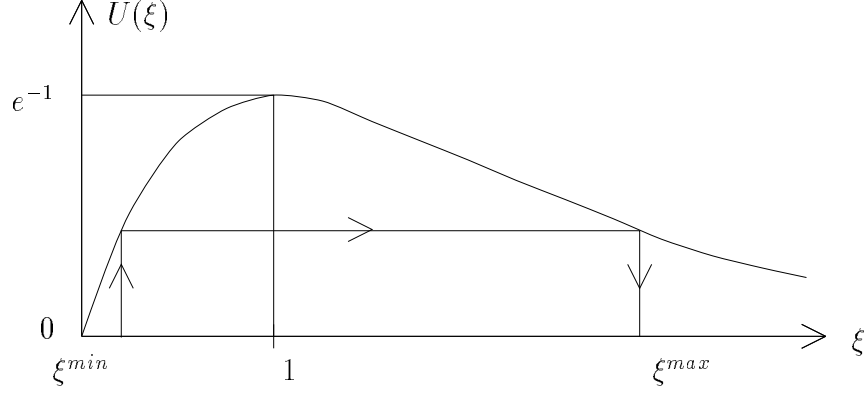


fig. 12:

$$K = (\xi^{min})^c e^{-c\xi^{min}} e^{-a}. \quad (4i)$$

Essa resta immutata se si inserisce in (4) le coordinate di $S' = (\xi^{max}, 1)$ invece di quelle die S (vedi figura 11) e quindi si ha

$$\xi^{max} e^{-\xi^{max}} = \xi^{min} e^{-\xi^{min}},$$

ossia posto

$$U(\xi) := \xi e^{-\xi} \quad (5)$$

$$U(\xi^{max}) = U(\xi^{min}). \quad (4ii)$$

Questa relazione ci serve a determinare ξ^{max} , come da figura 12.

Riscrivamo la (4) tenendo conto di (4i) e di (5)

$$U^c(\xi) U^a(\eta) = U^c(\xi^{min}) e^{-a}. \quad (6)$$

Solvendo per $U(\eta)$ troviamo

$$U(\eta) = \left[\frac{U(\xi^{min})}{U(\xi)} \right]^{\frac{c}{a}} e^{-1} \quad (6i)$$

e per ogni ξ che soddisfa la condizione di solubilità

$$U(\xi) \geq U(\xi^{min}) \iff \xi \in [\xi^{min}, \xi^{max}]$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$U(x)$	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595
x	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$U(x)$	0.3659	0.3679	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230
x	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
$U(x)$	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177

tav. 1: La funzione $U(x)$ tabulata

avremo due valori $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ che soddisfano la relazione (6i). In i special modo per $\xi = 1$ si ottengono i valori η^{min} e η^{max} .

Analogamente scrivendo in (4) la costante di moto nella forma $K = U^c(1)U^a(\eta^{min})$ ottenuta per $T = (1, \eta^{min})$ si ha

$$U^c(\xi)U^a(\eta) = e^{-c}U^a(\eta^{min})$$

che solta per $U(\xi)$ si presenta come

$$U(\xi) = \left[\frac{U(\eta^{min})}{U(\eta)} \right]^{\frac{a}{c}} e^{-1}. \quad (6ii)$$

Il passaggio da $\xi^{min} \leftrightarrow \eta^{min}$ essendo regolato da $K = U^c(\xi^{min})e^{-a} = e^{-c}U^a(\eta^{min})$, la traiettoria ottenuta sia da (6i) o anche da (6ii) presenta nel piano $\xi\eta$ una *dupla simmetria Volterriana*, sia per rispetto all'asse $\eta = 1$ che anche rispetto alla retta $\xi = 1$. Si può asserire che *tutta la traiettoria è completamente determinata ad es. dall' arco \overline{ST} !* Vedi figura 13.

La funzione $U(x) = xe^{-x}$ è tabulata in tavola 1. Altresì tabuliamo anche i valori delle "funzioni Volterriane" $V^{(1)}(x)$, $V^{(2)}(x)$ che non sono altro che le soluzioni dell'equazione trascendentale $Ve^{-V} = x$ per valori di x compresi fra 0 e e^{-1} , come da figura 14 e da tavola 2.

I calcoli da effettuare:

- Scegliamo $0 < \xi^{min} < 1$.
- Determiniamo

$$\xi^{max} = V^{(2)} [U(\xi^{min})].$$

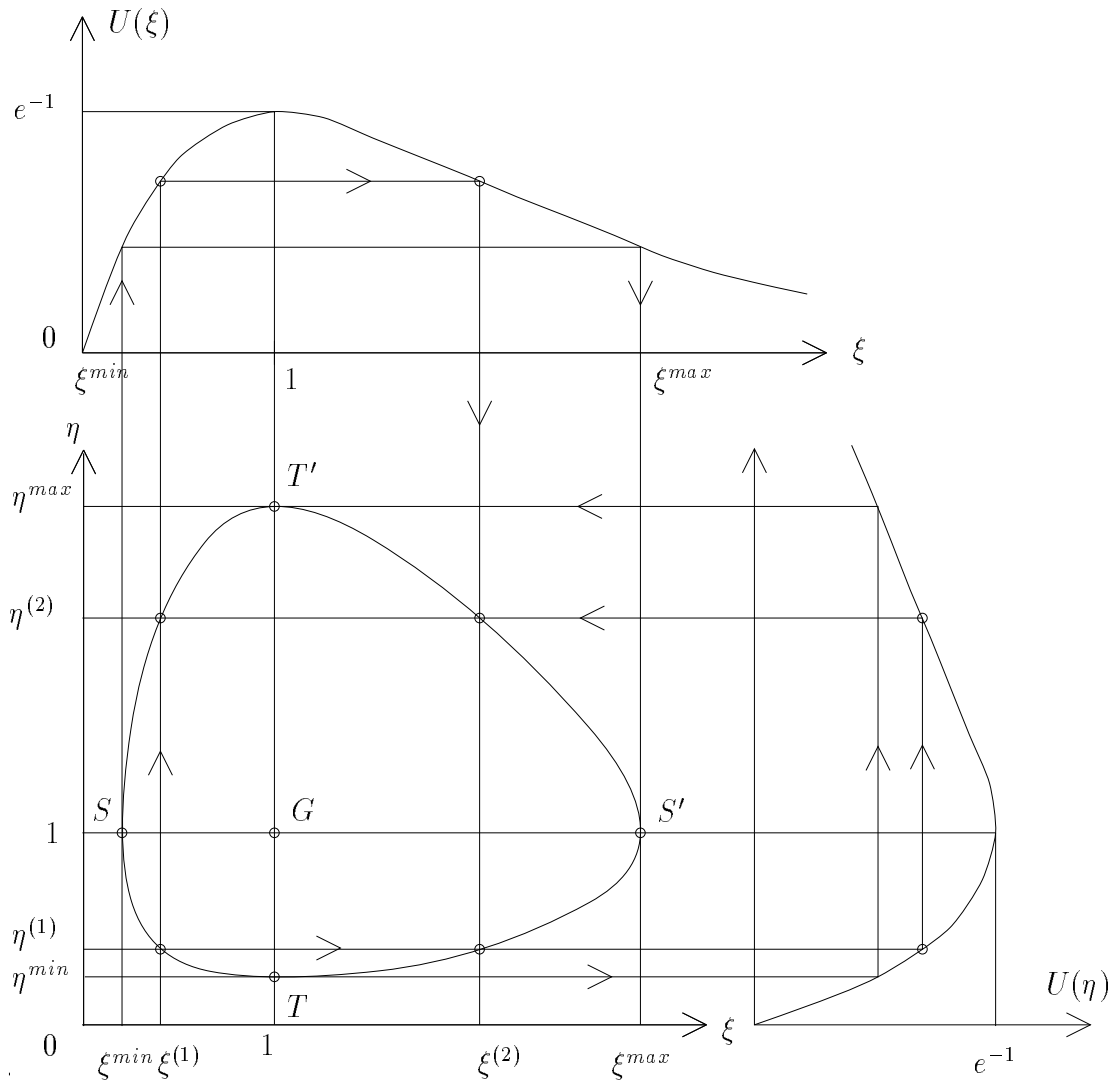


fig. 13: Dupla simmetria Volterriana

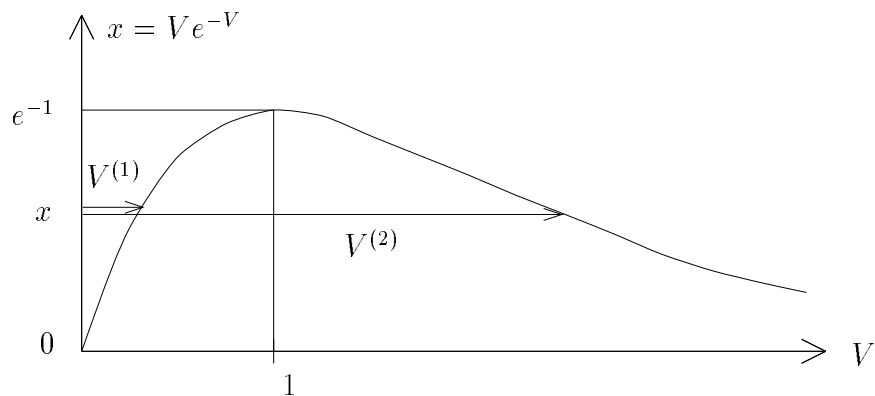


fig. 14:

x	$V^{(1)}$	$V^{(2)}$	x	$V^{(1)}$	$V^{(2)}$
0.05	0.0527	4.4998	0.22	0.2957	2.3821
0.06	0.0640	4.2635	0.23	0.3152	2.3046
0.07	0.0755	4.0606	0.24	0.3358	2.2284
0.08	0.0873	3.8821	0.25	0.3574	2.1533
0.09	0.0994	3.7223	0.26	0.3803	2.0789
0.10	0.1118	3.5772	0.27	0.4047	2.0050
0.11	0.1246	3.4439	0.28	0.4308	1.9310
0.12	0.1377	3.3203	0.29	0.4589	1.8566
0.13	0.1512	3.2049	0.30	0.4894	1.7813
0.14	0.1651	3.0963	0.31	0.5230	1.7044
0.15	0.1795	2.9936	0.32	0.5605	1.6248
0.16	0.1943	2.8959	0.33	0.6033	1.5413
0.17	0.2097	2.8025	0.34	0.6537	1.4512
0.18	0.2255	2.7128	0.35	0.7166	1.3497
0.19	0.2420	2.6263	0.36	0.8061	1.2228
0.20	0.2592	2.5426	$e^{-1} = 0.3679$	1.000	1.000
0.21	0.2770	2.4613			

tav. 2: Le funzioni $V^{(1)}(x)$ e $V^{(2)}(x)$ tabulate

- Per ogni $\xi \in [\xi^{min}, \xi^{max}]$ partendo dall' equazione (6i)

$$U(\eta) = \left[\frac{U(\xi^{min})}{U(\xi)} \right]^{\frac{c}{a}} e^{-1}$$

si calcoli $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ prendendo la parte destra quale argomento di $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$.

- Il recupero del tempo si farà mediante l'equazione (3)

$$\dot{\xi} = a\xi(1 - \eta)$$

e con ciò anche la *cinetica del moto* ci sarà data.

- Mediante le trasformazioni iniziali si ritorna poi allo *spazio originale* xy .

Esempio:

$$a := 4, \quad b := 2, \quad c = 3, \quad d := 3$$

$$\xi^{min} := 0.2$$

Concludiamo indicando nelle figure 17 e 18 per le *popolazioni originali* sia la traiettoria nel piano di fase che il loro fluttuare nel tempo:

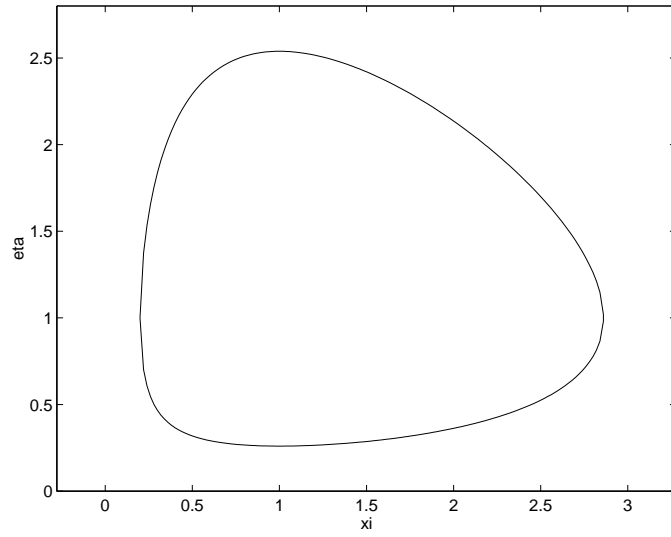


fig. 15: la traiettoria

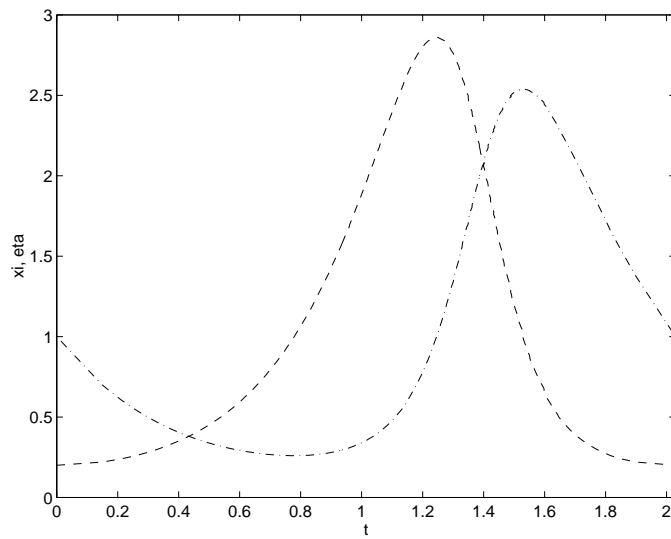


fig. 16: il recupero del tempo

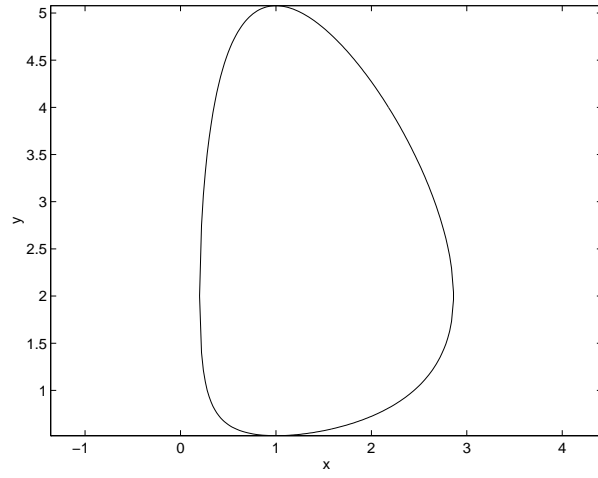


fig. 17:

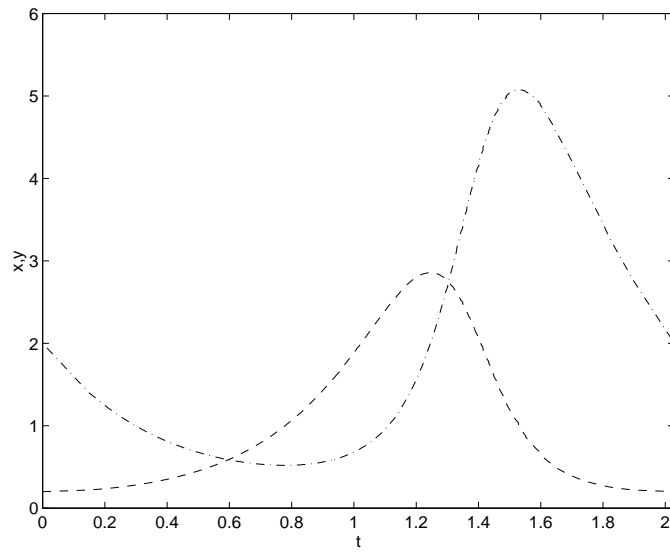


fig. 18:

Aggiunta

L'equazione trascendentale

$$V(x)e^{-V(x)} = x, \quad 0 \leq x \leq e^{-1} \quad (1)$$

dopo la sostituzione

$$x = -\zeta$$

si riscrive come

$$V(-\zeta)e^{-V(-\zeta)} = -\zeta, \quad -e^{-1} \leq \zeta \leq 0,$$

ossia posto

$$V(-\zeta) = -W(\zeta)$$

come $-W(\zeta)e^{W(\zeta)} = -\zeta$ vale a dire

$$W(\zeta)e^{W(\zeta)} = \zeta, \quad -e^{-1} \leq \zeta \leq 0.$$

In Maple l'equazione trascendentale

$$W(z)e^{W(z)} = z, \quad z \in C$$

è stata trattata a fondo. Si possono collocare i valori della cosiddetta “funzione omega” $W(z)$ una superficie di Riemann con infiniti fogli. Un solo ramo denotato d'ora innanzi come in Maple semplicemente con $W(z)$ è analitico in $z = 0$, mentre gli altri $W(k, z)$, k numero intero qualsiasi: $\dots, W(-1, z), W(0, z), W(1, z), \dots$ non lo sono. I rami $W(z)$ e $W(k, z)$ hanno in comune il punto di diramazione $z = -\frac{1}{e}$, il taglio che li separava sull'asse reale da $-\infty$ a $-\frac{1}{e}$ ed i suoi bordi sono connessi in modo univoco sui punti di una superficie di Riemann con infiniti fogli tenendo conto della “regola di continuità senso antiorario”. Tutti i rami $W(k, z)$ sono separati inoltre dal taglio che sull'asse reale va da 0 a ∞ ed i loro bordi siano connessi in modo analogo. Siccome la funzione omega sull'intervallo $(-\frac{1}{e}, 0)$ dell'asse reale assume valori reali sia $W(\zeta)$ che $W(k, \zeta)$, questi ultimi tutti identici fra di loro, basta considerare

$$W(z) \text{ e } W(0, z)$$

e sviluppare queste funzioni analitiche in serie di potenze attorno ai centri $z = 0$ e $z = -\frac{1}{2e}$. I raggi di convergenza sono $\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{2e}$, come rappresentato nella

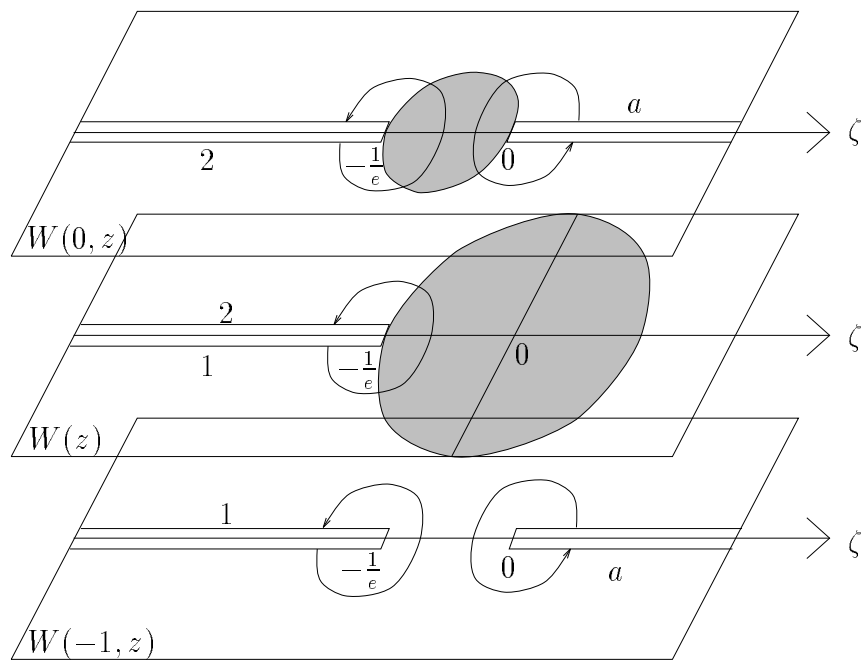


fig. 19:

figura 19. I valori $W(\zeta)$ e $W(0, \zeta)$ di queste serie ci forniscono quelli delle due soluzioni dell'equazione trascendentale $V e^{-V} = x$ che ci interessano:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= -W(-\zeta) \\ V^{(2)}(x) &= -W(0, -\zeta) \end{aligned}, \quad 0 < x < \frac{1}{e}, \quad \zeta = -x, \quad -\frac{1}{e} < \zeta < 0. \quad (2)$$