

Parametrische Lösungen der Räuber-Beute-Gleichungen im Vergleich

Antonio Steiner und Martin J. Gander

Zusammenfassung

Die Lösungen von Räuber-Beute-Systemen sind geschlossene Zyklen. Wenn man aber klassische numerische Verfahren zur Lösung von solchen Systemen verwendet, erhält man qualitativ falsche spiralförmige Lösungen. Wir stellen drei Lösungsverfahren vor, welche die Trajektorien exakt wiederzugeben vermögen und somit nur Fehler in der Zeitrückgewinnung enthalten.

Abstract

Solutions of prey-predator-systems are closed orbits. Applying a classical numerical method to compute the solution however, one obtains spiraling solutions which are either converging to the steady state or diverging to infinity. We propose three numerical methods which reproduce the closed orbits exactly and thus contain numerical error only in the time component of the solution.

Einleitung

Wir schicken voraus, dass die klassischen Räuber-Beute Gleichungen von Volterra [1]

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= a\tilde{x} - b\tilde{x}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= -c\tilde{y} + d\tilde{x}\tilde{y}\end{aligned}$$

durch die einfache Variablentransformation

$$\tilde{x} = \frac{1}{d}x, \quad \tilde{y} = \frac{1}{b}y$$

in

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - xy \\ \dot{y} &= -cy + xy\end{aligned}\tag{1.1}$$

übergehen.

Aus diesem System wird zunächst durch Division der beiden Gleichungen durcheinander die Zeit eliminiert

$$\left(\frac{a}{y} - 1\right)dy = \left(-\frac{c}{x} + 1\right)dx,$$

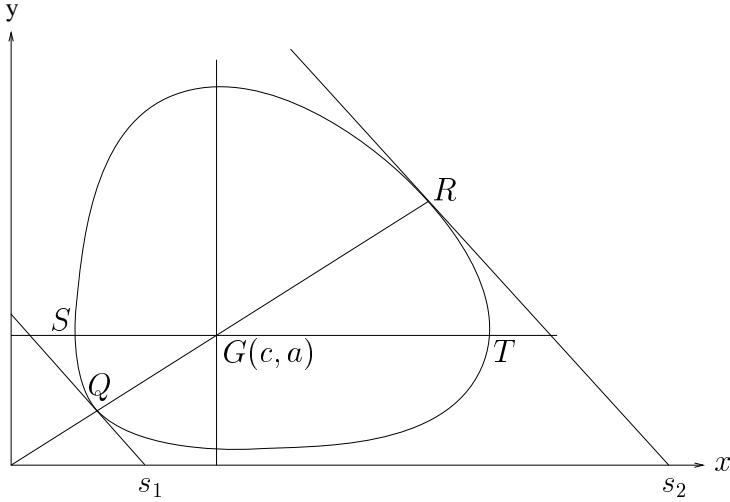


Abbildung 1: Trajektorie durch Q

was nach Integration zur Beziehung

$$x^{\frac{c}{a}}ye^{-\frac{1}{a}(x+y)} = K \quad (1.2)$$

führt. Sie ist Ausgangsgleichung zur Bestimmung der Trajektorien rund um den Gleichgewichtspunkt $G(c, a)$ im ersten Quadranten, wobei die Integrationskonstante K jeweils durch Vorgabe eines Punktes der Trajektorie festgelegt wird.

Wir geben drei Lösungsvarianten an und wägen am Schluss ihre Vorteile gegeneinander ab.

1 Erste Variante

Zu bestimmen sei die Trajektorie durch den Punkt

$$Q(0 < x_0 < c, y_0 = \frac{a}{c}x_0). \quad (1.3)$$

Beachte, dass nach (1.1)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_Q = \frac{y_0(-c + x_0)}{x_0(a - y_0)} = -1 :$$

Zu ihrer Darstellung wählen wir als Parameter

$$s = x + y. \quad (1.4)$$

Aus (1.2) ergeben sich

$$K = \frac{a}{c}x_0^{\frac{c}{a}+1}e^{-\frac{1}{a}\frac{a+c}{c}x_0} \quad (1.5)$$

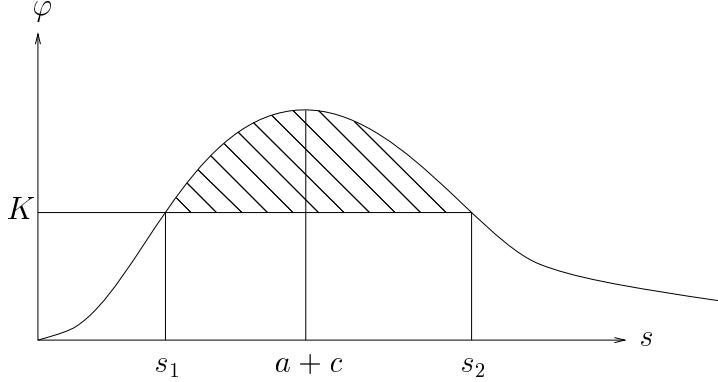


Abbildung 2: $[s_1, s_2]$

und die *Hauptgleichung*

$$f(x, s) := x^{\frac{c}{a}}(s - x)e^{-\frac{s}{a}} = K, \quad (1.6)$$

die nach x aufzulösen ist.

1.1 Variabilitätsintervall des Parameters s

Die Funktion $f(x, s)$ ist bei festem $s > 0$ für $x \leq s$ nichtnegativ und nimmt für

$$x = \frac{c}{a+c}s$$

ihr Maximum an

$$\varphi(s) := f_{\max} = f\left(\frac{c}{a+c}s, s\right) = \frac{a}{a+c} \left(\frac{c}{a+c}\right)^{\frac{c}{a}} s^{\frac{c}{a}+1} e^{-\frac{s}{a}}, \quad (1.7)$$

sodass sich als *Lösbarkeitsbedingung* für die Hauptgleichung (1.6)

$$K \leq \varphi(s) \quad (1.8)$$

ergibt, wobei für

$$s = s_1 := s_Q = \frac{a+c}{c}x_0 \quad (1.9)$$

nach (1.5) und (1.7)

$$K = \varphi(s_1) \quad (1.10)$$

gilt. Dies ist auch noch für $s = s_2 = s_R$ der Fall, ein Wert, der sich gemäß Abbildung 2 ergibt. Damit ist schon einmal das Variabilitätsintervall des Parameters s abgesteckt.

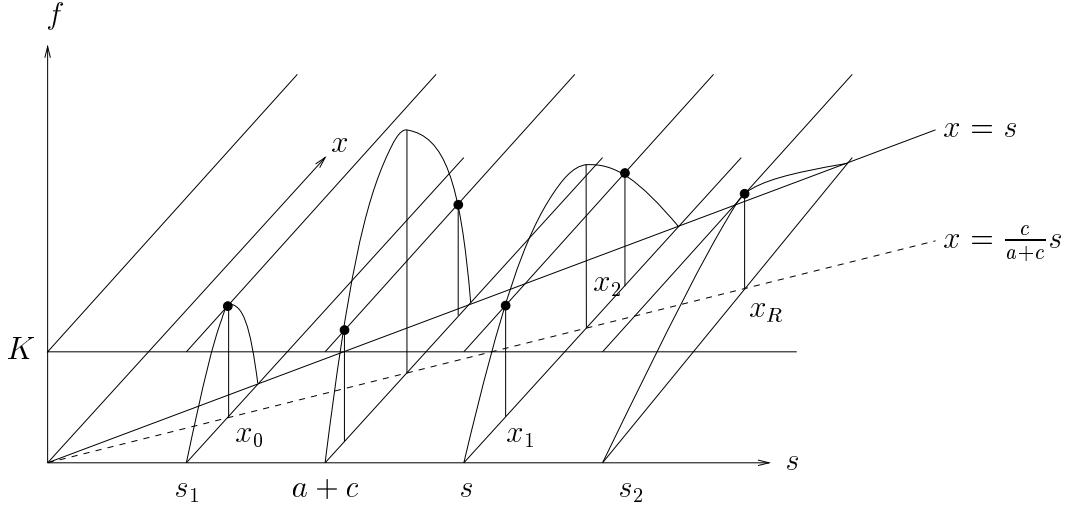


Abbildung 3: $x = x_i(s)$

1.2 Lösung der Hauptgleichung

Zur Bestimmung der beiden Werte $x = x_i(s)$, die zu einem Parameterwert s in $[s_1, s_2]$ gehören, ist im sxf -Raum die Fläche $f = f(x, s)$ mit der Ebene $f = K$ zu schneiden, wie in Abbildung 3 skizziert. Damit und mit $y = y_i(s) = s - x_i(s)$ ist dann die *Trajektorie durch Q* gegeben.

Rechnerisch bediene man sich zur Auflösung der transzendenten Gleichung (1.6) des Newtonschen Verfahrens.

1.3 Ein Spezialfall

Der Spezialfall $c = a$ ist durch erhebliche Vereinfachungen gekennzeichnet. Die Trajektorie um den Gleichgewichtspunkt $G(a, a)$ durch den Punkt

$$Q(0 < x_0 < a, y_0 = x_0) \quad (1.11)$$

verläuft symmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$, wie in Abbildung 4 dargestellt. Die Integrationskonstante K in (1.5) nimmt den Wert

$$K = x_0^2 e^{-\frac{2}{a}x_0} \quad (1.12)$$

an und die Hauptgleichung

$$f(x, s) = x(s - x)e^{-\frac{s}{a}} = K \iff x^2 - sx + Ke^{\frac{s}{a}} = 0 \quad (1.13)$$

ist eine *quadratische Gleichung* mit Diskriminante

$$D = s^2 - 4Ke^{\frac{s}{a}}. \quad (1.14)$$

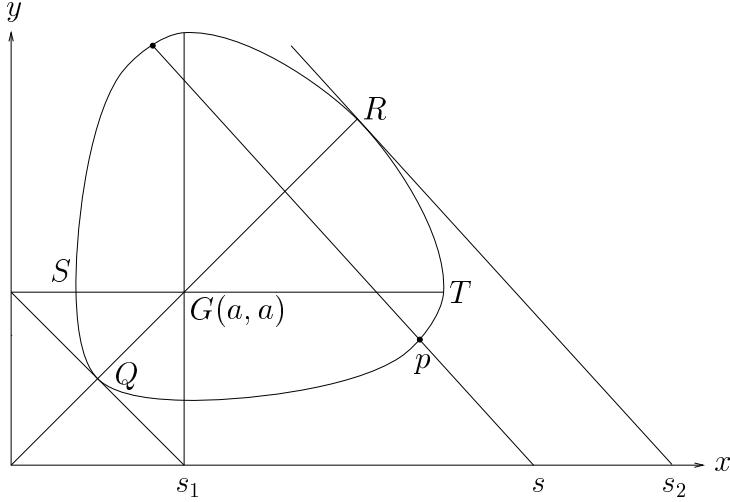


Abbildung 4: Trajektorie bei $c = a$

Mit

$$\varphi(s) = f_{\max} = f\left(\frac{s}{2}, s\right) = \frac{s^2}{4} e^{-\frac{s}{a}} \quad (1.15)$$

hat man als *Lösbarkeitsbedingung*

$$K \leq \varphi(s) \iff D \geq 0. \quad (1.16)$$

Man bestätigt zunächst ihr Erfülltsein für

$$s_1 := s_Q = 2x_0 \leq s \leq s_2 = s_R, \quad (1.17)$$

wobei sich s_2 wie in Abbildung 2 ergibt. *Geometrisch* wird dann wieder im sxf -Raum die Fläche $f = f(x, s)$ mit der Ebene $f = K$ geschnitten. *Rechnerisch* ist hier einfach die *quadratische* Gleichung (1.13) nach x aufzulösen, was zur *expliziten* parametrischen Darstellung der Trajektorie führt:

$$x_i = \frac{s}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 4Ke^{\frac{s}{a}}}, \quad y_i = s - x_i = \frac{s}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 4Ke^{\frac{s}{a}}}, \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (1.18)$$

Weitere Spezialfälle mit *expliziter* parametrischer Darstellung der Trajektorien findet man für $a = 2c$ und $a = \frac{c}{2}$, wo eine kubische Gleichung zu lösen ist und für $a = 3c$ und $a = \frac{c}{3}$, wo eine Gleichung vierten Grades zu lösen ist. In der Tat kann diese parametrische Darstellung der Trajektorien für alle rationalen Verhältnisse $\frac{c}{a}$ auf die Lösung einer algebraischen Gleichung vom Grade $a + c$ zurückgeführt werden, da die Gleichung (1.6) durch die Variablentransformation $y^a = x$ in das polynomiale Problem

$$-y^{a+c} + sy^c + e^{-\frac{s}{a}} - K = 0$$

übergeht.

| s | x | $y = s - x$ | t |
|----------|-------------|------------------------|---|
| s_1 | $x_Q = x_0$ | $y_Q = \frac{a}{c}x_0$ | 0 |
| \vdots | | | |
| s | x_1 | y_1 | $\int_{s_1}^s \frac{d\sigma}{ax_1(\sigma) - cy_1(\sigma)}$ |
| \vdots | | | |
| s_2 | x_R | $y_R = \frac{a}{c}x_R$ | $\int_{s_1}^{s_2} \frac{d\sigma}{ax_1(\sigma) - cy_1(\sigma)}$ |
| \vdots | | | |
| s | $x_2 < x_1$ | y_2 | $t(s_2) + \int_{s_2}^s \frac{d\sigma}{ax_2(\sigma) - cy_2(\sigma)}$ |
| \vdots | | | |
| s_1 | x_Q | y_Q | Periode T |

Aufstellung 1: Lösung von (1.1)

1.4 Wiedergewinnung der Zeit

Man bildet nach (1.1) und (1.4)

$$\dot{s} = \dot{x} + \dot{y} = ax - cy \quad (1.19)$$

und erhält damit

$$dt = \frac{ds}{ax(s) - cy(s)}, \quad (1.20)$$

im Spezialfall $c = a$ nach (1.18) also einfach

$$dt = \frac{ds}{\pm a\sqrt{s^2 - 4Ke^{\frac{s}{a}}}}. \quad (1.21)$$

Wir verlegen den Nullpunkt der Zeitrechnung in den Punkt Q und erhalten in Ergänzung zur Trajektorie $t = t(s)$ und damit die *Lösung von (1.1)* wie in Aufstellung 1 dargestellt. Beachte, dass der Integrand in t bei s_1 und s_2 je einen integrierbaren Pol aufweist. Vergleiche hierzu auch die früheren Darstellungen [2, 3].

2 Zweite Variante

Wir wählen jetzt zur Bestimmung einer Lösung von (1.1) mit Anfangspunkt

$$S(0 \leq x_0 \leq c, y_0 = a) \quad (2.1)$$

als *Parameter die Abszisse x* . Eliminiert man wieder die Zeit und setzt

$$y = a\eta, \quad (2.2)$$

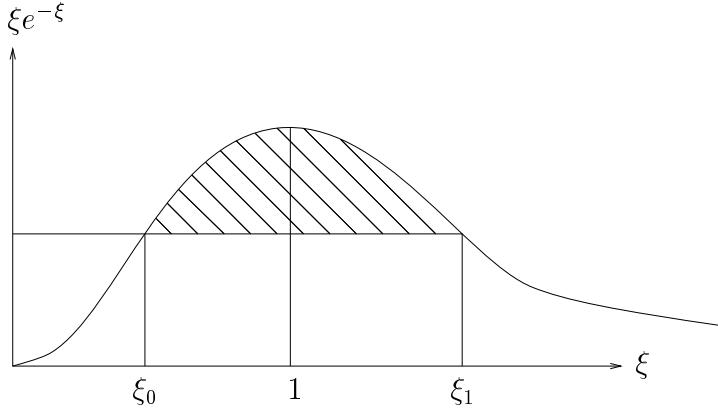


Abbildung 5: $[\xi_0, \xi_1]$

so erhält man als *Hauptgleichung*

$$f(\eta, x) := \eta e^{-\eta} x^{\frac{c}{a}} e^{-\frac{1}{a}x} = K, \quad (2.3)$$

wobei nach (2.1) die Integrationskonstante

$$K = e^{-1} x_0^{\frac{c}{a}} e^{-\frac{1}{a}x_0}. \quad (2.4)$$

Mit

$$\varphi(x) := f_{\max} = f(1, x) = e^{-1} x^{\frac{c}{a}} e^{-\frac{1}{a}x} \quad (2.5)$$

lautet die *Bedingung* für die Auflösbarkeit von (2.3) nach η

$$K \leq \varphi(x). \quad (2.6)$$

Setzt man

$$x = c\xi, \quad (2.7)$$

so vereinfacht sich dies zu

$$\xi e^{-\xi} \geq \frac{x_0}{c} e^{-\frac{x_0}{c}}, \quad (2.8)$$

was gemäss Abbildung 5 für

$$\xi_0 = \frac{x_0}{c} \leq \xi \leq \xi_1 \quad (2.9)$$

der Fall ist. *Geometrisch* ist zur Lösung der Hauptgleichung (2.3) für $x_0 \leq x \leq x_1 = c\xi_1$ im $x\eta f$ -Raum die Fläche $f = f(\eta, x)$ mit der Ebene $f = K$ zu schneiden. Dies zeigt Abbildung 6. *Rechnerisch* bedeutet das die Auflösung von

$$\eta e^{-\eta} = \frac{K}{\varphi(x)} e^{-1}, \quad (2.10)$$

was nach (2.6) möglich ist. Besonders *beachtenswert ist, dass sich alle Rechnungen*, sowohl die Bestimmung von ξ_1 nach (2.8) als auch von $y = y_i(x) = a\eta_i(x)$ nach (2.10), *einzig mit den tabellierten Lösungen 2 der transzentralen Gleichung* $xe^{-x} = k$ *bewerkstelligen lassen*, und dies für beliebige $x_0 \leq c, a, c$. Für eine Vertiefung vgl. [4] und [5].

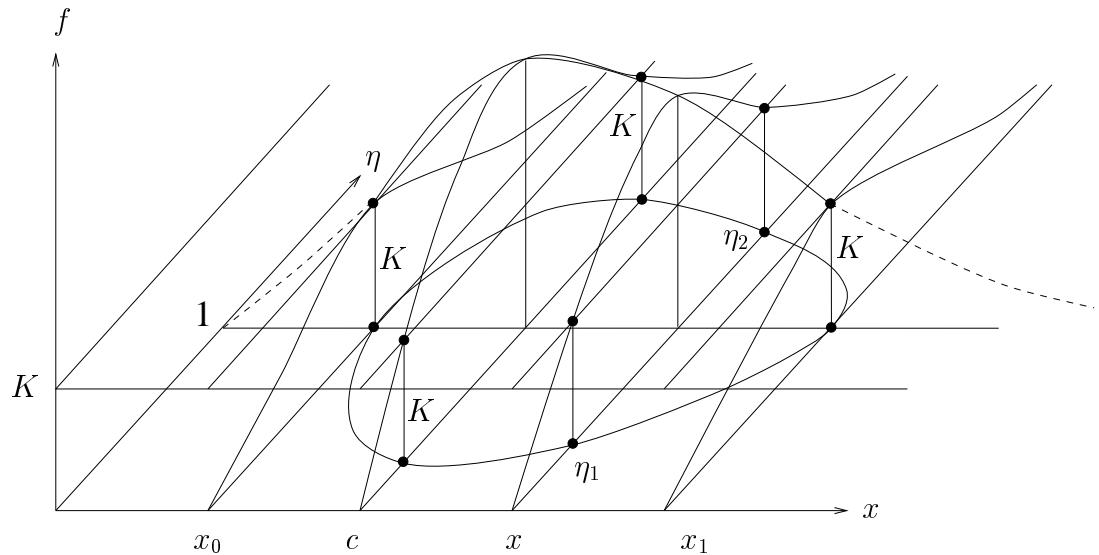


Abbildung 6: $\eta = \eta_2(x)$

| k | x_1 | x_2 |
|----------|--------|----------|
| 0 | 0 | ∞ |
| 0.05 | 0.0527 | 4.4998 |
| 0.10 | 0.1118 | 3.5772 |
| 0.15 | 0.1795 | 2.9936 |
| 0.20 | 0.2592 | 2.5426 |
| 0.25 | 0.3574 | 2.1533 |
| 0.30 | 0.4894 | 1.7813 |
| 0.35 | 0.7166 | 1.3497 |
| e^{-1} | 1 | 1 |

Aufstellung 2: Lösung von $xe^{-x} = k$

| x | y | t |
|----------|-------------|--|
| x_0 | a | 0 |
| \vdots | | |
| x | y_1 | $\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi(a-y_1(\xi))}$ |
| \vdots | | |
| x_1 | a | $\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{\xi(a-y_1(\xi))}$ |
| \vdots | | |
| x | $y_2 > y_1$ | $t(x_1) + \int_{x_1}^x \frac{d\xi}{\xi(a-y_2(\xi))}$ |
| \vdots | | |
| x_0 | a | Periode T |

Aufstellung 3: Lösung von (1.1)

2.1 Bestimmung der Zeit

Nach Bestimmung der Zeit $t = t(x)$ aus

$$\dot{x} = x[a - y(x)]$$

ergibt sich die *Lösung von (1.1)* aus Aufstellung 3.

3 Dritte Variante

Es sei noch eine dritte Methode zur Lösung der Räuber-Beute-Gleichungen (1.1) angeführt. Auch sie ist ganz *elementar*. Man wähle als Parameter die Steigung m einer Geraden durch den Gleichgewichtspunkt $G(c, a)$

$$m = \frac{y - a}{x - c} \quad (3.1)$$

gemäss Abbildung 7. Elimination der Zeit aus (1.1) und Auflösung von (3.1) nach y

$$\begin{aligned} x^{\frac{c}{a}} y &= K e^{\frac{1}{a}(x+y)} \\ y &= mx + a - mc \end{aligned} \quad (3.2)$$

bestimmen die *Trajektorie*. Sie führt durch

$$S(0 < x_0 < c, y_0 = a) \quad (3.3)$$

für

$$K = ax_0^{\frac{c}{a}} e^{-\frac{1}{a}(x_0+a)}. \quad (3.4)$$

Die *Hauptgleichung* lautet jetzt

$$f(x, m) := x^{\frac{c}{a}} (mx + a - mc) e^{-\frac{1}{a}((m+1)x+a-mc)} = K. \quad (3.5)$$

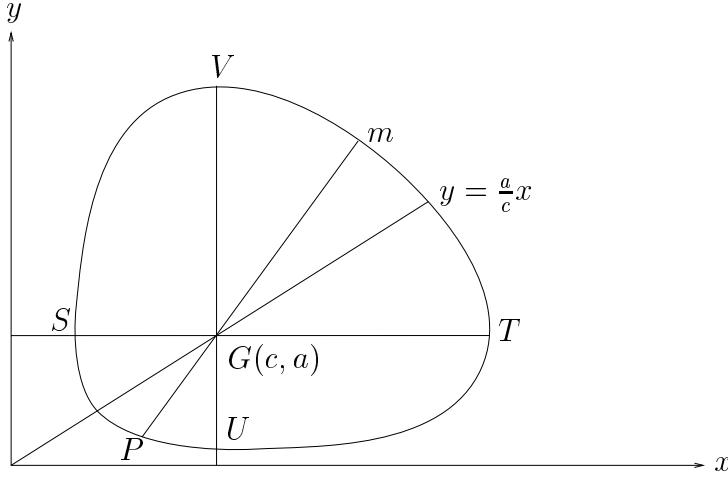


Abbildung 7: m als Parameter

Man berechnet

$$\varphi := f_{\max} = f(c, m) = ac^{\frac{c}{a}} e^{-\frac{1}{a}(a+c)} \quad (3.6)$$

und erkennt, dass mit $x_0 < c$ die Bedingung

$$K < \varphi \quad (3.7)$$

erfüllt ist, was die Lösbarkeit der transzendenten Gleichung (3.5) sichert. Im $mx f$ -Raum wird die Fläche $f = f(x, m)$ mit der Ebene $f = K$ geschnitten, wie Abbildung 8 zeigt.

3.1 Wiedergewinnung der Zeit

Zur nachträglichen Wiedergewinnung der Zeit bildet man nach (3.1) und (1.1)

$$\dot{m} = \frac{\dot{y}(x - c) - \dot{x}(y - a)}{(x - c)^2} = y + m^2 x.$$

Aus

$$dt = \frac{dm}{y(m) + m^2 x(m)} \quad (3.8)$$

erhält man $t = t(m)$ und damit die Lösung von (1.1). Der Wert $x_T > c$ ergibt sich für $m = 0$ mit $x_S = x_0 < c$ aus der Gleichung

$$f(x, 0) = K \Leftrightarrow x e^{-\frac{1}{c}x} = x_0 e^{-\frac{1}{c}x_0},$$

während $y_U < a$ und $y_V > a$ die beiden Lösungen der Gleichung

$$y e^{-\frac{1}{c}y} = c^{-\frac{c}{a}} e^{\frac{c}{a}} K = x_0^{\frac{c}{a}} e^{-\frac{x_0}{a}} c^{-\frac{c}{a}} e^{\frac{c}{a}} a e^{-1}$$

| m | x | y | t |
|-------------|-------|-------|--|
| 0 | x_0 | a | 0 |
| \vdots | | | |
| m | x_1 | y_1 | $\int_0^m \frac{d\mu}{y_1(\mu) + \mu^2 x_1(\mu)}$ |
| \vdots | | | |
| $\pm\infty$ | c | y_U | $\int_0^\infty \frac{d\mu}{y_1(\mu) + \mu^2 x_1(\mu)} =: t_U$ |
| \vdots | | | |
| m | x_1 | y_1 | $t_U + \int_{-\infty}^m \frac{d\mu}{y_1(\mu) + \mu^2 x_1(\mu)}$ |
| \vdots | | | |
| 0 | x_T | a | $t_U + \int_{-\infty}^0 \frac{d\mu}{y_1(\mu) + \mu^2 x_1(\mu)} =: t_T$ |
| \vdots | | | |
| m | x_2 | y_2 | $t_T + \int_0^m \frac{d\mu}{y_2(\mu) + \mu^2 x_2(\mu)}$ |
| \vdots | | | |
| $\pm\infty$ | c | y_V | $t_T + \int_0^\infty \frac{d\mu}{y_2(\mu) + \mu^2 x_2(\mu)} =: t_V$ |
| \vdots | | | |
| m | x_2 | y_2 | $t_V + \int_{-\infty}^m \frac{d\mu}{y_2(\mu) + \mu^2 x_2(\mu)}$ |
| \vdots | | | |
| 0 | x_0 | a | Periode T |

Aufstellung 4: Lösung von (1.1)

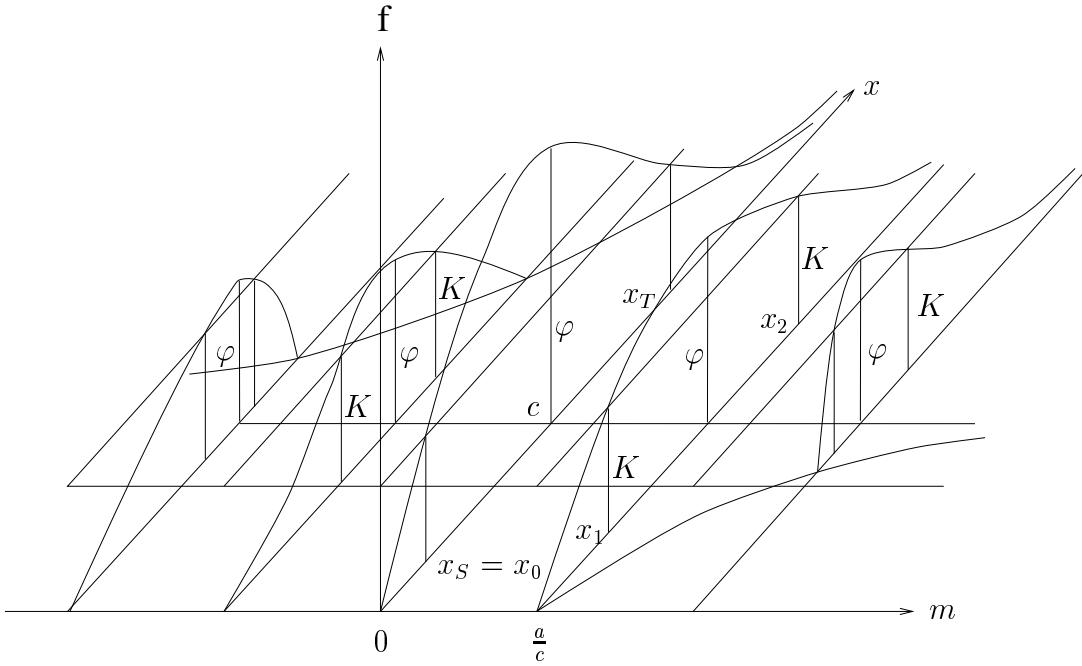


Abbildung 8: $x = x_i(m)$

sind, deren Lösbarkeitsbedingung

$$\frac{x_0}{c} e^{-\frac{x_0}{c}} < e^{-1}$$

erfüllt ist.

Beachte, dass jetzt der Integrand in t keinen Pol aufweist, um den Preis des Auftretens unendlicher Integrationsintervalle.

Bibliographie

- [1] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Cahiers Scientifiques, Paris, 1931.
- [2] A. Steiner und M. Arrigoni, *Die Lösung gewisser Räuber-Beute-Systeme*, Sudia Biophysica Vol. 123, No. 2, 1988.
- [3] M. Arrigoni, *Soluzione di certi sistemi del modello preda-predatore di Vito Volterra*, Il Volterriano Nr. 1, 1991.
- [4] F.N. Fritsch, R. E. Schafer and W. P. Crowley, *Solution of the Transcendental Equation $we^w = x$* , Communications of the ACM, volume 16, number 2, 1973.
- [5] A. Steiner und M. J. Gander, *Le soluzioni delle equazioni preda-predatore*, Il Volterriano Nr. 5, 1995.