

# Méthodes de décomposition de domaines pour l'équation des ondes en dimension 1.

Martin Gander<sup>a</sup>, Laurence Halpern<sup>b</sup>,

<sup>a</sup> Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal, Canada  
Courriel :mgander@math.mcgill.ca

<sup>b</sup> Département de Mathématiques, Université Paris XIII, 93430 Villetaneuse, et CMAP, Ecole Polytechnique,  
91128 Palaiseau, France  
Courriel :halpern@math.univ-paris13.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

---

## Résumé.

Nous introduisons une variante sans recouvrement de l'algorithme de Schwarz pour la propagation des ondes. Elle est globale en temps, ce qui permet de coupler des schémas numériques différents dans différents sous-domaines, et de minimiser le temps de communication entre les processeurs. Nous montrons comment choisir des fenêtres en temps pour obtenir des performances optimales avec des opérateurs locaux. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

***Optimal Schwarz Waveform Relaxation for the One-dimensional Wave Equation.***

## Abstract.

*We introduce a non-overlapping variant of the Schwarz algorithm for wave propagation problems with discontinuous coefficients. The method permits the use of different grids both in space and time on different subdomains or even different numerical schemes per subdomain. We show how to choose time windows to obtain optimal performance of the algorithm with local transmission conditions. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

---

## 1. Introduction

Nous proposons une approche nouvelle pour résoudre un problème d'évolution par décomposition de domaines. Nous utilisons une méthode de type Schwarz (voir [10, 4, 12, 13] pour des problèmes stationnaires, [3] pour les problèmes harmoniques). Cependant, au lieu de discréteriser d'abord l'équation en temps, nous résolvons dans chaque sous-domaine le problème d'évolution sur tout ou partie de l'intervalle de temps. Cette approche permet d'utiliser des méthodes numériques différentes et/ou des grilles différentes en temps et en espace dans différents sous-domaines. Elle permet également de minimiser le temps de communication entre processeurs. Nous mettons l'accent ici sur la propagation monodimensionnelle pour l'équation des ondes. L'algorithme optimal correspond à l'utilisation des conditions aux limites transparentes. Dans le cas d'une vitesse discontinue, nous atteignons une convergence optimale (*i.e.* en deux itérations indépendamment du nombre de sous-domaines) au moyen des opérateurs de transport suivant les caractéristiques

---

Note présentée par P.L. LIONS

S0764-4442(00)0????-?/FLA

© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

(cette démarche avait été proposée dans [13]), avec des fenêtres en temps bien ajustées. Pour le problème continu, les notions en dimension 1 sont toutes très simples, mais elles permettent de mettre en place les stratégies que nous développerons ensuite sur le schéma et en dimension 2 (pour quelques résultats sur la dimension 2 voir [7]). Les démonstrations précises peuvent être trouvées dans [6], et l'étude de la méthode numérique est présentée dans la note jointe. Pour d'autres approches des problèmes d'évolution voir [1, 5, 8, 11].

## 2. L'algorithme de Schwarz transitoire optimal

Nous considérons l'équation des ondes en dimension 1

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (1)$$

dans  $\mathbb{R} \times ]0, T[$  avec des conditions initiales  $u(x, 0)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ . Pour  $0 < \underline{c} \leq c(x) \leq \bar{c} < \infty$ , avec des conditions de régularité raisonnables sur le second membre  $f$ , il existe une unique solution faible  $u$  de (1) sur tout intervalle de temps borné [9].

### 2.1. Un algorithme général sans recouvrement

Nous décomposons le domaine  $\mathbb{R}$  en  $I$  sous-domaines  $\Omega_i = ]a_i, a_{i+1}[$ ,  $1 \leq i \leq I$ ,  $a_j < a_i$  pour  $j < i$  et  $a_1 = -\infty$ ,  $a_{I+1} = \infty$ , et nous introduisons l'algorithme général

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_i^{k+1}) &= f \text{ dans } \Omega_i \times ]0, T[ \\ \mathcal{B}_i^-(u_i^{k+1})(a_i, \cdot) &= \mathcal{B}_i^-(u_{i-1}^k)(a_i, \cdot), \mathcal{B}_i^+(u_i^{k+1})(a_{i+1}, \cdot) = \mathcal{B}_i^+(u_{i+1}^k)(a_{i+1}, \cdot) \text{ sur } ]0, T[ \\ u_i^{k+1}(\cdot, 0) &= u(\cdot, 0); \frac{\partial u_i^{k+1}}{\partial t}(\cdot, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) \text{ dans } \Omega_i, \end{aligned} \quad (2)$$

où les opérateurs  $\mathcal{B}_i^\pm$  sont des opérateurs linéaires que nous allons déterminer pour obtenir une convergence optimale. Ainsi à chaque itération un problème d'évolution en temps est résolu dans chaque sous-domaine.

### 2.2. Conditions de transmission pour une convergence optimale

Nous introduisons les opérateurs de Dirichlet to Neumann généralisés  $\mathcal{S}_1(x_0)$  sur  $]-\infty, x_0[$  et  $\mathcal{S}_2(x_0)$  sur  $]x_0, +\infty[$  de la façon suivante. L'opérateur  $\mathcal{S}_1(x_0)$  est donné par  $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, \cdot) \mapsto \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, \cdot)$ , où  $v$  est la solution de l'équation des ondes homogène  $\mathcal{L}(v) = 0$  dans  $]-\infty, x_0[ \times ]0, T[$ , avec des conditions initiales nulles. L'opérateur  $\mathcal{S}_2(x_0)$  est défini de façon symétrique.

On a alors le résultat de convergence optimale suivant :

**Théorème 2.1 (Convergence en  $I$  itérations)** *L'algorithme (2) avec des opérateurs de transmission donnés par*

$$\mathcal{B}_i^- = \mathcal{S}_1(a_i)\partial_t - \partial_x, \quad \mathcal{B}_i^+ = \mathcal{S}_2(a_{i+1})\partial_t + \partial_x, \quad (3)$$

*converge en au plus  $I$  itérations où  $I$  est le nombre de sous-domaines.*

Ce résultat de convergence est optimal pour un intervalle de temps quelconque, car alors la solution dans un sous-domaine dépend de la solution dans tous les autres sous-domaines. Puisque la communication de l'information est locale, il faut itérer  $I$  fois pour que l'information passe à travers tous les sous-domaines. La démonstration du théorème est algébrique. Elle utilise seulement le fait que les opérateurs  $\mathcal{S}_j$  sont transparents, et non les propriétés particulières de l'équation des ondes. Le résultat se généralise donc aux équations aux dérivées partielles, stationnaires ou d'évolution (voir aussi [12]).

## Décomposition de domaines et équations d'ondes

### 3. Convergence optimale avec des conditions de transmission locales pour une vitesse constante par morceaux

Dans le cas de deux domaines physiques de vitesses différentes, on peut écrire explicitement les opérateurs  $\mathcal{S}_j$  au moyen des réflexions successives sur l'interface [6]. Il est par contre plus intéressant du point de vue des applications d'utiliser des opérateurs locaux :

$$\mathcal{B}_i^- = \frac{1}{c(a_i^-)} \partial_t - \partial_x, \quad \mathcal{B}_i^+ = \frac{1}{c(a_{i+1}^+)} \partial_t + \partial_x. \quad (4)$$

Soient  $J$  domaines physiques  $O_j = ]d_j, d_{j+1}[$  avec une vitesse constante dans chacun,  $c(x) = c_j$  pour  $d_j < x < d_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $d_1 = -\infty$  et  $d_{J+1} = \infty$ . Les  $\Omega_i = ]a_i, a_{i+1}[$  sont les  $I$  sous-domaines de calcul comme précédemment. Nous notons  $n_i$  le nombre de discontinuités dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$  et nous excluons pour le moment le cas où une discontinuité coïncide avec un des  $a_i$ . Nous notons également  $m_i$  l'indice du premier sous-domaine physique  $O_{m_i}$  qui coupe le sous-domaine de calcul  $\Omega_i$ . Nous définissons le temps de transmission  $t_i^T$  d'un signal à travers le sous-domaine  $\Omega_i$  et le temps de réflexion  $t_i^R$  à chaque interface  $a_i$  des domaines de calcul. Ils sont donnés par

$$\begin{cases} t_i^T = \frac{a_{i+1} - a_i}{c_j} \text{ si } n_i = 0, \quad \frac{d_{m_i+1} - a_i}{c_{m_i}} + \sum_{k=1}^{n_i-1} \frac{d_{m_i+k+1} - d_{m_i+k}}{c_{m_i+k}} + \frac{a_{i+1} - d_{m_i+n_i}}{c_{m_i+n_i}} \text{ si } n_i > 0, \\ t_i^R = 2 \min_j \frac{a_i - d_j}{c(a_i)}. \end{cases}$$

Ces deux constantes de temps nous permettent de formuler des conditions pour la convergence en moins de  $I$  itérations.

**THÉORÈME 3.1.** – *L'algorithme (2) avec les conditions de transmission locales (4) et les discontinuités strictement à l'intérieur des sous-domaines de calcul converge en 2 itérations indépendamment du nombre de sous-domaines si l'intervalle de temps  $[0, T_o]$  est choisi tel que  $T_o < \min(\min_i t_i^T, \min_i t_i^R)$ .*

Ce résultat peut imposer des intervalles de temps très petits, puisque le temps de réflexion  $t_i^R$  peut être très court dès lors qu'une discontinuité approche une frontière d'un sous-domaine. Néanmoins ceci peut être évité en alignant les discontinuités physiques et les frontières des sous-domaines. La formule donnant le temps de transmission se simplifie nettement et devient  $t_i^T = \frac{a_{i+1} - a_i}{c(a_i^+)}$ . Nous obtenons alors le résultat :

**THÉORÈME 3.2.** – *L'algorithme (2) avec les conditions de transmission locales (4) et les discontinuités alignées avec les frontières des sous-domaines de calcul converge en 2 itérations indépendamment du nombre de sous-domaines si l'intervalle de temps  $[0, T_o]$  est choisi tel que  $T_o < \min_i \frac{a_{i+1} - a_i}{c(a_i^+)}$ .*

On peut encore économiser du temps de calcul en notant que seules les valeurs de la fonction au-dessus des caractéristiques dans chaque sous-domaine doivent être recalculées à la deuxième itération [6]. Ceci suggère d'utiliser des fenêtres en temps de taille plus petite que  $T_o$ , parce qu'alors l'algorithme converge en deux itérations, et il y a de moins en moins de valeurs à recalculer au-dessus des caractéristiques. La parallélisation de cette algorithme est donc optimale.

### 4. Convergence avec des conditions de transmission locales pour un profil de vitesse continu

Lorsque la vitesse varie continument, on n'a plus de résultat de convergence optimale. Néanmoins, l'algorithme avec conditions aux limites locales est bien défini, et converge au sens de l'énergie (voir [2] dans le cas stationnaire).

Soit  $u$  une solution de l'équation des ondes dans l'intervalle  $[a, b]$ , pour  $t \geq 0$ , avec une vitesse  $c$  continue. L'énergie à l'instant  $t$  est donnée par

$$E_{[a,b]}(u)(t) := \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{c^2(x)} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx. \quad (5)$$

L'identité d'énergie de base s'écrit

$$\frac{d}{dt}[E_{[a,b]}(u)(t)] + \frac{\partial u}{\partial t}(a,t) \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(b,t) \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0. \quad (6)$$

Introduisons maintenant les opérateurs de transport progressif et régressif

$$\mathcal{T}_\alpha^+ = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{T}_\alpha^- = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}, \quad (7)$$

où  $\alpha$  est un nombre réel positif. On peut alors écrire une estimation d'énergie pour  $\alpha$  et  $\beta$  positifs

$$\frac{d}{dt}[E_{[a,b]}(u)(t)] + \frac{\alpha}{4} [\mathcal{T}_\alpha^+ u(a,t)]^2 + \frac{\beta}{4} [\mathcal{T}_\beta^- u(b,t)]^2 = \frac{\alpha}{4} [\mathcal{T}_\alpha^- u(a,t)]^2 + \frac{\beta}{4} [\mathcal{T}_\beta^+ u(b,t)]^2. \quad (8)$$

**THÉORÈME 4.1.** – *Supposons la vitesse de propagation continue aux interfaces  $a_i$ . Alors sur tout intervalle de temps  $[0, T]$ , l'algorithme (2) avec les conditions de transmission locales (4) est bien défini et converge au sens de l'énergie, i.e.*

$$\sum_{i=1}^I E_{[a_i, a_{i+1}]}(u_i^k)(T) \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow \infty. \quad (9)$$

Idée de la démonstration : on écrit les identités d'énergie comme en (8), dans chaque sous-domaine, on utilise les conditions de transmission et on somme sur les sous-domaines. Les termes de bord se détruisent et on obtient (9).

**Remerciements.** Les auteurs remercient Frédéric Nataf pour ses fructueuses remarques.

### Références bibliographiques

- [1] Bamberger A., Glowinski R., Tran U. H., A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change, SIAM Journal on Numerical Analysis 34, n° 2 (1997) 603–639.
- [2] Després B., Décomposition de domaine et problème de Helmholtz, C.R. Acad. Sci. Paris 311 série I n° 6 (1990) 313–316.
- [3] Collino F., Ghanemi S., Joly P., Domain decomposition methods for harmonic wave propagation : a general presentation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 184 n° 2-4 (2000) 171-211.
- [4] Engquist B., Zhao H., Absorbing boundary conditions for domain decomposition, Appl. Numer. Math. 27 n° 4 (1998) 341–365.
- [5] Feng X., Analysis of a domain decomposition method for the nearly elastic wave equations based on mixed finite element methods, IMA Journal of Numerical Analysis 18,(1998).
- [6] Gander M.J., Halpern L., Nataf F. , Domain Decomposition Algorithms with Optimal Convergence for Wave Propagation Problems with Discontinuous Coefficients, en preparation.
- [7] Gander M.J., Halpern L., Nataf F. , Domain Decomposition Methods for Wave Propagation, Proceedings of Wave 2000, Santiago de Compostela, 2000.
- [8] Lions J.L., Pironneau O. , Domain Decomposition Methods for CAD, C.R. Acad. Sci. Paris 328 série A (1999) 73-80.
- [9] Lions J.L., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.
- [10] Lions P.L., On the Schwarz alternating method. III: a variant for nonoverlapping subdomains, In Tony F. Chan, Roland Glowinski, Jacques Périaux, and Olof Widlund, editors, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations , held in Houston, Texas, March 20-22, 1989, Philadelphia, PA, SIAM 1990.
- [11] Meza J.C., Symes W.W., Domain Decomposition Algorithms for Linear Hyperbolic Equations, Technical report, Rice university, 20, 1987.
- [12] Nataf F. , Nier F., Convergence rate of some domain decomposition methods for overlapping and nonoverlapping subdomains, Numerische Mathematik 75 n° 3 (1997) 357–77.
- [13] Quarteroni A., Valli A., Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Oxford Science Publications, 1999.