C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–4, 2001 - PXMA????.TEX -
Analyse Numérique/*Numerical Analysis*

Un algorithme discret de décomposition de domaines pour l'équation des ondes en dimension 1.

Martin Gander [a], **Laurence Halpern** [b],

[a] **Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal, Canada**
Courriel :mgander@math.mcgill.ca
[b] **Département de Mathématiques, Université Paris XIII, 93430 Villetaneuse,et CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France**
Courriel :halpern@math.univ-paris13.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous avons introduit dans une note précédente une variante sans recouvrement de l'algorithme de Schwarz pour la propagation des ondes. Nous présentons ici un schéma volumes finis non conforme et nous analysons la convergence de l'algorithme discret. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A discrete domain decomposition algorithm for the one dimensional wave equation

Abstract. *We have introduced in a previous note a variant of the Schwarz algorithm without overlap for wave propagation . We present here a non conforming finite volume discretization of the algorithm and analyze the convergence of the discrete algorithm.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Nous avons proposé dans [7] une approche nouvelle pour résoudre un problème d'évolution par décomposition de domaines. Au lieu de discrétiser d'abord l'équation en temps, nous résolvons dans chaque sous-domaine le problème d'évolution sur tout ou partie de l'intervalle de temps. Cela permet d'utiliser des méthodes numériques différentes et/ou des grilles différentes en temps et en espace dans différents sous-domaines. Elle permet également de minimiser le temps de communication entre processeurs puisque l'on ne communique les informations aux domaines voisins que par paquets d'étapes de temps. Nous avons proposé pour l'équation des ondes monodimensionnelle un algorithme optimal avec des conditions de transmission locales, de type transport. Nous présentons ici un schéma de discrétisation pour cet algorithme, de type volumes finis, non conforme. Notre approche permet de prendre en compte les conditions de transmission de façon naturelle, et mène à une discrétisation non standard. Nous montrons que les algorithmes discrets sont stables et convergent. Pour d'autres approches du raffinement de maillage en espace et en temps voir [1, 2].

Note présentée par P.L. LIONS

S0764-4442(00)0????-?/FLA

2. L'algorithme de Schwarz transitoire optimal

Dans [7] , nous avons proposé un algorithme de décomposition de domaine sans recouvrement pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R}\times]0,T[$

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f. \tag{1}$$

Soient I sous-domaines $\Omega_i =]a_i, a_{i+1}[$, $1 \leqslant i \leqslant I$, $a_j < a_i$ pour $j < i$ et $a_1 = -\infty$, $a_{I+1} = \infty$. L'algorithme s'écrit

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(u_i^{k+1}) = f \quad \text{dans } \Omega_i\times]0,T[,\\ \mathcal{B}_i^-(u_i^{k+1})(a_i,\cdot) = \mathcal{B}_i^-(u_{i-1}^k)(a_i,\cdot);\ \mathcal{B}_i^+(u_i^{k+1})(a_{i+1},\cdot) = \mathcal{B}_i^+(u_{i+1}^k)(a_{i+1},\cdot) \text{ sur }]0,T[,\end{gathered} \tag{2}$$

avec les conditions initiales $u_i^k(\cdot,0) = u(\cdot,0)$, $\frac{\partial u_i^k}{\partial t}(\cdot,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0)$. Les opérateurs $\mathcal{B}_i^{\pm}$ sont donnés par

$$\mathcal{B}_i^- = \frac{1}{c(a_i^-)}\partial_t - \partial_x,\ \mathcal{B}_i^+ = \frac{1}{c(a_{i+1}^+)}\partial_t + \partial_x. \tag{3}$$

Nous avons montré que l'algorithme est optimal au sens suivant : si la vitesse est discontinue et les discontinuités alignées avec les frontières des sous-domaines de calcul, l'algorithme converge en 2 itérations indépendamment du nombre de sous-domaines si l'intervalle de temps $[0,T_o]$ is choisi tel que $T_o < \min_i \frac{a_{i+1}-a_i}{c(a_i^+)}$. De plus si la vitesse est continue, l'algorithme converge au sens de l'énergie. Nous allons maintenant décrire un schéma de discrétisation.

3. L'algorithme discret

Dans le domaine de calcul Ω_i, les pas de temps et d'espace sont Δt_i et Δx_i. L'indice des points en espace court de 1 à $J_i + 1$ et l'indice des points en temps de 1 à N_i. Nous utilisons une méthode de volumes finis "vertex centered" [5] de façon à prendre plus aisément en compte les conditions aux limites. Nous notons $U_i^k(j,n)$ l'approximation de $u_i^k(a_i + j\Delta x_i, n\Delta t_i)$. A l'intérieur de chaque sous-domaine, cela mène au schéma saute-mouton

$$0 = \frac{\Delta x_i}{C_i^2(j)}(D_t^+ - D_t^-)(U_i^k)(j,n) - \Delta t_i(D_x^+ - D_x^-)(U_i^k)(j,n),$$

avec les notations usuelles

$$D_t^+(U)(j,n) = \frac{U(j,n+1)-U(j,n)}{\Delta t},\ D_t^-(U)(j,n) = \frac{U(j,n)-U(j,n-1)}{\Delta t},\ D_t^0 = \frac{D_t^+ + D_t^-}{2} \tag{4}$$

et parallèlement pour la variable x. $C_i(j)$ est une fonction discrète qui approche $c(a_i + j\Delta x_i)$.

Les conditions de transmission discrètes sont obtenues par intégration de l'équation sur une demi cellule, en utilisant la condition de transmission continue. Pour cela nous devons d'abord recoller les grilles dans deux sous-domaines voisins. Soit $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ une suite d'intervalles tels que $\cup_{n=0}^N \bar{I}_n = [0,T]$. L'espace $\mathbb{R}^{N+1}$ est muni du produit scalaire $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{N+1} = \sum_{n=0}^N |I_n| v_n w_n$ où $|I_n|$ est la longueur de l'intervalle I_n. Nous définissons l'application $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^{N+1}$ dans $L^2(0,T)$ qui à $\boldsymbol{v}$ associe la fonction f égale à v_n dans I_n pour $0 \leqslant n \leqslant N$ et l'opérateur $\mathbb{E}$ de $L^2(0,T)$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ qui à f associe la suite des $v_n = \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(t)dt$.

Nous notons $\mathbb{F}_i$ and $\mathbb{E}_i$ les opérateurs correspondant à la grille dans Ω_i, et nous définissons l'opérateur $\mathbb{P}_{i,j} : \mathbb{R}^{N_i+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_j+1}$ par

$$\mathbb{P}_{i,j} := \mathbb{E}_j \circ \mathbb{F}_i. \tag{5}$$

Il est facile de voir que pour tout u dans $\mathbb{R}^{N_i+1}$ on a $||\mathbb{P}_{i,j}u||_{N_j+1} \leqslant ||u||_{N_i+1}$.
Nous donnons dans [6] un algorithme rapide et efficace pour réaliser l'opération de projection/relèvement en dimension 1.
Nous pouvons maintenant définir l'algorithme discret par

$$\begin{array}{rlr}\left(\frac{1}{C_i^2(j)}D_t^+D_t^- - D_x^+D_x^-\right)(U_i^{k+1})(j,n) = 0 & & 1 \leqslant j \leqslant J_i,\, 1 \leqslant n \leqslant N_i, \\ \left(\frac{\Delta x}{C_i^2(j)}D_t^+ - \frac{\Delta t \Delta x}{2}D_x^+D_x^-\right)(U_i^{k+1})(j,0) - \frac{\Delta x}{C_i^2(j)}U_t(j) = 0 & & 1 \leqslant j \leqslant J_i, \\ B_i^-(U_i^{k+1})(0,\cdot) = \mathbb{P}_{i-1,i}\widetilde{B}_i^-(U_{i-1}^k)(J_{i-1}+1,\cdot), & & \\ B_i^+(U_i^{k+1})(J_i+1,\cdot) = \mathbb{P}_{i+1,i}\widetilde{B}_i^+(U_{i+1}^k)(0,\cdot), & & \end{array} \tag{6}$$

où les opérateurs $\mathbb{P}_{i\pm 1,i}$ sont définis dans (5), les opérateurs de transmission discrets $B_i^\pm$ sont pour $n \geqslant 1$

$$\begin{array}{rcl}B_i^+(U_i)(J_i+1,n) & = & \left(\frac{\Delta x_i}{2C_i^2(J_i+1)}D_t^+D_t^- + D_x^- + \frac{1}{C_{i+1}(0)}D_t^0\right)(U_i)(J_i+1,n), \\ B_i^-(U_i)(0,n) & = & \left(\frac{\Delta x_i}{2C_i^2(0)}D_t^+D_t^- - D_x^+ + \frac{1}{C_{i-1}(J_{i-1}+1)}D_t^0\right)(U_i)(0,n),\end{array} \tag{7}$$

et les opérateurs d'extraction $\widetilde{B}_i^\pm$ sont pour $n \geqslant 1$

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{B}_i^+(U_{i+1})(0,n) & = & \left(-\frac{\Delta x_{i+1}}{2C_{i+1}^2(0)}D_t^+D_t^- + D_x^+ + \frac{1}{C_{i+1}(0)}D_t^0\right)(U_{i+1})(0,n), \\ \widetilde{B}_i^-(U_{i-1})(J_{i-1}+1,n) & = & \left(-\frac{\Delta x_{i-1}}{2C_{i-1}^2(J_{i-1}+1)}D_t^+D_t^- - D_x^- + \frac{1}{C_{i-1}(J_{i-1}+1)}D_t^0\right)(U_{i-1})(J_{i-1}+1,n).\end{array} \tag{8}$$

Les conditions de transmission pour $n = 0$ sont obtenues en remplaçant D_t^0 par D_t^+ et $D_t^+D_t^-/2$ par $D_t^+/\Delta t$, et en introduisant la vitesse initiale (pour les détails voir [6]). Notons que contrairement au cas continu, on utilise des opérateurs différents dans une même condition de transmission, et on introduit de plus des opérateurs de projection qui sont non linéaires. D'autre part les quatre opérateurs sont des approximations de type Lax-Wendroff des opérateurs continus (ils correspondent aux conditions aux limites absorbantes discrètes écrites dans [8]) .

4. Stabilité et convergence

Nous avons un premier résultat dans le cas d'une vitesse continue.

THÉORÈME 4.1. – *Supposons la vitesse continue aux interfaces. Alors sous la condition de CFL* $\bar{c} = \sup_{1\leqslant i\leqslant I} \sup_{1\leqslant j\leqslant J_i} c_i(j)\dfrac{\Delta t_i}{\Delta x_i} < 1$, *l'algorithme discret est stable et converge au sens de l'énergie.*

Les choses sont beaucoup plus compliquées ici que dans le cas continu. D'abord nous définissons l'énergie potentielle discrète au moyen d'une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^{J+1}$:

$$a_h(V,W) = \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=1}^{J+1} D_x^-(V)(j)\cdot D_x^-(W)(j) \tag{9}$$

L'énergie totale discrète est alors donnée par $E_n = E_{K,n} + E_{P,n}$ où

$$E_{K,n} = \frac{\Delta x}{2}\left[\frac{1}{2C^2(0)}\left(D_t^-(U)(0,n)\right)^2 + \sum_{j=1}^{J}\frac{1}{C^2(j)}\left(D_t^-(U)(j,n)\right)^2 + \frac{1}{2C^2(J+1)}\left(D_t^-(U)(J+1,n)\right)^2\right] \tag{10}$$

et $E_{P,n} = a_h(U(n),U(n-1))$. On montre classiquement que E_n est bien une énergie, car pour tout n on a $E_n \geqslant \left(1 - \left(\bar{c}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)E_{K,n}$, et sous la condition de CFL $\bar{c}\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ le schéma est stable. Le théorème repose sur une miraculeuse estimation d'énergie

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}[E_{n+1}-E_n] \quad &+ \quad D_t^0(U)(0,n)(D_x^+ - \frac{\Delta x}{2C^2(0)}D_t^+D_t^-)(U)(0,n) \\ &= \quad D_t^0(U)(J+1,n)(D_x^- + \frac{\Delta x}{2C^2(J+1)}D_t^+D_t^-)(U)(J+1,n).\end{aligned} \tag{11}$$

et son analogue au temps 0. On peut alors procéder comme dans le cas continu.

Remarque 1. – *Des estimations d'énergie discrètes ont été utilisées dans [8] pour des conditions aux limites absorbantes discrètes semblables à celles que nous utilisons ici comme conditions de transmission et dans [2] pour raffiner en espace et en temps un schéma de discrétisation de l'équation des ondes monodimensionnelle.*

Rappelons que nous avons recommandé d'aligner les interfaces numériques sur les discontinuités. Nous avons un résultat partiel dans le cas de deux sous-domaines quand le pas de temps est constant. Ce résultat repose sur une transformation de Laplace discrète et de nombreux lemmes de calcul.

THÉORÈME 4.2. – *Soit $\{U_i^k(j,n)\}_{i=1,2}$, la solution de l'algorithme discret à deux sous-domaines avec conditions initiales et second membre nuls. Si $(c_1-c_2)(c_1\frac{\Delta t}{\Delta x_1}-c_2\frac{\Delta t}{\Delta x_2}) \geqslant 0$, il existe une constante positive C telle que pour $\eta\Delta t$ suffisamment petit , on ait*

$$\max_{i=1,2}||U_i^k|| \leqslant (1-C\eta\Delta t)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\max_{i=1,2}||U_i^0||$$

où $||\cdot||$ est la norme l^2 discrète en temps et en espace, avec le poids $\exp -\eta\Delta t$ en temps. Ce résultat est lié à la théorie GKS (voir [11]). Remarquons que chacun des sous-problèmes est seulement faiblement bien posé au sens GKS, mais néanmoins l'algorithme est convergent : chaque frontière numérique crée des ondes stationnaires, qui ne viennent cependant pas altérer la convergence de l'algorithme.

Remerciements. Les auteurs remercient Frédéric Nataf pour ses fructueuses remarques.

Références bibliographiques

[1] Bamberger A., Glowinski R., Tran U. H., A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change, SIAM Journal on Numerical Analysis 34, n° 2 (1997) 603–639.

[2] Collino F., Fouquet T., Joly P., Une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour le système de Maxwell 1-D,C.R. Acad. Sci. Paris 328 série I n° 3 (1999) 263-268.

[3] Després B., Décomposition de domaine et problème de Helmholtz, C.R. Acad. Sci. Paris 311 série I n° 6 (1990) 313-316.

[4] Engquist B., Zhao H., Absorbing boundary conditions for domain decomposition, Appl. Numer. Math. 27 n° 4 (1998) 341–365.

[5] Eymard R., Gallouet T., Herbin R. , The Finite Volume Method, Handbook of Numerical Analysis, North Holland, 2000, P. Ciarlet et J.L. Lions, 713-1020.

[6] Gander M.J.,Halpern L., Nataf F. , Domain Decomposition Algorithms with Optimal Convergence for Wave Propagation Problems with Discontinuous Coefficients, en preparation.

[7] Gander M.J.,Halpern L., Méthodes de décomposition de domaines pour l'équation des ondes en dimension 1,a paraître aux C.R. Acad. Sci. Paris.

[8] Halpern L., Absorbing Boundary Conditions for the Discretization Schemes of the One-Dimensional Wave Equation,Math. of Comp. 38 n° 158 (1982) 415–429.

[9] Lions J.L., Pironneau O. , Domain Decomposition Methods for CAD, C.R. Acad. Sci. Paris 328 série A (1999) 73-80.

[10] Lions P.L., On the Schwarz alternating method. III: a variant for nonoverlapping subdomains, In Tony F. Chan, Roland Glowinski, Jacques Périaux, and Olof Widlund, editors, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations , held in Houston, Texas, March 20-22, 1989, Philadelphia, PA, SIAM 1990.

[11] Strikwerda J.C., Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Chapman and Hall, 1989.