Ein Dreieck umschreibendes gleichseitiges Dreieck

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Man finde das grösste und kleinste gleichseitige Dreieck, welches das gegebene umschreibt.

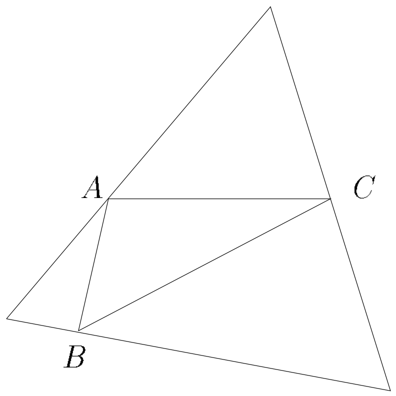


Abbildung 1: Ein Dreieck umschreibendes gleichseitiges Dreieck

Lösung: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit bezeichnen wir das Dreieck wie in Abbildung 2 dargestellt. Wir berechnen die Seite $s = s(\xi)$ des gleichseitigen Dreiecks mit Hilfe des Sinussates wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= x + y \\ &= \frac{a\sin(120^o - \xi)}{\sin(60^o)} + \frac{b\sin(\xi + \alpha - 60^o)}{\sin(60^o)}. \end{aligned}$$

Der Winkel ξ kann dabei von 0 bis $T := \min(180^o - \alpha, 120^o - \alpha - \beta)$ variieren. Da die Funktion $s(\xi)$ konkav ist, finden wir ihr Maximum durch Nullsetzen der ersten Ableitung

$$\xi_{max} = \frac{\frac{a}{2} + b\cos(\alpha - 60^o)}{\frac{\sqrt{3}a}{2} + b\sin(\alpha - 60^o)}.$$

Liegt $\xi_{max} \in [0, T]$, so haben wir ein gültiges maximales Dreieck gefunden, wie in Abbildung 3 dargestellt. Das minimale Dreieck ist auf dem Rand zu

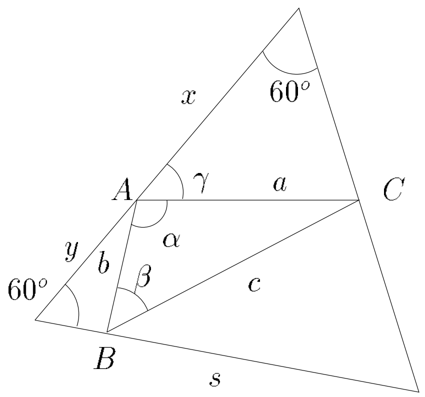


Abbildung 2: Figur zur Lösung

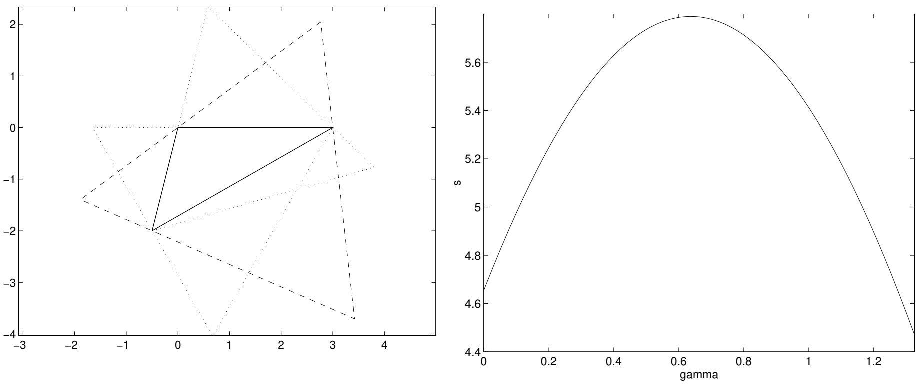
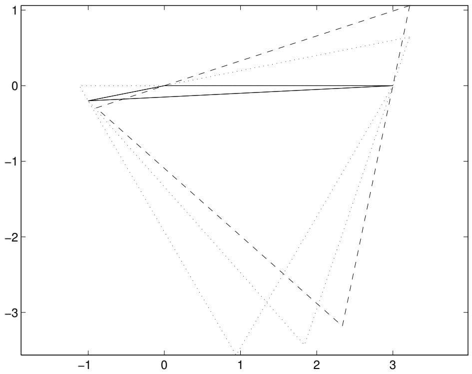


Abbildung 3: Ein Beispiel mit einem gültigen Maximum



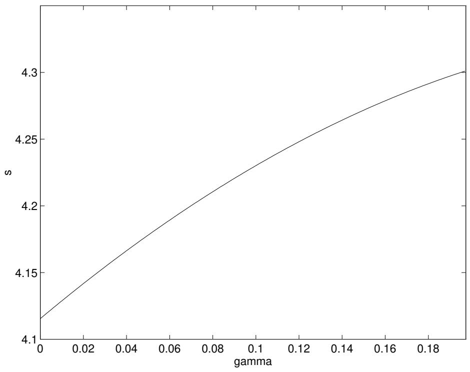


Abbildung 4: Ein Beispiel mit dem Maximum auf dem Rand

finden, in unserem Fall für $\xi = T$. Im Fall $\xi_{max} \notin [0, T]$ ergibt ξ_{max} ein ungültiges Dreieck, da eine der Ecken des gegebenen Dreieckes ausserhalb auf die Verlängerung der Seite des gleichseitigen Dreiecks zu liegen kommt. Somit liegt sowohl das Minimun als auch das Maximum auf dem Rand, wie in Abbildung 4 gezeigt.