Ein Viereck umschreibendes Quadrat

Gegeben sei ein konvexes Viereck mit den Eckpunkten A, B, C und D. Man finde ein das Viereck umschreibendes Quadrat, sodass jeder der Eckpunkte des Vierecks auf jeweils eine Seite des Quadrates zu liegen kommt. Ist eine Lösung immer möglich ?

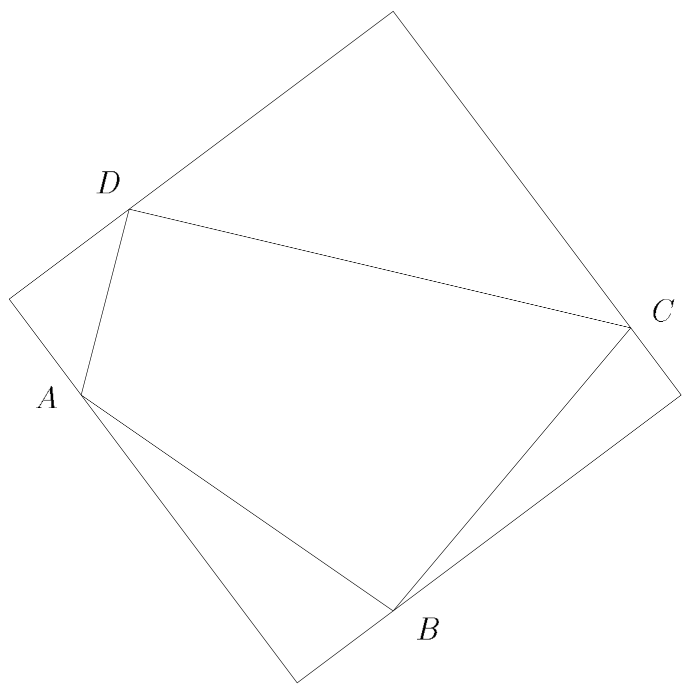

Abbildung 1: Ein Viereck umschreibendes Quadrat

Ein notwendiges Lösungskriterium: Falls eine Lösung existiert, müssen die Diagonalen a und b des gegebenen Vierecks folgende Ungleichungen erfüllen:

$$s \leq a \leq \sqrt{2}s$$
$$s \leq b \leq \sqrt{2}s$$

wobei s die Seite des Quadrates bezeichnet, welche unbekannt ist. Kombiniert man die beiden Ungleichungen, so erhält man die notwendigen Lösungs-

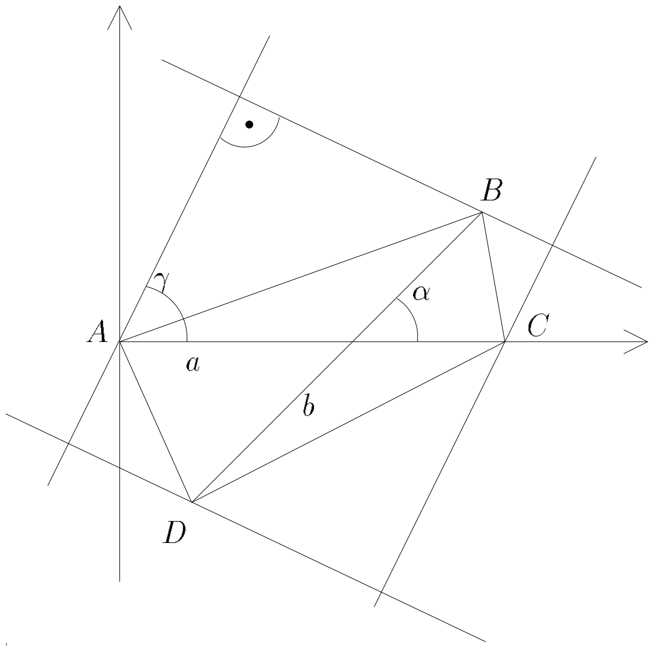

Abbildung 2: Figur zur Lösung

bedingungen

$$a \leq \sqrt{2}b \quad \text{und} \quad b \leq \sqrt{2}a.$$

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Ecke A des Vierecks auf den Ursprung zu liegen komme, und die Diagonale $a = \overline{AC}$ auf die x-Achse, wie in Abbildung 2 gezeigt. Der Winkel α und die Diagonalen a und b folgen leicht aus den Koordinaten der Eckpunkte $A = (0,0)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, 0)$ und $D = (x_4, y_4)$ als

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4} \\ a &= x_3 \\ b &= \sqrt{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}. \end{aligned}$$

Für gegebenen Winkel γ können wir eine Gerade durch A und eine Parallele durch C legen. Ihr Abstand beträgt $a \sin\gamma$. Eine zu diesen Geraden senkrechte Gerade durch B und ihre Parallele durch D haben den Abstand

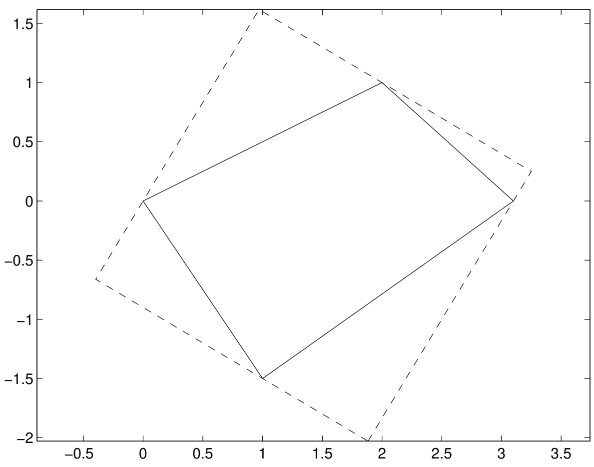

Abbildung 3: Ein Beispiel mit einer Lösung

$b\cos(\gamma-\alpha)$. Um ein Quadrat zu erhalten, müssen diese Abstände gleich sein. Wir müssen folglich die Gleichung

$$a\sin\gamma = b\cos(\gamma-\alpha)$$

nach γ auflösen, was nach kurzer Rechnung zur Lösung

$$\tan\gamma = \frac{b\cos\alpha}{a-b\sin\alpha}$$

führt. Folglich gibt es genau ein γ sodass die Parallelen durch A und C mit den Parallelen durch B und D ein Quadrat bilden. Eine Lösung des Problems existiert somit genau dann, wenn für dieses Quadrat die Eckpunkte A,B,C und D auf die Seiten des Quadrates zu liegen kommen, und nicht auf die Verlängerung der Seiten ausserhalb des Quadrates. Die Abbildung 3 zeigt ein Beispiel mit einer Lösung, während die Abbildung 4 eines zeigt ohne Lösung.

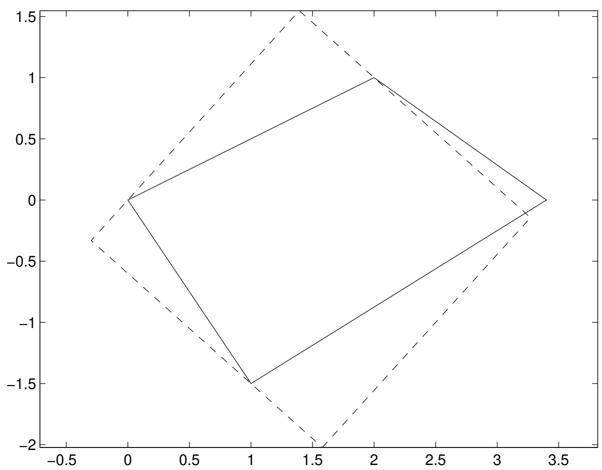

Abbildung 4: Ein Beispiel ohne Lösung