Analyse II

Partie B

Calcul Différentiel Equations Différentielles

Ernst Hairer

Université de Genève
Section de mathématiques
Case postale 240
CH-1211 Genève 24

Juin 1999

Table des matières

I Calcul différentiel dans les espaces de Banach **1**

I.1 Rappel sur la différentiabilité dans $\mathbb{R}^n$ 1
I.2 Espaces de Banach et de Hilbert 2
I.3 Applications linéaires 4
I.4 Différentiabilité dans les espaces normés 8
I.5 Théorème des accroissements finis 10
I.6 Théorème du point fixe de Banach 12
I.7 Théorème d'inversion locale 17
I.8 Théorème des fonctions implicites 20
I.9 Applications bilinéaires et multilinéaires 22
I.10 Dérivées d'ordre supérieur 23
I.11 Exercices 26

II Maxima et minima relatifs et calcul de variations **33**

II.1 Maxima et minima relatifs 33
II.2 Multiplicateurs de Lagrange 35
II.3 Calcul de variations 38
II.4 Problèmes isopérimétriques 42
II.5 Géodésiques des surfaces 43
II.6 Exercices 47

III Equations différentielles ordinaires **51**

III.1 Terminologie et quelques exemples 51
III.2 Existence et unicité du problème de Cauchy 54
III.3 Théorème de Peano 56
III.4 Prolongement des solutions et existence globale 59
III.5 Inégalités différentielles et solutions approchées 61
III.6 Systèmes d'équations différentielles linéaires 64
III.7 Systèmes linéaires à coefficients constants 67
III.8 Différentiabilité par rapport aux valeurs initiales 69
III.9 Stabilité 72
III.10 Exercices 78

IV Equations différentielles linéaires d'ordre 2 **85**
IV.1 Problèmes aux limites – introduction 85
IV.2 La fonction de Green 86
IV.3 Problèmes adjoints et auto-adjoints 88
IV.4 Le problème de Sturm–Liouville 90
IV.5 Théorème de comparaison de Sturm 93
IV.6 Equations différentielles avec des singularités 95
IV.7 Exercices 100

V Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ **105**
V.1 Théorème du rang 105
V.2 Définition des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 107
V.3 Espace tangent 109
V.4 Equations différentielles sur des sous-variétés 110
V.5 Exercices 111

Bibliographie **113**

Avant-propos

Cette brochure est une version corrigée des polycopiés distribués pendant le cours "Analyse II, Partie B" (2 heures par semaine) donné en 1998/99. Plusieurs parties ont profité des notes de cours de Pierre de la Harpe. Les portraits sur la page de couverture (S. Banach (1892–1945) et D. Hilbert (1862–1943) à gauche, G. Peano (1858–1932) et C.-F. Sturm (1803–1855) à droite) ont été copiés sur Internet par les soins de Stéphane Cirilli (site http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/). Quelques figures (surtout celles avec un flair artistique) ont été produites en utilisant des programmes de Gerhard Wanner. Je remercie ces collègues sincèrement.

En ce lieu, j'aimerais remercier Luc Rey-Bellet et Stéphane Cirilli pour leur aide dans la préparation des exercices et pour leur lecture soigneuse d'une version préliminaire. Je tiens aussi à remercier mon fils Martin pour avoir vérifié l'orthographe de ces polycopiés.

Bibliographie

[AMR88] R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Appl. Math. Sciences **75**, 2nd edition, Springer-Verlag, 1988.

[Ar74] V. Arnold, *Equations Différentielles Ordinaires*, Editions Mir (traduction française), Moscou, 1974.

[A83] A. Avez, *Calcul Différentiel*, Masson, Paris, 1983.

[C67] H. Cartan, *Calcul Différentiel*, Hermann, Paris, 1967.

[D63] J. Dieudonné, *Fondements de l'Analyse Moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

[Fox] C. Fox, *An Introduction to The Calculus of Variations*, Dover Publications New York, 1987.

[GH96] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, Springer Berlin, 1996.

[HW95] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1995.

[HNW93] E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems, 2nd edition*, Springer Series in Computational Mathematics **8**, Springer Berlin, 1993.

[H64] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

[S68] S. Lang, *Analysis II*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1968.

[LS68] L.H. Loomis and S. Sternberg, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1968.

[Tr83] J.L. Troutman, *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1983.