Chapitre V

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre nous donnons une application intéressante du théorème d'inversion locale (paragraphe I.7) et nous discutons la définition de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Nous introduisons l'espace tangent et des équations différentielles sur des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Pour plus des détails, nous référons aux livres [AMR88] et [Ar74].

V.1 Théorème du rang

Un changement des coordonnées peut être très utile pour l'étude des fonctions. Par exemple, si la fonction $f(x_1, x_2)$ ne dépend que de $x_1^2 + x_2^2$, il est naturel d'introduire des coordonnées polaires. Le but de ce paragraphe est de chercher, pour une fonction $y = f(x)$ donnée, des coordonnées ξ et η à la place de x et y, pour lesquelles la fonction f devient plus simple (par exemple linéaire).

Nous nous contentons d'étudier ce problème localement, c.-à-d., près d'un point a. Comme un changement de coordonnées est équivalent à un difféomorphisme, le problème se pose de la manière suivante: soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b = f(a) \in \mathbb{R}^m$ donnés, chercher un difféomorphisme local φ près de a ($\xi = \varphi(x)$) et un difféomorphisme local ψ près de b ($\eta = \psi(y)$), tels que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est "plus simple" dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1 (Théorème du rang) *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$), $a \in \mathbb{R}^n$ et $b = f(a)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- *il existe des difféomorphismes locaux φ près de a et ψ près de b (de classe $\mathcal{C}^k$) tels que*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_r, 0, \ldots, 0)^T \qquad \text{près de } \xi = 0; \tag{1.1}$$

- *le rang de $f'(x)$ est constant (égal à r) dans un voisinage de a.*

Démonstration. a) Supposons l'existence des difféomorphismes φ et ψ tels que (1.1) est satisfait. En dérivant (1.1) on obtient

$$\psi'(y)\, f'(x)\, (\varphi^{-1})'(\xi) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

où $x = \varphi^{-1}(\xi)$, $y = f(x)$, I est la matrice identité de dimension r et les trois "0" sont tels que la matrice (1.2) possède la même dimension que $f'(x)$. Les matrices $(\varphi^{-1})'(\xi)$ et $\psi'(y)$ sont inversibles pour $\xi = 0$ et $y = b$, et donc aussi dans un voisinage de 0 et b, respectivement. Ceci implique que le rang de $f'(x)$ est constant et égal à r.

b) Considérons une fonction f pour laquelle le rang de $f'(a)$ est r. Après une éventuelle permutation des $x_1, \ldots, x_n$ et/ou des $y_1, \ldots, y_m$, on peut supposer que la sous-matrice

$$A = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\Big)_{i,j=1}^{r} \qquad \text{est inversible.} \tag{1.3}$$

Définissons alors l'application $\xi = \varphi(x)$ par

$$\varphi_i(x) = \xi_i = \begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n) - b_i & \text{pour } i = 1, \ldots, r \\ x_i - a_i & \text{pour } i = r+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Comme la matrice Jacobienne

$$\varphi'(a) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

est inversible, (1.4) définit un difféomorphisme local près de a. Considérons la fonction $g(\xi) = (f \circ \varphi^{-1})(\xi)$, dont les premières r composantes sont données par $g_i(\xi) = \xi_i + b_i$. Comme le changement de coordonnées $x \leftrightarrow \xi$ ne change pas le rang, la matrice

$$g'(\xi) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C(\xi) & D(\xi) \end{pmatrix}$$

est de rang r pour tout ξ dans un voisinage de $\xi = 0$. Donc $D(\xi) \equiv 0$ et la fonction $g(\xi)$ ne dépend que de $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Finalement, définissons l'application $\eta = \psi(y)$ par

$$\psi_i(y) = \eta_i = \begin{cases} y_i - b_i & \text{pour } i = 1, \ldots, r \\ y_i - g_i(y_1 - b_1, \ldots, y_r - b_r) & \text{pour } i = r+1, \ldots, m. \end{cases} \tag{1.5}$$

La matrice Jacobienne

$$\psi'(b) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix}$$

est inversible et (1.5) définit donc un difféomorphisme local près de b. Par définition de φ et ψ, on voit que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est donnée par (1.1). □

Corollaire 1.2 (Théorème de la submersion) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une submersion en $a \in \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$), c.-à-d., $f'(a)$ est surjective (rang de $f'(a)$ est m). Alors, il existe un difféomorphisme local φ près de 0 (de classe $\mathcal{C}^k$) tel que*

$$(f \circ \varphi)(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(a) + (\xi_1, \ldots, \xi_m)^T.$$

Démonstration. Dans la démonstration du Théorème 1.1, il ne faut pas faire de permutation des $y_1, \ldots, y_m$ et la fonction ψ est une simple translation. La fonction φ de ce corollaire correspond à φ^{-1} dans le Théorème 1.1. □

Corollaire 1.3 (Théorème de l'immersion) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une immersion en $a \in \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$), c.-à-d., $f'(a)$ est injective (rang de $f'(a)$ est n). Alors, il existe un difféomorphisme local ψ près de $b = f(a)$ (de classe $\mathcal{C}^k$) tel que*

$$(\psi \circ f)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)^T. \tag{1.6}$$

Démonstration. On suppose (1.3) avec $r = n$ et on définit l'application $\eta = \psi(y)$ implicitement par

$$y_i = \begin{cases} f_i(\eta_1, \ldots, \eta_n) & \text{pour } i = 1, \ldots, n \\ f_i(\eta_1, \ldots, \eta_n) - \eta_i & \text{pour } i = n+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Comme la matrice Jacobienne de cette application est inversible, ψ est un difféomorphisme local près de b et il satisfait (1.6). □

V.2 Définition des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Il y a plusieurs manières de décrire une sous-variété lisse (courbe, surface,...) de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1 *Soit $\mathcal{M} \neq \emptyset$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathcal{M}$, et soit $0 \leq r \leq n$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de a et une application différentiable $g : U \to \mathbb{R}^{n-r}$ avec $g(a) = 0$ et $g'(a)$ surjective (une submersion) tels que*

$$\mathcal{M} \cap U = g^{-1}(0);$$

(ii) *il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de a, un voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et un difféomorphisme $\varphi : V \to U$ avec $\varphi(0) = a$ tels que*

$$\mathcal{M} \cap U = \varphi((\mathbb{R}^r \times \{0\}) \cap V);$$

(iii) *il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de a, un voisinage $W \subset \mathbb{R}^r$ de 0 et une application différentiable $\eta : W \to U$ avec $\eta(0) = a$ et $\eta'(0)$ injective (une immersion) tels que*

$$\mathcal{M} \cap U = \eta(W)$$

et $\eta : W \to \mathcal{M} \cap U$ est un homéomorphisme.

Définition 2.2 Un ensemble $\mathcal{M} \neq \emptyset$ qui satisfait aux conditions du Théorème 2.1 pour tout $a \in \mathcal{M}$ s'appelle une *sous-variété* (lisse) dans $\mathbb{R}^n$ de dimension r et de codimension $n - r$. L'application η s'appelle une *paramétrisation locale* de $\mathcal{M}$ près de a.

Exemple 2.3 Considérons la surface de la sphère dans $\mathbb{R}^3$ près du pôle nord $a = (0, 0, 1)^T$. Elle peut être décrite par $n = 3$, $r = 2$ et

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

mais aussi par $\varphi(x, y, \zeta) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \zeta)^T$ et par $\eta(x, y) = \varphi(x, y, 0)$. Une autre possibilité est de considérer des coordonnées sphériques:

$$\varphi(\alpha, \beta, \rho) = ((1 + \rho) \sin\alpha \cos\beta, (1 + \rho) \sin\alpha \sin\beta, (1 + \rho) \cos\alpha)^T$$

et $\eta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta, 0)$.

Démonstration du Théorème 2.1. Considérons l'injection canonique j et la projection canonique π:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^r & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^{n-r} \\ x & \mapsto & (x, 0) & & \\ & & (y_1, y_2) & \mapsto & y_2 \end{array}$$

Sans entrer dans les détails, nous donnons l'idée de la démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Le théorème de la submersion (Corollaire 1.2) implique l'existence d'un difféomorphisme local φ tel que

$$(g \circ \varphi)(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)^T$$

(après une permutation des ξ_i). La condition $g(x) = 0$ est alors équivalente à $\xi_{r+1} = \ldots = \xi_n = 0$ si $x = \varphi(\xi)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Il suffit de prendre $g = \pi \circ \varphi^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Le théorème de l'immersion (Corollaire 1.3) implique l'existence d'un difféomorphisme local ψ tel que

$$(\psi \circ \eta)(\xi_1, \ldots, \xi_r) = (\xi_1, \ldots, \xi_r, 0, \ldots, 0)^T.$$

Donc, $x \in \eta(W)$ est équivalent à $\psi(x) \in \mathbb{R}^r \times \{0\}$. L'hypothèse supplémentaire "$\eta : W \to \mathcal{M} \cap U$ est un homéomorphisme" exclut que, pour certains éléments de $\eta(W)$, la préimage soit loin de 0.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): On peut prendre $\eta = \varphi \circ j$. $\square$

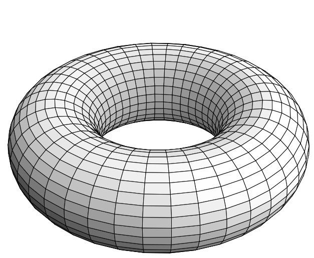
Remarque On ne peut pas omettre l'hypothèse "$\eta : W \to \mathcal{M} \cap U$ est un homéomorphisme" dans la caractérisation (iii) du Théorème 2.1. Par exemple, la fonction $\eta(t) = ((1 + 0.1t^2)\cos t, (1 + 0.1t^2)\sin t)$ est une immersion pour chaque t, mais l'image $\eta(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ à cause des croisements de la courbe (Fig. 2.1, gauche). Même l'injectivité de $\eta(t)$ ne serait pas suffisante comme le montre le dessin de droite de la Fig. 2.1.

FIG. 2.1 – *Sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas des sous-variétés*

Les sous-variétés de dimension $r = 0$ sont des points discrets dans $\mathbb{R}^n$. Les sous-variétés de dimension $r = n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Tout sous-espace linéaire ou affine de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété. Par contre, l'ensemble $\{(x, y)\,;\, xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Près de l'origine, cet ensemble n'est pas difféomorphe à une droite.

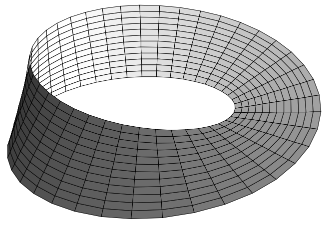
Exemple 2.4 (tore de révolution) Considérons le cercle $(x, z) = (d + \rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ (avec $0 < \rho < d$) et tournons-le autour de l'axe z. Ceci donne la paramétrisation

$$\eta(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} (d + \rho\cos\alpha)\cos\beta \\ (d + \rho\cos\alpha)\sin\beta \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix}$$



d'un tore. On peut vérifier que $\eta'(\alpha, \beta)$ est injective (c.-à-d., de rang 2) et que η est localement un homéomorphisme.

Exemple 2.5 (ruban de Möbius) Considérons une tige de longueur 2 (paramétrisée par $-1 < t < 1$) et tournons-la autour de son centre et, en même temps, deux fois plus vite autour d'un axe à distance d. Ceci donne la paramétrisation



$$\eta(t, \alpha) = \begin{pmatrix} (d + t\cos\alpha)\cos 2\alpha \\ (d + t\cos\alpha)\sin 2\alpha \\ t\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.6 (groupe orthogonal) L'ensemble

$$\mathcal{O}(n) = \{X \ ; \ X^T X = I\,\}$$

est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$ de $\mathcal{M}_n(I\!R) = I\!R^{n\cdot n}$ (espace de toutes les matrices de dimension n). Pour voir ceci, considérons l'application

$$g : \mathcal{M}_n(I\!R) \to Sym_n(I\!R) \approx I\!R^{n(n+1)/2}$$

définie par $g(X) = X^T X - I$ (le symbole $Sym_n(I\!R)$ dénote l'espace des matrices symétriques de dimension n). On a bien $g^{-1}(0) = \mathcal{O}(n)$. Il faut alors voir que g est une submersion en tout point $A \in \mathcal{O}(n)$. La dérivée de $g(X)$ en A est $g'(A)H = A^T H + H^T A$. Pour une matrice symétrique B, le choix $H = AB/2$ montre que $g'(A)H = B$. Donc, $g'(A) : \mathcal{M}_n(I\!R) \to Sym_n(I\!R)$ est surjective, et $\mathcal{O}(n)$ est une sous-variété de codimension $n(n+1)/2$.

V.3 Espace tangent

La tangente en un point a d'une courbe dans $I\!R^2$ ou $I\!R^n$ est une droite, c.-à-d., un espace affine. En plaçant l'origine dans a, cette tangente devient un espace linéaire. Le plan tangent en un point a d'une surface est un espace de dimension 2. Un vecteur dans ce plan peut être interprété comme $\gamma'(0)$, où $\gamma(t)$ est une courbe différentiable dans la surface qui satisfait $\gamma(0) = a$. Ceci motive la définition suivante.

Définition 3.1 Soit $\mathcal{M} \subset I\!R^n$ une sous-variété et $a \in \mathcal{M}$. *L'espace tangent* à $\mathcal{M}$ en a est

$$T_a\mathcal{M} = \left\{ h \in I\!R^n \ ; \ \begin{array}{l} \text{il existe } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to I\!R^n \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ telle que} \\ \gamma(t) \in \mathcal{M} \text{ pour } t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \ \gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = h \end{array} \right\}.$$

Théorème 3.2 *Soit* $\mathcal{M} \subset I\!R^n$ *une sous-variété et* $a \in \mathcal{M}$.

a) *si* $\mathcal{M}$ *est donnée par une submersion* $g : U \to I\!R^{n-r}$ *(c.-à-d.,* $\mathcal{M} \cap U = g^{-1}(0)$*), alors*

$$T_a\mathcal{M} = \operatorname{Ker} g'(a).$$

b) *si* $\mathcal{M}$ *est donnée par une paramétrisation* $\eta : W \to I\!R^n$ *(c.-à-d.,* $\mathcal{M} \cap U = h(W)$*), alors*

$$T_a\mathcal{M} = \operatorname{Im} \eta'(0).$$

Démonstration. a) Pour une courbe $\gamma(t)$ avec $g(\gamma(t)) = 0$ on a que $g'(a)\gamma'(0) = 0$ et donc $T_a\mathcal{M} \subset \operatorname{Ker} g'(a)$. En utilisant le théorème de la submersion (Corollaire 1.2), on peut voir que pour chaque $h \in \operatorname{Ker} g'(a)$ il existe une courbe $\gamma(t)$ dans $\mathcal{M}$ avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = h$.

b) Soit $\sigma(t)$ une courbe différentiable dans $I\!R^r$ satisfaisant $\sigma(0) = 0$. Alors $\gamma(t) = \eta(\sigma(t))$ est une courbe dans $\mathcal{M}$ qui satisfait $\gamma'(0) = \eta'(0)\sigma'(0)$. Donc $\operatorname{Im} \eta'(0) \subset T_a\mathcal{M}$. Cette fois, le théorème de l'immersion (Corollaire 1.3) implique qu'on obtient toutes les courbes $\gamma(t)$ de cette manière. $\square$

V.4 Equations différentielles sur des sous-variétés

Soit $y(t)$ une courbe différentiable à valeurs dans une sous-variété $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ de dimension r. Par définition de l'espace tangent, la dérivée $y'(t)$ satisfait $y'(t) \in T_{y(t)}\mathcal{M}$ pour tout t.

Définition 4.1 On dit que

$$y' = f(y) \tag{4.1}$$

est une *équation différentielle sur la sous-variété* $\mathcal{M}$, si $f(y) \in T_y\mathcal{M}$ pour tout $y \in \mathcal{M}$. Une solution est une fonction $y : I \to \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifie $y'(t) = f(y(t))$ pour tout $t \in I$.

Pour étudier l'existence et l'unicité d'une solution, on utilise une paramétrisation locale $y = \eta(z)$ de la sous-variété $\mathcal{M}$ près d'une valeur initiale $y_0 \in \mathcal{M}$, et on cherche une équation différentielle pour z dans $\mathbb{R}^r$. Pour ceci, on définit $z(t)$ par $y(t) = \eta(z(t))$ dans un voisinage de $z = 0$ et on obtient de (4.1) que

$$\eta'(z(t))z'(t) = f(\eta(z(t))), \qquad z(0) = 0.$$

Une multiplication par $\eta'(z)^T$ et ensuite par $(\eta'(z)^T\eta'(z))^{-1}$ (cette matrice est inversible, car $\eta'(z)$ est injective) donne l'équation différentielle pour z

$$z' = \widetilde{f}(z), \qquad \widetilde{f}(z) = (\eta'(z)^T\eta'(z))^{-1}\eta'(z)^T f(\eta(z)). \tag{4.2}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si η est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut appliquer la théorie locale du Chapitre III (existence, unicité, ...). Dès qu'on a trouvé une solution $z(t)$ de (4.2), le fait que $f(\eta(z)) \in T_{\eta(z)}\mathcal{M} = \operatorname{Im}\eta'(z)$ implique que $y(t) = \eta(z(t))$ est une solution de (4.1).

Exemple 4.2 Considérons le problème

$$y_1' = y_1 + y_2 - y_1 z, \qquad y_2' = 2y_2 - y_2 z, \qquad 0 = y_1^2 + y_2^2 - 1, \tag{4.3}$$

où la variable de contrôle z doit être déterminée afin qu'on obtienne une équation différentielle sur la sous-variété $\mathcal{M} = \{(y_1, y_2)\,;\, y_1^2 + y_2^2 = 1\}$. En dérivant la relation algébrique dans (4.3), on obtient

$$0 = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2 - 2(y_1^2 + y_2^2)z.$$

Ceci est la condition pour z qui garantit que $y' \in T_y\mathcal{M}$ pour tout $y \in \mathcal{M}$.

Une application très importante sont les *systèmes mécaniques soumis à des liaisons.* Supposons que l'énergie cinétique soit $T(q, \dot q) = \frac{1}{2}\dot q^T M \dot q$, l'énergie potentielle $U(q)$ et que le mouvement soit contraint par la relation $g(q) = 0$ où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ $(m < d)$. Les solutions du problème variationel $\int L\, dt \to \min$ avec comme Lagrangien

$$L(q, \dot q) = T(q, \dot q) - U(q) - g(q)^T\lambda$$

décrivent le mouvement du système (sans démonstration). Les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot q}) = 0$ (Chapitre II) donnent le système

$$\begin{aligned} \dot q &= v \\ M\dot v &= -U'(q) - G(q)^T\lambda \\ 0 &= g(q) \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $G(q) = g'(q)$. Toutes les solutions de ce système satisfont $g(q) = 0$, mais aussi $G(q)v = 0$ (la dérivée totale de $g(q(t)) = 0$). Donc, elles sont des courbes dans la sous-variété

$$\mathcal{M} = \{(q, v)\ ;\ g(q) = 0,\ G(q)v = 0\,\} \tag{4.5}$$

de $\mathbb{R}^{2d}$. Il faut encore déterminer λ pour que $(\dot q, \dot v) \in T_{(q,v)}\mathcal{M}$. Pour ceci, il faut que la dérivée totale de $G((q(t))v(t) = 0$ soit nulle:

$$0 = g''(q)(v, v) + G(q)M^{-1}(-U'(q) - G(q)^T\lambda). \tag{4.6}$$

En supposant $G(q)M^{-1}G(q)^T$ inversible, on peut calculer λ de cette relation et on obtient une équation différentielle pour (q, v) sur la sous-variété $\mathcal{M}$.

Exemple 4.3 (pendule simple) Dans ce cas l'énergie cinétique est $T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2)$, l'énergie potentielle est $U = mgy$, et on a la liaison $g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \ell^2) = 0$. Le système (4.4) devient alors

$$\begin{aligned} \dot x &= u, & m\dot u &= - x\lambda \\ \dot y &= v, & m\dot v &= -mg - y\lambda \end{aligned}$$

et on peut calculer λ de la relation

$$u^2 + v^2 - gy - m^{-1}(x^2 + y^2)\lambda = 0.$$

Exemple 4.4 (pendule double) Comme dans l'Exercice 45 du Chapitre III nous avons

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot x_1^2 + \dot y_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot x_2^2 + \dot y_2^2), \qquad U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

et les liaisons

$$x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 = 0, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 = 0. \tag{4.7}$$

Les équations du mouvement sont alors données par (en divisant les équations (4.7) par 2)

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= u_1, & m_1\dot u_1 &= - x_1\lambda_1 + (x_2 - x_1)\lambda_2 \\ \dot x_2 &= u_2, & m_2\dot u_2 &= - (x_2 - x_1)\lambda_2 \\ \dot y_1 &= v_1, & m_1\dot v_1 &= -m_1 g - y_1\lambda_1 + (y_2 - y_1)\lambda_2 \\ \dot y_2 &= v_2, & m_2\dot v_2 &= -m_2 g - (y_2 - y_1)\lambda_2. \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent, on obtient λ_1, λ_2 de l'équation (4.6).

Observons que cette forme des équations du mouvement est beaucoup plus simple que celle obtenue dans l'Exercice 45 du Chapitre III pour les angles α et β. La différence est encore plus prononcée si le système mécanique est plus compliqué.

V.5 Exercices

1. Calculer le rang de la matrice jacobienne pour

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si $\operatorname{rang} f'(a) = r$, alors $\operatorname{rang} f'(x) \geq r$ dans un voisinage de a. Donner un exemple pour lequel $\operatorname{rang} f'(a) = r$ et $\operatorname{rang} f'(x) > r$ pour $x \in U \setminus \{a\}$, où U est un voisinage de a.
3. Soit A une matrice (avec n colonnes et m lignes) de rang r. Montrer qu'il existe des matrices inversibles S et T telles que
$$SAT = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$
où I est la matrice identité de dimension r. Calculer une décomposition de la forme (5.1) pour la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
4. Pour les ensembles définis ci-dessous, décider si ce sont des sous-variétés ou non (faire un dessin si possible):
$$\begin{array}{ll} \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \in \mathbb{R}\} & \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \geq 0\} \\ \{(t^2,t^3) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \in \mathbb{R}\} & \{(t^2,t^3) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \neq 0\} \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0, y > 0\} & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = y = z = 0\} \\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2-z^2 = 1\} & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2-z^2 = 0\} \end{array}$$
5. Donner une application différentiable $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que l'ensemble
$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ g(x) = 0\}$$
est une sous-variété de dimension 1 dans $\mathbb{R}^3$, mais $g'(x)$ n'est surjective pour aucun point $x \in \mathcal{M}$.
6. Vérifier que l'ensemble $\{(x,y)\,;\, xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, mais que $\{(x,y)\,;\, xy = 0\} \setminus \{(0,0)\}$ est une sous-variété.
7. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ deux sous-variétés. Montrer que le produit
$$X \times Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,; x \in X, \ y \in Y\}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on l'appelle la variété produit.
8. Démontrer que l'ensemble
$$\{(\cos t + 2)\cos \lambda t, (\cos t + 2)\sin \lambda t, \sin t) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ t \in \mathbb{R}\} \tag{5.2}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ pour $\lambda = 2/13$ (voir le dessin). Pour $\lambda = \sqrt{2}$ l'ensemble (5.2) n'est pas une sous-variété et il est partout dense dans le tore
$$\{(\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\sin v, \sin u)\}.$$
Indication. En utilisant des propriétés des fractions continues [HW95, Sect. I.6] montrer que l'ensemble $\{\ell + k\sqrt{2} \ ; \ \ell, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.