Analyse complexe

> "**COMPLEXE** adj. (lat. *complexus*, qui contient). Qui contient plusieurs éléments différents et combinés d'une manière qui n'est pas immédiatement claire pour l'esprit, qui est difficile à analyser."
> (Petit Larousse illustré 1983)

L'analyse complexe moderne a été devélopée au 19 ème siècle par trois mathématiciens celèbres :

- **A.L. Cauchy (1789–1857)** considère des fonctions différentiables dans $\mathbb{C}$ (fonctions holomorphes). Sa théorie est basée sur une représentation intégrale de telles fonctions (formule de Cauchy) et sur les résidus.

- **B. Riemann (1826–1866)** publie sa thèse "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" en 1851. Pour lui, la conception géométrique occupe une place prépondérante.

- **K. Weierstrass (1815–1897)** appuye sa théorie sur des fonctions développables en séries entières (fonctions analytiques), il en résulte une approche algébrique de l'analyse complexe.

Aujourd'hui, les trois approches sont confondues et inséparables. De cette manière il est possible de simplifier la théorie et de trouver des résultats importants.

> "La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstraß, ... la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstraß est avant tout une méthode de démonstration."
> (H. Poincaré 1898, *Acta Math.* **22**, p. 6–7)

Dans ce cours nous abordons la théorie par le calcul différentiel dans $\mathbb{C}$ (chapitre I) et par les fonctions holomorphes selon Riemann. Nous suivons ensuite l'évolution de Cauchy (intégrales complexes, formule de Cauchy) dans le chapitre II et nous démontrons que chaque fonction holomorphe est analytique (possède un développement en série entière). Nous traitons les singularités et le calcul de résidus dans le chapitre III.


Cauchy


Riemann


Weierstrass

Chapitre I

Différentiabilité dans $\mathbb{C}$

Le sujet de l'analyse complexe est l'étude de fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous rappelons les règles de calcul avec les nombres complexes et nous discutons la différentiabilité dans $\mathbb{C}$ (qui est différente de la différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$). Les fonctions holomorphes (c.-à-d., différentiable dans $\mathbb{C}$) possèdent des propriétés surprenantes qui seront analysées par la suite. Nous terminons ce chapitre avec l'étude de séries entières (fonctions analytiques).

I.1 Les nombres complexes et le plan complexe

Les nombres complexes ont leur origine dans l'impossibilité de résoudre certaines équations quadratiques (Cardano 1545); au cours des siècles suivants, ils deviennent de plus en plus importants (Descartes 1637; voir [HW, pages 57–61][1] pour plus de précisions). Euler découvre leur grande utilité dans toutes les branches de l'analyse, et introduit (en 1777) le symbole

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad i^2 = -1, \tag{1.1}$$

grâce auquel les nombres complexes prennent la forme

$$z = x + iy. \tag{1.2}$$

Dès le début du 19ème siècle (Gauss 1799, Argand 1806), on identifie les nombres complexes $\mathbb{C}$ avec le *plan de Gauss* (ou plan d'Argand) $\mathbb{R}^2$ (voir Fig. I.1 à gauche)

$$\mathbb{C} = \{x + iy\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.3}$$

On note $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ les *parties réelles* et *imaginaires* de z, et $\overline{z} = x - iy$ le nombre *complexe conjugué*.

Le corps des nombres complexes. En tenant compte de (1.1), le produit de deux nombres complexes $c = a + ib$ et $z = x + iy$ donne

$$c \cdot z = ax - by + i(ay + bx). \tag{1.4}$$

Avec l'addition $c + z = a + x + i(b + y)$ l'ensemble $\mathbb{C}$ devient un *corps commutatif*. L'élément inverse de z pour la multiplication est

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{1.5}$$

[1] On utilise l'abbreviation HW pour le livre de E. Hairer & G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*. Ce livre nous sert de référence sur le sujets traités au cours Analyse I.

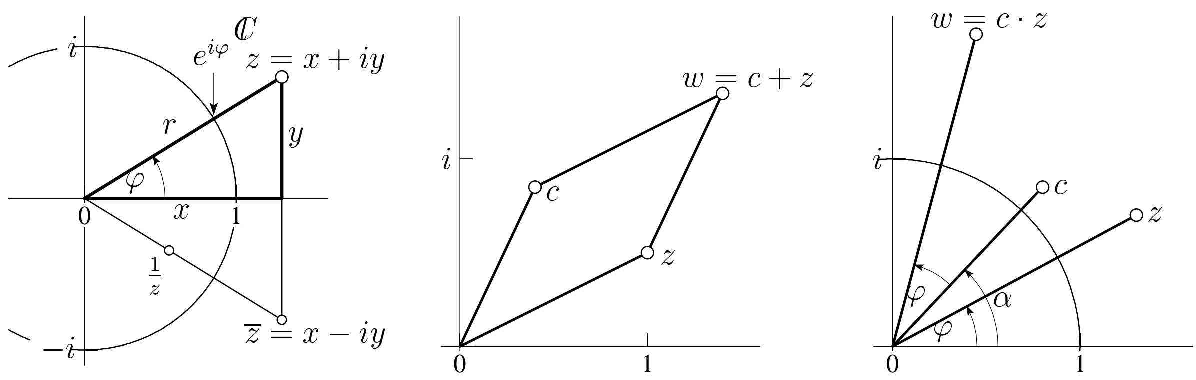


FIG. I.1: Plan complexe (gauche), addition complexe (milieu), multiplication complexe (droite)

En identifiant un nombre réel x avec le nombre complexe $x + i \cdot 0$, l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être considéré comme un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Coordonnées polaires. Si l'on dénote par r la distance du point $z = x + iy$ à l'origine, et par φ l'angle entre l'axe horizontal et la droite qui relie l'origine avec le point z (voir Fig. I.1 à gauche), nous avons $x = r\cos\varphi$ et $y = r\sin\varphi$. La distance r s'appelle *module* ou *valeur absolue* de z, et $\varphi = \arg z$ est son *argument*. Ainsi le nombre complexe z peut être écrit comme

$$z \;=\; r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi). \tag{1.6}$$

Cette représentation des nombres complexes permet une interprétation géométrique du produit. Pour $c = s\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, le produit (1.4) devient

$$\begin{aligned} c \cdot z \;&=\; sr\,(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi + i(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi)) \\ &=\; sr\,(\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi)) \end{aligned} \tag{1.7}$$

à l'aide des identités trigonométriques connues ([HW, p. 43]). Ainsi, la multiplication de deux nombres complexes *multiplie les valeurs absolues* et *additionne les arguments* (Fig. I.1 à droite).

Espace métrique. Avec l'identification (1.3) de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, la valeur absolue de $z = x + iy$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.8}$$

correspond à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Elle fait de $\mathbb{C}$ un espace normé. La distance entre deux nombres complexes est ainsi $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$.

Les concepts de convergence, limites, continuité, convergence uniforme, ensembles ouverts et fermés, compacité, etc. sont les mêmes qu'en Analyse I et n'ont donc pas besoin d'être répétés. Nous utiliserons la notation $D_r(c) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - c| < r\}$ pour le disque ouvert centré au point c et de rayon r.

I.2 Fonctions complexes d'une variable complexe

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble (généralement ouvert) et $V \subset \mathbb{C}$ un autre ensemble. Une fonction qui associe à chaque $z \in U$ un $w = f(z) \in V$ est une *fonction complexe* $f : U \to V$.

Nous pouvons aussi identifier $z = x + iy \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $w = f(z) \simeq (u, v) \in \mathbb{R}^2$ et arrivons à *deux* fonctions $u(x, y), v(x, y)$ (les coordonnées du point w) de *deux* variables réelles x, y (les coordonnées du point z); voir Fig. I.2.

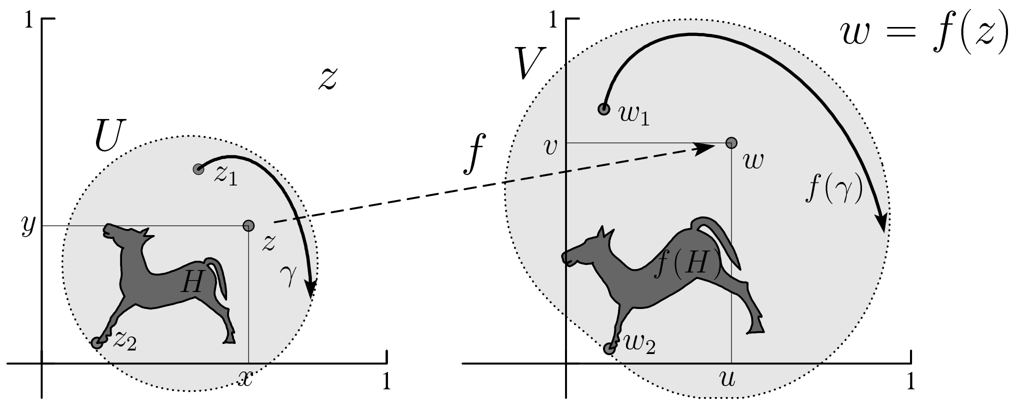


FIG. I.2: Fonction complexe $w = (z + 0.2)^2$

Si un point z_1 se met en mouvement le long d'une courbe γ, alors le point image w_1 bougera le long d'une autre courbe $f(\gamma)$; si un point z_2 remplit une surface H ("the horse of Sarah"), alors le point image w_2 remplira une surface $f(H)$; voir Fig. I.2.

Plusieurs exemples vont nous aider à nous familiariser avec cette matière. On va constater que des formules très simples donnent déjà lieu à des situations assez compliquées.

Exemple 2.1 (application $\mathbb{C}$-linéaire) Pour un nombre complexe c fixé, considérons la fonction

$$w = f(z) = c\, z. \tag{2.1}$$

Elle est $\mathbb{C}$-linéaire, c.-à-d., elle satisfait $f(c_1z_1 + c_1z_2) = c_1f(z_1) + c_2f(z_2)$ pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ($z = x + iy$, $c = a + ib = s(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, $w = u + iv$), nous pouvons l'écrire sous forme matricielle (cf. la formule (1.4))

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Cette application linéaire est une *rotation* orthogonale d'angle $\alpha = \arg c$, suivie d'une *homothétie* de rapport $s = |c|$ (voir Fig. I.3). Elle va être fondamentale, plus tard, pour toute la compréhension des fonctions $\mathbb{C}$-différentiables.

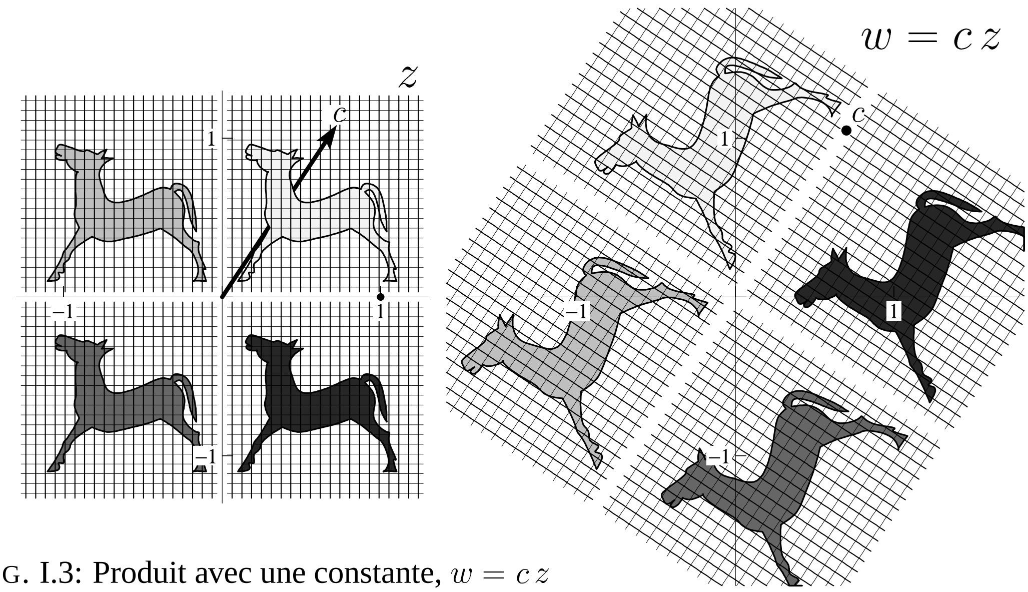


FIG. I.3: Produit avec une constante, $w = c\,z$

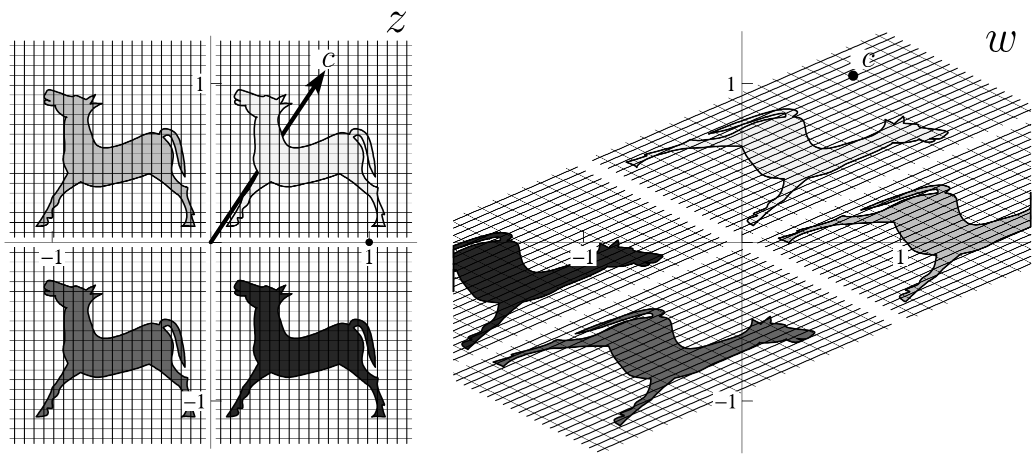


FIG. I.4: Application $\mathbb{R}$-linéaire de (2.3)

Exemple 2.2 (application $\mathbb{R}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire) Considérons la fonction

$$w = f(z) = (0.3 - i)z - (1.1 - 0.5\,i)\overline{z}. \tag{2.3}$$

Elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, car $f(i) \neq if(1)$. Par contre, elle est $\mathbb{R}$-linéaire c.-à-d., elle satisfait $f(c_1z_1 + c_1z_2) = c_1f(z_1) + c_2f(z_2)$ pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ elle devient

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

sans structure particulière de la matrice apparente. En contraste avec l'exemple précédent, nous observons que l'orientation n'est pas preservée et que la grille ne reste pas orthogonale (Fig. I.4).

Exemple 2.3 (fonction carrée) La fonction

$$w = f(z) = z^2 \tag{2.5}$$

est illustrée en Fig. I.5. En coordonnées réelles $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ elle est donnée par

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy. \tag{2.6}$$

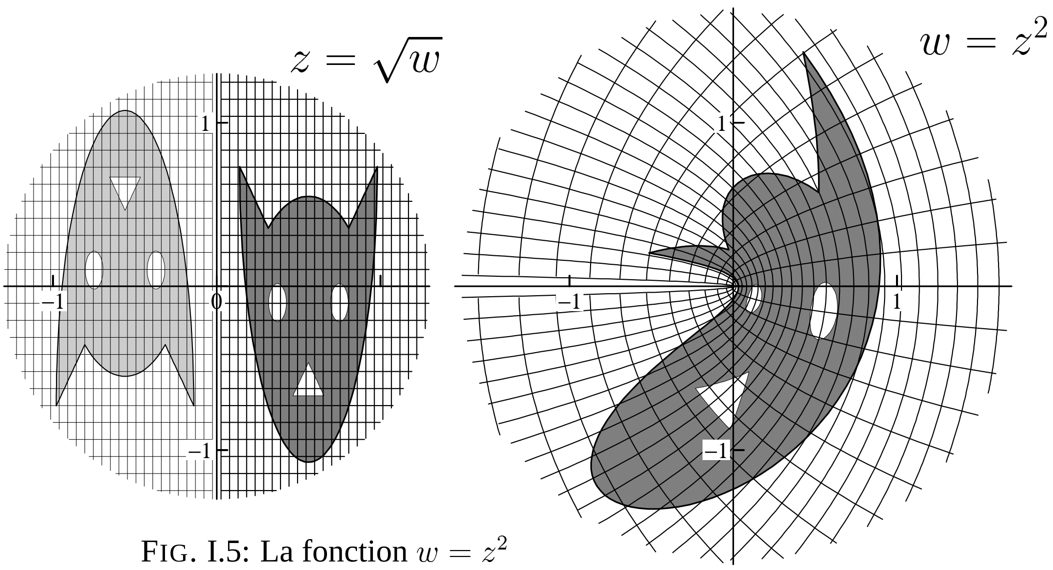


FIG. I.5: La fonction $w = z^2$

Les images des lignes verticales (poser $x = a$) deviennent $u = a^2 - y^2$, $v = 2ay$ et en éliminant y on trouve des paraboles $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$. Les lignes horizontales ($y = b$) deviennent des paraboles aussi (voir Fig. I.5). Nous observons que pour chaque $w \neq 0$, cette fonction possède 2 préimages (un chat gris foncé et un chat gris clair). Ce phénomème va encore nous intéresser.

Exemple 2.4 (transformation de Cayley) Une fonction intéressante est

$$w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}, \tag{2.7}$$

qui est illustrée en Fig. I.6. C'est une *involution*, c.-à-d., elle satisfait $f(f(z)) = z$. Donc, la fonction $f(z)$ est bijective comme application $\mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on a $f^{-1}(z) = f(z)$.

L'importance de cette formule fut découverte par Cayley (*Crelle J.* vol. 32, 1846, p. 119) pour le calcul matriciel: elle métamorphose des matrices antisymétriques en matrices orthogonales. Dans $\mathbb{C}$, elle transforme l'axe imaginaire en cercle unitaire (et vice-versa):

$$w = \frac{iy+1}{iy-1} = \frac{iy+1}{iy-1} \cdot \frac{-iy-1}{-iy-1} = \frac{-1+y^2}{1+y^2} - i\frac{2y}{1+y^2} = u + iv \tag{2.8}$$

où

$$u = -\frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad v = -\frac{2y}{1+y^2} \qquad \text{satisfont} \qquad u^2 + v^2 = 1. \tag{2.9}$$

Ces expressions ne nous sont pas étrangères ..., elles créent une représentation rationnelle du cercle ($\cos\varphi$ et $\sin\varphi$) et les nombres pythagoriciens (voir [HW, p. 124]).

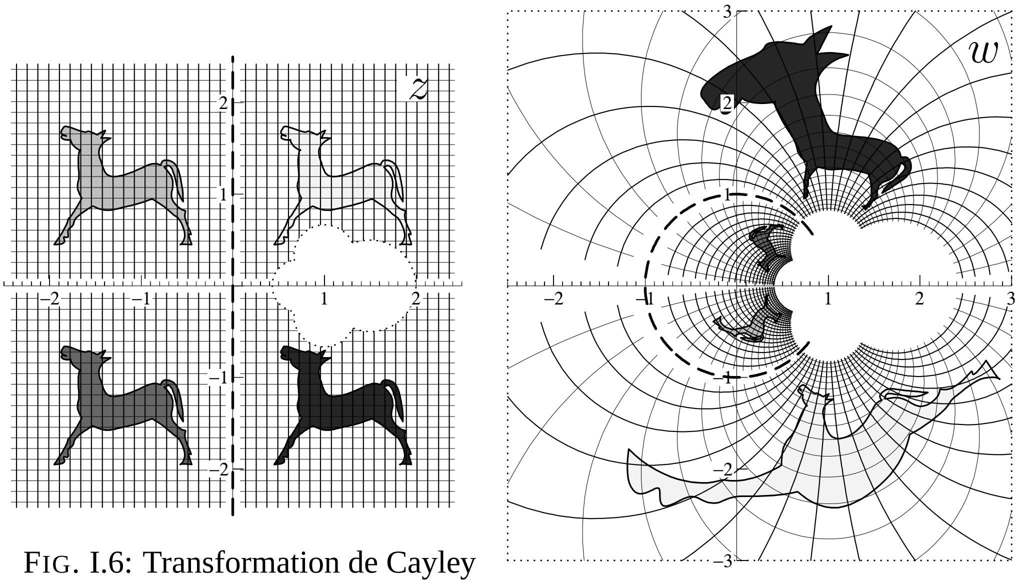


FIG. I.6: Transformation de Cayley

Exemple 2.5 (transformation de Joukovski, 1910) La fonction

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{2.10}$$

est illustrée en Fig. I.7. Elle transforme respectivement les cercles centrés en 0 et les rayons passant par 0 en une famille d'ellipses et d'hyperboles confocales. Pour prouver ce fait, nous utilisons des coordonnées polaires $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z^{-1} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ et nous obtenons

$$w = \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)\cos\varphi + i\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)\sin\varphi \tag{2.11}$$

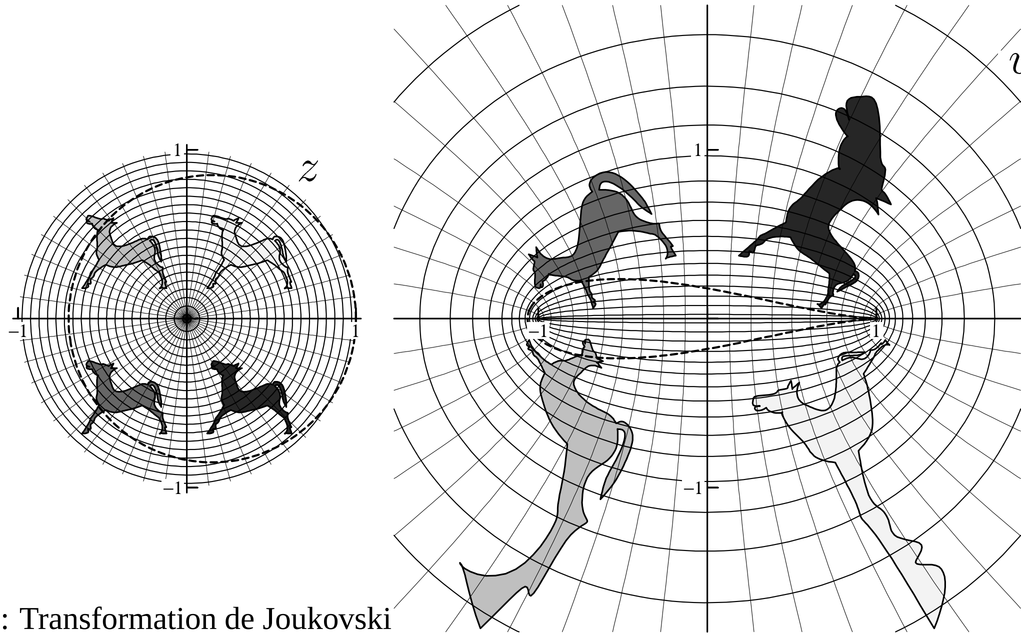
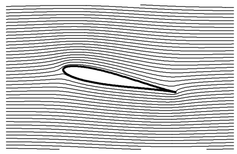


FIG. I.7: Transformation de Joukovski

d'où $u = (\frac{r}{2} + \frac{1}{2r})\cos\varphi$ et $v = (\frac{r}{2} - \frac{1}{2r})\sin\varphi$ et on voit que

$$\frac{u^2}{(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r})^2} + \frac{v^2}{(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r})^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1. \tag{2.12}$$

Remarque. L'image d'un cercle, astucieusement placé (voir Fig. I.7; en trait discontinu; le cercle doit passer par le point $z = 1$), pourrait ressembler à un profil d'aile d'avion. Cela montre l'importance (historique) de la transformation de Joukovski en aérodynamique.



I.3 Équations de Cauchy–Riemann

Avec l'identification (1.3) chaque fonction $f : U \to \mathbb{C}$ (avec un ouvert $U \subset \mathbb{C}$) est équivalente à une fonction $U \to \mathbb{R}^2$ (nous utilisons la même lettre pour $\{(x, y)\,;\, x + iy \in U\} \subset \mathbb{R}^2$ et pour $U \subset \mathbb{C}$),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

où $z = x + iy$ et $u(x, y), v(x, y)$ sont les parties réelles et imaginaires de $f(z)$.

$\mathbb{R}$-différentiabilité. Comme vu au cours Analyse I [HW, p. 302], la fonction $U \to \mathbb{R}^2$ de (3.1) est *$\mathbb{R}$-différentiable* en $(x_0, y_0) \in U$, s'il existe une matrice A et une fonction $r : U \to \mathbb{R}^2$, continue en (x_0, y_0) et satisfaisant $r(x_0, y_0) = 0$, telle que

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r(x, y) \cdot \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|. \tag{3.2}$$

Les éléments de la matrice A, appelée matrice Jacobienne, sont les dérivées partielles de (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix} (x_0, y_0). \tag{3.3}$$

Avec la notation complexe, la formule (3.2) s'écrit

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \mu(\overline{z} - \overline{z}_0) + r(z) \cdot |z - z_0| \tag{3.4}$$

(voir l'exercice 8). En négligeant le reste $r(z) \cdot |z - z_0|$, la fonction $f(z) - f(z_0)$ est approximée par une fonction $\mathbb{R}$-linéaire.

$\mathbb{C}$-différentiabilité. La fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite *$\mathbb{C}$-différentiable* en $z_0 \in U$, s'il existe une constante $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ et une fonction $r(z)$, continue en z_0 et satisfaisant $r(z_0) = 0$, telle que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \cdot |z - z_0|. \tag{3.5}$$

La constante $f'(z_0)$ est la dérivée de $f(z)$ en z_0. Cette fois, la fonction $f(z)-f(z_0)$ est approximée par une fonction $\mathbb{C}$-linéaire.

D'une manière équivalente, la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in U$, si la limite suivante existe dans $\mathbb{C}$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \tag{3.6}$$

Dans cette limite, z peut se rapprocher arbitrairement de z_0.

Premiers exemples. Exactement comme pour des fonctions réelles d'une variable réelle on démontre que la somme, le produit, le quotient et la composition de deux fonctions $\mathbb{C}$-différentiables sont $\mathbb{C}$-différentiables. Les mêmes règles de calcul sont valables (règle de Leibniz, dérivée en chaîne). Comme la fonction constante et la fonction $f(z) = z$ sont $\mathbb{C}$-différentiables, aussi les polynômes en z et les fractions rationnelles en z sont $\mathbb{C}$-différentiables (en dehors de singularités). Les fonctions considérées dans les exemples 2.1, 2.3, 2.4 et 2.5 sont donc $\mathbb{C}$-différentiables.

Par contre, la fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable (mais elle est $\mathbb{R}$-différentiable). Pour voir ceci, on laisse d'abord tendre z horizontalement vers z_0 dans (3.6) ce qui donne $+1$, et ensuite verticalement ce qui donne -1. La fonction de l'exemple 2.2 n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable.

Une conséquence immédiate des définitions est que $\mathbb{C}$-différentiabilité implique $\mathbb{R}$-différentiabilite (en effet, la formule (3.5) implique (3.4) avec $\lambda = f'(z_0)$ et $\mu = 0$).

Théorème 3.1 (équations de Cauchy–Riemann) *Si la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (avec $z = x + iy$) est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors on a nécessairement*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.7}$$

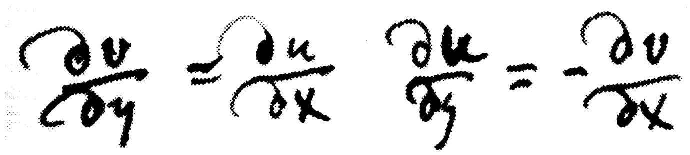


FIG. I.8: Equations de Cauchy–Riemann (autographe de Riemann, [Neuenschwander, p. 94])

Démonstration. Une matrice 2×2 représente une application $\mathbb{C}$-linéaire seulement si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

(voir les exercices 8 et 9). Une comparaison avec (3.3) donne la condition (3.7).

Donnons encore une deuxième démonstration de ce théorème. Pour cela nous considérons l'identité $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ et nous la dérivons une fois par rapport à x et ensuite par rapport à y. Ceci donne

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \qquad i\,f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Après multiplication de la première équation par i, une comparaison des parties réelles et imaginaires donne l'affirmation. □

Théorème 3.2 *Si la fonction (3.1) est $\mathbb{R}$-diffèrentiable en (x_0, y_0) et si les conditions de Cauchy–Riemann (3.7) sont satisfaites en ce point, alors la fonction $f(z)$ donnée par $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$.*

Démonstration. Le fait, que le conditions de Cauchy–Riemann soient satisfaites, implique que la matrice A dans (3.2) possède la structure (3.8). Elle correspond alors à une application $\mathbb{C}$-linéaire et peut être écrite sous la forme (3.4) avec $\mu = 0$. □

Contre-exemple. Dans le théorème 3.2 la condition de la $\mathbb{R}$-différentiabilité ne peut pas être remplacée par l'existence de dérivées partielles. La fonction

$$f(z) = \frac{z^5}{|z|^4} \tag{3.9}$$

est continue, possède des dérivées partielles par rapport à x et y et satisfait en $z = 0$ les conditions de Cauchy–Riemann (3.7). Pourtant, elle n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable.

Corollaire 3.3 *Si les derivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existent, sont continues dans un ouvert U et satisfont les conditions de Cauchy–Riemann sur U, alors la fonction $f(z)$ donnée par $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ est $\mathbb{C}$-différentiable sur U.*

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du théoreme précédent et du théorème 3.6 de [HW, p. 304]. □

I.4 Propriétés de fonctions holomorphes

Définition 4.1 (fonctions holomorphes) Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$-différentiable dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ s'appelle *holomorphe dans U*. On dit qu'une fonction est *holomorphe en un point* z_0 si elle est holomorphe dans un voisinage $D_\varepsilon(z_0)$.

Fonctions conformes.

> "Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird."
>
> (Gauss 1825, *Werke* IV, p. 189.)

Gauss a adressé l'article mentionné ci-dessus à la Société Royale de Copenhague. Pour traiter des problèmes en géodésie et en cartographie, on recherche des applications "similaires dans leurs plus petites parties", c'est-à-dire pour lesquelles des triangles infinitésimaux (ou des courbes qui se croisent) préservent leurs angles.

Pour deux courbes différentiables $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ et $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ qui se croisent en z_0 (c.-à-d., $\gamma(0) = \delta(0) = z_0$ et $\dot\gamma(0) \neq 0$, $\dot\delta(0) \neq 0$) on dénote l'angle entre les deux directions $\dot\gamma(0)$ et $\dot\delta(0)$ par $\sphericalangle(\gamma, \delta)$.

Théorème 4.2 (Riemann) *Si la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ ($U \subset \mathbb{C}$ ouvert) est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, alors elle préserve les angles (et leur orientation), c.-à-d., pour deux courbes qui se croisent en z_0 on a*

$$\sphericalangle(\gamma, \delta) \;=\; \sphericalangle(f \circ \gamma, f \circ \delta).$$

Une fonction qui préserve les angles s'appelle conforme.

Démonstration. Les directions de courbes $f \circ \gamma$ et $f \circ \delta$ sont $f'(z_0)\dot\gamma(0)$ et $f'(z_0)\dot\delta(0)$; chaque fois multiplié par la même constante $c = f'(z_0)$. Nous avons analysé en détail dans l'exemple 2.1 qu'une application $z \to c\,z$ est une rotation avec homothétie et préserve donc les angles. □

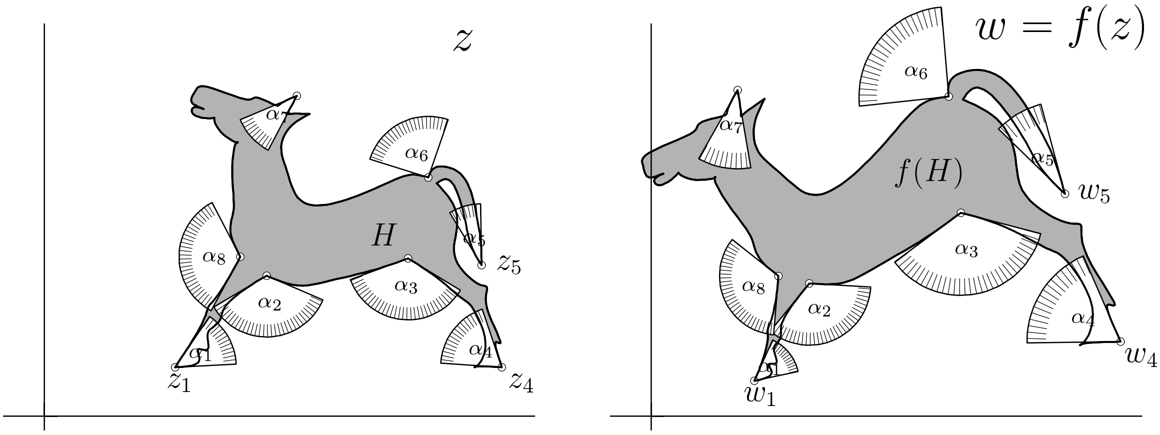


FIG. I.9: Exemple de fonction conforme, $w = (z + 0.2)^2$

Ce théorème est illustré dans Fig. I.9 où un animal pratique sa gymnastique matinale sous l'influence de $w = (z + 0.2)^2$. A certains angles apparents de son contour, nous avons attaché des rapporteurs, avant et après le "stretching". Nous voyons que les angles restent invariants, mais les rayons sont agrandis par le facteur $|f'(z_k)|$ et subissent une rotation d'angle $\arg f'(z_k)$. Pour ceux qui voudraient vérifier, voici quelques valeurs:

$$\begin{array}{llll} z_1 = 0.16 + 0.06i & f' = 0.72 + 0.12i & |f'| = 0.73 & \arg f' = 0.17 \\ z_4 = 0.56 + 0.06i & f' = 1.52 + 0.12i & |f'| = 1.52 & \arg f' = 0.08 \\ z_5 = 0.53 + 0.18i & f' = 1.47 + 0.37i & |f'| = 1.52 & \arg f' = 0.25\ . \end{array}$$

On peut observer, sur tous les dessins des exemples 2.1, 2.3, 2.4 et 2.5, que l'image d'une grille orthogonale reste orthogonale partout où $f'(z) \neq 0$. La fonction de l'exemple 2.2 ne préserve pas les angles (elle n'est pas conforme).

Fonctions biholomorphes. Une fonction holomorphe $f : U \to V$ (avec $U, V \subset \mathbb{C}$) s'appelle *biholomorphe*, si elle est bijective et si sa fonction inverse $f^{-1} : V \to U$ est aussi holomorphe.

L'exemple le plus simple est la fonction $\mathbb{C}$-linéaire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = az$ avec $a \neq 0$. Son inverse est $f^{-1}(w) = a^{-1}w$ qui est aussi $\mathbb{C}$-linéaire et donc holomorphe. Nous verrons plus tard (quand nous considèrons des fonctions exprimées par des séries) que chaque fonction holomorphe satisfaisant $f'(z_0) \neq 0$ est *localement biholomorphe*, c.-à-d., elle est biholomorphe entre des voisinages de z_0 et $w_0 = f(z_0)$.

La *transformation de Cayley* (2.7), illustrée dans la Fig. I.6, est biholomorphe de

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\} \qquad \text{mais aussi de} \qquad \mathbb{C}^- \to D_1(0),$$

du demi-plan gauche à l'intérieur du cercle unitaire (elle est sa propre inverse).

La *transformation de Joukovski* (2.10) est biholomorphe de

$$D_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \tag{4.1}$$

(voir Fig. I.7). Mais comme elle est symétrique en z et z^{-1}, elle est aussi biholomorphe entre *l'extérieur* du cercle et le plan fendu et joue un rôle important en mécanique des fluides.

La *fonction carré* $f(z) = z^2$ (voir l'exemple 2.3) est biholomorphe comme application

$$f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \tag{4.2}$$

En passant au coordonnées polaires on voit directement la bijectivité. Nous laissons comme exercice la vérification du fait que la fonction inverse $f^{-1}(w) = \sqrt{w}$ est holomorphe (exercice 16).

Fonctions harmoniques et applications en physique.

> "Eine vollkommen in sich abgeschlossene mathematische Theorie, welche ... fortschreitet, ohne zu scheiden, ob es sich um die Schwerkraft, oder die Electricität, oder den Magnetismus, oder das Gleichgewicht der Wärme handelt." (manuscript de Riemann 1850, *Werke* p. 545)

Théorème 4.3 (Riemann 1851) *Soit $f = u + iv$ holomorphe en U et soient u et v deux fois*[2] *continûment différentiables dans $\mathbb{R}^2$. Alors*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0, \tag{4.3}$$

i.e., u et v satisfont "l'équation de Laplace" (u et v sont des fonctions "harmoniques").

Démonstration. Les équations de Cauchy–Riemann sont $u_x = v_y$ et $v_x = -u_y$. On dérive la première équation par rapport à x et la deuxième par rapport à y. Cela donne $u_{xx} = v_{yx}$ et $v_{xy} = -u_{yy}$. Comme (voir le théorème de Schwarz, [HW, p. 317]) $v_{yx} = v_{xy}$, on obtient la première équation de (4.3). Pour la deuxième, on dérive les équations de Cauchy–Riemann par rapport à y et x respectivement. □

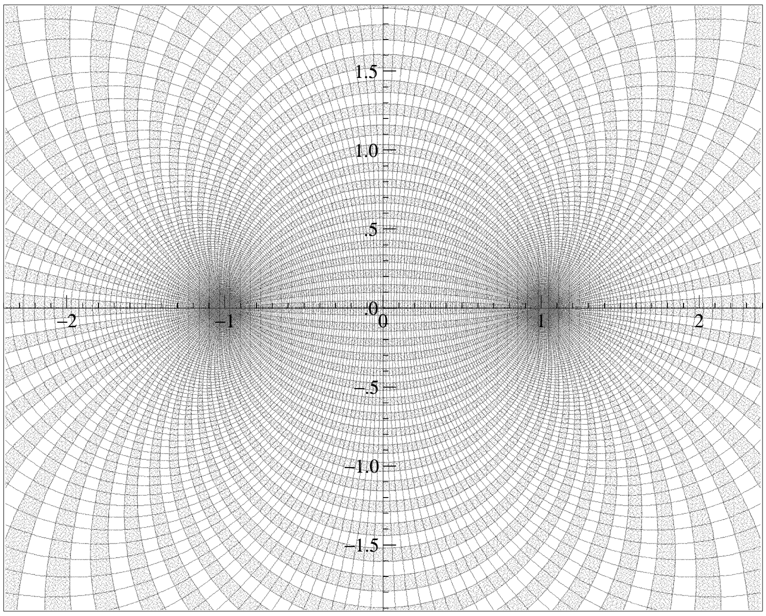


FIG. I.10: Champs d'un dipôle dans $\mathbb{R}^2$, $w = \log(z+1) - \log(z-1)$

Grâce à cette découverte, Riemann a ouvert l'application des fonctions holomorphes à de nombreux problèmes de la physique, puisque cette équation est satisfaite par le potentiel gravitationnel d'un corps (Laplace 1785, voir *Oeuvres* I, Mécanique celeste, publié 1843, p. 157), par les champs électriques et magnétiques (Gauss et W. Weber à Göttingen) et par la chaleur en équilibre (Fourier 1807; cf. citation de Riemann ci-dessus). Il faut rajouter à cette liste certains mouvements de liquides (les mouvements sans rotationnel; d'Alembert 1752, Helmholtz 1858).

Exemple 4.4 Le potentiel d'un dipôle (ou l'écoulement d'un liquide sortant d'une source et rentrant dans un trou) est créé par la fonction holomorphe $w = \log(z+1) - \log(z-1)$ (pour des arguments complexes le logarithme est définie par $\log z = \log|z| + i \arg z$; voir plus tard pour une discussion détailée). La Fig. I.10 montre les courbes de niveau des fonctions harmoniques $u(x,y)$ et $v(x,y)$, données comme parties réelle et complexe de $f(z) = \log(z+1) - \log(z-1)$.

[2]Nous allons voir plus tard que chaque fonction holomorphe est infiniment différentiable. L'hypothèse concernant les deuxièmes dérivées sera donc superflue.

I.5 Séries et fonctions analytiques

Pour $c \in \mathbb{C}$ et pour $a_k \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, \ldots$, considérons la série

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + a_3(z-c)^3 + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k \tag{5.1}$$

et étudions le domaine où elle représente une fonction, c.-à-d., où la série converge. La définition de la convergence de (5.1) est la même que pour une série dans $\mathbb{R}$ avec la seule différence que la valeur absolue est maintenant définie sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est un espace complet, on a aussi le critère de Cauchy (voir les paragraphes III.2 et III.7 de [HW]).

Rappelons que (5.1) converge *absolument*, si la série de terme général $|a_k| \cdot |z-c|^k$ converge. Elle converge *uniformement* sur $A \subset \mathbb{C}$, si pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe un N (indépendant de $z \in A$) tel que $\big|\sum_{k=n}^{m} a_k(z-c)^k\big| < \varepsilon$ pour $n, m \geq N$ et pour $z \in A$.

Définition 5.1 (rayon de convergence) *Pour une série avec coefficients $a_0, a_1, \ldots$ on définit*

$$\rho := \sup\Big\{|\zeta|\ ;\ \textit{la série}\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k\ \textit{converge}\Big\} \tag{5.2}$$

et on appelle ρ le rayon de convergence de la série.

Théorème 5.2 *Soit ρ le rayon de convergence de la série (5.1). Alors,*

- *pour chaque z avec $|z-c| < \rho$, on a convergence absolue;*
- *pour chaque z avec $|z-c| > \rho$, on a divergence;*
- *pour chaque r avec $r < \rho$, on a convergence uniforme sur le disque $D_r(c)$.*

Une série (5.1) définit alors une fonction complexe sur le disque $D_\rho(c)$. La démonstration de ce théorème repose sur le critère des majorants.

Lemme 5.3 (critère des majorants) *Supposons que $|a_k| \leq \gamma_k$ pour tout k et que la série réelle $\sum_{k\geq 0}\gamma_k\, r^k$ converge avec un $r \geq 0$. Alors, la série (5.1) converge absolument et uniformement sur $D_r(c)$ et son rayon de convergence ρ satisfait $\rho \geq r$.*

Démonstration. Pour $z \in D_r(c)$ nous avons $\big|\sum_{k=n}^{m} a_k(z-c)^k\big| \leq \sum_{k=n}^{m}\gamma_k\, r^k$ et l'affirmation est une conséquence du critère de Cauchy. □

Pour *démontrer le théorème*, choisissons un z_0 satisfaisant $r < |z_0 - c| < \rho$, pour lequel la série converge (Fig. I.11). Une condition nécessaire est $a_k(z_0-c)^k \to 0$ et il existe donc un M tel que $|a_k(z_0-c)^k| \leq M$ pour tout k. Par conséquent, $|a_k| \leq M/|z_0-c|^k =: \gamma_k$. Comme $r/|z_0-c| < 1$, la série $\sum_{k\geq 0}\gamma_k\, r^k$ converge et on peut appliquer le critère des majorants pour $z \in D_r(c)$. □

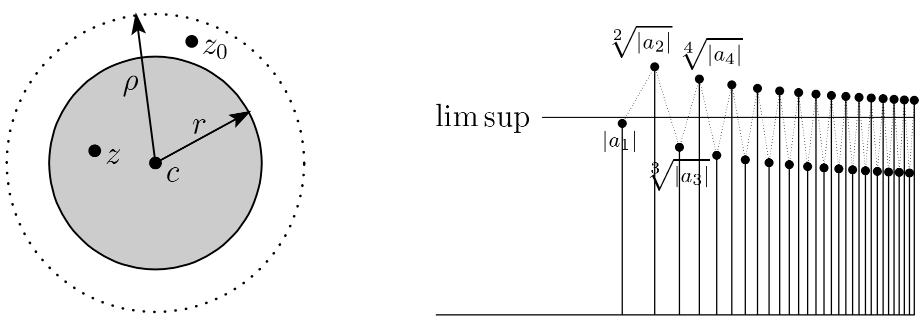


FIG. I.11: Preuve de la convergence uniforme et absolue pour $|z-c| \leq r < \rho$.

Théorème 5.4 *Le rayon de convergence de la série (5.1) est donné par*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \textit{(critère de la racine, Hadamard 1892).} \tag{5.3}$$

Si la limite suivante existe, le rayon de convergence est aussi donné par

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \qquad \textit{(critère du quotient).} \tag{5.4}$$

Démonstration. Si $|a_k| \cdot |z-c|^k \le r^k$ avec un $r<1$, le critère des majorants guarantit la convergence de la série (5.1). Cette condition peut être écrite sous la forme $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z-c| \le r$, et elle est satisfaite avec un $r<1$ pour k suffisamment grand si $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z-c| < 1$. Ceci implique que $\rho \ge (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,)^{-1}$. L'inégalité stricte $\rho > (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,)^{-1}$ n'est pas possible, car sinon il existerait un z avec $|z-c|<\rho$ et $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z-c| > 1$, c.-à-d., $|a_k|\cdot|z-c|^k \ge 1$ pour un nombre infini de k.

Pour la démonstration du critère du quotient on part avec la condition $|a_{k+1}|\cdot|z-c|^{k+1} \le r\cdot|a_k|\cdot|z-c|^k$ pour un $r<1$. En écrivant cette condition comme $\big(|a_{k+1}|/|a_k|\big)|z-c| \le r$, le reste de la preuve est identique à celle du critère de la racine. □

La considération des séries (5.1) avec argument complexe $z \in \mathbb{C}$ nous permet d'élargir le domaine de définition d'un grand nombre des fonctions importantes. Voici quelques exemples:

La fonction exponentielle est définie par la série

$$\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{5.5}$$

Le critère du quotient donne $\rho = \infty$. Ainsi, cette série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et la fonction exponentielle est définie sur tout le plan complexe.

Les fonctions trigonométriques sont définies par

$$\begin{aligned} \cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Comme $\exp z$, les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont définies pour tout $z \in \mathbb{C}$. En remplaçant z par iz dans (5.5) et en rassemblant les termes sans et avec le facteur i, on obtient la *formule d'Euler*

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \tag{5.7}$$

(attention: on effectue un réarrangement d'une série, ce qui va être justifié dans le paragraphe I.7).

La série logarithmique est donnée par

$$\log(1+z) := z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k. \tag{5.8}$$

Le rayon de convergence de cette série est $\rho = 1$. Le logarithme est donc défini par cette série sur le disque de rayon 1 centré en $c=1$. Pour le moment, on n'a pas encore démontré que le logarithme est la fonction inverse de la fonction exponentielle (voir le paragraphe I.8).

Définition 5.5 (fonction analytique) *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ avec $U \subset \mathbb{C}$ ouvert s'appelle analytique, si pour chaque $c \in U$ il existe une série de la forme (5.1) avec un rayon de convergence $\rho = \rho(c) > 0$ telle que sur le disque $D_\rho(c)$ on a*

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + a_3(z-c)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k. \tag{5.9}$$

Dans le reste de ce chapitre nous allons démontrer que chaque fonction analytique est holomorphe, nous discuterons le calcul avec des séries en présentant des exemples importants, et nous démontrerons qu'une série (5.1) est analytique dans le disque ouvert $D_\rho(c)$, si ρ designe le rayon de convergence de la série.

I.6 Holomorphie et analyticité des séries entières

Considérons une fonction $f(z)$ définie par une série avec un rayon de convergence $\rho > 0$ (pour simplifier la discussion, mais sans perdre la généralité nous supposons que le centre c est à l'origine):

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{6.1}$$

Cette fonction est continue sur $D_\rho(0)$, car la série converge uniformément sur $D_r(0)$ pour $r < \rho$ (appliquer le critère de Weierstrass; voir [HW], page 217).

Théorème 6.1 *La fonction $f(z)$ de (6.1) est $\mathbb{C}$-différentiable sur le disque $D_\rho(0)$ et sa dérivée est*

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \tag{6.2}$$

Démonstration. On obtient la série (6.2) en dérivant (6.1) terme par terme. Comme $\sqrt[k]{k} \to 1$, le critère de la racine montre que les deux séries (6.1) et (6.2) possèdent le même rayon de convergence. Il faut encore justifier la différentiation terme par terme, c.-à-d., qu'il est permis d'échanger différentiation et sommation.

Pour voir cela, nous considérons z et z_0 satisfaisant $|z|, |z_0| \le r < \rho$, et nous soustrayons

$$f(z_0) \;=\; a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k.$$

de $f(z)$. Ceci donne

$$f(z) - f(z_0) \;=\; \psi(z)(z - z_0)$$

avec

$$\psi(z) = a_1 + a_2(z+z_0) + a_3(z^2 + z z_0 + z_0^2) + a_4(z^3 + z^2 z_0 + z z_0^2 + z_0^3) + \ldots . \tag{6.3}$$

On voit tout de suite que $\psi(z_0)$ sera la dérivée $f'(z_0)$ annoncée en (6.2). Il nous reste à vérifier que la fonction $\psi(z)$ est *continue* en z_0. Le k-ième terme de la série pour $\psi(z)$ donne l'estimation

$$|a_k(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \ldots + z_0^{k-1})| \le k|a_k| r^{k-1}. \tag{6.4}$$

C'est le terme général, en valeur absolue, de la série (6.2) prise au point r. Nous savons que cette série converge absolument, et nous avons trouvé une série convergente qui majore la série (6.3) indépendamment de z. Le critère des majorants (Lemme 5.3) assure alors la convergence uniforme et, avec elle, la continuité. □

Corollaire 6.2 *Une fonction qui est analytique sur U est aussi holomorphe sur U.* □

Le théorème précédent peut être appliqué à la fonction $f'(z)$ et on voit itérativement qu'une fonction analytique n'est pas seulement une fois mais infiniment $\mathbb{C}$-différentiable (des exemples sont $\exp z$, $\cos z$ et $\sin z$ sur $\mathbb{C}$). La j-ième dérivée de (6.1) satisfait pour $|z| < \rho$,

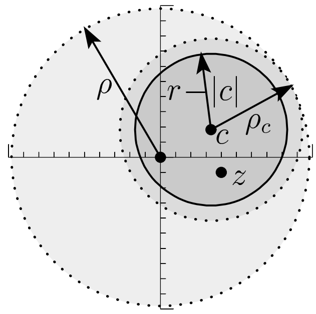
$$\frac{f^{(j)}(z)}{j!} = \sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} z^{k-j}, \tag{6.5}$$

et pour tout j cette série possède le même rayon de convergence que (6.1).

Théorème 6.3 (série de Taylor) *La fonction $f(z)$ de (6.1) est analytique sur le disque $D_\rho(0)$. Pour $c \in D_\rho(0)$ et z satisfaisant $|z-c| < \rho - |c|$ on a que*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-c)^j \qquad \textit{avec} \qquad c_j = \frac{f^{(j)}(c)}{j!}.$$

Le rayon de convérgence de cette série est $\rho_c \geq \rho - |c| > 0$.



Démonstration. En utilisant le théorème binomial on obtient

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (c + z - c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{k-j} (z-c)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} c^{k-j} \Big) (z-c)^j.$$

Il reste à vérifier que l'échange de la sommation dans la dernière égalité est permis sous les hypothèses du théorème. Comme $|z-c| \leq r - |c|$ avec $r < \rho$, une partie finie de la série double peut être majorée par

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} |a_k| \binom{k}{j} |c|^{k-j} |z-c|^j \leq \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} |a_k| \binom{k}{j} |c|^{k-j} (r - |c|)^j \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k =: B.$$

Le Théorème 7.1 du paragraphe suivant justifie donc cette échange et démontre la formule pour le rayon de convergence. □

I.7 Calcul avec des séries

Dans les années 1870, Weierstrass a passé ses vacances en Suisse (au Rigi) et avait avec lui la Thèse de Riemann comme lecture d'été. Il a alors rencontré le physicien Helmholtz et s'est plaint auprès de lui de sa grande difficulté à comprendre les méthodes de Riemann. Helmholtz lui demanda le travail et, quelques jours plus tard, dit à Weierstrass: "moi je les trouve faciles et naturelles" (pour le texte original cf. A. Sommerfeld, Vorl. über Theoret. Physik, Vol. II, p. 124 ou [Remm91, p. 430]).

Il ne s'agit certainement pas d'un manque d'intelligence chez Weierstrass, mais plutôt d'une conception différente du mot "comprendre"! Chez Weierstrass, "compris" signifie "démontré avec toute la rigueur dont on est capable". Absolument rigoureux sont seulement l'algèbre et les polynômes avec un passage à la limite prudent (séries infinies et leur convergence uniforme).

Le but de ce paragraphe est de démontrer rigoureusement que la somme, le produit, la composition, ... des fonctions analytiques donnent des fonctions analytiques. Pour la somme, ceci est simple, mais les autres opérations nécessitent de travailler avec des réarrangements et avec des séries doubles. Commençons alors à rappeler un résultat du cours Analyse I [HW, p. 192–198].

Réarrangement de séries doubles. Considérons une famille $\{a_{ij}\}_{i,j=0,1,2,\ldots}$ de nombres complexes disposés en tableau comme dans Fig. I.12 et supposons que nous voulions tout additionner. Il y a bien des manières de le faire. On peut additionner les éléments de la ligne i, dénoter le

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{00} & + & a_{01} & + & a_{02} & + & a_{03} & +\ldots & = & s_0 \\
+ & & + & & + & & + & & & + \\
a_{10} & + & a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & +\ldots & = & s_1 \\
+ & & + & & + & & + & & & + \\
a_{20} & + & a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23} & +\ldots & = & s_2 \\
+ & & + & & + & & + & & & + \\
a_{30} & + & a_{31} & + & a_{32} & + & a_{33} & +\ldots & = & s_3 \\
+ & & + & & + & & + & & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
= & & = & & = & & = & & & = \\
v_0 & + & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & +\ldots & = & ???
\end{array}
\tag{7.1}
$$

FIG. I.12: Tableau d'une série double

résultat par s_i, et calculer $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$; on peut aussi additionner les éléments de la colonne j, dénoter le résultat par v_j, et calculer $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$. On pourrait aussi écrire tous les éléments dans un arrangement linéaire. Par exemple, nous pouvons commencer par a_{00}, ensuite additionner les éléments a_{ij} pour lesquels $i + j = 1$, puis ceux avec $i + j = 2$, et ainsi de suite. Cela donne

$$
a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{30} + a_{21} + a_{12} + \ldots .
$$

La question qui se pose est la suivante: les différentes possibilités de sommation fournissent-elles la même valeur? A-t-on

$$
s_0 + s_1 + s_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots , \tag{7.2}
$$

et les arrangements linéaires convergent-ils aussi vers cette même valeur?

Théorème 7.1 *Supposons que la série double (7.1) soit telle qu'il existe un B avec*

$$
\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \le B \qquad \textit{pour tout } m.
$$

Alors, les séries dans (7.2), et tous les arrangements linéaires de la série double convergent absolument. Les expressions dans (7.2) et tous les arrangements linéaires ont la même somme. □

Considérons deux fonctions données par des séries

$$
\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \\
g(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

avec rayon de convergence $\rho_a > 0$ et $\rho_b > 0$ respectivement. Il est évident qu'on a

$$
f(z) + g(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \ldots + (a_k + b_k)z^k + \ldots \tag{7.4}
$$

et que la série (7.4) a un rayon de convergence $\rho \ge \min(\rho_a, \rho_b)$.

Produit. Si l'on calcule le produit des deux séries (7.3), terme par terme, et si l'on collecte les termes avec la même puissance de z, on obtient la série

$$
(a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)z^3 + \ldots . \tag{7.5}
$$

La question est, pour quels z cette série converge et, en cas de convergence, est-ce que la série représente le produit $f(z) \cdot g(z)$?

Théorème 7.2 (Produit de Cauchy) *Soient ρ_a et ρ_b les rayons de convergence des deux séries (7.3). Alors, la série (7.5) a un rayon de convergence $\rho \geq \min(\rho_a, \rho_b)$ et pour $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$ on a*

$$f(z) \cdot g(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \Big) z^k \;. \tag{7.6}$$

En conséquence, le produit de deux fonctions analytiques est analytique.

Démonstration. Le produit, terme par terme, des séries (7.3) donne un tableau avec éléments $a_i b_j z^{i+j}$. Comme le produit $f(z) \cdot g(z)$ correspond aux sommes doubles dans (7.2) et la série (7.5) est un arrangement linéaire, il suffit d'appliquer le Théorème 7.1. Pour $|z| \leq r < \min(\rho_a, \rho_b)$ on a l'estimation $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_i b_j z^{i+j}| \leq (\sum_{i\geq 0} |a_i| r^i)(\sum_{j\geq 0} |a_j| r^j) =: B$. Alors, la formule (7.6) est vraie pour z satisfaisant $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$. □

Exemple. Ce résultat nous permet de démontrer la formule $\exp(\alpha z) \cdot \exp(\beta z) = \exp((\alpha + \beta)z)$ pour $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$, et d'en déduire que $\exp z \cdot \exp w = \exp(z + w)$.

Composition de séries convergentes. Soit $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ une série avec $a_0 = 0$ (c.-à-d., $f(0) = 0$) et soit $g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \ldots$. Cherchons à calculer une série pour la composition $F(z) = g(f(z))$ (voir Fig. I.13). On insère la première série dans la deuxième et on réarrange la série en puissances de z :

$$\begin{aligned} F(z) \;&=\; b_0 + b_1(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)^2 + \ldots \\ &=\; b_0 + b_1 a_1 z + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) z^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) z^3 + \ldots \\ &=\; c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots \;. \end{aligned} \tag{7.7}$$

De nouveau on se demande si cette série possède un rayon de convergence positif et si elle représente la composition $F(z) = g(f(z))$.

Théorème 7.3 (composition de séries) *Soient $\rho_a > 0$ et $\rho_b > 0$ les rayons de convergence des séries pour $f(z)$ et $g(w)$. Choisissons $r > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \rho_b$.*

Alors, la série $F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ de (7.7) converge pour $|z| \leq r$ et on a

$$g(f(z)) \;=\; F(z).$$

Démonstration. Pour $|r| < \rho_a$, la fonction $r \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k$ est bien définie, elle est continue et s'annulle pour $r = 0$. Il est donc possible de choisir $r > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \rho_b$ (Fig. I.13).

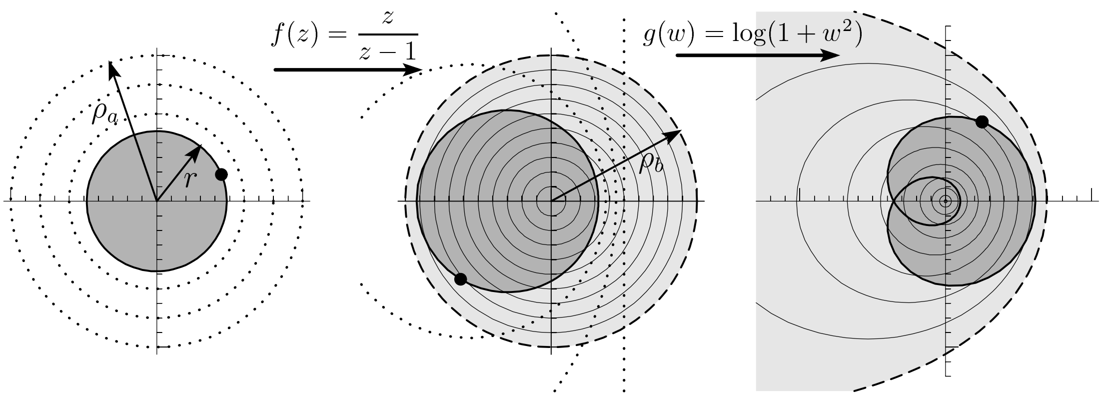


FIG. I.13: Composition de séries

En appliquant itérativement le Théorème 7.2, nous voyons que l'expression $f(z)^i$ est une série[3]

$$f(z)^i \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\Big)^i \;=\; \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} z^j$$

avec un rayon de convergence $\geq \rho_a$ et pour $|z| \leq r < \rho_a$ on a $\sum_{j=i}^{\infty} |a_{ij} z^j| \leq \sum_{j=i}^{\infty} |a_{ij}| r^j \leq \big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k\big)^i := s^i$ avec $s < \rho_b$. Pour obtenir la série $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ on a en effet échangé la sommation dans

$$g(f(z)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i f(z)^i \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} b_i \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} z^j \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{j} b_i a_{ij}\Big) z^j \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \;=\; F(z).$$

La justification vient du Théorème 7.1, car $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i}^{m} |b_i a_{ij} z^j| \leq \sum_{i=0}^{m} |b_i| s^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| s^i =: B$ pour tout $m \geq 0$. □

Comme application considérons un *quotient* $g(z)/f(z)$. Pour le développer en série, il suffit de traiter $1/f(z)$ car $g(z)/f(z) = g(z) \cdot (1/f(z))$ et on sait déjà développer un produit de séries. Si $a_0 \neq 0$ on peut mettre ce facteur en évidence et ainsi commencer la série de $f(z)$ par 1 (un exemple intéressant d'un quotient est la série pour $\tan z = \sin z / \cos z$).

Théorème 7.4 (quotient) *Soit*

$$f(z) \;=\; 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots \;=:\; 1 - h(z)$$

une série avec rayon de convergence $\rho > 0$ et soit $r > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < 1$. Alors, on a pour $|z| \leq r$,

$$\frac{1}{f(z)} \;=\; 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots\;.$$

Les coefficients c_k peuvent être calculées en comparant les mêmes puissances de z dans l'identité $(1 + a_1 z + \ldots)(1 + c_1 z + \ldots) = 1$ ou en calculant $1 + h(z) + h(z)^2 + \ldots$.

Démonstration. On applique le Théorème 7.3 avec $g(w) = (1-w)^{-1} = 1 + w + w^2 + \ldots$ et avec $w = h(z)$. □

Tous les résultats de ce paragraphe restent vrais si l'on considère des séries développées autour d'un point différent de l'origine. Par exemple, si $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$ et $g(w) = b_0 + b_1(w - w_0) + b_2(w - w_0)^2 + \ldots$ avec $w_0 = f(z_0) = a_0$, alors sous les hypothèses du Théorème 7.3 on a $g(f(z)) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$ pour $|z - z_0| \leq r$.

Equations différentielles. Soit une fonction $g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \ldots$ donnée, on cherche une fonction $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ avec

$$\frac{dw}{dz} = g(w), \qquad w(0) = 0, \tag{7.8}$$

(une condition initiale $w(z_0) = w_0$ peut être traitée en considérant des séries developpées autour de z_0 et w_0 respectivement). On insère la série pour w dans (7.8) et on utilise (7.7),

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots \;=\; g(f(z)) \;=\; b_0 + b_1 a_1 z + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) z^2 + \ldots\;. \tag{7.9}$$

Une comparaison des coefficients donne

$$a_1 = b_0, \quad 2a_2 = b_1 a_1, \quad 3a_3 = b_1 a_2 + b_2 a_1^2, \quad 4a_4 = b_1 a_3 + 2b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3, \quad \ldots \tag{7.10}$$

et nous permet de calculer récursivement les coefficients a_k de la solution de manière unique. Ici, l'étude de la convergence est plaisante (Cauchy, *Exerc. d'analyse* 1841).

[3] Attention: i est ici une lettre de sommation et non $\sqrt{-1}$.

Théorème 7.5 *Si la série pour $g(w)$ possède un rayon de convergence positif $\rho_b > 0$, alors la série $w = f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots$, obtenue en comparant les coefficients dans (7.9), a aussi un rayon de convergence positif $\rho_a > 0$ et donne une solution de l'équation différentielle.*

Démonstration. La série $g(w) = b_0+b_1w+b_2w^2+\ldots$ converge pour $|w| < \rho_b$. En posant $w = q^{-1}$ avec $0 < q^{-1} < \rho_b$ on en déduit que les coefficients peuvent être majorés par $|b_k| \leq Mq^k$.

On cherche à majorer les coefficients a_k donnés récursivement par (7.10). L'inégalité du triangle avec la majoration pour b_k donne

$$|a_1| \leq M, \quad 2|a_2| \leq Mq|a_1|, \quad 3|a_3| \leq M(q|a_2| + q^2|a_1|^2), \quad \ldots \tag{7.11}$$

L'idée est de définir une suite des nombres réels α_k en remplaçant dans (7.11) les $|a_k|$ par α_k et les "$\leq$" par "$=$". Cela donne

$$\alpha_1 = M, \quad 2\alpha_2 = Mq\alpha_1, \quad 3\alpha_3 = M(q\alpha_2 + q^2\alpha_1^2), \quad \ldots \tag{7.12}$$

La première observation est qu'on a l'estimation

$$|a_k| \leq \alpha_k \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots \tag{7.13}$$

(ceci se démontre par un argument d'induction standard) et la deuxième observation est que les α_k satisfont les relations de (7.10) si on remplace les b_k par Mq^k. Cela veut dire que la série $w = \alpha_1z + \alpha_2z^2 + \ldots$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = M(1 + wq + w^2q^2 + \ldots) = \frac{M}{1 - wq}, \qquad w(0) = 0. \tag{7.14}$$

Cette équation peut être résolue facilement (par "séparation des variables", [HW, p. 138])

$$(1 - wq)\, dw = M\, dz \quad \Rightarrow \quad w - \frac{w^2q}{2} = Mz \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1 - \sqrt{1 - 2qMz}}{q}, \tag{7.15}$$

et sa solution peut être devéloppée en série (à l'aide de la série binomiale), qui converge pour $|z| < 1/(2qM)$. □

Exemples. La fonction exponentielle $w = \exp z$ est solution de l'équation différentielle $\frac{dw}{dz} = w$ et la fonction tangante $\tan z = \sin z/\cos z$ est solution de $\frac{dw}{dz} = 1 + w^2$ (exercice 32).

Fonction inverse. Soit $w = f(z)$ avec $w_0 = f(z_0)$ donnée par un développement $w - w_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots$. On cherche le développement de la fonction inverse $z = g(w)$ sous la forme $z - z_0 = b_1(w - w_0) + b_2(w - w_0)^2 + b_3(w - w_0)^3 + \ldots$. Après des translations, on peut supposer z_0 et w_0 placé dans l'origine et on part de

$$\begin{aligned} w &= f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots \quad \text{donné;} \\ z &= g(w) = b_1w + b_2w^2 + b_3w^3 + \ldots \quad \text{cherché.} \end{aligned} \tag{7.16}$$

La fonction $g(w)$ est l'inverse de $f(z)$ si pour la fonction composée $F(z) = g(f(z))$ dans (7.7) nous avons $F(z) = z$. Une comparaison des coefficients donne

$$b_1a_1 = 1, \quad b_1a_2 + b_2a_1^2 = 0, \quad b_1a_3 + 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3 = 0, \quad \ldots \tag{7.17}$$

Si $a_1 \neq 0$, la première équation nous donne $b_1 = 1/a_1$, la deuxième $b_2 = -b_1a_2/a_1^2$, etc. Comme la $k$ième relation est de la forme $b_ka_1^k + \ldots = 0$, où les trois points indiquent des expressions déjà calculées, la seule condition $a_1 \neq 0$ nous permet de calculer récursivement tous les coefficients b_k.

La discussion de la *convergence* par la méthode des majorants (similaire à celle dans la démonstration du Théorème 7.5) est possible (voir le livre de H. Cartan), mais peu commode. Nous ramènerons la question à une équation différentielle (idée vue par Gerhard Wanner dans un cours de W. Gröbner 1963).

Théorème 7.6 *Soit $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ une série avec $a_1 \neq 0$ et rayon de convergence $\rho_a > 0$, alors la série $z = g(w) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \ldots$ avec coefficients donnés par (7.17) possède un rayon de convergence positif et on a $g(f(z)) = z$ dans un voisinage de 0.*

Démonstration. Si $g(w)$ est bien définie dans un voisinage de 0, une différentiation de la relation $g(f(z)) = z$ donne

$$g'(f(z))f'(z) \;=\; 1, \tag{7.18}$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots, \qquad z(0) = 0 \tag{7.19}$$

pour la fonction $z = g(w)$. Par le Théorème 6.1 pour la dérivée et le Théorème 7.4 pour le quotient, la série $c_0 + c_1 z + \ldots$ possède un rayon de convergence positif. On est maintenant en position d'appliquer le Théorème 7.5 qui dit que la solution de l'équation différentielle (7.19) est donnée par une série avec rayon de convergence positif. Cette série satisfait (7.18), c.-à-d., $F'(z) = 1$ pour $F(z) = g(f(z))$. En comparant les coefficients de $F'(z)$ avec ceux de 1 et en utilisant $F(0) = 0$, on voit que $F(z) = z$. □

Corollaire 7.7 (théorème d'inversion local) *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ (avec $U \subset \mathbb{C}$ ouvert) analytique dans U et soit $z_0 \in U$. Si $f'(z_0) \neq 0$, la fonction est localement biholomorphe, c.-à-d., elle est biholomorphe entre des voisinages de z_0 et de $w_0 = f(z_0)$.*

Démonstration. Avec z et w remplacés par $z - z_0$ et $w - w_0$ dans le Théorème 7.6, la condition $a_1 \neq 0$ devient $f'(z_0) \neq 0$. □

Exemples. La fonction $f(z) = z^2$ (voir Fig. I.5) est localement biholomorphe dans un voisinage de chaque $z_0 \neq 0$. Pour la fonction de Joukovski on a $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-2})$. Elle est localement biholomorphe pour $z_0 \neq \pm 1$ (voir Fig. I.7).

I.8 La fonction exponentielle et le logarithme

Etudions en détail quelques fonctions analytiques: la fonction exponentielle, son inverse le logarithme, les fonctions trigonométriques et les puissances complexes.

Fonction exponentielle. A part les polynômes et les fractions rationnelles, la fonction exponentielle est la fonction holomorphe la plus importante. Elle est définie par la série

$$\exp z \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{8.1}$$

dont le rayon de convergence est $\rho = \infty$.

Avec la fonction exponentielle, il est naturel de considérer aussi les fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \end{aligned} \tag{8.2}$$

qui sont également définies pour tout $z \in \mathbb{C}$ par ces séries. En remplaçant z par iz dans (8.1) et en rassemblant les termes sans et avec le facteur i, on obtient la *formule d'Euler* (1748)

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}. \tag{8.3}$$

Ce réarrangement de la série (8.1) est permis car elle converge absolument. Comme $\cos(-z) = \cos z$ et $\sin(-z) = -\sin z$, on arrive à exprimer les fonctions trigonométriques en termes de la fonction exponentielle de la manière suivante:

$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(\exp(iz) + \exp(-iz)\Big), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\Big(\exp(iz) - \exp(-iz)\Big). \tag{8.4}$$

Équation différentielle. Par différentiation, terme par terme, on voit que la fonction exponentielle $w = \exp(cz)$ (avec $c \in \mathbb{C}$) est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = c\,w. \tag{8.5}$$

Cette propriété est caractéristique pour la fonction exponentielle, car si $w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ satisfait (8.5), on a nécessairement $ka_k = ca_{k-1}$. Cette formule de récurrence donne $a_k = a_0 c^k / k!$ et on trouve ainsi la fonction exponentielle $f(z) = a_0 \exp(cz)$ comme la seule solution de l'équation différentielle satisfaisant $f(0) = a_0$.

Une autre propriété caractéristique est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 8.1 (théorème d'addition) *Soit* $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ *donnée par une série avec un rayon de convergence* $\rho > 0$ *et avec* $a_0 \neq 0$. *Alors* $f(z)$ *satisfait la relation*

$$f(z+w) = f(z)f(w) \qquad \textit{pour } z, w \textit{ avec } z, w, z+w \in D_\rho(0) \tag{8.6}$$

si et seulement si $f(z) = \exp(cz)$ *avec un* $c \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Avec le produit de Cauchy on a démontré au paragraphe I.7 que la fonction $f(z) = \exp(cz)$ satisfait (8.6) (voir aussi l'exercice 27). Pour voir qu'elle est la seule fonction satisfaisant (8.6), nous dérivons cette relation par rapport à w, ce qui donne $f'(z+w) = f(z)f'(w)$. En posant $w = 0$ on voit que $f(z)$ satisfait l'équation différentielle (8.5) avec $c = f'(0)$. On a donc $f(z) = a_0 \exp(cz)$. Mais, pour que cette fonction satisfasse (8.6) il faut que $a_0 = 1$. □

Ce théorème d'addition combiné avec la formule d'Euler (8.3) donne pour $z = x + iy$ que

$$\exp z = \exp(x+iy) = \exp x \exp(iy) = \exp x\,(\cos y + i \sin y). \tag{8.7}$$

Comme nous sommes familiers avec les fonctions réelles $\exp x$, $\cos y$ et $\sin y$ (avec argument réel), cette formule nous permet de mieux comprendre l'application $f(z) = \exp z$ qui est illustrée dans Fig. I.14. Les lignes verticales ($x = Const$) sont envoyées sur des cercles avec rayon $\exp x$, les lignes horizontales ($y = Const$) sur des rayons partant de l'origine avec un angle y. De plus, $\exp z \neq 0$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

On sait que les fonctions $\sin y$ et $\cos y$ sont 2π-périodiques. Ceci implique que

$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp z \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ et } z \in \mathbb{C}. \tag{8.8}$$

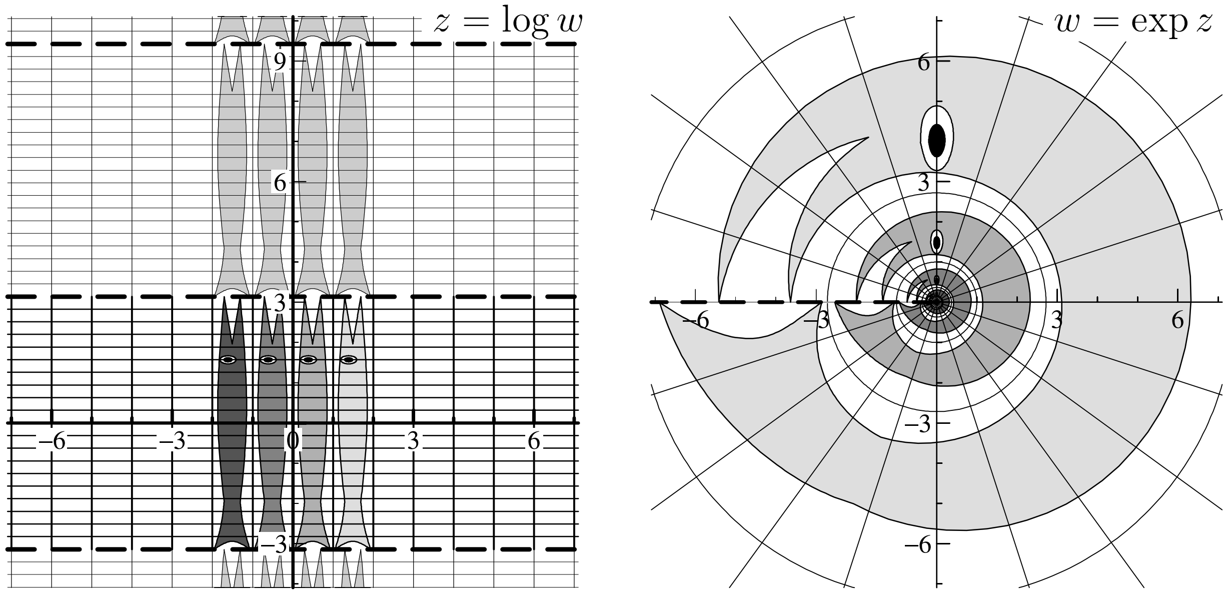


FIG. I.14: La fonction exponentielle et le logarithme

Théorème 8.2 *Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, la fonction $f(z) = \exp z$ est biholomorphe comme application entre*

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\ \eta - \pi < \operatorname{Im} z < \eta + \pi\} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{C} \setminus R_\eta$$

où $R_\eta = \{z = r\exp(i\eta \pm i\pi)\,;\ r \geq 0\}$ est le rayon partant de l'origine avec angle $\eta \pm \pi$.

Démonstration. Surjectivité. Prenons $w_0 \in \mathbb{C} \setminus R_\eta$ et écrivons ce nombre complexe en coordonnées polaires $w_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r > 0$ et $\varphi \neq \eta \pm \pi \bmod 2\pi$). Avec $z_0 := \log r + i\varphi + 2k\pi i$ (où k est un entier) on a que $\exp z_0 = w_0$. Il suffit de choisir k afin que $\varphi + 2k\pi$ soit dans l'intervalle ouvert $(\eta - \pi, \eta + \pi)$ pour conclure la surjectivité de l'application exponentielle.

Injectivité. Soit $\exp z_0 = \exp z_1$ avec $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_1 = x_1 + iy_1$ et $\eta - \pi < y_0, y_1 < \eta + \pi$. La formule (8.7) implique que $x_1 = x_0$ (car $\exp x_1 = |\exp z_1| = |\exp z_0| = \exp x_0$) et $y_1 - y_0 = 2k\pi$ avec un entier k. Comme la distance $|y_1 - y_0|$ est strictement plus petite que 2π, il en suit $k = 0$ et l'injectivité de l'application.

Holomorphie. La fonction $f(z) = \exp z$ est analytique et donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Comme $f'(z) = \exp z \neq 0$ partout dans $\mathbb{C}$, le théorème d'inversion local (Corollaire 7.7) implique que la fonction inverse est aussi holomorphe. □

Le logarithme. Le but est de définir le logarithme comme application inverse de la fonction exponentielle. Pour ceci il faut restreindre le domaine de définition de $\exp z$, par exemple, à la bande $B := \{z \in \mathbb{C}\,;\ -\pi < \operatorname{Im} z < +\pi\}$ (voir le Théorème 8.2). On obtient alors

$$\operatorname{Log} z := \log|z| + i\arg z \tag{8.9}$$

où l'argument $\arg z$ est choisi pour que $-\pi < \arg z \leq +\pi$. Cette fonction, qui est holomorphe par le Théorème 8.2, est la *branche principale du logarithme*. Elle est définie sur $\mathbb{C} \setminus R_0$ et elle est souvent notée $\operatorname{Log} z$ (avec un L majuscule).

On peut aussi définir le logarithme comme *fonction multivaluée*

$$\log z := \log|z| + i\arg z + 2k\pi i \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8.10}$$

Il faut faire attention, car $\log z$ n'est pas un seul nombre complexe mais un ensemble de nombres complexes. Quel que soit k dans (8.10), on a $\exp(\log z) = z$. En contraste avec $\operatorname{Log} z$, l'expression $\log z$ est définie sur tout le plan complexe (à l'exception de origine). Pour un nombre réel négatif on a $\log(-x) = \log x + (2k+1)\pi i$ (si $x > 0$).

Équation différentielle. Soit $f(z) = \log z$ la fonction (8.10) avec un k fixé (par exemple, $f(z) = \operatorname{Log} z$), ou une des fonctions inverses de la fonction exponentielle vue au Théorème 8.2, alors $f(z)$ est holomorphe et on a $\exp(f(z)) = z$. Une différentiation par rapport à z donne $\exp(f(z))f'(z) = 1$. En conséquence, la fonction $w = \log z$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}. \tag{8.11}$$

La valeur initiale est $w(1) = 0$ pour la branche principale et $w(1) = 2k\pi i$ pour les autres branches.

Devélopement en série. Avec l'argument z remplacé par $1+z$ on voit que $\operatorname{Log}(1+z)$ est solution de l'équation differentielle $\frac{dw}{dz} = 1/(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$. Une intégration, terme par terme, donne alors

$$\operatorname{Log} z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad \text{pour } |z| < 1. \tag{8.12}$$

La relation fonctionnelle. Le théorème d'addition pour la fonction exponentielle implique que $\exp(\log(zw)) = zw = \exp(\log z)\exp(\log w) = \exp(\log z + \log w)$. On en déduit que

$$\log(zw) = \log z + \log w + 2k\pi i \tag{8.13}$$

pour deux nombres complexes non nuls. L'entier k est déterminé par la branche du logarithme choisie. Si l'on considère deux nombres complexes dans $\mathbb{C} \setminus R_0$ et la branche principale du logarithme, on a

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + \begin{cases} 2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w < \pi \\ 0 & \text{si } \arg z + \arg w \in (-\pi, \pi) \\ -2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w > -\pi \end{cases} \tag{8.14}$$

En particulier, on a $\log z^n = n \log z + 2k\pi i$ pour des entiers n et donc aussi $z^n = \exp(n \log z)$. Cette formule est la motivation pour considérer aussi des puissances complexes.

La puissance complexe. Pour un nombre complex $c \in \mathbb{C}$ et pour la variable complexe $z \neq 0$ nous définissons

$$z^c := \exp(c \log z). \tag{8.15}$$

Ici, la fonction $\log z$ est multivaluée. Ceci signifie que z^c est aussi multivaluée en général. Pour chaque branche de $\log z$, cette fonction est holomorphe comme composition des fonctions holomorphes. Considérons quelques cas particuliers:

- Si $c = n$ est un entier positif, on a $z^c = z \cdot \ldots \cdot z$ (n fois); cette valeur est unique;
- Si $c = -n$ est un entier négatif, on a $z^c = z^{-1} \cdot \ldots \cdot z^{-1}$ (n fois); cette valeur est unique;
- Pour $c = 1/n$, la valeur z^c représente les n solutions de $w^n = z$, et on les obtient en prenant une solution et en la multipliant par $\exp(2k\pi i/n)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) qui sont les $n$ièmes racines d'unité;
- Si $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un nombre irrationnel (par exemple $c = \sqrt{2}$), l'expression z^c représente une infinité des nombres complexes; ils sont dense sur le cercle avec rayon $|z|^c$ centré à l'origine;
- Si $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'expression z^c représente une infinité des nombres complexes; ils sont situés sur une spirale et donnés par $z^c = \exp(c \operatorname{Log} z)\exp(2k\pi i c)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Échangeons maintenant les rôles de c et z dans (8.15) et considérons

$$c^z := \exp(z \operatorname{Log} c). \tag{8.16}$$

Cette fois il s'agit d'une vraie fonction, car on a fixé $\operatorname{Log} c$ comme la valeur de la branche principale. Avec $e := \exp(1) = 2.71828\ldots$, on a $\operatorname{Log} e = 1$ et donc aussi $e^z = \exp(z \cdot 1) = \exp(z)$. Ceci justifie la notation e^z pour la fonction $\exp z$.

I.9 Exercices

1. Calculer les deux racines du polynôme
$$z^2 + (1+4i)z - (5+i) = 0.$$

2. Écrire le nombre complexe $c = -2 + 2i$ en coordonnées polaires et calculer $\sqrt[3]{c}$ (trois solutions).

3. En utilisant la formule de Cardano (voir [HW, p. 7]) calculer la solution réelle de l'équation
$$z^3 - z + 1 = 0.$$
Vérifier le résultat avec un logiciel comme Maple.

4. Considérons une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$.
Avec l'identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ de (1.3) elle peut être écrite sous la forme $w = f(z)$.
Exprimer $f(z)$ en termes de u, v et $z = x + iy$.

5. Décrire géométriquement les parties du plan complexe définies par
   a) $|z| < 1, \quad |z+1| < 1, \quad |z-1| \le 1,$
   b) $\operatorname{Re} z \ge -1/3, \quad \operatorname{Re} z + 3 \operatorname{Im} z < 4,$
   c) $3\pi/4 \le \arg z \le 5\pi/4.$

6. Lesquels des ensembles de l'exercice 5 sont ouverts, fermés, bornés, compacts ?

7. Pour $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$ considérons l'équation
$$az\overline{z} + b\overline{z} + \overline{b}z + c = 0.$$
Montrer que cette équation représente un cercle dans $\mathbb{C}$ si $a \ne 0$ et $|b|^2 > ac$. Discuter le cas $a = 0$. Que se passe-t-il si $|b|^2 \le ac$?

8. Avec l'identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ de (1.3) chaque application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peut être écrite sous la forme
$$f(z) = \lambda z + \mu \overline{z} \tag{9.1}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (uniquement déterminés).

9. Montrer qu'une application (9.1) satisfait
$$\mathbb{C}\text{-linéaire} \quad \Leftrightarrow \quad f(i) = if(1) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 0.$$

10. Étudier la fonction $w = f(z) = z^{-1}$ et démontrer que cette fonction conserve les cercles, c.-à-d., l'image d'un cercle est un cercle.

11. L'image d'un cercle $\{z\,;\,|z-a| = r\}$ par la transformation de Cayley (2.7) est de nouveau un cercle (ou une droite). Déterminer son centre et son rayon.

12. Soit $D = \{z\,;\,|z| > 1\}$, l'exterieur de cercle unité. Demontrer que la transformation de Joukowski
$$f : D \to \mathbb{C} \setminus [-1,1] \qquad \text{définie par} \qquad z \mapsto w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big),$$
considérée comme application de D dans $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ est surjective et injective. Etudier l'application inverse $f^{-1} : w \mapsto z$. Dessiner les images inverses des lignes $\operatorname{Im} w = Const$ (écoulement "potentiel" autour d'un cylindre).
Indication. L'image de $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ est $w = \cos\varphi$.

13. Décomposer la fonction $w = f(z) = z^4$ en partie réele et imaginaire $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Calculer les dérivées partielles et vérifier les équations de Cauchy–Riemann.

14. Soit $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ donnée. Trouver toutes les fonctions $v(x,y)$ qui satisfont avec $u(x,y)$ partout les équations de Cauchy–Riemann.

15. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-différentiable. Montrer que la fonction

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\widetilde{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \overline{z} \in U\}$. Quelle est la dérivée de $g(z)$?

16. La fonction carrée $f(z) = z^2$, vue comme application $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, est bijective. Montrer que la fonction inverse $f^{-1}(w) = \sqrt{w}$ est holomorphe.

17. A chaque matrice complexe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(c,d) \neq 0$ nous associons la fonction

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Montrer que

$$f_{AB} = f_A \circ f_B \qquad \text{c.-à-d.} \qquad f_{AB}(z) = f_A(f_B(z)).$$

En déduire que, pour $c \neq 0$ et $\det A \neq 0$, la fonction $f_A(z)$ est biholomorphe entre $\mathbb{C} \setminus \{-c^{-1}d\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{c^{-1}a\}$. Quelle est la fonction inverse de $f_A(z)$?

18. En utilisant le corollaire 3.3 démontrer que la fonction

$$\log z := \log |z| + i \arg z$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

19. Trouver une solution $u(x,y)$ du problème de Dirichlet suivant:

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega = [0,1] \times [0,1], \qquad u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad u(x,1) = x, \quad u(1,y) = y.$$

Idée. Considérer la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe (polynomial très simple).

20. Déterminer le rayon de convergence de la série binomiale ($s \in \mathbb{R}$)

$$(1+z)^s := 1 + s\,z + \frac{s(s-1)}{2!}\,z^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-k+1)}{k!}\,z^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k.$$

21. Déterminer le domaine de définition de la fonction de Bessel d'indice zéro définie par

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\,z^{2k}.$$

22. On sait que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-i)^k$ converge pour $z = 4$ et diverge pour $z = -8$. Que sait on au sujet de la convergence ou de la divergence des séries suivantes?

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1+i)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k 9^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k 5^k.$$

23. Déterminer les coefficients de la série

$$\frac{z^2 + 11z - 2}{(2z-1)(z^2-4)} = a_0 + a_1\,z + a_2\,z^2 + a_3\,z^3 + \ldots \tag{9.2}$$

et calculer le rayon de convergence de la série ainsi obtenue.
Pour une fraction rationnelle arbitraire, deviner une formule pour le rayon de convergence.
Quel est le rayon de convergence de la série qu'on obtient si l'on développe la fonction de (9.2) autour du point $c = 1$?
Indication. Décomposition en fractions simples.

24. Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ deux suites dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe et que cette limite est non-negative. Alors on a toujours

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

(om a utilisé ce résultat dans la preuve du théorème sur la $\mathbb{C}$-différentiabilité d'une série entière). Montrer par un contre exemple que l'affirmation

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n) \cdot \limsup_{n\to\infty}(b_n)$$

est fausse en général.

25. Soit $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ donnée par une série ayant $\rho > 0$ comme rayon de convergence. Démontrer que

$$F(z) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} + a_3 \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

est une primitive de $f(z)$ sur $D_\rho(0)$, c.-à-d., le rayon de convergence de cette série est ρ et on a que $F'(z) = f(z)$.

26. La fonction $\arctan z$ est la primitive de $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ qui s'anulle pour $z = 0$. Calculer les coefficients de la série pour $\arctan z$.
Résultat. $\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$.

27. Démontrer que

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w.$$

28. Exprimer les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ en termes de $\exp(iz)$ et $\exp(-iz)$ et utiliser le résultat de l'exercice 27 pour démontrer la formule

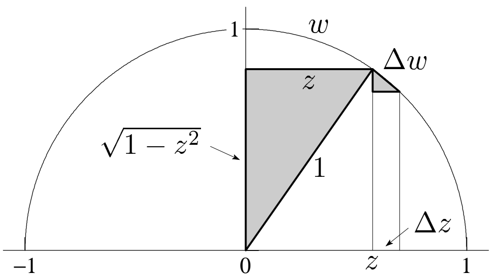
$$\sin(z+w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w.$$

29. Calculer les cinq premiers termes de la série pour $f(z) = \exp(s \log(1+z))$ et comparer les avec la série de l'exercice 20.

30. Soit $w = \arcsin z$. Inspirez vous du dessin (qui lui même est inspiré d'un dessin de Newton 1669) pour voir que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Insérer pour cette dernière fonction la série binomiale et obtenir par intégration la série (de Newton) pour $\arcsin z$. Déterminer le rayon de convergence.



31. Les *nombres de Bernoulli* sont les coefficients de la série

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \frac{B_4}{4!} z^4 + \ldots \, . \tag{9.3}$$

a) Démontrer la formule de récurrence

$$\binom{k}{0} B_0 + \binom{k}{1} B_1 + \ldots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} = 0$$

et calculer les premiers dix nombres de Bernoulli.
b) En observant que

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \tag{9.4}$$

démontrer que $B_j = 0$ si $j > 1$ est impair.

c) En remplaçant z par iz dans (9.4) trouver les coefficients de la série pour

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j .$$

d) Vérifier l'identité $\tan z = \cot z - 2\cot(2z)$ et en déduire la formule

$$\tan z \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}\, z^{2k-1}.$$

32. Déterminer les premiers termes de la série pour $\tan z$ de plusieurs manières différentes:
a) comme le quotient des deux séries dans $\tan z = \sin z / \cos z$;
b) comme fonction inverse de la série pour $\arctan z$ (utiliser les formules pour la composition des séries);
c) comme solution de l'équation différentielle $w' = 1 + w^2$ (justifiér cette équation différentielle).

33. Soient $\rho_a > 0$ et $\rho_b > 0$ les rayons de convergence des séries pour $f(z)$ et $g(w)$ et soit $f(0) = 0$. La démonstration du théorème 7.3 (composition de séries) montre que la série pour la fonction composée $g(f(z))$ possède un rayon de convergence

$$\rho \geq \min\Big(\rho_a\, ,\, \sup\Big\{r \;\Big|\; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \rho_b\Big\}\Big).$$

Calculer cette estimation du rayon de convergence pour l'inverse de la série $\cos z$:

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1 - f(z)} \qquad \text{où} \qquad f(z) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots .$$

Résultat. $\log(2 + \sqrt{3})$.

34. Montrer que l'équation cubique

$$z^3 - 3z - w = 0 \tag{9.5}$$

possède une solution unique proche de 0 si w et suffisamment petit. Plus précisement, il existe des voisinages U de $z_0 = 0$ et V de $w_0 = 0$ tels que pour tout $w \in V$ il existe un unique $z \in U$ satisfaisant (9.5). Devéloper cette racine en puissances de w (calculer les premiers 3 termes).

35. Déterminer toutes les racines complexes des équations suivantes:

$$\sin z = 0, \qquad \cos z = 0, \qquad \exp(2z) - 5\exp z + 4 = 0.$$

36. Devéloper la fonction $f(z) = \log z$ (branche pricipale) en série autour d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ qui n'est pas sur l'axe réel négatif. Quel est le rayon de convergence de cette série?

37. *Une exercice difficile.* Démontrer, par récurrence, que pout tout $z \in \mathbb{C}$ et pour $n \geq 2$ on a

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n \;=\; 1 + z + \sum_{k=2}^{n} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{z^k}{k!}.$$

En déduire que pour tout nombre complexe z,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n \;=\; \exp z.$$

38. Démontrer pour $|x| < 1$ que

$$\arctan x = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i + x}{i - x}\right)$$

a) à l'aide de la formule d'Euler appliquée à $x = \tan z = \sin z / \cos z$;
b) à l'aide de séries entiéres pour $\arctan z$ et $\log(1 + z)$.

39. Démontrer les identités (d'Euler 1746 et de Johann Bernoulli 1702)

$$i^{\,i} = e^{-\pi/2}, \qquad e^{i\pi/2} = i.$$

Quelles autres valeurs pour $i^{\,i}$ et $e^{i\pi/2}$ pourrait-on imaginer?

40. Pour un z fixé (par exemple, $z := 1 + i$), les valeurs représentées par $z^{0.1+i0.01}$ sont toutes sur une spirale. Donner cette spirale en coordonnées polaires sous la forme $r = s(\varphi)$.

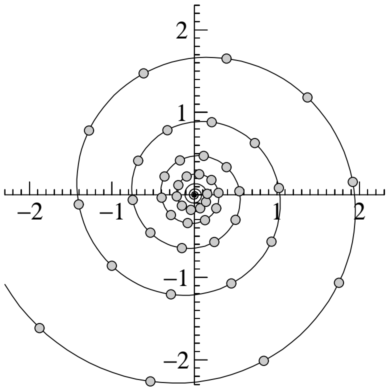


FIG. I.15: Les valeurs de $(1 + i)^{0.1+i0.01}$ (Exercice 40).