

# Chapitre II

## Calcul intégral et la théorie de Cauchy

“Was soll man sich nun bei  $\int \varphi x \cdot dx$  für  $x = a + ib$  denken? . . . Ich behaupte nun, dass das Integral  $\int \varphi x \cdot dx$  nach zweien verschiedenen Übergängen immer einerlei Werth erhalte.”

(C.F. Gauss 1811, lettre à Bessel, *Werke* 8, p.91)

“L’intention de Cauchy, proclamée dans l’introduction de son mémoire, était de rendre rigoureuse une méthode d’intégration utilisée déjà par Euler et surtout par Laplace . . .”

(B. Belhoste, *Cauchy*, p. 179, en parlant de Cauchy 1814)

Le “Mémoire” soi-disant “le plus important des travaux de Cauchy” est intitulé *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre les limites imaginaires*, publié en 1825, en quelques exemplaires, et inclus seulement en 1974 dans les *Oeuvres de Cauchy* (cf. [Remmert 1991]).

Le but de ce chapitre est de donner un sens à  $\int_{c_0}^c f(z) dz$  où  $c_0, c$  sont des nombres complexes reliés par une courbe et  $z$  est une variable complexe. La théorie du calcul intégral complexe nous permet de mieux comprendre les fonctions holomorphes et analytiques introduites au chapitre I.

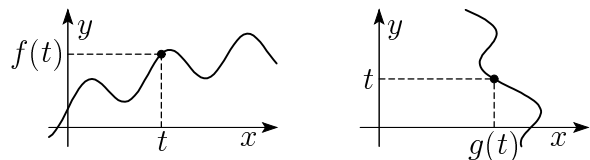
### II.1 Chemins et courbes

Comme motivation de la définition suivante, considérons une fourmi se promenant sur le plan complexe. On peut décrire son chemin en donnant à chaque instant  $t$  la position de la fourmi, i.e., les deux coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$ .

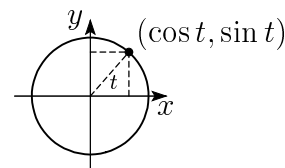
**Définition 1.1** Un *chemin* ou une *courbe paramétrée* dans  $\mathcal{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est une fonction continue d’un intervalle fermé dans  $\mathcal{C}$ , c.-à-d.,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Nous supposons en plus que  $\gamma(t)$  est continûment différentiable par morceaux.

Voici quelques exemples simples:

- Des fonctions  $y = f(x)$  et  $x = g(y)$  peuvent être écrites sous la forme  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$  resp.  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}$ .



- Un cercle dans le plan est donné par  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ .



- Soient  $c_1, c_2, c_3$  trois points dans  $\mathcal{C}$ . Le bord du triangle formé par ces trois points est décrit par

$$\gamma(t) = \begin{cases} c_1 + 3t(c_2 - c_1) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3 \\ c_2 + (3t - 1)(c_3 - c_2) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ c_3 + (3t - 2)(c_1 - c_3) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

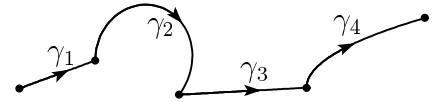
**Chemin reversé.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  un chemin dans  $\mathcal{C}$ . On dénote par  $(-\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  le chemin parcouru dans le sens inverse. Il est donné par  $(-\gamma)(t) := \gamma(1 - t)$ .

**Chemin composé.** Soit  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  un chemin et  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  un autre avec  $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ . Alors nous écrivons pour le *chemin composé* des deux chemins  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  en posant

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

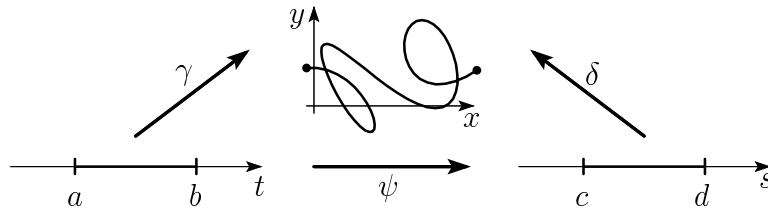
On peut aussi composer plusieurs chemins si le point final d'un chemin est égal au point de départ du chemin suivant.

On utilise la notation  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$ .



**Définition 1.2 (courbe)** Deux chemins  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont *équivalents* s'il existe un difféomorphisme  $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  (bijective et  $\psi$  ainsi que  $\psi^{-1}$  continûment différentiables) tel que  $\gamma = \delta \circ \psi$ , i.e.,  $\gamma(t) = \delta(\psi(t))$ .

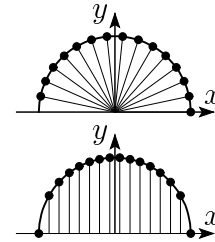
Une *courbe* est une classe d'équivalence de chemins. Une *courbe orientée* est une classe d'équivalence de chemins pour la relation précédente avec  $\psi$  strictement croissante.



*Exemple.* Les deux paramétrisations

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi,$$

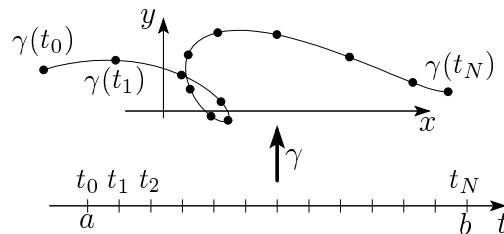
$$\delta(s) = \begin{pmatrix} -s \\ \sqrt{1 - s^2} \end{pmatrix}, \quad -1 < s < 1.$$



représentent le même demi-cercle ( $s = \psi(t) = -\cos t$  dans la Définition 1.2). En interprétant le paramètre  $t$  respectivement  $s$  comme le temps, on observe que la courbe est parcourue avec une vitesse constante lors de la première paramétrisation. Lors de la deuxième, la partie au sommet est parcourue moins vite que les parties à gauche et à droite.

Pour une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ , considérons une subdivision  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  de l'intervalle  $[a, b]$  et les points correspondants sur la courbe. Une approximation de la longueur d'arc est la longueur du polygone reliant les points  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_N)$ . On obtient donc, en utilisant le théorème de Lagrange,

$$\begin{aligned} \text{longueur} &\approx \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} |\dot{\gamma}(t_i)| (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$



Ceci est une somme de Riemann. La limite quand  $\max_i |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$  donne alors la longueur cherchée.

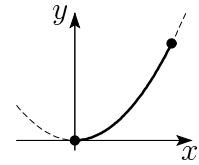
**Définition 1.3 (longueur d'arc)** La *longueur* de la courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  est

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Un changement des coordonnées ( $s = \psi(t)$ ) montre que cette définition est indépendante du représentant d'une courbe. De plus, on a  $L(-\gamma) = L(\gamma)$  et  $L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ .

*Exemple.* Considérons la parabole  $y = x^2$  paramétrisée par  $\gamma(t) = (t, t^2)^T$ . Comme  $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)^T$ , on obtient pour la longueur d'arc entre  $t = 0$  et  $t = 1$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \dots = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}).$$



## II.2 Intégrales curvilignes

Le problème consiste à donner un sens à une intégrale complexe  $\int_{c_0}^c f(z) dz$  où  $c_0 = a_0 + ib_0$ ,  $c = a + ib$  et  $z$  parcourt un chemin  $\gamma(t)$  reliant  $c_0$  avec  $c$ .

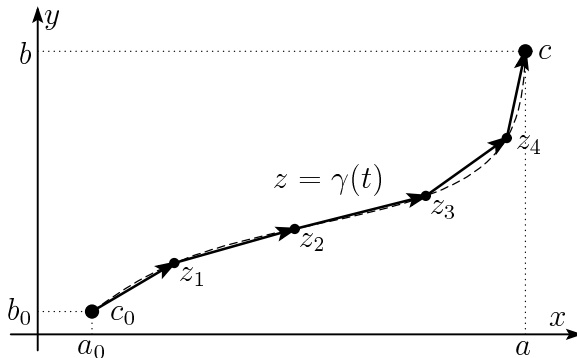


FIG. II.1: Chemin pour intégrale curviligne et un dessin de Riemann [Neuenschwander 1996]

L'idée est de placer sur la courbe une suite de points  $c_0 = z_0, z_1, \dots, z_n = c$  (Fig. II.1) et de poser

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \lim \left( f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \dots + f(z_{n-1})(z_n - z_{n-1}) \right) \quad (2.1)$$

où la limite est prise sur des subdivisions de plus en plus fines de la courbe. Supposons que la courbe soit déterminée par une application  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ , qui soit continûment différentiable par morceaux. Inspirés par  $z_k = \gamma(t_k)$ , pour lesquels  $z_{k+1} - z_k \approx \dot{\gamma}(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$  si  $t_{k+1} - t_k$  est suffisamment petit, l'expression de (2.1) devient une somme de Riemann. Ceci sert comme motivation de la définition suivante.

**Définition 2.1 (intégrale curviligne)** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  une courbe paramétrée qui est continûment différentiable par morceaux<sup>1</sup> et soit  $f(z)$  une fonction définie et continue sur le support  $\gamma([a, b])$  de la courbe. On définit alors l'intégrale curviligne comme

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt. \quad (2.2)$$

On doit maintenant montrer que cette intégrale curviligne est *bien définie*, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du choix de la paramétrisation de la courbe orientée.

**Théorème 2.2** Soient  $\gamma(t)$  et  $\delta(s)$  deux chemins équivalents (Définition 1.2) est soit  $\psi(t)$  strictement croissante. Alors on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz$$

De plus, l'intégrale curviligne est linéaire en  $f$  et satisfait

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

<sup>1</sup>Le chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  est différentiable par morceaux, s'il existe un partage  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$  tel que la restriction de  $\gamma(t)$  sur  $[a_{k-1}, a_k]$  est continûment différentiable pour tout  $k = 1, \dots, m$ . Dans cette situation, l'intégrale de (2.2) doit être interprétée comme la somme des intégrales sur les sous-intervalles.

*Démonstration.* Les deux chemins sont reliés par  $\gamma(t) = \delta(\psi(t))$ . La substitution  $s = \psi(t)$ ,  $ds = \dot{\psi}(t) dt$  donne alors

$$\int_{\delta} f(z) dz = \int_c^d f(\delta(s)) \dot{\delta}(s) ds = \dots = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Les formules pour les chemins renversés et composés sont obtenues de la même manière.  $\square$

“Würde auch das Integral  $\int_{\partial B} (\zeta - c)^{-1} d\zeta$  verschwinden, so gäbe es keine Funktionentheorie!”  
(R. Remmert, *Funktionentheorie*, 1983)

**Exemple 2.3** Soit  $\gamma(t) = c + re^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$  une paramétrisation du cercle avec rayon  $r > 0$  centré au point  $c \in \mathbb{C}$ . Pour un entier  $n$ , on a

$$\int_{\gamma} (z - c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce résultat est obtenu par un calcul direct (la dernière égalité uniquement pour  $n \neq -1$ )

$$\int_{\gamma} (z - c)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi}.$$

**Théorème 2.4** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin qui est continûment différentiable par morceaux et soit  $f(z)$  continue sur le support de  $\gamma$ , c.-à-d., sur  $\gamma([a, b])$ . Alors, on a

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma) \quad \text{où} \quad M = \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))|.$$

*Démonstration.* Si  $\gamma(t)$  est continûment différentiable, on a

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt \leq M \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = M \cdot L(\gamma).$$

Dans le cas où  $\gamma(t)$  est seulement continûment différentiable par morceaux, il faut appliquer ce raisonnement à chaque sous-intervalle où la fonction est continûment différentiable.  $\square$

## II.3 Existence des primitives

Le théorème fondamental du calcul différentiel dans  $\mathbb{R}$  exprime le fait que chaque fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possède une primitive  $F(x)$  et que  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Nous allons étudier si ce résultat reste vrai dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.1 (primitive)** Soient  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $U$ . Une fonction holomorphe  $F(z)$  s'appelle une *primitive* de  $f(z)$  si  $F'(z) = f(z)$  sur  $U$ .

**Théorème 3.2** Supposons qu'une fonction continue  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$  dans le domaine  $U \subset \mathbb{C}$ . Alors,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(c) - F(c_0) \quad (3.1)$$

pour chaque chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  pour lequel le point initial et le point final sont respectivement  $c_0$  et  $c$ , c.-à-d., pour lequel  $\gamma(a) = c_0$  et  $\gamma(b) = c$  (voir Fig. II.2).

En particulier, on a la condition nécessaire

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (3.2)$$

pour chaque chemin fermé, c.-à-d.,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

*Démonstration.* Si  $\gamma(t)$  est continûment différentiable, l'affirmation est une conséquence de

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(c) - F(c_0).$$

Si  $\gamma(t)$  est seulement continûment différentiable par morceaux, il faut faire le même calcul pour chaque sous-intervalle et additionner les expressions.  $\square$

Ce théorème montre une énorme différence entre le calcul intégral dans  $\mathbb{R}$  et celui dans  $\mathbb{C}$ . Tandis que chaque fonction continue possède une primitive dans  $\mathbb{R}$ , ceci n'est pas vrai dans  $\mathbb{C}$ . Par exemple, la fonction continue  $f(z) = \bar{z}$  ne satisfait pas (3.2) et ne peut donc pas avoir une primitive (prendre le chemin fermé  $\gamma(t) = re^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ ). Même la fonction holomorphe  $f(z) = (z - c)^{-1}$  ne possède pas de primitive dans  $D_1(c) \setminus \{c\}$  (voir l'exemple 2.3).

Par contre, une fonction  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  avec rayon de convergence  $\rho > 0$  possède une primitive sur  $D_{\rho}(0)$ . Elle est donnée par

$$F(z) = a_0z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} + a_3 \frac{z^4}{4} + \dots \tag{3.3}$$

(intégration terme par terme). Ceci est une conséquence du Théorème I.6.1.

Le théorème suivant montre que la condition (3.2) est aussi suffisante pour l'existence d'une primitive. Nous donnons la preuve si  $U$  est un *domaine étoilé*, c.-à-d., si  $U$  est ouvert et s'il existe un "centre"  $C \in U$  tel que pour tout  $z \in U$  le segment  $[C, z] := \{(1 - t)C + tz; 0 \leq t \leq 1\}$  est entièrement dans  $U$  (voir Fig. II.2 à gauche).

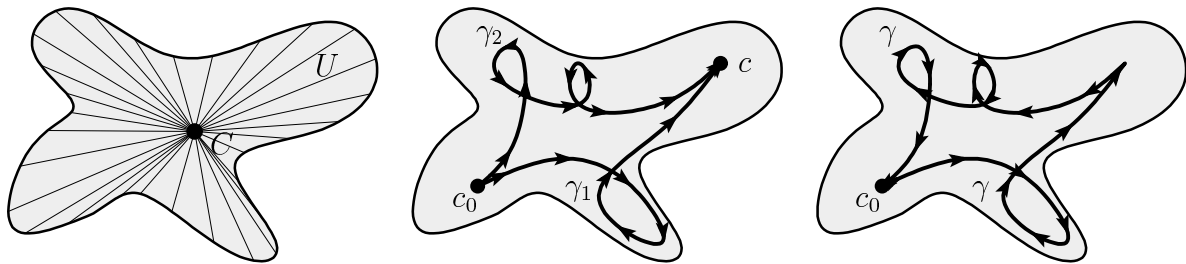


FIG. II.2: Domaine étoilé et illustration du Théorème 3.2

**Théorème 3.3 (critère d'intégrabilité)** Soit  $U$  un domaine étoilé de "centre"  $C$ . Supposons que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  soit continue. Si pour chaque triangle  $\Delta$  ayant  $C$  comme sommet on a  $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$  ( $\partial\Delta$  étant le bord du triangle  $\Delta$ ), alors  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$  qui est donnée par

$$F(z) = \int_{[C,z]} f(\zeta) d\zeta \quad \text{pour } z \in U.$$

En particulier, on a (3.2) pour chaque chemin fermé dans  $U$ .

*Démonstration.* Comme  $U$  est un domaine étoilé, la fonction  $F(z)$  est bien définie. Fixons maintenant  $z_0 \in U$  et considérons  $z \in U$  proche de  $z_0$  tel que le triangle avec sommets  $C, z_0, z$  est entièrement dans  $U$ . L'intégrale sur le bord  $[C, z_0] + [z_0, z] - [C, z]$  de ce triangle est zéro. Par conséquent, on a

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta.$$

En écrivant  $f(\zeta) = f(z_0) + (f(\zeta) - f(z_0))$ , cette formule devient

$$F(z) = F(z_0) + f(z_0)(z - z_0) + \int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta,$$

dont l'intégrale peut être majorée par  $\max_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \cdot |z - z_0|$  (voir le Théorème 2.4). La fonction  $F(z)$  est donc  $\mathbb{C}$ -différentiable avec  $F'(z_0) = f(z_0)$ , car  $\max_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow z_0$  par la continuité de  $f(z)$ .  $\square$

## II.4 Théorème fondamental de Cauchy

Le but de ce paragraphe est de démontrer que chaque fonction holomorphe est intégrable, c.-à-d., possède une primitive. Jusqu'à maintenant nous savons seulement que les fonctions analytiques sont intégrables.

**Théorème 4.1 (lemme de Goursat)** *Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe ( $\mathcal{C}$ -différentiable) dans un ouvert  $U \subset \mathcal{C}$ . Si  $\partial\Delta$  est le bord orienté d'un triangle  $\Delta \subset U$ , alors*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0. \quad (4.1)$$

*Démonstration.* (E. Goursat, *Acta Mathematica* 4, 1884; A. Pringsheim, *Trans. Amer. Math. Soc* 2, 1901). La preuve de Goursat s'appuie sur des rectangles. L'idée de Pringsheim est d'utiliser des triangles qui rend la preuve directement applicable à des domaines étoilés.

Soit alors  $\Delta$  un triangle et soit  $f$  holomorphe sur un voisinage de  $\Delta$  (voir Fig. II.3). Nous devons démontrer (4.1). A l'aide des centres de chacun des trois côtés, on découpe  $\Delta$  en 4 triangles semblables, mais deux fois plus petits. De ces 4 triangles, nous en choisissons un,  $\Delta_1$ , pour lequel l'intégrale (4.1) est maximale (en valeur absolue). Ensuite nous continuons de subdiviser  $\Delta_1$  de la même façon et arrivons à une suite  $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots$  avec

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \leq \dots \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \dots \quad (4.2)$$

L'intersection de cette suite contient un point  $z_0$ , car les  $\Delta_k$  sont compacts. Comme  $f(z)$  est  $\mathcal{C}$ -différentiable en  $z_0$ , nous avons  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \cdot (z - z_0)$  où  $r(z)$  est continue en  $z_0$  et  $r(z_0) = 0$ . Cette formule, insérée dans l'intégrale, donne

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz = f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0) dz + \int_{\partial\Delta_n} r(z) \cdot (z - z_0) dz. \quad (4.3)$$

Les deux premières intégrales sont nulles, car les fonctions 1 et  $(z - z_0)$  possèdent une primitive. Estimons encore la dernière: la continuité de  $r(z)$  en  $z_0$  signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|r(z)| < \varepsilon$  pour  $|z - z_0| < \delta$ . Prenons alors  $n$  assez grand pour que  $\Delta_n \subset D_\delta(z_0)$ .

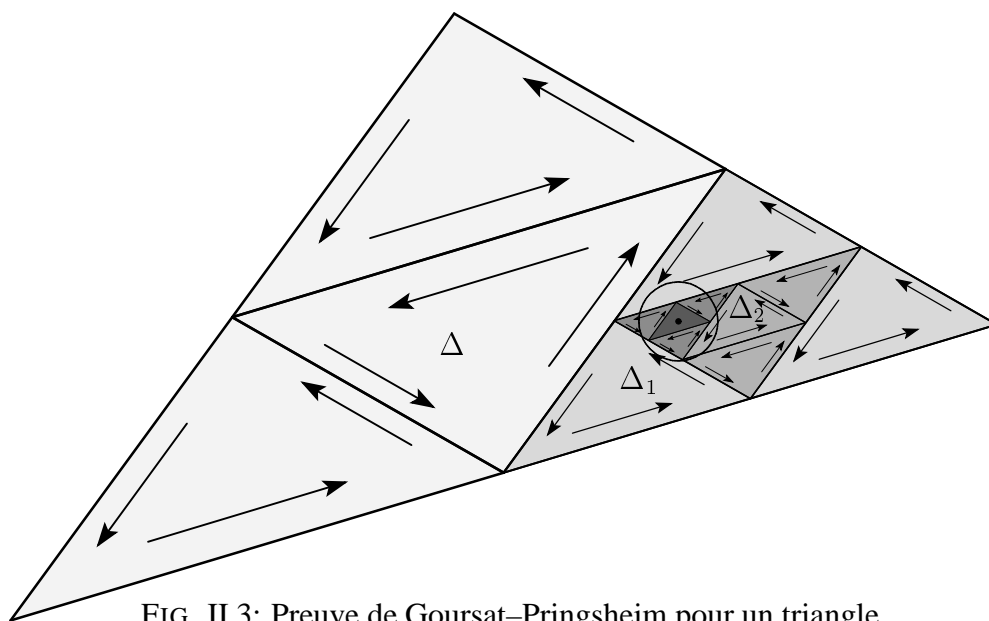


FIG. II.3: Preuve de Goursat–Pringsheim pour un triangle

Alors  $|z - z_0| \leq \text{Const} \cdot 2^{-n}$  et  $L(\partial\Delta_n) \leq \text{Const} \cdot 2^{-n}$ . On peut alors majorer la troisième intégrale de (4.3) à l'aide du Théorème 2.4 et avec l'estimation (4.2) on obtient

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \text{Const} \cdot 2^{-n} \cdot \text{Const} \cdot 2^{-n}. \quad (4.4)$$

Le  $\varepsilon$  étant arbitraire, cette intégrale doit être nulle. □

Nous sommes maintenant en position de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 4.2 (Cauchy 1825)** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un domaine étoilé avec centre  $C$ , et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $U$ . Alors,  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$ , donnée par

$$F(z) = \int_{[C,z]} f(\zeta) d\zeta \quad \text{pour } z \in U.$$

En particulier, on a  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$  pour chaque chemin fermé dans  $U$ .

*Démonstration.* L'affirmation est une conséquence immédiate du lemme de Goursat (Théorème 4.1) et du critère d'intégrabilité (Théorème 3.3). □

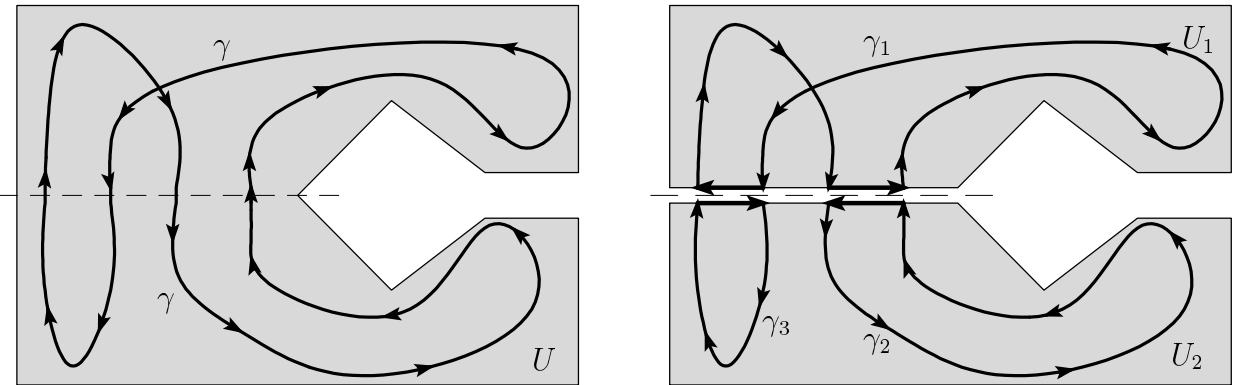


FIG. II.4: Couper un domaine non-étoilé en domaines étoilés

**Domaines plus généraux.** Le fait qu'une fonction holomorphe satisfait  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$  pour chaque chemin fermé (et donc l'existence d'une primitive) restent valables pour un domaine qui se laisse découper en un nombre fini de domaines étoilés (voir Fig. II.4). Il est néanmoins nécessaire que le chemin  $\gamma$  traverse chaque "ligne de coupe" dans chaque direction le même nombre de fois. Cela est certainement vrai, si le domaine  $U$  est simplement connexe. Ainsi, l'intégrale sur  $\gamma$  se laisse décomposer (pour les chemins de la Fig. II.4) en

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (4.5)$$

car  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont chacun dans un domaine étoilé.

Remarquons encore que sans conditions sur l'ouvert  $U$ , l'affirmation du Théorème de Cauchy n'est pas correcte. Considérons par exemple la fonction  $f(z) = z^{-1}$  sur l'ensemble ouvert  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La fonction  $F(z) = \text{Log } z$  est une primitive sur le domaine étoilé  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  (plan complexe sans l'axe réel négatif) mais pas sur  $U$ . En effet, la condition nécessaire  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  n'est pas satisfaite pour le chemin  $\gamma(t) = e^{it}$  (cercle autour de l'origine).

**Exemple 4.3 (intégrales de Fresnel)** Comme première application du théorème de Cauchy, considérons

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3}$$

où le chemin  $\gamma$  se compose de trois parties: de 0 à  $R$  le long de l'axe réel, puis on monte verticalement, et retour sur la diagonale (voir la figure à droite; les courbes de niveau des parties réelle et imaginaire de  $f(z) = \exp(-z^2)$  sont aussi dessinées). L'intégrale sur  $\gamma_2$  est

$$I_2 = \int_0^R e^{-(R+it)^2} i dt = \int_0^R e^{-R^2+t^2} \cdot e^{-2iRt} i dt$$

donc

$$|I_2| \leq e^{-R^2} \int_0^R e^{t^2} dt \leq e^{-R^2} \int_0^R e^{Rt} dt = e^{-R^2} \frac{1}{R} (e^{R^2} - 1) \leq \frac{1}{R}.$$

Ainsi,  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0$ , et le Théorème de Cauchy nous donne  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_3$ . Du cours "Analyse I" nous savons que  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$  [HW, p. 346]. Ainsi nous arrivons à

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+i)^2 t^2} (1+i) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.6)$$

En partageant parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\int_0^{\infty} \cos 2t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin 2t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad (4.7)$$

et, à l'aide de substitutions,

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (4.8)$$

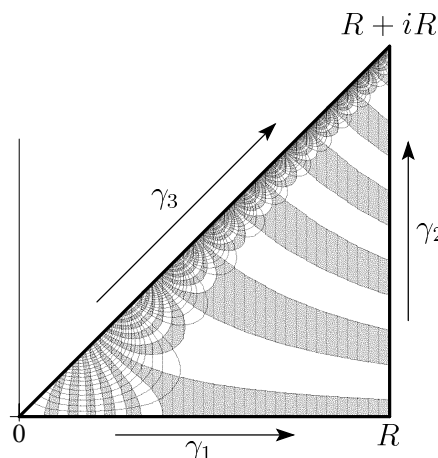
formules affirmées en [HW, p. 131] et démontrées de manière plus élégante qu'en [HW, p. 350].

## II.5 Formule intégrale de Cauchy

"La plus belle création de Cauchy, et l'une des plus belles créations mathématiques de tous les temps ..."  
(Georges de Rham, Discours d'Installation, Lausanne 1943)

La Révolution de juillet 1830 entraîne la chute de la dynastie des Bourbons. Cauchy, royaliste et ultracatholique, quitte Paris, laissant femme et enfants, et s'exile à Fribourg. Là, il cherche à fonder une académie catholique et part pour l'Italie, où il pense trouver le soutien des souverains réactionnaires. Finalement, soutenu par les jésuites, on lui offre à Turin une chaire de "physique supérieure". Son enseignement "était de toute confusion, passant tout d'un coup d'une idée, d'une formule à une autre, sans trouver le chemin de la transition. Son enseignement était un nuage obscur parfois illuminé par des éclairs de génie; mais il était fatigant pour des jeunes élèves, aussi, bien peu purent le suivre jusqu'au bout et de trente qu'ils étaient au début du cours, il restait un seul dernier sur la brèche" (voir *Belhoste*, p. 130).

À Turin, Cauchy découvre sa célèbre formule. Sa première publication est dans un article intitulé *Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites*, lu à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. La formule est devenue plus accessible en 1841 quand Cauchy la publie dans le tome 2 de ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique*.





**Théorème 5.1 (formule intégrale de Cauchy 1831)** Soit  $U$  un domaine étoilé et  $\gamma$  une courbe fermée parcourant  $\partial U$  dans le sens positif. Soit  $f(z)$  holomorphe dans un voisinage de l'adhérence  $\bar{U} = U \cup \partial U$ . Alors pour tout  $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.1}$$

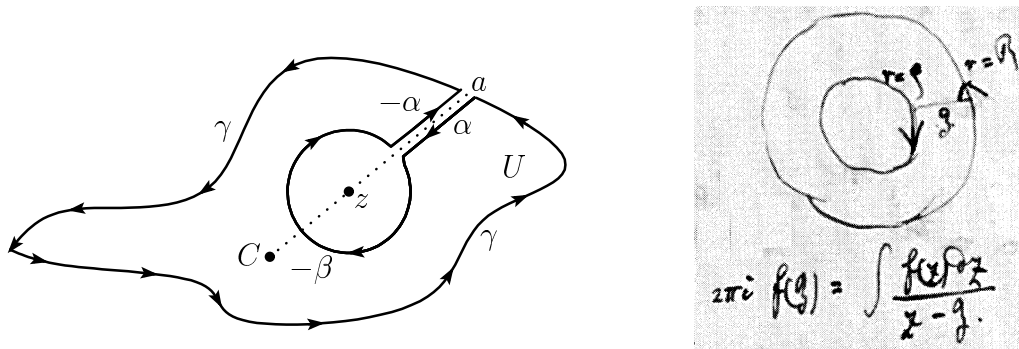


FIG. II.5: Chemin  $\gamma^*$  pour la preuve de la formule de Cauchy (à droite: manuscrit de Riemann, [Neuenschwander 1996, p. 120])

*Démonstration.* On fixe un  $z \in U$ . La fonction  $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$  dans l'intégrale (5.1) est holomorphe partout en  $U$ , sauf en  $\zeta = z$ . On doit donc ôter ce point "chirurgicalement". Soit  $C$  le "centre" du domaine étoilé  $U$  (voir Fig. II.2), et soit  $a$  la projection de  $z$  à partir de  $C$  sur le bord de  $U$  voir Fig. II.5 (si  $z = C$  on choisit pour  $a$  un point arbitraire de  $\partial U$ ). Le domaine  $U^* = U \setminus [z, a]$  est donc étoilé (pour le même centre  $C$ ).

La continuité en  $z$  de la fonction  $f(\zeta)$  implique que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|f(\zeta) - f(z)| \leq \varepsilon$  pour  $|\zeta - z| \leq \delta$ . Notons  $\beta$  le cercle centré en  $z$  de rayon  $\delta$ . Nous allons démontrer que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{\beta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \mathcal{O}(\varepsilon) = f(z) \cdot 2\pi i + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{5.2}$$

Pour montrer la première égalité dans (5.2), nous prenons le chemin  $\gamma^* = \gamma + \alpha - \beta - \alpha$  dans  $U^*$  (Fig. II.5) et appliquons le Théorème 4.2 pour le chemin  $\gamma^*$ . Cela donne le résultat désiré, car les intégrales sur  $+\alpha$  et  $-\alpha$  s'annulent.

La deuxième égalité de (5.2) résulte du fait que  $f(z)$  est continue. Nous estimons la différence

$$\left| \int_{\beta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \max_{|\zeta - z| = \delta} |f(\zeta) - f(z)| \cdot \max_{|\zeta - z| = \delta} \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| \cdot L(\beta) \leq \varepsilon \frac{1}{\delta} 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon. \tag{5.3}$$

La dernière égalité dans (5.2) suit d'un calcul direct comme dans l'Exemple 2.3. La formule (5.2) est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ . On obtient donc l'affirmation (5.1) en considérant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Le pouvoir extraordinaire de la formule de Cauchy (5.1) réside dans le fait que la variable  $z$  à gauche se retrouve à droite dans la simple forme  $(\zeta - z)^{-1}$ ; toutes les belles propriétés de cette dernière fonction se transmettent, à travers l'intégrale, à n'importe quelle fonction holomorphe. Elle va nous donner une suite de conséquences surprenantes.

**Propriété de la moyenne.** En prenant comme  $U$  un disque de rayon  $r > 0$  avec centre  $c$  et  $\gamma(t) = c + re^{it}$  avec  $0 \leq t \leq 2\pi$ , la formule de Cauchy donne

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) dt \tag{5.4}$$

si  $f(z)$  est holomorphe dans un voisinage de  $D_r(c)$ . Ceci signifie que la valeur  $f(c)$  au milieu du disque est la moyenne des valeurs de  $f(z)$  sur le bord du disque.

## II.6 Dérivées supérieures d'une fonction holomorphe

L'application la plus spectaculaire de la formule de Cauchy est le résultat suivant qui montre que chaque fonction holomorphe (c.-à-d.,  $\mathcal{C}$ -différentiable) est infiniment  $\mathcal{C}$ -différentiable et peut être représentée par une série avec rayon de convergence positif.

**Théorème 6.1 (Théorème de Cauchy–Taylor)** *Soit  $f(z)$  holomorphe dans un ouvert  $U$ . Alors pour tout  $c \in U$  la fonction  $f(z)$  possède un développement en série*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + a_3(z - c)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k \quad (6.1)$$

avec coefficients donnés par

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}} d\zeta. \quad (6.2)$$

Le chemin dans cette intégrale est  $\gamma(t) = c + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  où  $0 < r < \rho$  et  $\rho > 0$  est tel que  $D_\rho(c) \subset U$ . La série (6.1) possède un rayon de convergence  $\geq \rho$  ( $\rho$  est la plus petite distance entre  $c$  et le bord  $\partial U$ ) et elle représente  $f(z)$  dans le disque  $D_\rho(c)$ .

*Démonstration.* On utilise l'identité  $(1 - q)^{-1} = 1 + q + \dots + q^k + q^{k+1}/(1 - q)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c} \left( \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\zeta-c}} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta - c} + \frac{z - c}{(\zeta - c)^2} + \dots + \frac{(z - c)^k}{(\zeta - c)^{k+1}} + \frac{(z - c)^{k+1}}{(\zeta - c)^{k+1}(\zeta - z)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Insérée dans la formule de Cauchy (5.1), ceci donne

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + \dots + a_k(z - c)^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{z - c}{\zeta - c} \right)^{k+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.4)$$

Pour démontrer le théorème, il faut voir que le reste de la série dans (6.4), qu'on dénote par  $R_k(z)$ , converge vers zéro pour tout  $z \in D_\rho(c)$ . Fixons un tel  $z$  et choisissons  $r > 0$  et  $\theta < 1$  tels que  $|z - c| \leq \theta r < r < \rho$ . Alors pour tout  $\zeta \in \gamma$  on a  $|z - c| \leq \theta|\zeta - c|$ . Avec  $M$ , une borne supérieure de  $f(z)$  sur la courbe  $\gamma$ , et l'inégalité  $|\zeta - z| \geq |\zeta - c| - |z - c| \geq (1 - \theta)r$  pour  $\zeta \in \gamma$ , l'estimation du Théorème 2.4 donne

$$|R_k(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\theta^{k+1} \cdot M \cdot L(\gamma)}{(1 - \theta)r} \quad (6.5)$$

où  $L(\gamma) = 2r\pi$  est la longueur de la courbe. Ce terme tend donc vers zéro si  $k \rightarrow \infty$  et la série converge vers  $f(z)$ .  $\square$

En comparant la série (6.1) avec la série de Taylor du Théorème I.6.3 on obtient une formule intégrale pour les dérivées d'une fonction holomorphe.

**Corollaire 6.2 (formule de Cauchy pour la dérivée)** *Sous les hypothèses du Théorème 6.1 on a*

$$f^{(k)}(c) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - c)^{k+1}} dz. \quad (6.6)$$

Le théorème de Cauchy–Taylor est la dernière pièce dans une théorie qui nous permet de démontrer l'équivalence de trois propriétés fondamentales.

**Théorème 6.3** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ensemble ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

- $f(z)$  est holomorphe dans  $U$ , c.-à-d.,  $\mathbb{C}$ -différentiable dans  $U$ ,
- $f(z)$  est analytique dans  $U$ , c.-à-d., pour tout  $c \in U$  la fonction  $f(z)$  peut être développée en une série convergente dans une disque  $D_\rho(c)$  avec  $\rho > 0$ ,
- $f(z)$  est localement intégrable, c.-à-d., pour tout  $c \in U$  il existe un voisinage où  $f(z)$  possède une primitive.

Si  $U$  est un domaine étoilé, on peut supprimer le mot “localement” dans la troisième propriété, c.-à-d.,  $f(z)$  possède une primitive sur tout  $U$ .

*Démonstration.* Ce théorème est un résumé des résultats déjà démontrés (voir Fig. II.6). Pour la preuve de “intégrable implique analytique” on applique le Théorème 6.1 au primitive  $F(z)$  de  $f(z)$ . □

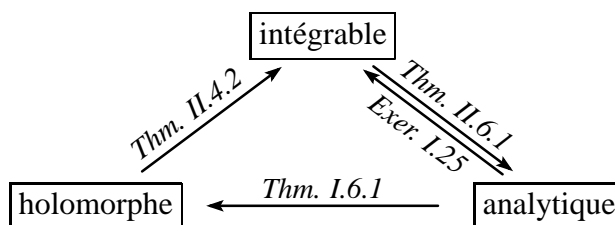


FIG. II.6: Équivalence de trois propriétés fondamentales

## II.7 Théorème fondamental de l’algèbre

Ce théorème affirme que chaque polynôme de degré  $n > 0$  possède au moins une (et, après division, exactement  $n$ ) racine(s) dans  $\mathbb{C}$ . Suite à la *Géométrie* de Descartes (1638), ce théorème a été chaudement discuté pendant des siècles. Plusieurs applications (intégration de fonctions rationnelles (Joh. Bernoulli 1702), équations différentielles à coefficients constants (Euler 1743), valeurs propres (Lagrange 1770)) ont toujours réactualisé le problème et conduit à plusieurs tentatives de démonstration. Finalement, Gauss (1799) a consacré toute sa thèse à 4 démonstrations de ce “Grundlehrsatz”. Une revue sur une centaine de démonstrations (correctes et fausses) à travers l’histoire par E. Netto et R. Le Vavasseur se trouve dans *Encycl. des Sc. Mathématiques* T. I, vol. 2, p. 189–205, et vaut la peine d’être consultée.

La démonstration est basée sur les inégalités de Cauchy et sur le Théorème de Liouville, qui sont des conséquences simples de la formule (6.6). Le fait que le théorème fondamental de l’algèbre devienne ici un “jeu d’enfants” de quelques lignes, nous montre une fois de plus la puissance de la théorie que nous venons de découvrir.

**Théorème 7.1 (inégalités de Cauchy)** Soit  $f(z)$  holomorphe dans le disque  $D_\rho(c)$ . Avec la notation  $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$  on a pour  $0 < r < \rho$  l’estimation

$$|f^{(k)}(c)| \leq \frac{k! \cdot M(r)}{r^k}. \tag{7.1}$$

*Démonstration.* On obtient ces estimations en appliquant l’estimation “standard” du Théorème 2.4 à l’intégrale dans (6.6) et en utilisant  $L(\gamma) = 2\pi r$  pour le cercle de rayon  $r$ . □

Le Théorème de Liouville est devenu célèbre après la publication de “Leçons ... faites en 1847 par M. J. Liouville” dans le *Crelle Journal* **88**, (1879), p. 277, par C.W. Borchardt. Cependant le théorème a déjà été publié en 1844 par Cauchy.

On appelle une fonction  $f(z)$  *entière* si elle est holomorphe sur tout le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Des exemples sont les polynômes, les fonctions  $\exp(z)$ ,  $\cos(z)$ ,  $\sin(z)$ .

**Théorème 7.2 (Théorème de Liouville)** *Chaque fonction entière et bornée est constante.*

*Démonstration.* Par le Théorème de Cauchy–Taylor une fonction entière  $f(z)$  peut être écrite sous la forme d’une série  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  avec coefficients  $a_k$  donnés par (6.2). Comme  $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ , l’inégalité de Cauchy (Théorème 7.1) implique que

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

pour tout  $r > 0$ . Si on fait tendre  $r \rightarrow \infty$  (par hypothèse  $M(r)$  est majorée par  $M_0$  indépendant de  $r$ ), on arrive à  $a_k = 0$  pour  $k \geq 1$ .  $\square$

La même preuve montre aussi que si une fonction entière satisfait  $|f(z)| \leq \text{Const} \cdot |z|^n$  pour  $|z| \rightarrow \infty$  (donc  $M(r) \leq \text{Const} \cdot r^n$ ), alors la fonction est un polynôme de degré au plus  $n$ .

**Théorème 7.3 (Théorème Fondamental de l’Algèbre)** *Pour chaque polynôme*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{C} \text{ et } a_n \neq 0 \quad (7.2)$$

*il existe un  $z \in \mathbb{C}$  avec  $p(z) = 0$ .*

*Démonstration.* L’inégalité de triangle appliquée à  $a_n z^n = p(z) - a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_0$  donne

$$|p(z)| \geq r^n \cdot \left( |a_n| - \left( \frac{|a_{n-1}|}{r} + \dots + \frac{|a_0|}{r^n} \right) \right) \quad \text{pour } |z| = r. \quad (7.3)$$

Ceci implique l’existence d’un  $r_0 > 0$  tel que  $|p(z)| \geq r^n |a_n|/2$  pour  $|z| = r \geq r_0$ .

La démonstration du théorème est par l’absurde. Supposons que  $p(z)$  n’ait pas de racine dans  $\mathbb{C}$ . La fonction  $f(z) := 1/p(z)$  serait donc entière. La minoration précédente de  $p(z)$  montre alors que

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|a_n| r^n} \quad \text{pour } |z| = r \geq r_0. \quad (7.4)$$

Par compacité de  $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r_0\}$ , la fonction  $f(z)$  est donc bornée partout (cf. [HW, p. 289]). Cela contredit le Théorème de Liouville, car  $f(z)$  n’est pas constante.  $\square$

Si  $z_1$  est une racine de  $p(z) = 0$ , on peut diviser  $p(z)$  par  $(z - z_1)$  (algorithme d’Euclide) et on obtient  $p(z) = (z - z_1)q(z)$  où  $q(z)$  est un polynôme de degré  $n - 1$ . En appliquant itérativement le Théorème 7.3 on arrive finalement à une factorisation  $p(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ .

## II.8 Principe du maximum

On doit ce théorème à Riemann [1851, p. 22] pour les fonctions harmoniques. D’après [Remmert 1991, p. 259], l’auteur de ce résultat important, pour le cas des fonctions holomorphes, est inconnu. Les premières traces semblent être un article de Schottky (1892) et de Carathéodory (1912).

**Lemme 8.1** *Soit  $f(z)$  holomorphe dans un ouvert  $U$ , continue dans  $\overline{U}$ . Si un point  $c \in U$  est un maximum local de  $|f(z)|$ , alors  $f(z)$  est constante dans un voisinage de  $c$ .*

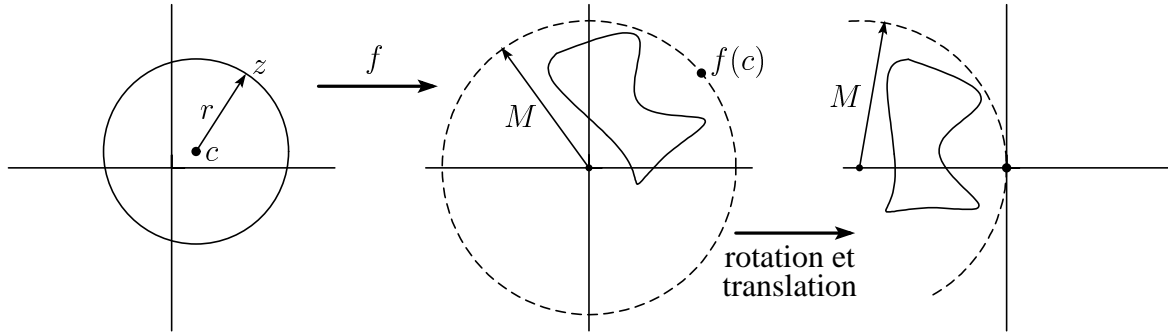


FIG. II.7: Démonstration du Lemme 8.1

*Démonstration.* Si  $f(c) = 0$ , le lemme est évident. Sinon, posons  $M = |f(c)|$ . D'après l'hypothèse, il existe  $r > 0$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour  $z = c + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Regardons l'image de cette courbe placée dans le disque fermé  $\overline{D}_M(0)$ . Avec une rotation par l'angle  $-\alpha = -\arg f(c)$  suivie d'une translation par  $-|f(c)|$ , nous ramenons le point  $f(c)$  sur l'axe réel et ensuite à l'origine. Après cette transformation la courbe est donnée par  $g(t) = e^{-i\alpha} f(c + re^{it}) - |f(c)|$  ou  $g(t) = e^{-i\alpha} (f(c + re^{it}) - f(c))$ . Par la propriété de la moyenne (formule (5.4)) nous avons

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0. \tag{8.1}$$

La courbe  $g(t)$  étant dans  $D_M(-M)$ , nous avons  $\operatorname{Re} g(t) < 0$  sauf si  $g(t) = 0$ . La continuité de  $g(t)$  et (8.1) impliquent que  $\operatorname{Re} g(t) = 0$  pour tout  $t$  (cf. [HW, p. 233, exercice 5.5]). Mais le seul point, où le cercle en question touche l'axe imaginaire, est 0. Ainsi  $g(t) = 0$  pour  $t \in [0, 2\pi]$  et  $f(z)$  est constante sur le bord de  $D_r(c)$ . Le facteur  $f(\zeta)$  peut donc sortir de l'intégrale (5.1), ce qui entraîne que  $f(z)$  est constante partout dans ce cercle.  $\square$

Rappelons qu'un ensemble  $U \subset \mathbb{C}$  s'appelle *connexe* (plus précisément *connexe par arcs*) si pour deux points arbitraires  $a, b \in U$  il existe un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  dans  $U$  avec  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

**Théorème 8.2 (Principe du Maximum, Fonctions Holomorphes)** Soit  $U$  un ensemble ouvert, borné et connexe, et soit  $f(z)$  holomorphe dans  $U$  et continue dans  $\overline{U}$ . Si  $|f(z)| \leq M$  pour  $z \in \partial U$ , alors

$$|f(z)| < M \quad \text{pour tout } z \in U \tag{8.2}$$

sauf si  $f(z) = \text{Const}$  dans  $U$ .

*Démonstration.* Soit  $M' = \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ . Si les seuls points maximaux sont sur  $\partial U$ , alors  $M' \leq M$  et les autres points satisfont (8.2). Sinon, il existe  $c \in U$  (notons que  $U$  est ouvert et donc  $c \notin \partial U$ ) avec  $|f(c)| = M'$ . Le clou de la démonstration consiste à regarder l'ensemble  $E = \{z \in U; f(z) = f(c)\}$ , qui est non vide (car  $c \in E$ ), fermé dans  $U$  (Théorème de Hausdorff [HW97, p. 295]), et ouvert (Lemme 8.1).

Pour montrer que  $E = U$ , ce qui complète la démonstration par la continuité de  $f(z)$  sur  $\overline{U}$ , nous prenons un point  $b \in U$  et un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  qui relie  $c$  avec  $b$  (ce chemin existe car  $U$  est connexe). Considérons le nombre  $t_0 := \sup\{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in E\}$ . Il existe car  $\gamma(0) = a \in E$ , on a  $\gamma(t_0) \in E$  car  $E$  est fermé, et  $t_0$  ne peut pas être plus petit que 1 car  $E$  est ouvert. Par conséquent  $t_0 = 1$  et on a  $b = \gamma(1) \in E$ .  $\square$

Dans les démonstrations du Lemme 8.1 et du Théorème 8.2 on n'a pas vraiment utilisé l'holomorphicité de  $f(z)$ . On a seulement utilisé la propriété de la moyenne (qui est satisfaite par les fonctions holomorphes, mais aussi par leurs parties réelles et imaginaires).

Rappelons qu'une fonction réelle  $u(x, y)$  s'appelle *harmonique* (voir le Théorème I.4.3) si elle est deux fois continûment  $\mathbb{R}$ -différentiable et si  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

**Théorème 8.3 (Principe du Maximum, Fonctions Harmoniques)** Soit  $U$  un ensemble ouvert, borné et connexe, et soit  $u(x, y)$  harmonique dans  $U$  et continue dans  $\bar{U}$ . Si  $N \leq u(x, y) \leq M$  pour  $(x, y) \in \partial U$ , alors

$$N < u(x, y) < M \quad \text{pour tout } (x, y) \in U \quad (8.3)$$

sauf si  $u(x, y) = \text{Const}$  dans  $U$ .

*Démonstration.* Par le Lemme 8.4, la fonction harmonique  $u(x, y)$  est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. Donc, elle satisfait la propriété de la moyenne. Avec cette observation les démonstrations deviennent identiques à celles du Lemme 8.1 et du Théorème 8.2. Comme la fonction  $u(x, y)$  est réelle, on n'est pas obligé de travailler avec la valeur absolue et on obtient les majorations dans les deux directions.  $\square$

**Lemme 8.4** Une fonction qui est harmonique sur un domaine  $U \subset \mathbb{C}$ , est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. En conséquence, chaque fonction harmonique est infiniment différentiable.

*Démonstration.* Soit  $u(x, y)$  deux fois continûment différentiable satisfaisant  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  sur  $U$ . On vérifie facilement que la fonction

$$f(z) = f(x + iy) := u_x(x, y) - iu_y(x, y) \quad (8.4)$$

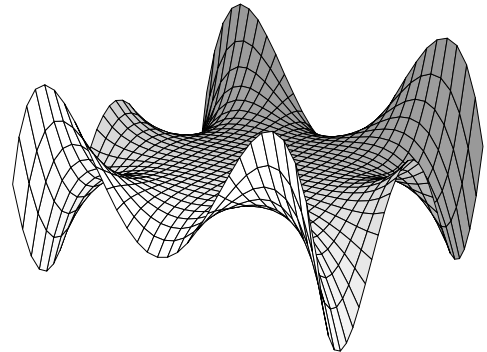
satisfait les équations de Cauchy–Riemann ( $(u_x)_x = (-u_y)_y$  et  $(-u_y)_x = -(u_x)_y$ ). Elle est donc holomorphe par le Corollaire I.3.3, et localement intégrable par le Théorème 4.2 de Cauchy. Dans un disque autour d'un point fixé  $c = a + ib$  il existe alors une primitive  $F(z)$  qui est donnée par  $F(z) = F(c) + \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$  où  $\gamma$  est une courbe arbitraire dans le disque qui relie  $c$  avec  $z$ . Prenons comme  $\gamma$  le chemin composé par les segments  $[a + ib, x + ib]$  et  $[x + ib, x + iy]$ . On a donc

$$\begin{aligned} F(z) &= F(c) + \int_a^x (u_x(t, b) - iu_y(t, b)) dt + \int_b^y (u_x(x, t) - iu_y(x, t)) i dt \\ &= F(c) + u(x, b) - u(a, b) + u(x, y) - u(x, b) + i \left( \int_b^y u_x(x, t) dt - \int_a^x u_y(t, b) dt \right) \end{aligned}$$

et on voit qu'avec le choix  $F(c) = u(a, b)$  de la constante d'intégration, la fonction  $u(x, y)$  est la partie réelle de la fonction holomorphe  $F(z)$ .  $\square$

*Remarque (interprétation physique des fonctions harmoniques).* Considérons une membrane élastique attachée à un fil de fer (courbe fermée dans  $\mathbb{R}^3$ ). La surface de la membrane est décrite par une fonction harmonique  $u(x, y)$  dans  $U \subset \mathbb{R}^2$  qui pour  $(x, y) \in \partial U$  décrit la courbe du fil de fer. Cette interprétation nous permet de bien comprendre le principe du maximum.

Le dessin de droite montre la partie réelle de la fonction holomorphe  $f(z) = z^6$  au-dessus du carré  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ .



## II.9 Prolongement analytique et “open mapping theorem”

Le théorème d’unicité, posé comme “Exercice” par Abel dans le *Crelle Journal*, vol. 2, p. 286, a été postulé pour les fonctions holomorphes sans preuve rigoureuse par Riemann [1851, p. 28]. La démonstration facile suivante démontre, une fois de plus, la grande utilité des séries entières.

**Théorème 9.1 (unicité)** Soient  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  deux fonctions holomorphes dans un ouvert  $U$  et soit  $f_1(z_j) = f_2(z_j)$  pour une suite  $z_1, z_2, z_3, \dots$ , qui converge vers  $c \in U$  et qui satisfait  $z_j \neq c$  pour tout  $j$ . Alors, il existe  $\rho > 0$  tel que  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  sont identiques dans le disque  $D_\rho(c)$ .

*Démonstration.* D’après le Théorème 6.1, les deux fonctions sont analytiques dans un voisinage de  $c$ . Après une translation, nous supposons que  $c = 0$  et nous considérons la différence

$$f_1(z) - f_2(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \tag{9.1}$$

Nous devons démontrer que  $a_k = 0$  pour tout  $k$ . Supposons, par l’absurde, que ceci n’est pas vrai et soit  $a_k$  le premier coefficient non nul. Alors

$$f_1(z) - f_2(z) = z^k \cdot g(z) \quad \text{où} \quad g(z) = a_k + a_{k+1}z + a_{k+2}z^2 + a_{k+3}z^3 + \dots \tag{9.2}$$

On voit que  $g(0) \neq 0$ . Comme  $g(z)$  est continue, il existe un voisinage de 0 où  $g(z) \neq 0$ . Ceci est une contradiction, car la suite  $\{z_j\}$  converge vers  $c = 0$  et  $g(z_j) = 0$  pour tout  $j$ .  $\square$

Le *prolongement analytique* est un principe, “vu” par Riemann, qui est devenu un point central de la théorie de Weierstrass. Il permet, entre autres, d’étendre le théorème de l’unicité à tout le domaine  $U$ .

**Théorème 9.2 (prolongement analytique)** Soient  $f_1(z)$  holomorphe dans l’ouvert  $U_1$  et  $f_2(z)$  holomorphe dans l’ouvert  $U_2$ . Si l’intersection  $U_1 \cap U_2$  est connexe et si  $f_1(z) = f_2(z)$  dans un disque  $D_\rho(c) \subset U_1 \cap U_2$ , alors (voir Fig. II.8)

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in U_1 \cap U_2. \tag{9.3}$$

*Démonstration.* Soit  $b$  un point quelconque de  $U_1 \cap U_2$ . Par connexité, il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$  reliant  $c$  avec  $b$ , c.-à-d.,  $\gamma(0) = c$  et  $\gamma(1) = b$ . Comme dans la démonstration du Théorème 8.2 nous posons  $t_0 := \sup\{t \in [0, 1] ; f_1(\gamma(s)) = f_2(\gamma(s)) \text{ pour } s \in [0, t]\}$ . Un tel  $t_0 > 0$  existe car  $f_1(z) = f_2(z)$  sur  $D_\rho(c)$ . La continuité de  $f_1(z) - f_2(z)$  implique  $f_1(\gamma(t_0)) = f_2(\gamma(t_0))$ , et grâce au Théorème 9.1 le nombre  $t_0$  ne peut pas être plus petit que 1. Par conséquent,  $t_0 = 1$  et on a  $f_1(b) = f_2(b)$ .  $\square$

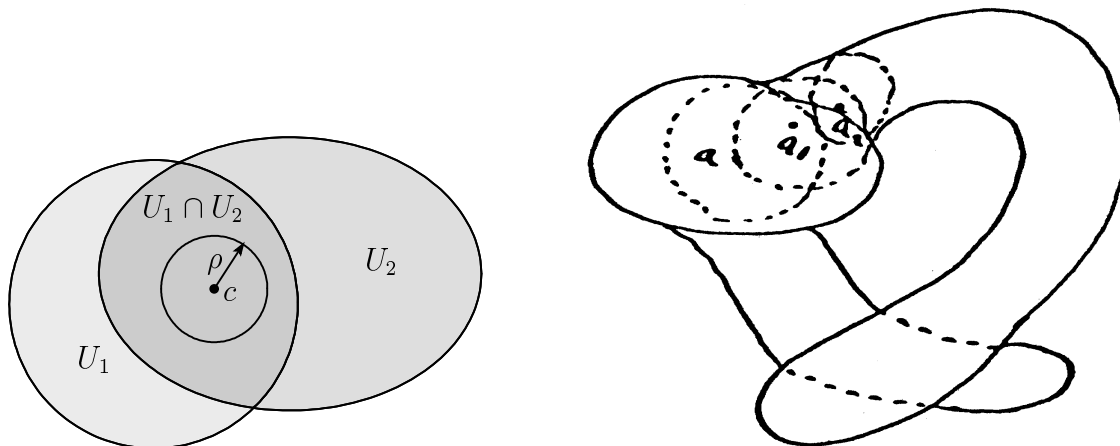


FIG. II.8: Prolongement analytique; à droite une illustration du cours de Riemann

Une situation typique du prolongement analytique est la suivante: soit  $f(z)$  donnée par une série dans un disque  $D_\rho(0)$ ; par exemple,  $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ . Nous prenons un point  $c \in D_\rho(0)$  et nous considérons la série de Taylor de  $f(z)$  développée autour de ce point (voir le Théorème I.6.3). La série  $f(z) = c_0 + c_1(z - c) + c_2(z - c)^2 + \dots$  ainsi obtenue converge certainement pour  $|z - c| < \rho - |c|$ . Mais, il est possible que le rayon de convergence de la nouvelle série soit plus grand que  $\rho - |c|$  et converge donc dans un domaine plus grand. Pour la fonction de notre exemple et avec  $c = -0.9$ , la nouvelle série possède un rayon de convergence  $\rho = 1.9$ .

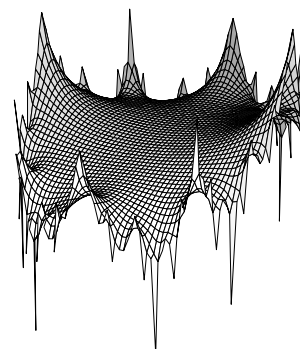
La fonction  $f(z)$  a été *prolongée en dehors* du disque initial, et ceci *de manière unique*. Ce procédé peut être répété plusieurs fois et permet de remplir un domaine de plus en plus grand, jusqu'à arriver, éventuellement, à un bord naturel. L'unicité est garantie seulement si l'intersection du domaine  $U_1$  où la fonction est déjà définie avec le nouveau disque est connexe (un contre-exemple est le logarithme après un contour de l'origine). Voir la Fig. II.8 pour un dessin historique illustrant ce phénomène.

**Exemple 9.3 (fonction sans prolongement)** Il existe des fonctions qui convergent dans un disque et qui ne permettent aucun prolongement en dehors de ce disque. L'exemple le plus simple est

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} \tag{9.4}$$

ayant un rayon de convergence  $\rho = 1$ . Évalué en  $re^{i\varphi}$  avec  $r < 1$  proche de 1, cette série donne pour la partie réelle (la figure montre la partie réelle au-dessus du disque  $D_1(0)$ )

$$\begin{aligned} \varphi = 0 : & \quad r + r^2 + r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \\ \varphi = \pi : & \quad -r + r^2 + r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} : & \quad 0 - r^2 + r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} : & \quad r/\sqrt{2} + 0 - r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \end{aligned}$$



etc. À part un nombre fini de termes, la série devient  $g(r) = \sum_{k \geq n} r^{2^k}$  et pour  $r < 1$  on a  $g(r) = r^{2^n} + g(r^2)$ . Cette relation montre que la limite  $\lim_{r \rightarrow 1} g(r)$  ne peut pas être finie et on ne peut donc pas prolonger la fonction  $f(z)$  en dehors du disque  $D_1(0)$ . Il paraît paradoxal que surtout les séries convergent très vite ont cette propriété.

Le théorème suivant montre que pour une fonction holomorphe l'image d'un ensemble ouvert est ouvert (on dit que l'application est ouverte). Cette propriété topologique a été découverte dans un cadre plus général par L.E.J. Brouwer dans les années 1910, et démontrée de façon élémentaire par Stoilow (1938) et H. Cartan.

Pour mieux comprendre cette propriété, étudions d'abord la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la Fig. II.9 (voir aussi [HW, p. 295]) qui est infiniment  $\mathbb{R}$ -différentiable mais pas holomorphe. Près de chaque point  $z_1 = (x_1, y_1)$  où la matrice jacobienne est inversible, l'application  $f$  est un difféomorphisme local. Par conséquent, pour tout voisinage  $V$  de  $z_1$  l'image  $f(V)$  est un voisinage de  $f(z_1)$ . Examinons alors les points où la matrice jacobienne est singulière : ces points forment une courbe<sup>2</sup>, le long de laquelle cette application forme un "pli". Si on choisit un point  $z_0$  sur cette courbe, l'image d'un disque  $U$  centré en  $z_0$  sera plié à cet endroit, et ne sera *pas ouverte*.

<sup>2</sup>Pour l'exemple de la Fig. II.9 cette courbe est donnée par la formule  $x = (4y^3 - 48y^2 - 6y + 11)/(24y^2 - 12)$



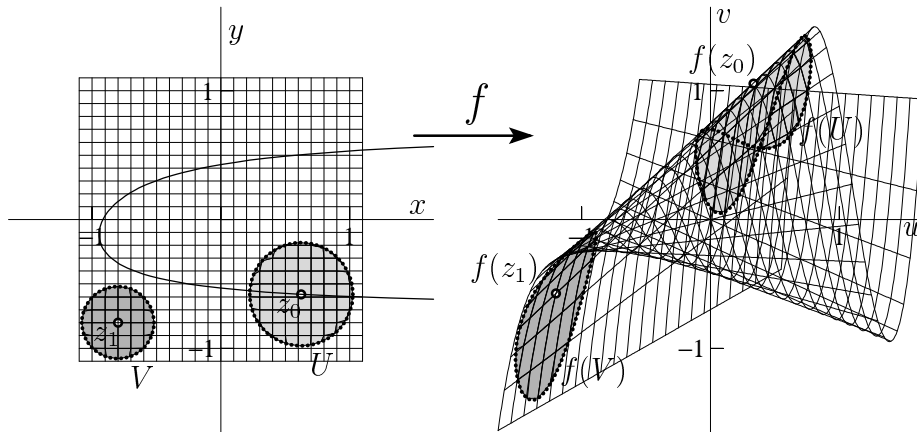


FIG. II.9: Contre-exemple :  $u = x + \frac{y}{2}$ ,  $v = (x + 2)y^3 - \frac{3}{2}(x + 1)y + \frac{x}{4}$

**Théorème 9.4 (“open mapping theorem”)** Soit  $U$  un ouvert et  $f(z)$  une fonction holomorphe qui est nulle part localement constante. Alors pour chaque ouvert  $V \subset U$  l'image  $f(V)$  est ouverte (on dit que  $f$  est une “application ouverte”).

*Démonstration.* Soit  $V \subset U$  et  $z_1 \in V$  un point avec  $f'(z_1) \neq 0$ . La fonction est localement biholomorphe près de  $z_1$  (Corollaire I.7.7) et par conséquent  $f(z_1)$  est un point intérieur de  $f(V)$ .

Il reste à considérer les points  $z_0 \in V$  avec  $f'(z_0) = 0$ . Par le Théorème 9.1 ces points sont isolés, car  $f(z)$  n’est pas localement constante. Dans un voisinage d’un tel point, la fonction  $f(z)$  s’enroule, similairement à la fonction  $z^k$ , que nous avons étudié dans le Chapitre I (voir Fig. I.5). L’ensemble  $f(V)$  contourne totalement le point  $f(z_0)$  (voir Fig. II.10) et est donc ouvert.

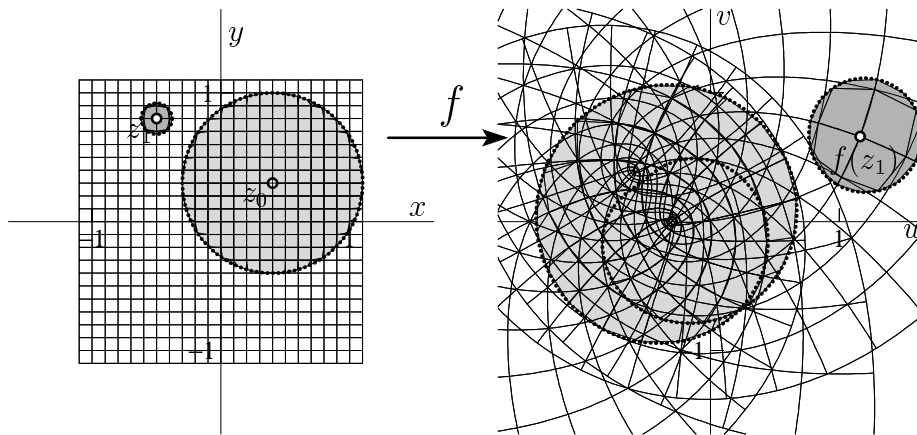


FIG. II.10: Illustration de la preuve du Théorème 9.4,  $w = (z + 0.7(1 + i))(z - z_0)^2 - 0.3$ ;  $z_0 = 0.4 + 0.3i$ ,  $z_1 = -0.5 + 0.8i$ .

La preuve rigoureuse utilise les séries : après des translations, nous supposons  $z_0 = 0$  et  $f(z_0) = 0$ . Soit  $a_k$  ( $k \geq 2$ ) le premier terme non nul de la série pour  $f(z)$  :

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots = a_k z^k (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots). \tag{9.5}$$

Pour  $|z|$  suffisamment petit,  $1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$  peut être écrite comme  $(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots)^k$  (utiliser la série binomiale) et la fonction  $f(z)$  de (9.5) devient

$$f(z) = a_k (z(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots))^k = a_k (g(z))^k. \tag{9.6}$$

La fonction  $f(z)$  est donc la composition d’une fonction biholomorphe  $g(z)$  et de la fonction  $w^k$  bien connue. Notre inspiration géométrique est donc vérifiée et chaque point proche de  $f(z_0) = 0$  possède  $k$  préimages de  $f(z)$  qui sont proche de  $z_0$ . □

## II.10 Exercices

1. Considérons le demi-disque  $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Donner un chemin continûment différentiable par morceaux qui décrit le bord de cet ensemble.
2. Donner deux paramétrisations équivalentes mais différentes de l'ellipse

$$\left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

3. Démontrer en détail que la longueur d'une courbe est indépendante de la paramétrisation (considérer des chemins qui sont continûment différentiables par morceaux).
4. Calculer la longueur d'arc de la cycloïde  $\gamma(t) = (t - \sin t) + i(1 - \cos t)$  pour  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dessiner cette courbe.
5. Intégrer la fonction  $f(z) = e^z$  sur les deux chemins  $\gamma_1(t) = t + it^2$  (pour  $t \in [0, 1]$ ) et  $\gamma_2(t) = t^2 + it$  (aussi pour  $t \in [0, 1]$ ) ainsi que sur le chemin  $\gamma_1 - \gamma_2$ .  
Faire le même calcul pour la fonction  $f(z) = |z|^2$ .
6. Soit  $\partial K$  le bord (avec une paramétrisation qui est continûment différentiable et orientée positivement) d'un ensemble compact  $K \subset \mathbb{C}$ . Son aire est donné par

$$\text{aire}(K) = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z} dz. \quad (10.1)$$

Démontrer ce résultat d'abord pour un triangle et ensuite pour une union finie de triangles (par exemple, un rectangle).

7. À l'aide de la formule (10.1) calculer l'aire de l'ensemble fini limité par la courbe  $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$  (pour  $0 \leq t \leq 2\pi$ ) où  $\rho(t) = 1 + 3 \sin t$ . Faire un dessin.  
Quelle aire représente l'intégrale  $(2i)^{-1} \int_{\gamma} \bar{z} dz$  si l'on intègre sur tout l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

8. En vous aidant du calcul de  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z+a}$  avec  $\gamma(t) = e^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ , montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + a \cos t}{1 + 2a \cos t + a^2} dt = 0 \quad \text{pour } |a| > 1, a \in \mathbb{R}.$$

*Indication.* Montrer que  $f(z) = (z+a)^{-1}$  possède une primitive sur le disque  $D_\rho(0)$  avec  $\rho = |a|$ .

9. En utilisant les techniques familières pour le calcul dans  $\mathbb{R}$ , calculer les primitives pour:

$$ze^{z^2}, \quad ze^z, \quad z^2 \sin(4z).$$

10. Si  $\gamma$  est l'arc de courbe de l'équation  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  joignant les points  $(1, 1)$  et  $(2, 3)$ , trouver la valeur de

$$\int_{\gamma} (12z^2 + 4iz) dz.$$

11. En évaluant  $\int_{\gamma} e^z dz$  sur le cercle  $|z| = 1$ , montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(t + \sin t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(t + \sin t) dt = 0.$$

12. En utilisant la formule de Cauchy pour l'intégrale  $\int_{\gamma} z^{-1} dz$  où  $\gamma$  est le contour d'une ellipse, montrer la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

13. En s'inspirant du calcul des intégrales de Fresnel (Exemple 4.3) démontrer que

$$\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1-ia}{1+a^2} \quad \text{pour } a \in \mathbb{R} \quad \text{avec } |a| \leq 1.$$

14. Pour  $p, q \in \mathbb{R}, p \geq 0$  et  $r = \sqrt{p^2 + q^2}$  démontrer que

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{\cos(qx)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \sqrt{\frac{r+p}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin(qx)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \sqrt{\frac{r-p}{2}}.$$

*Indication.* Utiliser la substitution  $x = t^2$  dans l'intégrale de l'exercice 13.

15. Soit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  et notons

$$w_n(z) := (z - x_0)(z - x_1) \cdot \dots \cdot (z - x_n).$$

Considérons une courbe fermée  $\gamma$  autour du segment  $[a, b]$ , orientée positivement, et satisfaisant les conditions pour pouvoir appliquer la formule de Cauchy. Pour une fonction  $f(z)$  qui est holomorphe dans l'intérieur de la courbe et dans un voisinage de la courbe, démontrer que

$$p_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-x} \cdot \frac{w_n(z) - w_n(x)}{w_n(z)} dz$$

est un polynôme de degré  $n$  qui satisfait  $p_n(x_k) = f(x_k)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$  (polynôme d'interpolation; voir le cours "Analyse Numérique").

16. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $D_\rho(0)$  et soit  $\gamma(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$  avec  $0 < r < \rho$ . Calculer

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)} d\zeta$$

en dépendance de la position de  $a$  et  $b$  par rapport au cercle  $\gamma$ .

17. Soit  $U \subset \mathbb{C}$  ouvert et  $c \in U$ . Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est continue dans  $U$  et holomorphe dans  $U \setminus \{c\}$ , alors  $f(z)$  est holomorphe dans tout  $U$ .

*Indication.* Démontrer que la fonction  $g(z) := (z - c)f(z)$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $c$  et donc aussi dans  $U$ . Appliquer ensuite le Théorème 6.1 à la fonction  $g(z)$ .

18. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $D_\rho(0)$  avec  $\rho > 1$ . Calculer les intégrales

$$\int_\gamma \left( 2 \pm \left( z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{f(z)}{z} dz$$

avec  $\gamma(t) = e^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$  de deux manières différentes et en déduire les formules

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) dt = f(0) + \frac{f'(0)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2(t/2) dt = f(0) - \frac{f'(0)}{2}.$$

19. Les nombres de Bernoulli  $B_k$  sont les coefficients de la série

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \frac{B_4}{4!} z^4 + \dots \quad (10.2)$$

En utilisant le Théorème de Cauchy-Taylor et le résultat de l'exercice 17, démontrer que le rayon de convergence de cette série est  $\rho = 2\pi$ .

20. Démontrer que la fonction

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{2}{1 + z^2/4\pi^2}$$

est holomorphe dans le disque  $D_\rho(0)$  avec  $\rho = 4\pi$ . En déduire que les nombres de Bernoulli satisfont pour  $k \rightarrow \infty$ ,

$$B_{2k} \approx (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}.$$

21. *Différentiation numérique d'une fonction holomorphe.* Si  $f(z)$  est holomorphe dans le disque  $D_\rho(c)$  et si  $0 < r < \rho$ , on a que

$$f^{(k)}(c) = \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Démontrer que l'approximation numérique

$$f^{(k)}(c) \approx \frac{k!}{N r^k} \sum_{j=0}^{N-1} f(c + re^{it_j}) e^{-ikt_j} \quad \text{avec} \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}$$

donne le résultat exact si  $N > k$  et si  $f(z)$  est un polynôme de degré  $< k + N$ .

22. Pour la fonction  $f(z) = z^2 + z - 1$  calculer le maximum de  $|f(z)|$  dans le disque  $|z| \leq 1$ .  
 23. Considérons la fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}.$$

En appliquant le principe du maximum sur un demi-disque  $\{z; \operatorname{Re} z \leq 0, |z| \leq R\}$  avec un  $R$  très grand, démontrer que

$$|R(z)| \leq 1 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \leq 0.$$

24. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $D_\rho(0)$ . Pour  $0 \leq r < \rho$ , on définit

$$M(r) := \max \{|f(z)|; |z| = r\}.$$

Montrer que la fonction  $r \mapsto M(r)$  est continue et croissante. Elle est strictement croissante si et seulement si  $f(z)$  n'est pas une constante.

25. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le disque  $D_1(0)$ . Montrer qu'il existe un entier positif  $n$  tel que  $f(1/n) \neq 1/(n+2)$ .  
 26. Sur le disque  $D_1(0)$  considérons la fonction définie par la série

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k.$$

Déterminer le domaine maximal où  $f(z)$  peut être prolongée comme fonction analytique. Donner la valeur de  $f(2)$  de ce prolongement.

*Indication.* En dérivant l'identité  $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$  deux fois, essayer d'exprimer la fonction  $f(z)$  comme fraction rationnelle.

27. Soit  $f(z) = z^2 - 3z + 2$ . Calculer explicitement les images  $f(U)$  pour les disques ouverts

$$U = D_{0,5}(1) \quad \text{et} \quad U = D_1(1.5).$$

Montrer dans chacun des cas que  $f(U)$  est ouvert.

*Indication.* Ecrire  $f(z)$  sous la forme  $(z-c)^2 + d$ , et le bord de  $U$  sous la forme  $c + r(t)e^{it}$ .

28. Démontrer le "principe du maximum" à l'aide de l'"open mapping theorem".