

Chapitre III

Singularités et fonctions méromorphes

“Les singularités sont extrêmement importantes car on peut en tirer quelque chose en analyse complexe, cette branche des mathématiques qui étudie les fonctions définies sur un domaine du plan complexe …”
(www.techno-science.net, Astrophysique)

Des fonctions réelles avec des singularités nous sont familières (cours Analyse I), par exemple, $1/x$, $\sin x/x$, $x \sin(1/x)$, etc. Pour des fonctions complexes, l'étude des singularités est très différente et on peut obtenir des classifications intéressantes qui ne sont pas possibles dans le cas réel. Les singularités jouent un rôle important dans le calcul des intégrales (résidus).

III.1 Le point à l'infini et la sphère de Riemann

Dans le cas réel, il est fréquent de “compactifier” l'axe en ajoutant un point $-\infty$ et un deuxième point $+\infty$; en géométrie projective, on introduit une “droite à l'infini”. En analyse complexe, il est plus naturel de considérer tout l'infini *comme un seul point*.

Une première motivation pour cette convention sont les fonctions rationnelles comme $1/z$, la transformation de Cayley (I.2.7) ou celle de Joukovski (I.2.10). On voit, par exemple, en Fig. I.6, que les deux “taches blanches”, représentant l'extérieur de la figure d'à côté, se rapetissent au point 1, si l'on imagine que l'extérieur s'agrandit à l'infini. Donc, le “point 1” correspond au “point ∞ ” par cette application.

Une deuxième motivation est fournie par la *projection stéréographique* (Fig. III.1), qui projette une sphère S^2 à partir du “pôle nord” N sur un plan parallèle à l'équateur. Elle est bijective entre le plan et la sphère, sans le point N . Ce point N correspond justement au “point ∞ ” du plan. Cette identification de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec une sphère est connue sous le nom *sphère de Riemann*.

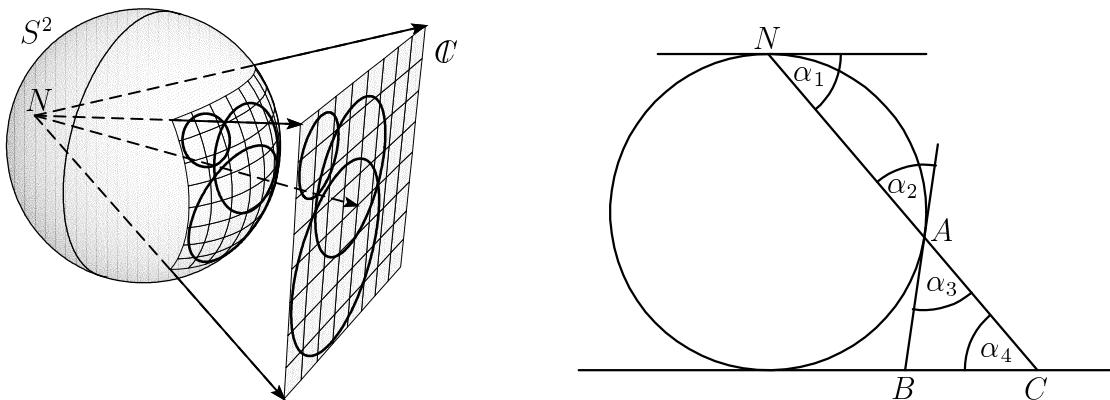


FIG. III.1: Projection stéréographique

On sait depuis l'Antiquité (Hipparchus, Ptolemaios) que cette projection *préserve les cercles* (cours Géométrie I, voir aussi Fig. III.1). Spécialement intéressant en analyse complexe est le fait (connu depuis le 17ème siècle, Halley 1696) que la projection stéréographique *préserve les angles*, c.-à-d., elle est *conforme*. Cela est dû au fait que chaque rayon de projection NAC traverse le plan tangent AB sous le même angle que le plan de projection BC (voir Fig. III.1, à droite: on a $\alpha_1 = \alpha_4$, car BC est parallèle au plan tangent à N , puis $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\alpha_2 = \alpha_3$, donc $\alpha_3 = \alpha_4$).

Les propriétés d'un point complexe ou d'une fonction complexe en un point peuvent être étendues au point ∞ à l'aide de l'application $z \mapsto 1/z$ qui envoie ∞ au point 0.

C'est ainsi qu'on peut définir qu'une suite $\{z_k\}$ converge vers le point ∞ , c.-à-d.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty, \quad (1.1)$$

si la suite $\{1/z_k\}$ converge vers 0, c.-à-d., si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe K tel que $|1/z_k| < \varepsilon$ pour $k \geq K$ (ou, en posant $R = 1/\varepsilon$, si pour tout $R > 0$ il existe K tel que $|z_k| > R$ pour $k \geq K$). La suite sur la sphère de Riemann qui correspond à une telle suite dans \mathbb{C} , converge vers le pôle nord N . Par exemple, la suite $0, i, -2, -3i, 4, 5i, -6, -7i, 8, \dots$ converge vers ∞ dans $\overline{\mathbb{C}}$. La suite $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$ converge aussi vers ∞ dans $\overline{\mathbb{C}}$, mais elle ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si une fonction complexe $f(z)$ est définie pour $|z| > R$, on dénote

$$f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) \quad \text{pour } \{z_k\} \text{ satisfaisant } \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$$

si cette limite existe et ne dépend pas de la suite $\{z_k\}$. Avec cette notation on peut définir qu'une fonction $f(z)$ est *holomorphe (analytique)* au point ∞ , si la fonction $\hat{f}(w) := f(1/w)$ est holomorphe (analytique) au point $w = 0$. La fonction $f(z) = 1/z$ pour laquelle $\hat{f}(w) = w$ est alors holomorphe en ∞ . La fonction de Cayley $f(z) = (z+1)/(z-1)$ satisfait $f(\infty) = 1$ et elle est holomorphe en ∞ car la fonction $\hat{f}(w) = f(1/w) = (1+w)/(1-w)$ est holomorphe en $w = 0$.

III.2 Le développement de Laurent

“L'extension donnée par M. Laurent ... nous paraît digne de remarque.”

(Cauchy 1843, voir Remmert 1991)

Si une fonction holomorphe tend vers l'infini ou cesse d'être holomorphe dans une région, on peut néanmoins sauver la série entière, à condition d'admettre aussi des puissances négatives. Cette extension a été présentée par P.A. Laurent (1813-1854, ingénieur de l'armée) à Cauchy, qui en a parlé à l'Académie (voir citation), mais qui ne l'a pas trouvée “digne” de publication.

Théorème 2.1 Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert qui contient la couronne circulaire $C_{\sigma,\rho}(c) := \{z \in \mathbb{C}; \sigma < |z - c| < \rho\}$. Alors, pour $z \in C_{\sigma,\rho}(c)$ on a

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - c)^2} + \frac{a_{-1}}{z - c} + a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - c)^k \quad (2.1)$$

où

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}} d\zeta, \quad k = \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

est la même formule que (II.6.2), mais aussi valable ici pour les k négatifs. Le chemin d'intégration est $\gamma(t) = c + \eta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ avec $\sigma < \eta < \rho$ (les valeurs $\sigma = 0$ et $\rho = \infty$ sont admises).

La série $\sum_{k \geq 0} a_k(z - c)^k$ converge pour $|z - c| < \rho$, et la série $\sum_{k < 0} a_k(z - c)^k$ pour $|z - c| > \sigma$.

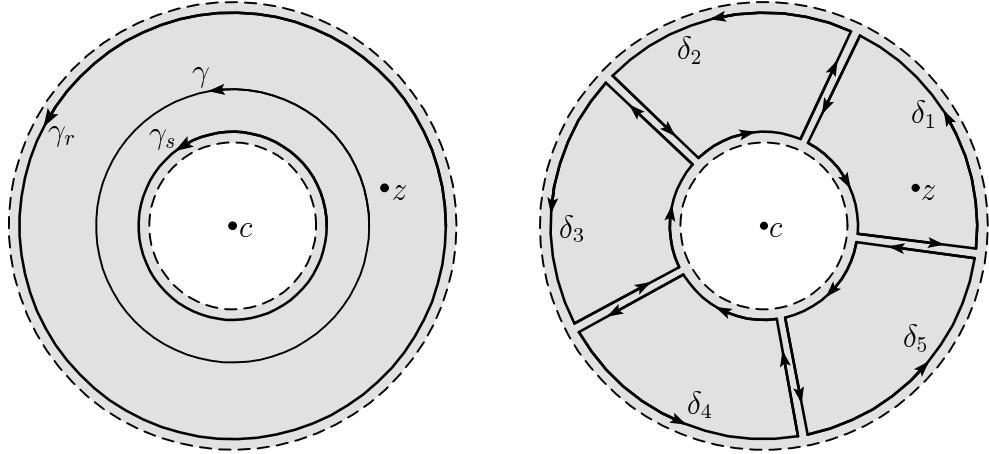


FIG. III.2: Preuve du Théorème de Laurent

Démonstration. Nous suivons de très près les idées de la démonstration du Théorème II.6.1 de Cauchy–Taylor qui est basée sur la formule intégrale (II.5.1) de Cauchy. Comme la couronne $C_{\sigma,\rho}(c)$ n'est pas un domaine étoilé, on ne peut pas directement appliquer cette formule intégrale. On est alors obligé de diviser la couronne en plusieurs parties étoilées (voir la Fig. III.2).

Pour un z fixé à l'intérieur de la couronne $C_{\sigma,\rho}(c)$ nous choisissons $r, s > 0$ et $\theta < 1$ tels que $\sigma < s < s/\theta \leq |z - c| \leq \theta r < r < \rho$ et nous considérons les chemins $\gamma_r(t) = c + re^{it}$, $\gamma_s(t) = c + se^{it}$ et $\delta_1(t), \dots, \delta_n(t)$, dessinés dans la Fig. III.2 pour $n = 5$. La formule intégrale de Cauchy (II.5.1) appliquée au chemin δ_1 , et le Théorème II.4.2 appliqué aux autres δ_j (notons que la fonction $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ est holomorphe dans l'intérieur de δ_j pour $j \neq 1$) donnent

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{pour } j = 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

En additionnant les intégrales sur les δ_j , la contribution des segments reliant les cercles γ_r et γ_s se simplifie, et on obtient $\int_{\delta_1} + \dots + \int_{\delta_n} = \int_{\gamma_r} - \int_{\gamma_s}$. Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta. \quad (2.4)$$

La première intégrale dans (2.4) peut être traitée comme dans la preuve du Théorème II.6.1 et donne naissance aux termes avec $k \geq 0$ dans (2.1). Comme l'intégrant des intégrales (2.2) est holomorphe dans la couronne, le chemin γ_r peut être déplacé librement vers γ sans changer la valeur de l'intégrale.

Pour la deuxième intégrale, nous échangeons $\zeta \leftrightarrow z$ dans (II.6.3), ainsi la série devient convergente pour $|\zeta - c| < |z - c|$. Cela donne

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - c} + \frac{\zeta - c}{(z - c)^2} + \dots + \frac{(\zeta - c)^k}{(z - c)^{k+1}} + \frac{(\zeta - c)^{k+1}}{(z - c)^{k+1}(z - \zeta)}, \quad (2.5)$$

et inséré dans la deuxième intégrale de (2.4) crée les termes avec $k < 0$. Le reste peut être estimé de la même manière, car $|\zeta - c|/|z - c| \leq \theta < 1$ pour ζ se déplaçant sur le chemin γ_s . \square

L'inégalité de Cauchy (voir (7.1))

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{avec} \quad M(r) = \max_{|z-c|=r} |f(z)| \quad (2.6)$$

$(\sigma < r < \rho)$ reste valable pour les k positifs et négatifs.

Exemple 2.2 Considérons la fonction $f(z) = 1/(1+z^2)$ et cherchons le développement de Laurent autour du point $c = 0.4 + 0.6i$. Pour calculer les coefficients, les formules intégrales (2.2) ne sont pas toujours pratiques. On essayera plutôt d'utiliser des séries de Taylor connues.

La fonction $f(z) = 1/(1+z^2)$ est holomorphe partout sauf au points $\pm i$ qui sont à distance $\sigma \approx 0.566$ et $\rho \approx 1.65$ de c (voir la Fig. III.3). Pour calculer le développement de Laurent dans la couronne entre ces deux rayons, nous décomposons la fonction en fractions simples,

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{-i-z} \right). \quad (2.7)$$

On suit la démonstration précédente et on remplace les deux fractions simples par les deux séries géométriques (2.5) et (II.6.3), une fois avec ζ remplacé par i et l'autre fois par $-i$, en faisant attention à la convergence. Ainsi, on obtient pour (2.7)

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\dots + \frac{(i-c)^2}{(z-c)^3} + \frac{i-c}{(z-c)^2} + \frac{1}{z-c} + \frac{1}{-i-c} + \frac{z-c}{(-i-c)^2} + \frac{(z-c)^2}{(-i-c)^3} + \dots \right).$$

La valeur absolue de cette série tronquée ($-24 \leq k \leq 24$) peut être admirée en Fig. III.3.

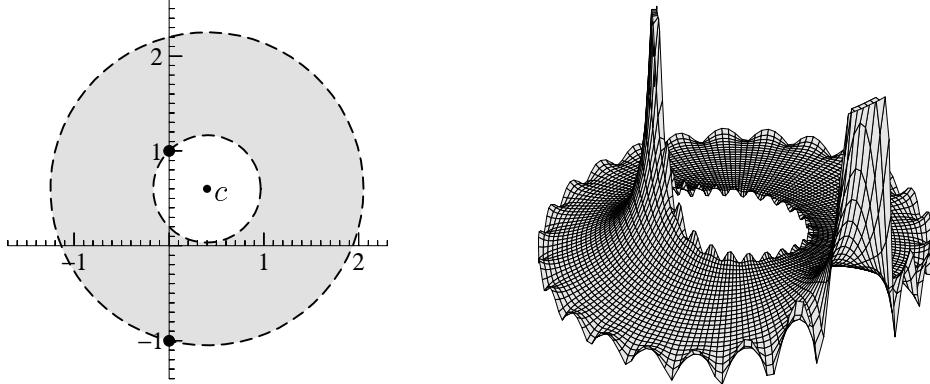


FIG. III.3: Domaine et module de ± 24 termes d'une série de Laurent pour $1/(1+z^2)$.

III.3 Singularités isolées

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un disque épointé ($\rho > 0$)

$$D_\rho^*(c) := \{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z - c| < \rho\} = D_\rho(c) \setminus \{c\}, \quad (3.1)$$

nous appelons c une *singularité isolée*. Le but de ce paragraphe est de classifier les singularités isolées et d'étudier les fonctions holomorphes proches de leurs singularités isolées.

Le disque épointé $D_\rho^*(c)$ est une couronne $C_{\sigma, \rho}(c)$ avec $\sigma = 0$. On peut donc appliquer le Théorème 2.1 et considérer le développement de Laurent

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-c)^k$$

pour $z \in D_\rho^*(c)$. On distingue les trois possibilités suivantes:

1. *singularité supprimable*, si $a_k = 0$ pour tout $k < 0$;
2. *pôle d'ordre $m > 0$* , si $a_k = 0$ pour $k < -m$, mais $a_{-m} \neq 0$;
3. *singularité essentielle*, si un nombre infini de a_k avec $k < 0$ sont non nuls.

1) Singularités supprimables

Une singularité supprimable s'appelle aussi singularité virtuelle. Comme le théorème suivant nous montre, il ne s'agit pas d'une vraie singularité.

Théorème 3.1 *Soit $f(z)$ holomorphe dans un disque épointé $D_\rho^*(c)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $f(z)$ possède une singularité supprimable en c ;
2. $f(z)$ se prolonge holomorphiquement au disque entier $D_\rho(c)$;
3. la limite $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ existe dans \mathbb{C} ;
4. $f(z)$ est bornée au voisinage de c .

Démonstration. L'implication (1) \Rightarrow (2) suit du développement de Laurent en posant $f(c) := a_0$. La condition (2) entraîne (3), car chaque fonction holomorphe est continue. L'existence de la limite $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = a$ implique que pour tout z dans un voisinage de c la valeur de $f(z)$ est proche de $a \in \mathbb{C}$, donc (3) \Rightarrow (4).

Il reste à démontrer (4) \Rightarrow (1). Si $|f(z)| \leq M_0$ dans un voisinage de c , alors $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)| \leq M_0$. Par conséquent, les inégalités de Cauchy (2.6), pour $r \rightarrow 0$, montrent que $a_k = 0$ pour tout $k < 0$. Ainsi, le développement de Laurent devient une série entière. \square

2) Pôles

Si $f(z)$ possède un pôle d'ordre m en c , on peut mettre en évidence le facteur $(z - c)^{-m}$ dans le développement de Laurent et on obtient

$$f(z) = (z - c)^{-m} \left(a_{-m} + a_{-m+1}(z - c) + a_{-m+2}(z - c)^2 + \dots \right). \quad (3.2)$$

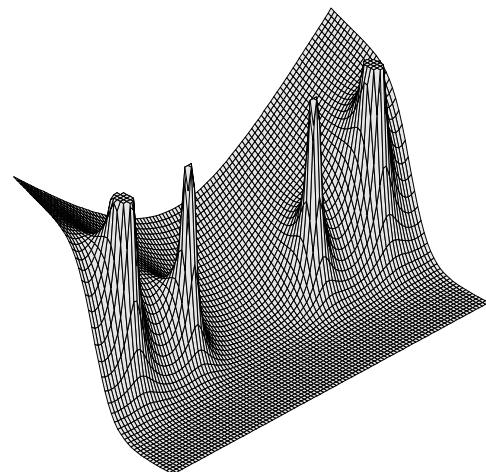
Théorème 3.2 *Soit $f(z)$ holomorphe dans un disque épointé $D_\rho^*(c)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $f(z)$ possède en c un pôle d'ordre $m > 0$;
2. $f(z) = (z - c)^{-m}g(z)$ où $g(z)$ est holomorphe dans le disque entier $D_\rho(c)$;
3. la limite $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$ existe dans $\overline{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Les implications (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) sont une conséquence immédiate de (3.2). Supposons maintenant que $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$. La fonction $f(z)$ est alors non nulle dans un voisinage du point c et l'inverse $h(z) = 1/f(z)$ est bien définie et holomorphe dans un disque épointé $D_r^*(c)$ avec $0 < r \leq \rho$. Comme $\lim_{z \rightarrow c} h(z) = 0$, on déduit du Théorème 3.1 que $h(z)$ est holomorphe dans le disque entier $D_r(c)$ et que $h(c) = 0$. Par conséquent, $h(z) = (z - c)^m h_0(z)$ avec un $m > 0$ et avec $h_0(c) \neq 0$. La fonction $f(z) = 1/h(z)$ possède donc un développement de Laurent de la forme (3.2). \square

Un pôle d'ordre m est typiquement présent dans un quotient $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ de deux fonctions holomorphes où $f_1(c) \neq 0$ et le dénominateur $f_2(z)$ possède un zéro de multiplicité m en c .

Une illustration est donnée pour la fonction $z/(e^z - 1)$, qui possède des pôles simples en $c = \pm 2i\pi k$, $k \neq 0$ et une singularité supprimable en $c = 0$. La figure montre la valeur absolue au-dessus du domaine $[-8, 8] \times [-16, 16]$.



3) Singularités essentielles

Dans le cas d'une singularité essentielle, le comportement de $f(z)$, quand z se rapproche de c , est caractérisé par le théorème suivant.

Théorème 3.3 (Casorati 1868, Weierstrass 1876) *Soit $f(z)$ holomorphe dans un disque épointé $D_r^*(c)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $f(z)$ possède en c une singularité essentielle;
2. pour tout r avec $0 < r \leq \rho$, l'ensemble $f(D_r^*(c))$ est dense dans \mathbb{C} ;
3. la limite $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{C}}$.

Démonstration. L'implication (2) \Rightarrow (3) est évidente car, au cas où $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = a \in \overline{\mathbb{C}}$ existe, $f(z)$ est proche de a si z est proche de c et $f(D_r^*(c))$ ne peut donc pas être dense dans \mathbb{C} .

Si la limite $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{C}}$, le point c ne peut pas être une singularité sup-primable ni un pôle. Donc, l'implication (3) \Rightarrow (1) est vraie.

Pour démontrer (1) \Rightarrow (2), supposons que c est une singularité essentielle et (par l'absurde) qu'il existe $r > 0$ tel que $f(D_r^*(c))$ n'est pas dense dans \mathbb{C} . Il existe alors $a \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in D_r^*(c)$. Ceci nous permet de considérer la fonction

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a} \quad \text{c.-à-d.} \quad f(z) = a + \frac{1}{g(z)}. \quad (3.3)$$

Elle est holomorphe et bornée ($|g(z)| \leq 1/\varepsilon$) dans $D_r^*(c)$. D'après le Théorème 3.1, $g(z)$ se prolonge holomorphiquement à $D_r(c)$. Si $g(c) \neq 0$, alors $1/g(z)$ est holomorphe dans $D_r(c)$ et si $g(c) = 0$ (zéro de multiplicité m), alors $1/g(z)$ a un pôle d'ordre m en c . On en déduit (voir (3.3)) que $f(z)$ est holomorphe ou que $f(z)$ a un pôle d'ordre m en c . Ceci contredit le fait que $f(z)$ possède une singularité essentielle en c . \square

Une illustration est donnée en Fig. III.4, pour la fonction

$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} \mp \dots$$

une fonction qui, dans le cas réel, est si aimable (voir [HW, p. 253]). Les deux tours qui apparaissent forment une singularité, les lignes de niveau de $|f(z)|$ sont des lemniscates (Exercice 7). L'argument de $f(z)$ se comporte beaucoup plus violemment, avec une infinité de rotations sur chacune de ces lemniscates. La validité du Théorème de Casorati–Weierstrass est évidente ici.

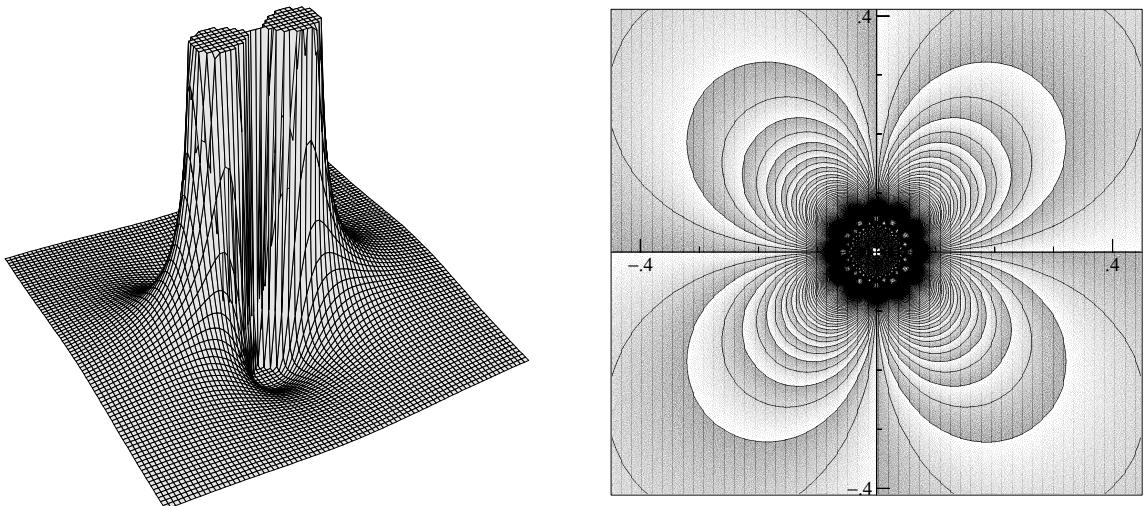


FIG. III.4: Fonction e^{-1/z^2} avec singularité essentielle; la valeur absolue à gauche et les lignes de niveau avec valeurs $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) de $\arg f(z)$ à droite.

III.4 Théorème des résidus

“résidu [ré-zi-du] n. m. (du lat. *residuus*, qui est de reste). Ce qui reste . . .”

(Larousse Dictionnaire Universel)

Le Théorème des résidus généralise le théorème de Cauchy II.4.2 aux fonctions ayant des singularités isolées à l’intérieur du chemin d’intégration. Il fut pour Cauchy l’instrument principal pour trouver des valeurs d’intégrales définies.

Définition 4.1 Soit $f(z)$ holomorphe dans un disque épointé $D_\rho^*(c)$. La quantité

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta =: \text{Res}(f, c) \quad (4.1)$$

où $\gamma(t) = c + re^{it}$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$ et $0 < r < \rho$, est appelée *le résidu de $f(z)$ au point c* (c.-à-d. la seule chose qui reste de $f(z)$ après intégration).

Le résidu est le coefficient de $(z - c)^{-1}$ du développement de Laurent. On peut le calculer par développement en séries. Pour des pôles simples, on a les formules commodes

$$\text{Res}(f, c) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z) \quad \text{et} \quad \text{Res}(f, c) = \frac{f_1(c)}{f_2'(c)} \quad (4.2)$$

si $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ avec $f_1(c) \neq 0$ et si $f_2(z)$ possède un zéro simple en $z = c$.

Si c est un pôle d’ordre m de $f(z)$, on pose $g(z) = (z - c)^m f(z)$. Alors, le résidu de $f(z)$ en c est le $m - 1$ -ième terme de la série de Taylor de $g(z)$, c.-à-d.

$$\text{Res}(f, c) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c). \quad (4.3)$$

Théorème 4.2 (Cauchy 1826) Soit U un domaine étoilé et γ une courbe fermée parcourant ∂U dans le sens positif. Soit $f(z)$ holomorphe dans un voisinage de l’adhérence $\overline{U} = U \cup \partial U$, à l’exception d’un nombre fini de singularités isolées c_1, c_2, \dots, c_k dans U . Alors,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, c_j). \quad (4.4)$$

Démonstration. La preuve est très similaire à celle du Théorème II.5.1 (formule intégrale de Cauchy). La seule différence réside dans le fait que nous avons maintenant *plusieurs* points singuliers à contourner par de petits cercles (voir Fig. III.5). Comme auparavant, cela marche sans autre complication si le domaine de définition est étoilé. On projette les singularités vers le bord

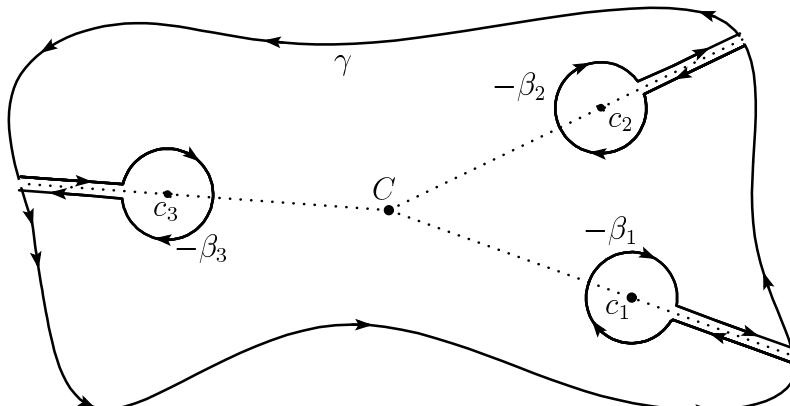


FIG. III.5: Preuve du théorème des résidus

et on applique le Théorème II.4.2 de Cauchy à un chemin γ^* qui comprend γ , les cercles autour des singularités et les connections. Les intégrales sur les chemins aller et retour disparaissent, il ne reste que

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^k \int_{\beta_j} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (4.5)$$

où les β_j sont les cercles qui contournent les points singuliers dans le sens positif. On obtient la formule (4.4) en remplaçant les dernières intégrales par (4.1). \square

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine U et si $z \in U$ est un point fixé, alors la fonction

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (4.6)$$

possède z comme seul point singulier avec $\text{Res}(g, z) = f(z)$ (voir (4.2)). Dans ce cas, le Théorème 4.2 des résidus devient la formule intégrale de Cauchy (II.5.1).

III.5 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

“La théorie des résidus se prête avec une merveilleuse simplicité à la recherche des intégrales définies, et voici comment:”
(H. Laurent, *Théorie des Résidus*, 1865)

Nous sommes maintenant de retour à la toute première motivation de Cauchy pour entreprendre ses recherches en analyse complexe, à savoir la justification et la généralisation des calculs d'intégrales entrepris par Euler et Laplace.

“L'art” de trouver des intégrales définies a été cultivé tout au long des 18ème et 19ème siècle, Dirichlet et Kronecker ont donné des cours (jusqu'à 6 heures hebdomadaires) sur le sujet. Aujourd'hui, il existe de longues tables (par ex. celles de Gröbner–Hofreiter ou Gradstein–Ryshik qui témoignent d'un travail incroyable) et des programmes informatiques (par ex. Maple ou Mathematica), qui “crachent” ces intégrales en quelques millisecondes. Mais, pour un esprit scientifique, il est, encore et toujours, intéressant de voir comment ces trésors du savoir ont été trouvés.

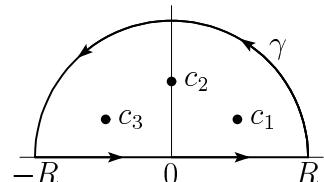
L'idée est très simple: on choisit une fonction $f(z)$, on choisit un chemin γ et on évalue l'intégrale (4.4) en calculant les résidus; ensuite on la partage en parties réelle et imaginaire, et on trouve deux formules d'intégrales (dont une est souvent triviale). Discutons quelques situations typiques qui conduisent à des intégrales intéressantes.

1) Intégrales impropreς.

Considérons des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

où la fonction $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel) et satisfait $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$.



Comme chemin d'intégration on prend l'intervalle réel $[-R, R]$, suivi d'un grand demi-cercle $R \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ (voir la petite figure). Sous la condition $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$, l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 pour $R \rightarrow \infty$ et on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c_k > 0} \text{Res}(f, c_k), \quad (5.1)$$

où la somme est sur toutes les singularités c_k de $f(z)$ dans le demi-plan supérieur.

Exemple. De cette manière on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}$$

sans avoir besoin de calculer une primitive de la fonction $f(x) = 1/(x^6 + 1)$. En effet, les singularités concernées sont $c_1 = e^{i\pi/6}$, $c_2 = i$ et $c_3 = e^{5i\pi/6}$. Les résidus correspondants sont $c_k^{-5}/6$ par la deuxième formule de (4.2). Ainsi, $\text{Res}(f, c_1) = e^{-5i\pi/6}/6$, $\text{Res}(f, c_2) = -i/6$ et $\text{Res}(f, c_3) = e^{-i\pi/6}/6$ dont la somme est $-2i/6$.

2) Intégrales trigonométriques. Pour une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$$

on considère le cercle unité $\gamma(t) = e^{it}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$ et on observe que

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = \int_{\gamma} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (5.2)$$

Il suffit alors de calculer les singularités et leurs résidus pour la fonction de la deuxième intégrale dans (5.2). Si $F(u, v)$ est une fonction rationnelle, l'intégrant de (5.2) est aussi rationnel.

Exemple. On obtient les formules (pour $p \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2} = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - p)(1 - pz)} = \frac{2\pi}{1 - p^2} \quad \text{si } |p| < 1 \quad (5.3)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{p + \cos t} = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2pz + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - 1}} \quad \text{si } p > 1. \quad (5.4)$$

Pour le deuxième exemple, il y a un pôle $c_1 = -p + \sqrt{p^2 - 1}$ à l'intérieur du cercle unité γ de résidu $\text{Res}(f, c_1) = 1/(2\sqrt{p^2 - 1})$.

L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(p + \cos t)^2} = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2 - 1})^3} \quad \text{si } p > 1 \quad (5.5)$$

nécessite le calcul du résidu d'un pôle double. Pour éviter cela, on peut dériver l'intégrale (5.4) par rapport au paramètre p .

3) Transformation de Fourier. Il s'agit des intégrales improches de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx,$$

où la fonction $g(z)$ n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel) et satisfait $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$.

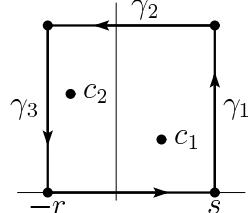
Comme chemin nous considérons le bord du carré (voir la petite figure) où $r > 0$ et $s > 0$ sont suffisamment grands pour que toutes les singularités soient dans l'intérieur du carré. Notant $M(r) := \max_{|z| \geq r} |g(z)|$ qui converge vers zéro pour $r \rightarrow \infty$, l'intégrale sur $\gamma_2(t) = -t + i(r+s)$, $t \in [-s, r]$ peut être majorée par (pour $a > 0$)

$$\left| \int_{\gamma_2} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq M(r+s) e^{-a(r+s)} (r+s) \rightarrow 0 \quad \text{si } r+s \rightarrow \infty.$$

Pour l'intégrale sur $\gamma_1(t) = s + it$, $t \in [0, s+t]$ on obtient

$$\left| \int_{\gamma_1} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq M(s) \int_0^{r+s} e^{-at} dt \leq \frac{M(s)}{a} (1 - e^{-a(r+s)}) \leq \frac{M(s)}{a} \rightarrow 0 \quad \text{si } s \rightarrow \infty$$

et l'intégrale sur $\gamma_3(t)$ peut être majorée de la même manière. Ainsi nous obtenons



$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c_k > 0} \text{Res}(f, c_k) \quad \text{si } a > 0 \quad (5.6)$$

où $f(z) = g(z)e^{iaz}$ et la somme est sur toutes les singularités c_k de $g(z)$ dans le demi-plan supérieur.

Exemple. On obtient alors sans calculs compliqués que, pour $a > 0$ et pour $b \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re } b > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - ib} dx = 2\pi i e^{-ab} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x + ib} dx = 0.$$

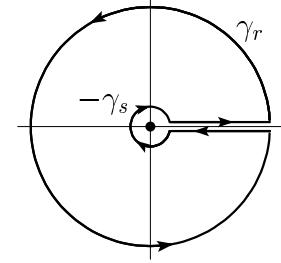
Une addition resp. soustraction de ces deux intégrales donne le formules de Laplace (1810)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b \cos(ax)}{x^2 + b^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-ab}.$$

4) Transformation de Mellin. Considérons avec $a \in \mathbb{C}$ et $0 < \text{Re } a < 1$ l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} g(x)x^{a-1} dx$$

où la fonction $g(z)$ n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel) et satisfait $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)z^a = 0$ ainsi que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)z^a = 0$.



Rappelons que la puissance z^a est en général multivaluée et donnée par $z^a = \exp(a \log z)$. Pour obtenir une fonction holomorphe il faut fixer une branche du logarithme. Nous considérons $\log z = \log|z| + i \arg z$ où l'argument est choisi pour que $0 \leq \arg z < 2\pi$. Par le Théorème I.8.2 la fonction $\log z$ et alors aussi z^a sont holomorphes dans le plan complexe privé de l'axe réel positif. Pour un réel $x > 0$ et pour $z \rightarrow x$, la limite d'en haut et celle d'en bas sont différentes; on a respectivement x^a et $e^{2\pi i a} x^a$.

Pour définir le chemin d'intégration, nous prenons un $s > 0$ très petit et un $r > 0$ très grand, et nous considérons les deux cercles de rayons s et r reliés par des segments horizontaux proches de l'axe réel positif (voir la petite figure). Avec $M(r) := \max_{|z|=r} |g(z)z^a|$, les intégrales sur les cercles peuvent être majorées par

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z)z^{a-1} dz \right| \leq 2\pi M(r) \quad \text{et} \quad \left| \int_{\gamma_s} g(z)z^{a-1} dz \right| \leq 2\pi M(s) \quad (5.7)$$

et convergent vers zéro pour $r \rightarrow \infty$ et $s \rightarrow 0$ (par hypothèse sur la fonction $g(z)$). Le théorème des résidus implique alors que, dans la limite $r \rightarrow \infty$ et $s \rightarrow 0$, on a

$$\int_0^{\infty} g(x)x^{a-1} dx - e^{2\pi i a} \int_0^{\infty} g(x)x^{a-1} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, c_j)$$

où c_1, \dots, c_k sont les singularités de $g(z)$ et les résidus sont calculés pour $f(z) = g(z)z^{a-1}$. En utilisant le fait que $1 - e^{2\pi i a} = -e^{i\pi a} 2i \sin(\pi a)$ cette formule devient

$$\int_0^{\infty} g(x)x^{a-1} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, c_j). \quad (5.8)$$

Exemple. Avec $g(z) = 1/(1+z)$ on obtient la formule (pour $0 < \text{Re } a < 1$)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},$$

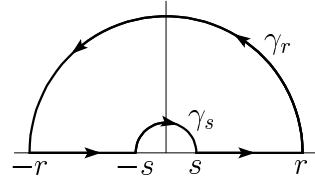
car le résidu de $f(z) = z^{a-1}/(1+z)$ en $c_1 = -1$ est $(-1)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-1)} = e^{(a-1)i\pi} = -e^{i\pi a}$.

5) Une formule d'Euler.

Pour démontrer

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

nous posons $f(z) = e^{iz}/z$ et nous considérons le chemin de la figure avec s petit et r grand.



Le petit demi-cercle est nécessaire pour éviter le pôle à l'origine. L'intégrale sur le grand demi-cercle $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ peut être estimée à l'aide de $\sin t \geq 2t/\pi$ sur $[0, \pi/2]$ par

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\pi} dt = \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{r}.$$

Elle converge vers zéro si $r \rightarrow \infty$. Comme la fonction e^{iz}/z est holomorphe dans l'intérieur du chemin fermé, une intégration sur ce chemin donne pour $r \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{-s} \frac{e^{ix}}{x} dx - i \int_0^\pi e^{s(\cos t + i \sin t)} dt + \int_s^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx = 0.$$

L'intégrale au milieu converge vers π si $s \rightarrow 0$. En échangeant x par $-x$ dans la première intégrale et en utilisant $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ nous obtenons la formule cherchée.

6) Encore des intégrales improches.

Cherchons à calculer

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

où la fonction $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel positif, l'origine incluse) et satisfait $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) \cdot \log z = 0$.

L'idée est de considérer la fonction $g(z) := f(z) \cdot \log z$ et le même chemin que pour la transformation de Mellin. Comme dans (5.7) on démontre que l'intégrale de $g(z)$ sur le grand cercle disparaît si $r \rightarrow \infty$. Celle sur le petit cercle avec rayon s , peut être estimée comme suit:

$$\left| \int_{\gamma_s} g(z) dz \right| \leq 2\pi s \cdot \max_{|z|=s} |f(z)| \cdot (|\log s| + 2\pi).$$

Elle converge aussi vers zéro pour $s \rightarrow 0$, car $f(z)$ n'a pas de singularité à l'origine. Pour l'intégrale sur le chemin entier il reste alors (pour $r \rightarrow \infty$ et $s \rightarrow 0$)

$$\int_0^\infty f(x) \log x dx - \int_0^\infty f(x) (\log x + 2\pi i) dx$$

et le théorème des résidus donne

$$\int_0^\infty f(x) dx = - \sum_{j=1}^k \text{Res}(g, c_j). \quad (5.9)$$

Exemple. Comme application concrète, calculons l'intégrale suivante:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Pour les trois singularités $c_1 = e^{i\pi/3}$, $c_2 = -1$, $c_3 = e^{-i\pi/3}$ les résidus de $g(z) = \log z/(1+z^3)$ sont respectivement $-i\pi(1+i\sqrt{3})/18$, $i\pi/3$ et $-5i\pi(1-i\sqrt{3})/18$. La formule (5.9) donne la valeur affirmée de l'intégrale.

III.6 Fonctions méromorphes

“μέρος, partie” et “μορφή, forme”

(Dictionnaire Grec Français, Hachette)

Les fonctions méromorphes sont des fonctions qui ont presque (en partie) la forme des fonctions holomorphes. Plus précisement on a:

Définition 6.1 (Briot–Bouquet 1875) Une fonction $f(z)$ est *méromorphe* dans un ouvert U , si elle est holomorphe dans U sauf en des points isolés où elle peut avoir des pôles.

Les fonctions méromorphes dans un domaine U peuvent être additionnées, multipliées et dérivées sans sortir de l'ensemble des fonctions méromorphes. L'avantage par rapport aux fonctions holomorphes est que les fonctions méromorphes peuvent aussi être divisées entre elles.

Théorème 6.2 Si $f(z)$ et $g(z)$ sont méromorphes dans U , leur quotient $f(z)/g(z)$ est aussi méromorphe. L'ensemble des fonctions méromorphes dans U forme alors un corps.

Démonstration. Les singularités de $f(z)/g(z)$ sont les pôles de $f(z)$ et $g(z)$ et les zéros de $g(z)$. Pour un tel point c on a $f(z) = (z - c)^m f_1(z)$ avec $m \leq 0$ et $f_1(c) \neq 0$ et $g(z) = (z - c)^n g_1(z)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $g_1(c) \neq 0$. Le quotient $f(z)/g(z) = (z - c)^{m-n} f_1(z)/g_1(z)$ possède en c une singularité supprimable (si $m \geq n$) ou un pôle d'ordre $n - m$. \square

Exemples. Toutes les fonctions holomorphes, mais aussi les fonctions rationnelles ainsi que les fonctions $\tan z = \sin z / \cos z$, $\cot z = \cos z / \sin z$, $f(z) = z/(e^z - 1)$, etc., sont méromorphes.

Décomposition en fractions simples. Pour les fonctions rationnelles, la décomposition en fractions simples est souvent très utile. Nous reprenons un exemple de [HW, p. 119–120]:

$$f(z) = \frac{6z^4 - 20z^2 + 4z + 19}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4} = \frac{6z^4 - 20z^2 + 4z + 19}{(z - 1)^3(z + 2)^2} \quad (6.1)$$

Nous avons un pôle d'ordre 3 en $z = 1$ et un d'ordre 2 en $z = -2$. La fonction $f(z) \cdot (z - 1)^3$ n'a plus de pôle en $z = 1$. Nous développons cette fonction en série de Taylor et obtenons le développement de Laurent (qui converge pour $0 < |z - 1| < 3$)

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^3} - \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{3}{z - 1} + \frac{8}{9} - \frac{7}{27}(z - 1) + \frac{2}{27}(z - 1)^2 + \dots \quad (6.2)$$

et similairement pour l'autre pôle (cette fois pour $0 < |z + 2| < 3$)

$$f(z) = -\frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{3}{z + 2} - \frac{34}{27} - \frac{14}{27}(z + 2) - \frac{17}{81}(z + 2)^2 + \dots \quad (6.3)$$

Idée: Si on dénote les “parties principales” de ces développements par

$$\ell_1(z) = \frac{1}{(z - 1)^3} - \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{3}{z - 1} \quad \text{et} \quad \ell_2(z) = -\frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{3}{z + 2}, \quad (6.4)$$

alors $f(z) - \ell_1(z) - \ell_2(z)$ n'a plus de pôle et, par le Théorème 3.1, est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, il suit du Théorème II.7.2 de Liouville que cette différence est zéro et

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^3} - \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{3}{z - 1} - \frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{3}{z + 2} \quad (6.5)$$

(cf. [HW, formule (II.5.11)]).

Rappelons que $f(z)$ possède un pôle d'ordre m en $c = \infty$, si $\widehat{f}(w) = f(1/w)$ en a un au point $w = 0$. Ceci signifie que $\widehat{f}(w) = w^{-m} f_1(w)$ où $f_1(w)$ est holomorphe proche 0 et $f_1(0) \neq 0$. Alors, $f(z) = z^m f_1(z)$ où $f_1(z)$ est holomorphe dans un voisinage de $z = \infty$ et $f_1(\infty) \neq 0$. Par exemple, un polynôme de degré m possède en ∞ un pôle d'ordre m .

Théorème 6.3 Si $f(z)$ est une fonction méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, alors $f(z)$ ne possède qu'un nombre fini de pôles et est une fraction rationnelle.

Démonstration. Comme les singularités (ici le point infini est inclus) d'une fonction méromorphe sont isolées, il existe $R > 0$ tel que $f(z)$ ne possède pas de singularité à l'extérieur de $B_R(0)$ (sauf éventuellement en $z = \infty$) et seulement un nombre fini dans $\overline{B_R}(0)$. Soient c_1, \dots, c_k les pôles de $f(z)$ situés dans \mathbb{C} . Si m_j est l'ordre de c_j , on considère la fonction

$$g(z) := (z - c_1)^{m_1} \cdots (z - c_k)^{m_k} \cdot f(z)$$

qui est holomorphe dans tout \mathbb{C} . Si $f(z)$ a un pôle d'ordre $m > 0$ en ∞ où si $f(z)$ est holomorphe dans un voisinage de ∞ ($m = 0$), on a $|g(z)| \leq \text{Const}|z|^{m+m_1+\dots+m_k}$. Par la remarque suivant le Théorème II.7.2 de Liouville, la fonction $g(z)$ est un polynôme de degré au plus $m+m_1+\dots+m_k$. Par conséquent, $f(z)$ est une fonction rationnelle. \square

Cas d'une infinité de pôles. Soit, par exemple, $f(z) = \cot z = \cos z / \sin z$. Il y a des pôles simples aux points $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\text{Res}(f, k\pi) = 1$. La formule analogue à (6.5) serait ici

$$\begin{aligned} \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} &= \dots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \dots \\ &= \dots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

formule trouvée par Euler, à l'aide de son produit pour $\sin z$ (voir *Introductio* 1748, Chap. X, §178). Voici d'autres exemples :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \dots - + \frac{1}{z+2\pi} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} - + \dots \\ &= \dots - + \frac{1}{z+2\pi} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} - + \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 z} &= \dots + \frac{1}{(z+2\pi)^2} + \frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{(z-2\pi)^2} + \dots \\ &= \dots + \frac{1}{(z+2\pi)^2} + \frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{(z-2\pi)^2} + \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\cos z}{\sin^2 z} &= \dots - + \frac{1}{(z+2\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{(z-2\pi)^2} - + \dots \\ &= \dots - + \frac{1}{(z+2\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{(z-2\pi)^2} - + \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Notre but est de démontrer ces formules. Tout d'abord remarquons que les séries (6.6) et (6.7) ne convergent pas sans autre précision (série harmonique). Pour donner une sens à ces formules il faut grouper ensemble les termes $(z + k\pi)^{-1} + (z - k\pi)^{-1} = 2z/(z^2 - k^2\pi^2)$.

Pour une fonction méromorphe avec pôle c_j nous notons par $\ell_j(z)$ la *partie principale* dans le développement de Laurent autour de c_j (c.-à-d., les termes avec indices négatifs). Pour une courbe fermée γ autour de l'origine, nous notons par $d(\gamma)$ la distance de γ à l'origine et par $L(\gamma)$ sa longueur.

Théorème 6.4 (Mittag-Leffler) *Soit $f(z)$ méromorphe dans \mathbb{C} avec pôles c_1, c_2, c_3, \dots ($c_j \neq 0$). Considérons une suite $\{\gamma_k\}$ de courbes fermées contournant l'origine et satisfaisant $d(\gamma_k) \rightarrow \infty$ pour $k \rightarrow \infty$ et $L(\gamma_k)/d(\gamma_k) \leq C$, sur lesquelles*

$$|f(z)| \leq M \quad \text{pour } z \in \gamma_k \quad \text{et} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.10)$$

Alors on a

$$f(z) = f(0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) \quad (6.11)$$

où $\text{Int}(\gamma_k)$ désigne l'intérieur de la courbe γ_k .

Si $c_0 = 0$ est un pôle de $f(z)$, il faut remplacer $f(0)$ dans la formule (6.11) par $\ell_0(z)$ plus le terme constant dans le développement de Laurent autour de $c_0 = 0$.

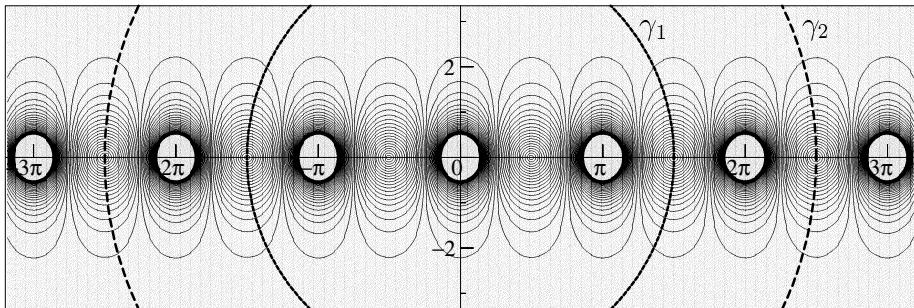
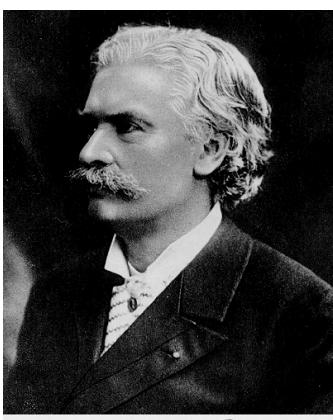


FIG. III.6: Illustration de la preuve du “Théorème de Mittag-Leffler” pour $f(z) = \cot z$



Mittag-Leffler

Démonstration. Ce théorème est une version simplifiée du célèbre théorème de Mittag-Leffler, qui fut publié dans *Acta Math.* vol. 4, 1884.

Comme les singularités de $f(z)$ sont isolées, il n'y a qu'un nombre fini des pôles à l'intérieur de γ_k (voir Fig. III.6). L'idée est d'enlever ces singularités et de considérer la fonction

$$f(z) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} \ell_j(z)$$

qui est holomorphe dans un voisinage de $\text{Int}(\gamma_k)$ (voir Fig. III.7). La formule intégrale de Cauchy donne alors

$$f(z) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} \ell_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} \ell_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (6.12)$$

pour z dans l'intérieur de γ_k et différent de pôles. Dans cette situation, la fonction $g_j(\zeta) = \ell_j(\zeta)/(\zeta - z)$ possède les pôles z et c_j avec résidus $\text{Res}(g_j, z) = \ell_j(z)$ et $\text{Res}(g_j, c_j) = -\ell_j(z)$.

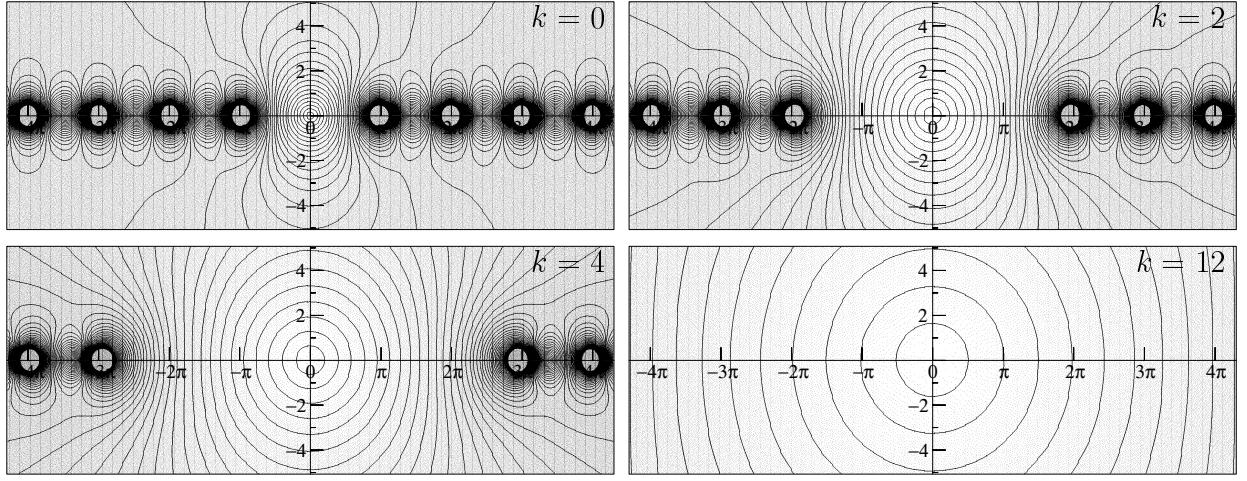


FIG. III.7: Courbes de niveau pour la valeur absolue de $f(z) = \cot z - \sum_{j=0}^k \ell_j(z)$

Le théorème des résidus donne alors que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{\ell_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (6.13)$$

et la formule (6.12) (appliquée une fois pour z et une deuxième fois pour $z = 0$) implique que

$$f(z) - f(0) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta) z}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta.$$

Nous majorons cette dernière intégrale en utilisant (6.10)) et l'hypothèse sur γ_k , ce qui donne

$$\left| f(z) - f(0) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) \right| \leq \frac{M |z| L(\gamma_k)}{2\pi d(\gamma_k) d(\gamma_k, z)} \leq \frac{M |z| C}{2\pi d(\gamma_k, z)} \quad (6.14)$$

où $d(\gamma_k, z)$ est la distance minimale entre z et la courbe γ_k . Pour z fixé, cette distance tend vers l'infini pour $k \rightarrow \infty$ et la majoration dans (6.14) tend vers zéro.

Dans le cas où l'origine est un pôle de la fonction $f(z)$, on applique cette démonstration à la fonction $f(z) - \ell_0(z)$ qui est holomorphe près de l'origine. \square

Exemple 6.5 (formules d'Euler) Considérons la fonction $f(z) = \cot z$ (voir la formule (6.6)). Pour la courbe γ_k nous prenons le bord du carré avec sommets $(k + 1/2)\pi(\pm 1 \pm i)$. On a $d(\gamma_k) = (k + 1/2)\pi \rightarrow \infty$ et $L(\gamma_k) = 8d(\gamma_k)$. La fonction $f(z)$ peut être majorée à l'aide de

$$|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Sur les parties verticales de γ_k on a $|f(z)| \leq 1$ et sur les parties horizontales $|f(z)| \leq \sqrt{2}$ car $|\sinh y| \geq 1$ pour $|y| \geq 3\pi/2$. La formule (6.11) du Théorème de Mittag-Leffler implique alors que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{z + j\pi} - \frac{1}{j\pi} \right) + \left(\frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{j\pi} \right) \right) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}$$

ce qui justifie d'une part la formule (6.6). D'autre part, en multipliant cette formule par z , la série devient (avec $\frac{q}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k$)

$$z \cdot \cot z = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{z^2}{j^2\pi^2}}{1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}} = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{j^{2k} \pi^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} \right) \frac{-2}{\pi^{2k}} z^{2k}. \quad (6.15)$$

Cette série, comparée à (I.9.5), donne les formules

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.16)$$

l'un des plus formidables triomphes d'Euler. Même le cas $k = 1$ fut une énigme pour Leibniz et Joh. Bernoulli pendant un demi-siècle (plus précisément: de 1673 à 1740).

La formule (6.7) peut être justifiée de la même manière. Pour la fonction $f(z) = 1/\sin^2 z$ (voir la formule (6.8)) on a des pôles d'ordre 2 et le Théorème de Mittag-Leffler donne

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{(z+j\pi)^2} - \frac{1}{(j\pi)^2} \right) + \left(\frac{1}{(z-j\pi)^2} - \frac{1}{(j\pi)^2} \right) \right).$$

En utilisant la formule (6.16) pour $k = 1$ et $B_2 = 1/6$, les termes constants s'annulent et on retrouve la formule (6.8). La formule (6.9) peut aussi être vérifiée de cette manière.

III.7 Principe de l'argument

À l'aide du théorème des résidus nous démontrons ici le célèbre “principe de l'argument”. La première application de ce principe est due à Riemann (1859, *Werke* p. 148, pour estimer le nombre de zéros de sa “fonction ζ ”), une deuxième par E.J. Routh (1877, dans un travail sur la stabilité d'un système).

Théorème 7.1 (Principe de l'argument) *Soit U un domaine étoilé et γ la courbe fermée parcourant ∂U dans le sens positif. Si $f(z)$ est méromorphe dans un voisinage de l'adhérence $\overline{U} = U \cup \partial U$ et sans zéro ni pôle sur γ , alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = Z(f) - P(f) \quad (7.1)$$

où $Z(f)$ et $P(f)$ sont, respectivement, le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f(z)$ à l'intérieur de γ , comptés avec leur multiplicité.

Démonstration. La fonction $f'(z)/f(z)$ est méromorphe et possède des pôles là où $f(z)$ est soit zéro soit infini. À l'aide de (4.2), on voit que

$$\begin{aligned} \text{si } f(z) &= (z-c)^m g(z), \quad g(c) \neq 0 & \text{alors } \text{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, c \right) &= m \\ \text{si } f(z) &= \frac{g(z)}{(z-c)^m}, \quad g(c) \neq 0 & \text{alors } \text{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, c \right) &= -m. \end{aligned}$$

Le théorème des résidus pour cette fonction donne l'affirmation (7.1). \square

Interprétation géométrique du principe de l'argument. Le quotient $f'(z)/f(z)$ est la dérivée de $\log(f(z))$. Aussi longtemps que la valeur de $f(z)$ reste dans un domaine où $\log w$ est définie et analytique, on a trouvé une primitive de $f'(z)/f(z)$ et par conséquent on a

$$\int_{\gamma_t} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log(f(\gamma(t))) - \log(f(\gamma(0))) \quad (7.2)$$

où $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$ dénote une partie de la courbe γ . Si on veut appliquer cette formule à la courbe entière γ , il faut interpréter $\log w$ comme fonction multi-valuée. Néanmoins la partie réelle de $\log w$ (qui est $\log|w|$) est le même pour $w = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0))$ (la courbe γ est fermée). Ainsi

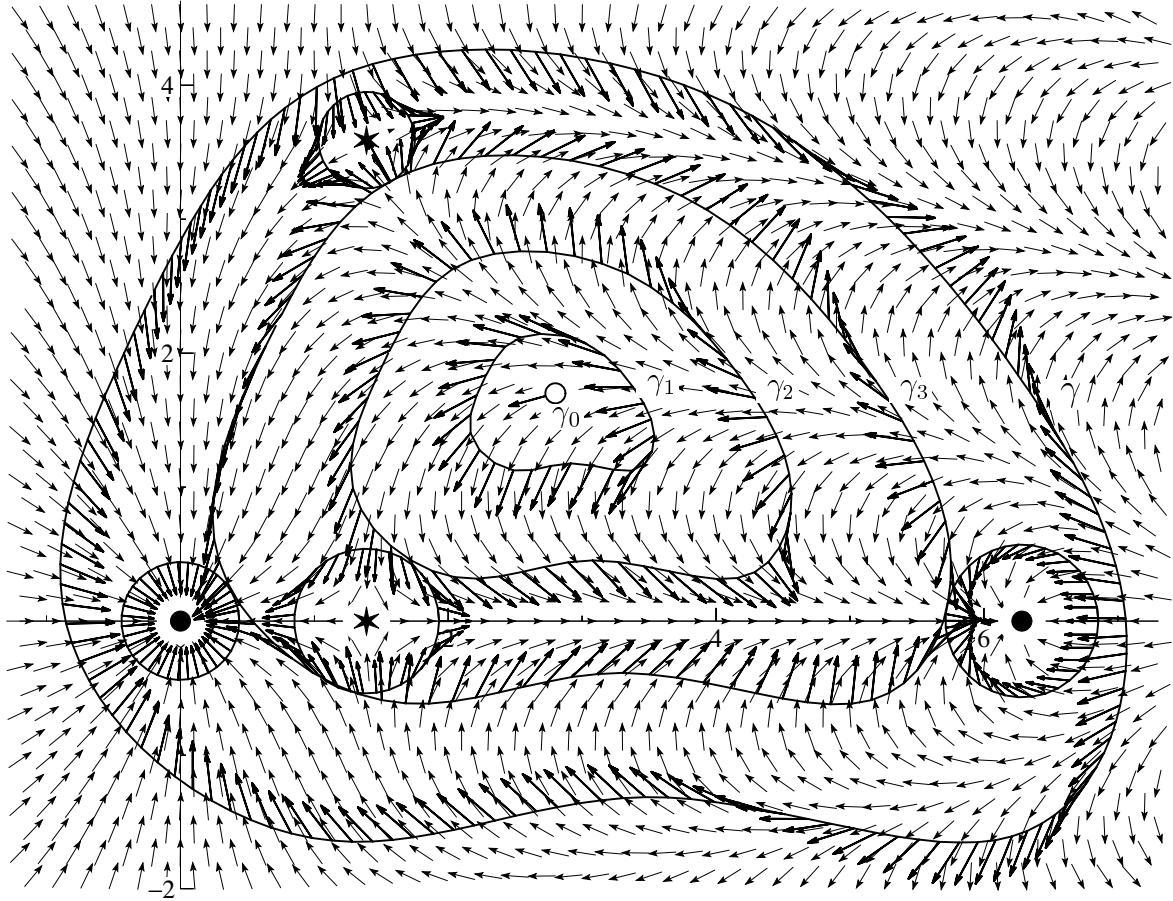


FIG. III.8: Le principe de l’argument pour la fonction $f(z) = \sin(z/2)/(e^{az} - b)$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log(f(\gamma(1))) - \log(f(\gamma(0))) = i(\arg(f(\gamma(1))) - \arg(f(\gamma(0)))) \quad (7.3)$$

Ceci est un multiple entier de $2\pi i$ et compte le nombre de tours qu’effectue le vecteur $f(z)$, quand z parcourt γ dans le sens positif.

Exemple. Dans la Figure III.8 sont dessinés les vecteurs $f(z)$ attachés au point z pour la fonction $f(z) = \sin(z/2)/(e^{az} - b)$ où $a = 1.75$ et $b = 11.4$. Cette fonction possède deux zéros ($z = 0$ et $z = 2\pi$) et deux pôles ($z = (\ln b)/a$ et $z = (\ln b + 2i\pi)/a$ à l’intérieur du chemin γ). On peut observer que l’entier (7.1) vaut 0 pour les courbes γ_0 , γ_1 et γ_2 , il vaut -1 pour γ_3 et de nouveau 0 pour la courbe γ .

Ce théorème possède d’innombrables applications, entre autres le “théorème de Rouché” et une $n+1$ -ème preuve du théorème fondamental de l’algèbre.

Théorème 7.2 (théorème de Rouché) *Soient $f(z)$ et $g(z)$ des fonctions méromorphes dans un ouvert U et soit γ une courbe telle que le principe de l’argument peut être appliqué. Si*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{pour tout } z \in \gamma, \quad (7.4)$$

alors

$$Z(f) - P(f) = Z(g) - P(g).$$

En particulier, quand $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes, alors elles ont le même nombre de zéros à l’intérieur de γ .

Démonstration. En conséquence de (7.4), les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ n'ont ni zéros ni pôles sur γ . Il existe alors un voisinage V de la courbe γ où le quotient $h(z) = f(z)/g(z)$ est holomorphe et tel que

$$|h(z) - 1| < 1 \quad \text{pour } z \in V.$$

Ceci implique que la fonction $\text{Log}(h(z))$ est bien définie dans V et qu'elle est une primitive de $h'(z)/h(z)$. Pour la courbe fermée γ on obtient donc $\int_{\gamma} h'(z)/h(z) dz = 0$. L'égalité $h'/h = f'/f - g'/g$ et le principe de l'argument permettent de conclure. \square

Donnons encore quelques applications typiques de ce résultat:

- *Une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.* Soit $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré n . Sur un cercle de rayon R (avec R suffisamment grand) on a $|p(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|$. Le théorème de Rouché implique que $p(z)$ possède le même nombre de zéros dans $D_R(0)$ que $g(z) = a_n z^n$ (c.-à-d., exactement n zéros, comptés avec leurs multiplicités).
- *Continuité des zéros d'un polynôme.* Soit $p(z, \lambda) = a_n(\lambda)z^n + \dots + a_1(\lambda)z + a_0(\lambda)$ un polynôme à coefficients dépendant continûment d'un paramètre λ . Si $z = c$ est une racine de $p(z, \lambda_0)$ de multiplicité m , alors pour ε et $|\lambda - \lambda_0|$ assez petits, le polynôme $p(z, \lambda)$ a m racines dans le disque $D_\varepsilon(c)$. Ceci suit du théorème de Rouché, car il existe un $d > 0$ tel que

$$|p(z, \lambda) - p(z, \lambda_0)| < d \leq |p(z, \lambda_0)| \quad \text{pour } |z - c| = \varepsilon.$$

Un $d > 0$ satisfaisant la deuxième inégalité existe, parce que les zéros sont isolés. La première inégalité est due à la continuité des coefficients, si λ est suffisamment proche de λ_0 .

- *Lemme de Hurwitz.* Soit $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes dans U qui converge localement uniformément vers une fonction holomorphe $f(z)$ (c.-à-d., converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de U). Supposons que $f(z)$ ne s'annule pas sur le bord $\partial D_r(c)$ d'un disque. Alors, pour n suffisamment grand, $f_n(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros dans $D_r(c)$. Pour la démonstration de ce lemme on remarque que $|f_n(z) - f(z)| < d \leq |f(z)|$ sur $\partial D_r(c)$.

III.8 Exercices

1. Calculer les limites suivantes dans $\overline{\mathbb{C}}$ (si elles existent)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^4 + 3z - 4, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2+z}{z^2 - 3}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{3z+1}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \exp z, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{1}{z}\right).$$

2. Lesquelles des fonctions suivantes sont holomorphes dans un voisinage de $z = \infty$:

$$2z^3 + z - 3, \quad \frac{1+z}{2-3z}, \quad \sin z, \quad \exp\left(\frac{z}{1+z^2}\right).$$

3. Soit (ξ, η, ζ) un point de la sphère de Riemann, c.-à-d., $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Calculer sa projection stéréographique z_N à partir du pôle nord $(0, 0, 1)$ sur le plan passant par l'équateur. Calculer également sa projection z_S à partir du pôle sud $(0, 0, -1)$. Montrer que

$$z_N \cdot \overline{z_S} = 1.$$

Ceci motive l'étude de l'infini à l'aide de la transformation $z \mapsto 1/z$.

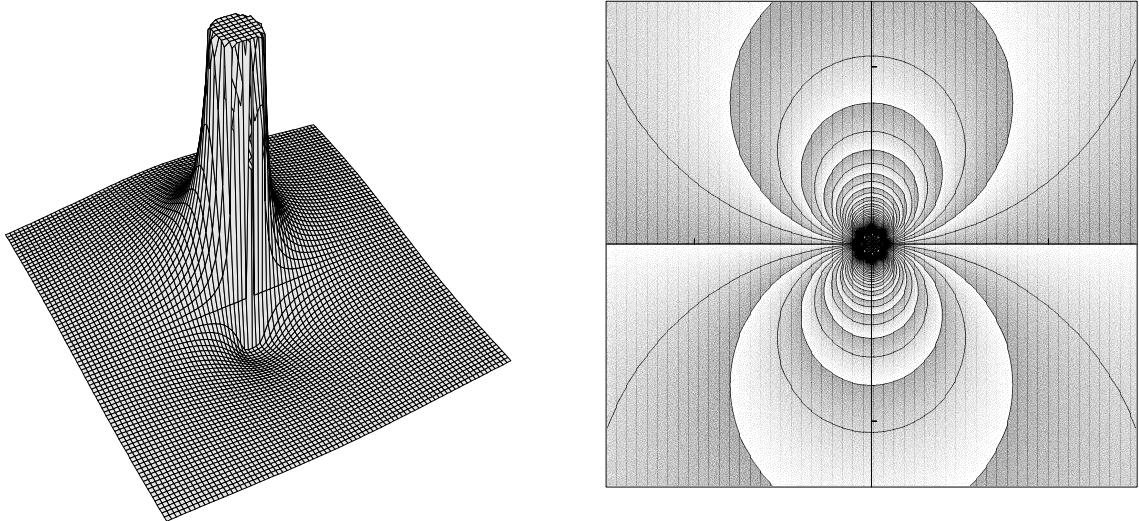


FIG. III.9: Fonction $e^{1/z}$ avec singularité essentielle; la valeur absolue à gauche et les lignes de niveau avec valeurs $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) de $\arg f(z)$ à droite.

4. Pour la fonction $f(z) = \exp(1/z)$, démontrer par un calcul direct que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et pour tout $\rho > 0$ il existe un $z \in D_\rho(0)$ avec $f(z) = w$ (voir la Fig. III.9).

5. La fonction

$$f(z) = \frac{6}{z(z+1)(z-2)}$$

est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 2\}$. Calculer les trois développements de Laurent: pour $0 < |z| < 1$, pour $1 < |z| < 2$ et pour $2 < |z| < \infty$.

6. Les fonctions suivantes possèdent une singularité au point $c = 0$. Décider s'il s'agit d'une singularité supprimable, d'un pôle (quel ordre) ou d'une singularité essentielle:

$$\frac{3+z}{z^4(5+3z^2)}, \quad \frac{1}{\tan z}, \quad \frac{\sin z}{z}, \quad \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{z}{e^z - 1 - z - z^2/2}.$$

7. Pour la fonction $f(z) = e^{-1/z^2}$, démontrer que les lignes de niveau de $|f(z)|$ et de $\arg f(z)$ sont des lemniscates (voir la Fig. III.4).

Rappel. La célèbre “lemniscate” de Jac. Bernoulli est définie par $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (voir [HW, p. 314, 315 et 329]).

8. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles:

$$\frac{2z+1}{z^2-z-2}, \quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2, \quad \frac{\sin z}{z^2}, \quad \frac{\cos z}{\sin z}.$$

9. En utilisant le théorème des résidus calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + e^{-z}}{z^3} dz$$

où γ parcourt le bord du carré de sommets $\pm 2 \pm 2i$ dans le sens positif.

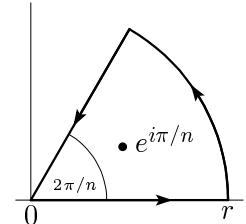
10. Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

11. Démontrer que pour des entiers m, n satisfaisant $0 < m < n$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi m/n)}.$$

Indication. Considérer le chemin de la figure.



12. Soit $p(z)$ un polynôme de degré $n \geq 2$. Démontrer que la somme des résidus de la fonction $1/p(z)$ est zéro.

13. Par la méthode des résidus, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t} dt = \frac{\pi}{12}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-3\sin t)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

14. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx.$$

Indication. Utiliser les mêmes idées que pour l'intégrale du type (5) dans le paragraphe III.5.

15. Démontrer que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0.$$

Indication. Prendre un chemin comme dans l'intégrale du type (5) dans le paragraphe III.5 et une détermination du logarithme qui est une fonction holomorphe dans \mathcal{C} privé de la demi-droite d'argument $-\pi/2$.

16. Vérifier la formule

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{\log^2 a - \log^2 b}{2(a-b)} \quad \text{pour } a > b > 0.$$

17. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2(kx)}{x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3} dx.$$

18. En appliquant le théorème de Mittag-Leffler démontrer la formule

$$\tan z = 2z \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right).$$

En déduire que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

19. Démontrer que toutes les racines du polynôme $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ sont situées entre les cercles $|z| = 1$ et $|z| = 2$.

Indication. Appliquer le théorème de Rouché avec $g(z) = 12$ sur le petit cercle et avec $g(z) = z^7$ sur le grand cercle.

20. Soit $f(z)$ holomorphe sur le disque unité $U := D_1(0)$ et continue sur l'adhérence \overline{U} et supposons que $F(\overline{U}) \subset U$. Démontrer alors (à l'aide du théorème du Rouché) que $f(z) = z$ possède exactement une solution $z \in U$.

21. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et supposons que le bord de l'ensemble

$$A = \{z \in \mathcal{C}; |f(z)| > 1\}$$

soit paramétré par un chemin $\gamma(t)$ au sens positif. Rappelons que $\vec{a} = \dot{\gamma}(t)$ est le vecteur tangent à cette courbe et $\vec{n} = -i\dot{\gamma}(t)$ le vecteur normal orienté vers l'extérieur.

a) Expliquer pourquoi on a $\partial \log |f(z)| / \partial \vec{n} \leq 0$ dans cette situation;

b) En utilisant les équations de Cauchy-Riemann pour $\log(f(z))$, montrer que $\partial \arg f(z) / \partial \vec{a} \leq 0$.

c) Montrer que $\arg f(z)$ est strictement décroissant le long de γ (dériver $f(\gamma(t)) = e^{i \arg f(\gamma(t))}$).

Ce résultat est illustré dans la Fig. III.10 pour la fonction

$$f(z) = \frac{1 + z(1 - 2a) + z^2(1/2 - 2a + a^2)}{(1 - az)^2 \exp(z)}. \quad (8.1)$$

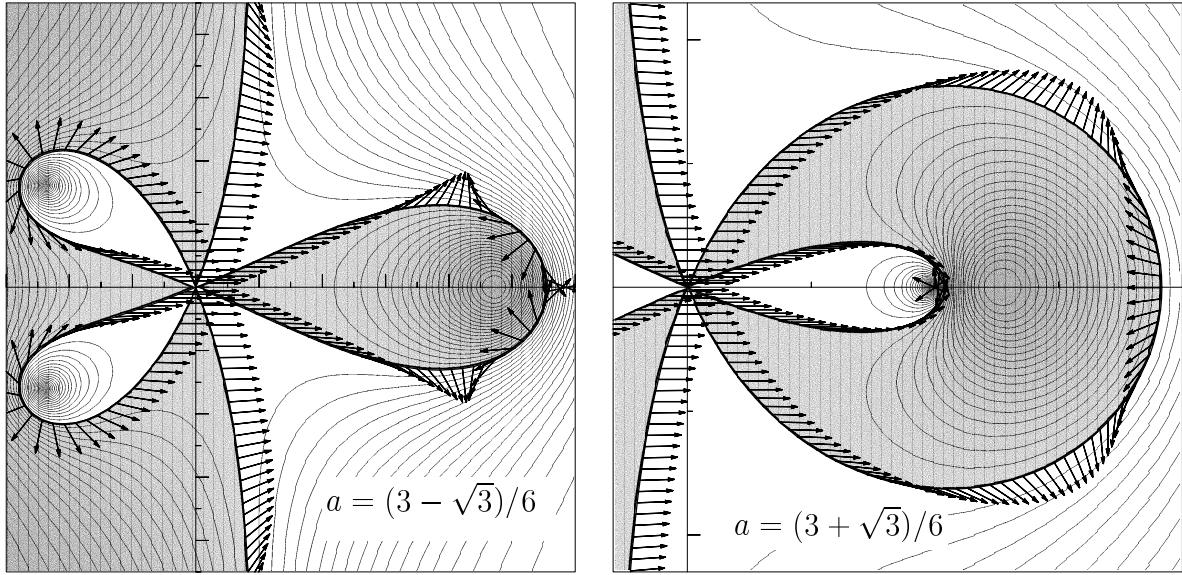


FIG. III.10: L'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} ; |f(z)| > 1\}$ pour la fonction $f(z)$ de (8.1).

22. Dans la Fig. III.10¹ sont dessinés les vecteurs $f(z)$ attachés au point $z = \gamma(t)$ sur la courbe qui décrit le bord de l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} ; |f(z)| > 1\}$ (pour la fonction $f(z)$ de (8.1)). Uniquement en regardant cette figure, décider combien de zéros ou pôles sont dans chacune des composantes connexes bornées de A et de A^c .
23. En utilisant le théorème de Rouché, démontrer le résultat suivant qu'on appelle aussi le “lemme de Zarantonello”: soit $|c| > r$ et soit $p(z)$ un polynôme de degré k satisfaisant $p(c) = 1$. Alors, on a

$$\max_{|z|=r} |p(z)| \geq \left(\frac{r}{|c|} \right).$$

Indication. Comparer la fonction $f(z) = (z/c)^k - p(z)$ avec $g(z) = (z/c)^k$.

¹Cette figure est prise du livre “Solving Ordinary Differential Equations II” de Hairer & Wanner.