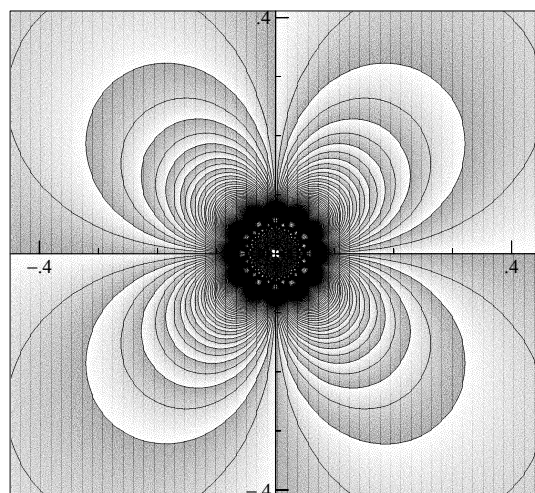
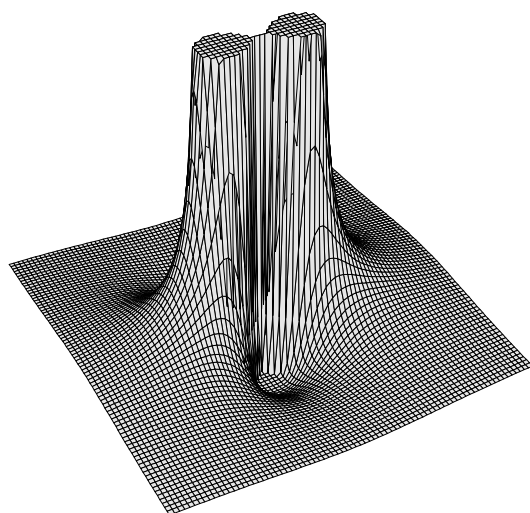
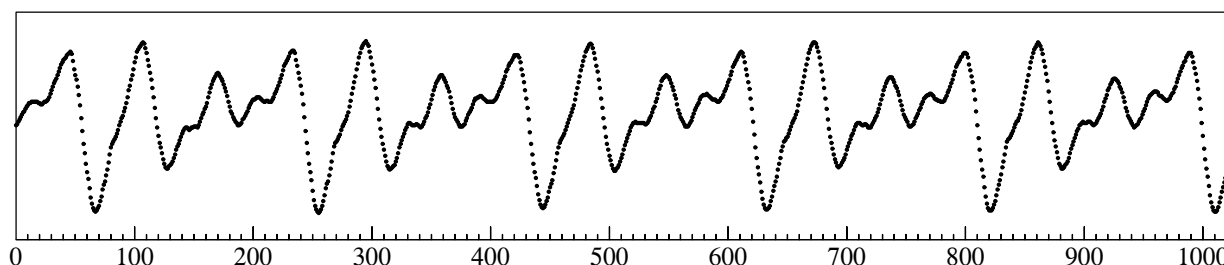


# Analyse Complexe



## Séries de Fourier



**Ernst Hairer et Gerhard Wanner**

Université de Genève  
Section de mathématiques  
Case postale 240  
CH-1211 Genève 4

Octobre 2006



# Table de matière

<b>I</b>	<b>Différentiabilité dans <math>\mathbb{C}</math></b>	2
I.1	Les nombres complexes et le plan complexe	2
I.2	Fonctions complexes d'une variable complexe	3
I.3	Équations de Cauchy–Riemann	7
I.4	Propriétés de fonctions holomorphes	9
I.5	Séries et fonctions analytiques	12
I.6	Holomorphie et analyticité des séries entières	14
I.7	Calcul avec des séries	15
I.8	La fonction exponentielle et le logarithme	20
I.9	Exercices	24
<b>II</b>	<b>Calcul intégral et théorie de Cauchy</b>	29
II.1	Chemins et courbes	29
II.2	Intégrales curvilignes	31
II.3	Existence des primitives	32
II.4	Théorème fondamental de Cauchy	34
II.5	Formule intégrale de Cauchy	36
II.6	Dérivées supérieures d'une fonction holomorphe	38
II.7	Théorème fondamental de l'algèbre	39
II.8	Principe du maximum	40
II.9	Prolongement analytique et théorème de l'image ouverte	43
II.10	Exercices	46
<b>III</b>	<b>Singularités et fonctions méromorphes</b>	49
III.1	Le point à l'infini et la sphère de Riemann	49
III.2	Le développement de Laurent	50
III.3	Singularités isolées	52
III.4	Théorème des résidus	55
III.5	Calcul d'intégrales par la méthode des résidus	56
III.6	Fonctions méromorphes	60
III.7	Principe de l'argument	64
III.8	Exercices	66

<b>IV</b>	<b>Séries de Fourier</b>	71
IV.1	Définitions mathématiques et exemples	71
IV.2	Lemme de Riemann et fonctions à variation bornée	75
IV.3	Etude élémentaire de la convergence	78
IV.4	Noyau de Dirichlet et convergence ponctuelle	79
IV.5	Le phénomène de Gibbs	82
IV.6	Fonctions continues, Théorème de Fejér	83
IV.7	Systèmes orthogonaux	87
IV.8	L'espace de Hilbert $\ell^2$	92
IV.9	Ondelette de Haar	93
IV.10	Exercices	95
<b>V</b>	<b>Equations aux dérivées partielles</b>	101
V.1	Equation des ondes (corde vibrante)	101
V.2	L'équation de la chaleur	104
V.3	Le problème de Dirichlet pour l'équation du potentiel	106
V.4	Equation des ondes (membrane circulaire)	108
V.5	Transformation de Fourier	113
V.6	Exercices	118



## Œuvres générales sur l'analyse complexe et les séries de Fourier

Il y a un grand assortiment de livres qui introduisent le sujet d'analyse complexe (voir le rayon 30 à la bibliothèque de la section de mathématiques et aussi le rayon 27 pour des traités généraux d'analyse). Des livres sur l'analyse de Fourier se trouvent au rayon 42. En voici quelques exemples. Les numéros entre crochets (p. ex. [MA 30/213]) vous permettent de trouver le livre facilement à la bibliothèque.

- L.V. Ahlfors (1979): *Complex Analysis*. McGraw-Hill. [MA 30/62]  
T. Apostol (1957): *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley. [MA 27/51]  
H. Behnke & F. Sommer (1962): *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Springer-Verlag. [MA 30/91]  
J.C. Burkill & H. Burkill (1970): *A Second Course in Mathematical Analysis*. Cambridge University Press. [MA 27/152]  
H. Cartan (1961): *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann. [MA 30/101]  
J. Conway (1973): *Functions of one complex variable*. Springer. [MA 30/152]  
H. Dym & H.P. McKean (1972): *Fourier Series and Integrals*. Academic Press. [MA 42/62]  
W. Fulks (1993): *Complex Variables*. M. Dekker. [MA 30/268]  
T.W. Gamelin (2001): *Complex Analysis*. Springer. [MA 30/300]  
R. Godement (1998): *Analyse mathématique II et III*. Springer. [MA 27/274]  
P. Henrici (1974): *Applied and Computational Complex Analysis*. John Wiley & Sons. [MA 30/166]  
A. Hurwitz & R. Courant (1964): *Funktionentheorie*. Springer-Verlag. [MA 30/100]  
E. Neuenschwander (1996): *Riemanns Einführung in die Funktionentheorie*. Göttingen; cours donné par Riemann à l'Université de Göttingen 1855–1861.  
R. Remmert (1991): *Theory of Complex Functions*. Springer. [MA 30/213]  
M. Rudin (1978): *Analyse réelle et complexe*. Masson. [MA 27/95]  
G.P. Tolstov (1962): *Fourier Series*. Dover. [MA 42/115]  
J.S. Walker (1988): *Fourier Analysis*. Oxford University Press. [MA 42/110]

## Avant-propos

Ce polycopié contient la matière du cours “Analyse II (analyse complexe)” enseigné pendant les années 1999 - 2002 par Gerhard Wanner et pendant l'année académique 2005/06 par Ernst Hairer à la Section de mathématiques de l'Université de Genève. Les portraits de la page 1 ont été copiés sur l'adresse Internet <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/>.

En ce lieu, nous aimerions remercier Assyr Abdulle, Stéphane Cirilli, Ghislain Jaudon, Gilles Vilmart et des nombreux assistants et étudiants soit pour leur aide dans la préparation des exercices soit pour la correction des erreurs (typographiques et mathématiques).



# Analyse complexe

“**COMPLEXE** adj. (lat. *complexus*, qui contient). Qui contient plusieurs éléments différents et combinés d’une manière qui n’est pas immédiatement claire pour l’esprit, qui est difficile à analyser.”  
(Petit Larousse illustré 1983)

L’analyse complexe moderne a été développée au 19<sup>ème</sup> siècle par trois mathématiciens célèbres :

- **A.L. Cauchy (1789–1857)** considère des fonctions différentiables dans  $\mathcal{C}$  (fonctions holomorphes). Sa théorie est basée sur une représentation intégrale de telles fonctions (formule de Cauchy) et sur les résidus.
- **B. Riemann (1826–1866)** publie sa thèse “Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse” en 1851. Pour lui, la conception géométrique occupe une place prépondérante.
- **K. Weierstrass (1815–1897)** appuie sa théorie sur les fonctions développables en séries entières (fonctions analytiques), il en résulte une approche algébrique de l’analyse complexe.

Aujourd’hui, les trois approches sont confondues et inséparables. De cette manière il est possible de simplifier la théorie et de trouver des résultats importants.

“La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstraß, . . . la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstraß est avant tout une méthode de démonstration.”

(H. Poincaré 1898, *Acta Math.* **22**, p. 6–7)

Dans ce cours nous abordons la théorie du calcul différentiel dans  $\mathcal{C}$  (chapitre I) et des fonctions holomorphes selon Riemann. Nous suivons ensuite le cheminement de Cauchy (intégrales complexes, formule de Cauchy) dans le chapitre II et nous démontrons que toute fonction holomorphe est analytique (possède un développement en série entière). Nous traitons les singularités et le calcul de résidus dans le chapitre III.



Cauchy



Riemann



Weierstrass

# Chapitre I

## Différentiabilité dans $\mathbb{C}$

L'objet de l'analyse complexe est l'étude de fonctions  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Nous rappelons les règles de calcul avec les nombres complexes et nous discutons la différentiabilité dans  $\mathbb{C}$  (qui est différente de la différentiabilité dans  $\mathbb{R}^2$ ). Les fonctions holomorphes (c.-à-d., différentiable dans  $\mathbb{C}$ ) possèdent des propriétés surprenantes qui seront analysées par la suite. Nous terminons ce chapitre par l'étude des séries entières (fonctions analytiques).

### I.1 Les nombres complexes et le plan complexe

Les nombres complexes ont leur origine dans l'impossibilité de résoudre certaines équations quadratiques (Cardano 1545); au cours des siècles suivants, ils deviennent de plus en plus importants (Descartes 1637; voir [HW, pages 57–61]<sup>1</sup> pour plus de précisions). Euler découvre leur grande utilité dans toutes les branches de l'analyse, et introduit (en 1777) le symbole

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{c.-à-d.} \quad i^2 = -1, \quad (1.1)$$

grâce auquel les nombres complexes prennent la forme

$$z = x + iy. \quad (1.2)$$

Dès le début du 19<sup>ème</sup> siècle (Gauss 1799, Argand 1806), on identifie les nombres complexes  $\mathbb{C}$  avec le *plan de Gauss* (ou plan d'Argand)  $\mathbb{R}^2$  (voir Fig. I.1 à gauche)

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (1.3)$$

On note  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  les *parties réelles* et *imaginaires* de  $z$ , et  $\bar{z} = x - iy$  le nombre *complexe conjugué*.

**Le corps des nombres complexes.** En tenant compte de (1.1), le produit de deux nombres complexes  $c = a + ib$  et  $z = x + iy$  donne

$$c \cdot z = ax - by + i(ay + bx). \quad (1.4)$$

Avec l'addition  $c + z = a + x + i(b + y)$  l'ensemble  $\mathbb{C}$  devient un *corps commutatif*. L'élément inverse de  $z$  pour la multiplication est

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>On utilise l'abréviation HW pour le livre de E. Hairer & G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*. Ce livre nous sert de référence sur les sujets traités au cours Analyse I.

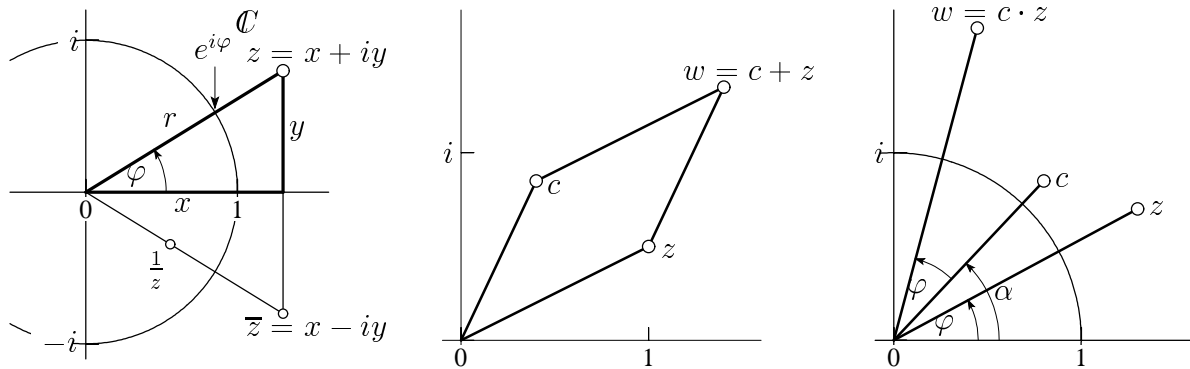


FIG. I.1: Plan complexe (gauche), addition complexe (milieu), multiplication complexe (droite)

En identifiant un nombre réel  $x$  avec le nombre complexe  $x + i \cdot 0$ , l'ensemble  $\mathbb{R}$  peut être considéré comme un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

**Coordonnées polaires.** Si l'on dénote par  $r$  la distance du point  $z = x + iy$  à l'origine, et par  $\varphi$  l'angle entre l'axe horizontal et la droite qui relie l'origine avec le point  $z$  (voir Fig. I.1 à gauche), nous avons  $x = r \cos \varphi$  et  $y = r \sin \varphi$ . La distance  $r$  s'appelle *module* ou *valeur absolue* de  $z$ , et  $\varphi = \arg z$  est son *argument*. Ainsi le nombre complexe  $z$  peut être écrit comme

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.6)$$

Cette représentation des nombres complexes permet une interprétation géométrique du produit. Pour  $c = s (\cos \alpha + i \sin \alpha)$  et  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , le produit (1.4) devient

$$\begin{aligned} c \cdot z &= sr (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi + i(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)) \\ &= sr (\cos(\alpha + \varphi) + i \sin(\alpha + \varphi)) \end{aligned} \quad (1.7)$$

à l'aide des identités trigonométriques connues ([HW, p.43]). Ainsi, la multiplication de deux nombres complexes *multiplie les valeurs absolues* et *additionne les arguments* (Fig. I.1 à droite).

**Espace métrique.** Avec l'identification (1.3) de  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , la valeur absolue de  $z = x + iy$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.8)$$

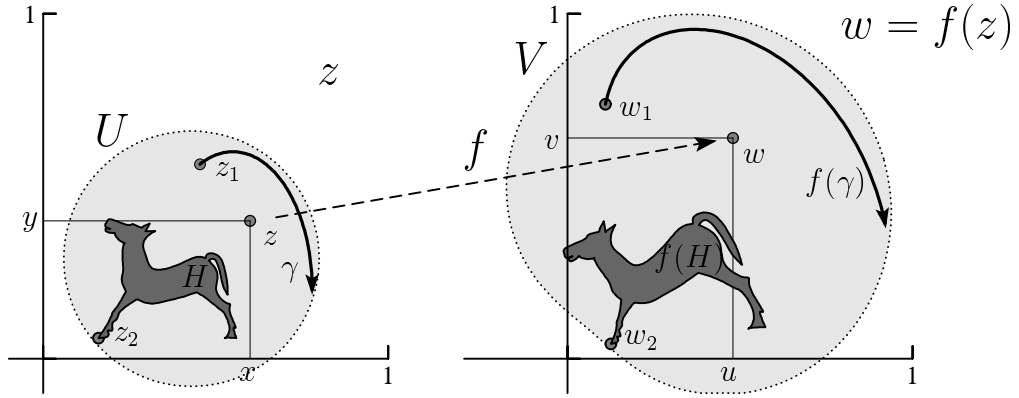
correspond à la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ . Elle fait de  $\mathbb{C}$  un espace normé. La distance entre deux nombres complexes est ainsi  $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ .

Les concepts de convergence, limites, continuité, convergence uniforme, ensembles ouverts et fermés, compacité, etc. sont les mêmes qu'en Analyse I et n'ont donc pas besoin d'être répétés. Nous utiliserons la notation  $D_r(c) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - c| < r\}$  pour le disque ouvert centré au point  $c$  et de rayon  $r$ .

## I.2 Fonctions complexes d'une variable complexe

Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ensemble (généralement ouvert) et  $V \subset \mathbb{C}$  un autre ensemble. Une fonction qui associe à chaque  $z \in U$  un  $w = f(z) \in V$  est une *fonction complexe*  $f : U \rightarrow V$ .

Nous pouvons aussi identifier  $z = x + iy \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $w = f(z) \simeq (u, v) \in \mathbb{R}^2$  et arrivons à deux fonctions  $u(x, y), v(x, y)$  (les coordonnées du point  $w$ ) de deux variables réelles  $x, y$  (les coordonnées du point  $z$ ); voir Fig. I.2.

FIG. I.2: Fonction complexe  $w = (z + 0.2)^2$ 

Si un point  $z_1$  se met en mouvement le long d'une courbe  $\gamma$ , alors le point image  $w_1$  bougera le long d'une autre courbe  $f(\gamma)$ ; si un point  $z_2$  remplit une surface  $H$  ("the horse of Sarah"), alors le point image  $w_2$  remplira une surface  $f(H)$ ; voir Fig. I.2.

Plusieurs exemples vont nous aider à nous familiariser avec cette matière. On va constater que des formules très simples donnent déjà lieu à des situations assez compliquées.

**Exemple 2.1 (application  $\mathbb{C}$ -linéaire)** Pour un nombre complexe  $c$  fixé, considérons la fonction

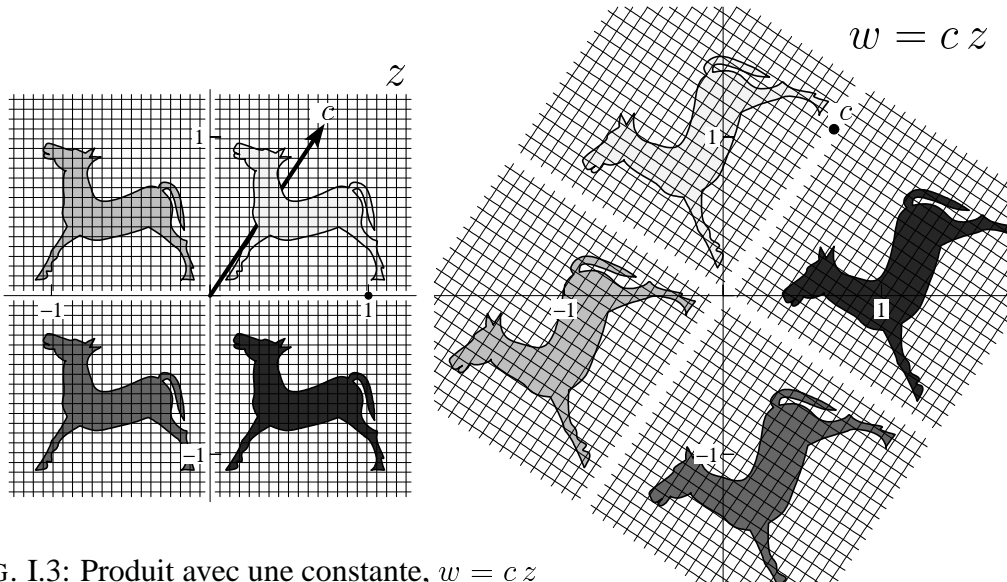
$$w = f(z) = cz. \quad (2.1)$$

Elle est  $\mathbb{C}$ -linéaire, c.-à-d., elle satisfait  $f(c_1 z_1 + c_2 z_2) = c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2)$  pour tout  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  et pour tout  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Vue comme application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  ( $z = x + iy$ ,  $c = a + ib = s(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $w = u + iv$ ), nous pouvons l'écrire sous forme matricielle (cf. la formule (1.4))

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Cette application linéaire est une *rotation* orthogonale d'angle  $\alpha = \arg c$ , suivie d'une *homothétie* de rapport  $s = |c|$  (voir Fig. I.3). Elle sera fondamentale, plus tard, pour toute la compréhension des fonctions  $\mathbb{C}$ -différentiables.

FIG. I.3: Produit avec une constante,  $w = cz$



Les images des lignes verticales (poser  $x = a$ ) deviennent  $u = a^2 - y^2$ ,  $v = 2ay$  et en éliminant  $y$  on trouve des paraboles  $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$ . Les lignes horizontales ( $y = b$ ) deviennent des paraboles aussi (voir Fig. I.5). Nous observons que pour chaque  $w \neq 0$ , cette fonction possède 2 préimages (un chat gris foncé et un chat gris clair). Ce phénomène va encore nous intéresser.

**Exemple 2.4 (transformation de Cayley)** Une fonction intéressante est

$$w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad (2.7)$$

elle est illustrée en Fig. I.6. C'est une *involution*, c.-à-d., elle satisfait  $f(f(z)) = z$ . Donc, la fonction  $f(z)$  est bijective comme application  $\mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et on a  $f^{-1}(z) = f(z)$ .

L'importance de cette formule fut découverte par Cayley (*Crelle J.* vol. 32, 1846, p. 119) pour le calcul matriciel: elle métamorphose des matrices antisymétriques en matrices orthogonales. Dans  $\mathbb{C}$ , elle transforme l'axe imaginaire en cercle unitaire (et vice-versa):

$$w = \frac{iy+1}{iy-1} = \frac{iy+1}{iy-1} \cdot \frac{-iy-1}{-iy-1} = \frac{-1+y^2}{1+y^2} - i \frac{2y}{1+y^2} = u + iv \quad (2.8)$$

où

$$u = -\frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad v = -\frac{2y}{1+y^2} \quad \text{satisfont} \quad u^2 + v^2 = 1. \quad (2.9)$$

Ces expressions ne nous sont pas étrangères ..., elles créent une représentation rationnelle du cercle ( $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$ ) et les nombres pythagoriciens (voir [HW, p. 124]).

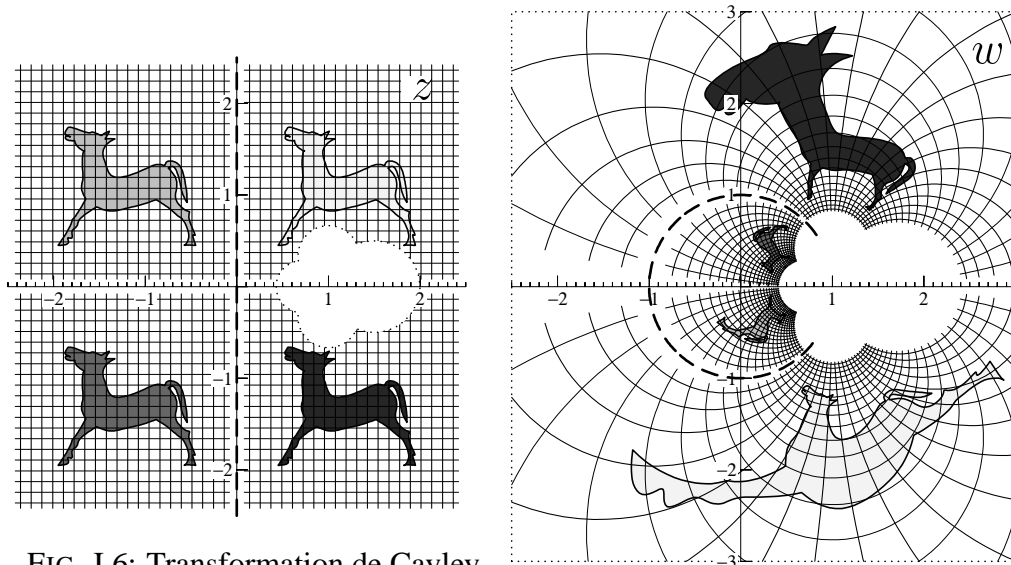


FIG. I.6: Transformation de Cayley

**Exemple 2.5 (transformation de Joukowski, 1910)** La fonction

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (2.10)$$

est illustrée en Fig. I.7. Elle transforme respectivement les cercles centrés en 0 et les rayons passant par 0 en une famille d'ellipses et d'hyperboles confocales. Pour prouver ce fait, nous utilisons des coordonnées polaires  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $z^{-1} = r^{-1}(\cos \varphi - i \sin \varphi)$  et nous obtenons

$$w = \left( \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right) \cos \varphi + i \left( \frac{r}{2} - \frac{1}{2r} \right) \sin \varphi \quad (2.11)$$



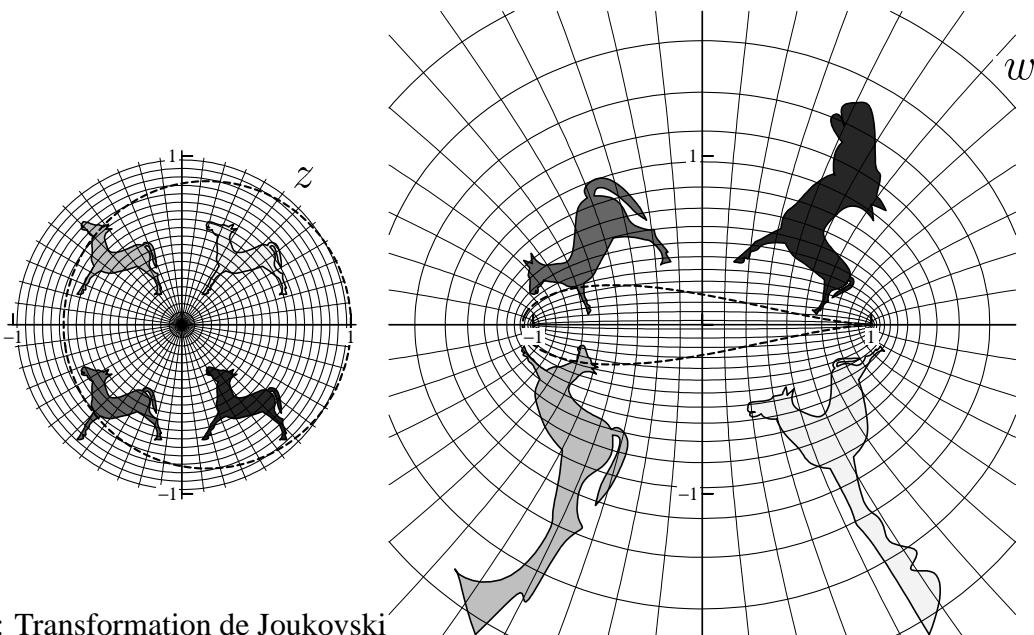
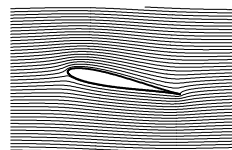


FIG. I.7: Transformation de Joukowski

d'où  $u = \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right) \cos \varphi$  et  $v = \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right) \sin \varphi$  et on voit que

$$\frac{u^2}{\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1. \quad (2.12)$$

*Remarque.* L'image d'un cercle astucieusement placé (voir Fig. I.7; en trait discontinu; le cercle doit passer par le point  $z = 1$ ), pourrait ressembler à un profil d'aile d'avion. Cela montre l'importance (historique) de la transformation de Joukowski en aérodynamique.



### I.3 Équations de Cauchy–Riemann

Avec l'identification (1.3) chaque fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  (avec un ouvert  $U \subset \mathbb{C}$ ) est équivalente à une fonction  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$  (nous utilisons la même lettre pour  $\{(x, y); x + iy \in U\} \subset \mathbb{R}^2$  et pour  $U \subset \mathbb{C}$ ),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où  $z = x + iy$  et  $u(x, y), v(x, y)$  sont les parties réelles et imaginaires de  $f(z)$ .

**$\mathbb{R}$ -différentiabilité.** Comme vu au cours Analyse I [HW, p. 302], la fonction  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de (3.1) est  $\mathbb{R}$ -différentiable en  $(x_0, y_0) \in U$ , s'il existe une matrice  $A$  et une fonction  $r : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , continue en  $(x_0, y_0)$  et satisfaisant  $r(x_0, y_0) = 0$ , telle que

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r(x, y) \cdot \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|. \quad (3.2)$$

Les éléments de la matrice  $A$ , appelée matrice jacobienne, sont les dérivées partielles de (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix} (x_0, y_0). \quad (3.3)$$

Avec la notation complexe, la formule (3.2) s'écrit

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0) + r(z) \cdot |z - z_0| \quad (3.4)$$

(voir l'exercice 8). En négligeant le reste  $r(z) \cdot |z - z_0|$ , la fonction  $f(z) - f(z_0)$  est approchée par une fonction  $\mathbb{R}$ -linéaire.

**$\mathbb{C}$ -différentiabilité.** La fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est dite  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0 \in U$ , s'il existe une constante  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  et une fonction  $r(z)$ , continue en  $z_0$  et satisfaisant  $r(z_0) = 0$ , telle que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \cdot |z - z_0|. \quad (3.5)$$

La constante  $f'(z_0)$  est la dérivée de  $f(z)$  en  $z_0$ . Cette fois, la fonction  $f(z) - f(z_0)$  est approchée par une fonction  $\mathbb{C}$ -linéaire.

D'une manière équivalente, la fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0 \in U$ , si la limite suivante existe dans  $\mathbb{C}$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \quad (3.6)$$

Dans cette limite,  $z$  peut se rapprocher arbitrairement de  $z_0$ .

**Premiers exemples.** De la même manière que pour des fonctions réelles d'une variable réelle on démontre que la somme, le produit, le quotient et la composition de deux fonctions  $\mathbb{C}$ -différentiables sont  $\mathbb{C}$ -différentiables. Les mêmes règles de calcul sont valables (règle de Leibniz, dérivée en chaîne). Comme la fonction constante et la fonction  $f(z) = z$  sont  $\mathbb{C}$ -différentiables, les polynômes en  $z$  et les fractions rationnelles en  $z$  sont également  $\mathbb{C}$ -différentiables (en dehors de singularités). Les fonctions considérées dans les exemples 2.1, 2.3, 2.4 et 2.5 sont donc  $\mathbb{C}$ -différentiables.

Par contre, la fonction  $f(z) = \bar{z}$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable (mais elle est  $\mathbb{R}$ -différentiable). Pour voir ceci, on laisse d'abord tendre  $z$  horizontalement vers  $z_0$  dans (3.6) ce qui donne  $+1$ , et ensuite verticalement ce qui donne  $-1$ . La fonction de l'exemple 2.2 n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable.

Une conséquence immédiate des définitions est que  $\mathbb{C}$ -différentiabilité implique  $\mathbb{R}$ -différentiabilité (en effet, la formule (3.5) implique (3.4) avec  $\lambda = f'(z_0)$  et  $\mu = 0$ ).

**Théorème 3.1 (équations de Cauchy–Riemann)** Si la fonction  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  (avec  $z = x + iy$ ) est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0 = x_0 + iy_0$ , alors on a nécessairement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.7)$$

FIG. I.8: Equations de Cauchy–Riemann (autographe de Riemann, [Neuenschwander, p. 94])

**Démonstration.** Une matrice  $2 \times 2$  représente une application  $\mathbb{C}$ -linéaire seulement si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

(voir les exercices 8 et 9). Une comparaison avec (3.3) donne la condition (3.7).

Donnons encore une deuxième démonstration de ce théorème. Pour cela nous considérons l'identité  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  et nous la dérivons une fois par rapport à  $x$  et ensuite par rapport à  $y$ . Ceci donne

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \quad i f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Après multiplication de la première équation par  $i$ , une comparaison des parties réelles et imaginaires donne l'affirmation.  $\square$

**Théorème 3.2** Si la fonction (3.1) est  $\mathbb{R}$ -différentiable en  $(x_0, y_0)$  et si les conditions de Cauchy–Riemann (3.7) sont satisfaites en ce point, alors la fonction  $f(z)$  donnée par  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

*Démonstration.* Le fait que les conditions de Cauchy–Riemann soient satisfaites implique que la matrice  $A$  dans (3.2) possède la structure (3.8). Elle correspond alors à une application  $\mathbb{C}$ -linéaire et peut être écrite sous la forme (3.4) avec  $\mu = 0$ .  $\square$

**Contre-exemple.** Dans le théorème 3.2 la condition de la  $\mathbb{R}$ -différentiabilité ne peut pas être remplacée par l’existence de dérivées partielles. La fonction

$$f(z) = \frac{z^5}{|z|^4} \quad (3.9)$$

est continue, possède des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  et satisfait en  $z = 0$  les conditions de Cauchy–Riemann (3.7). Pourtant, elle n’est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable.

**Corollaire 3.3** Si les dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  existent, sont continues dans un ouvert  $U$  et satisfont les conditions de Cauchy–Riemann sur  $U$ , alors la fonction  $f(z)$  donnée par  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable sur  $U$ .

*Démonstration.* Ceci est une conséquence immédiate du théorème précédent et du théorème 3.6 de [HW, p. 304].  $\square$

## I.4 Propriétés de fonctions holomorphes

**Définition 4.1 (fonctions holomorphes)** Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  qui est  $\mathbb{C}$ -différentiable dans un ouvert  $U \subset \mathbb{C}$  s’appelle *holomorphe dans  $U$* . On dit qu’une fonction est *holomorphe en un point  $z_0$*  si elle est holomorphe dans un voisinage  $D_\varepsilon(z_0)$ .

### Fonctions conformes.

“Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.”

(Gauss 1825, *Werke* IV, p. 189.)

Gauss a adressé l’article mentionné ci-dessus à la Société Royale de Copenhague. Pour traiter des problèmes en géodésie et en cartographie, on recherche des applications “similaires dans leurs plus petites parties”, c’est-à-dire pour lesquelles des triangles infinitésimaux (ou des courbes qui se croisent) préservent leurs angles.

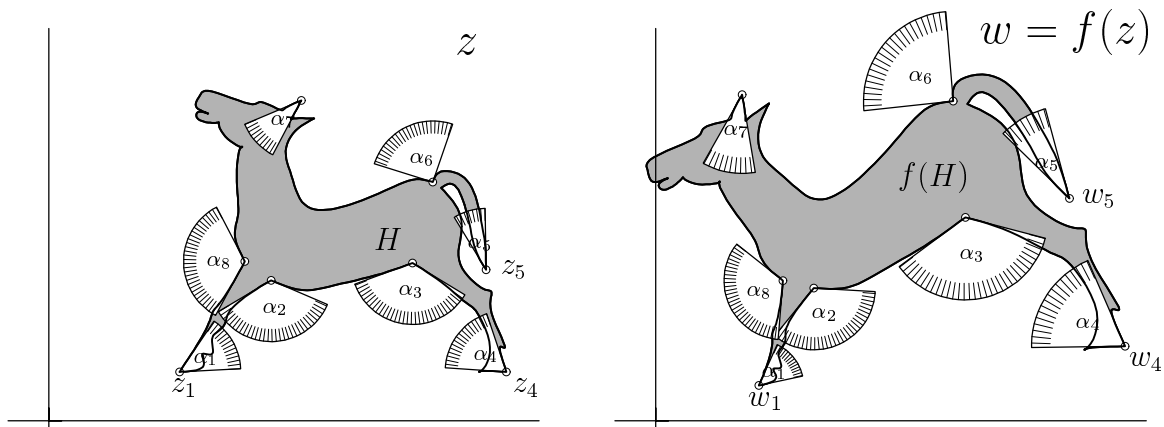
Pour deux courbes différentiables  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  qui se croisent en  $z_0$  (c.-à-d.,  $\gamma(0) = \delta(0) = z_0$  et  $\dot{\gamma}(0) \neq 0, \dot{\delta}(0) \neq 0$ ) on dénote l’angle entre les deux directions  $\dot{\gamma}(0)$  et  $\dot{\delta}(0)$  par  $\angle(\gamma, \delta)$ .

**Théorème 4.2 (Riemann)** Si la fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ( $U \subset \mathbb{C}$  ouvert) est holomorphe en  $z_0$  avec  $f'(z_0) \neq 0$ , alors elle préserve les angles (et leur orientation), c.-à-d., pour deux courbes qui se croisent en  $z_0$  on a

$$\angle(\gamma, \delta) = \angle(f \circ \gamma, f \circ \delta).$$

Une fonction qui préserve les angles s’appelle *conforme*.

*Démonstration.* Les directions de courbes  $f \circ \gamma$  et  $f \circ \delta$  sont  $f'(z_0)\dot{\gamma}(0)$  et  $f'(z_0)\dot{\delta}(0)$ ; chaque fois multipliés par la même constante  $c = f'(z_0)$ . Nous avons analysé en détail dans l’exemple 2.1 qu’une application  $z \rightarrow cz$  est une rotation avec homothétie, et préserve donc les angles.  $\square$

FIG. I.9: Exemple de fonction conforme,  $w = (z + 0.2)^2$ 

Ce théorème est illustré dans Fig.I.9 où un animal pratique sa gymnastique matinale sous l'influence de  $w = (z + 0.2)^2$ . A certains angles apparents de son contour, nous avons attaché des rapporteurs, avant et après le “stretching”. Nous voyons que les angles restent invariants, mais les rayons sont agrandis par le facteur  $|f'(z_k)|$  et subissent une rotation d'angle  $\arg f'(z_k)$ . Pour ceux qui voudraient vérifier, voici quelques valeurs:

$$\begin{array}{llll} z_1 = 0.16 + 0.06i & f' = 0.72 + 0.12i & |f'| = 0.73 & \arg f' = 0.17 \\ z_4 = 0.56 + 0.06i & f' = 1.52 + 0.12i & |f'| = 1.52 & \arg f' = 0.08 \\ z_5 = 0.53 + 0.18i & f' = 1.47 + 0.37i & |f'| = 1.52 & \arg f' = 0.25 \end{array}$$

On peut observer, sur tous les dessins des exemples 2.1, 2.3, 2.4 et 2.5, que l'image d'une grille orthogonale reste orthogonale partout où  $f'(z) \neq 0$ . La fonction de l'exemple 2.2 ne préserve pas les angles (elle n'est pas conforme).

**Fonctions biholomorphes.** Une fonction holomorphe  $f : U \rightarrow V$  (avec  $U, V \subset \mathbb{C}$ ) s'appelle *biholomorphe*, si elle est bijective et si sa fonction inverse  $f^{-1} : V \rightarrow U$  est aussi holomorphe.

L'exemple le plus simple est la fonction  $\mathbb{C}$ -linéaire  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par  $f(z) = az$  avec  $a \neq 0$ . Son inverse est  $f^{-1}(w) = a^{-1}w$  qui est aussi  $\mathbb{C}$ -linéaire et donc holomorphe. Nous verrons plus tard (quand nous considérons des fonctions exprimées par des séries) que chaque fonction holomorphe satisfaisant  $f'(z_0) \neq 0$  est *localement biholomorphe*, c.-à-d., elle est biholomorphe entre des voisinages de  $z_0$  et  $w_0 = f(z_0)$ .

La *transformation de Cayley* (2.7), illustrée dans la Fig. I.6, est biholomorphe de

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad \text{mais aussi de} \quad \mathbb{C}^- \rightarrow D_1(0),$$

du demi-plan gauche à l'intérieur du cercle unitaire (elle est sa propre inverse).

La *transformation de Joukowski* (2.10) est biholomorphe de

$$D_1(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \quad (4.1)$$

(voir Fig. I.7). Mais comme elle est symétrique en  $z$  et  $z^{-1}$ , elle est aussi biholomorphe entre l'extérieur du cercle et le plan fendu et joue un rôle important en mécanique des fluides.

La *fonction carré*  $f(z) = z^2$  (voir l'exemple 2.3) est biholomorphe comme application

$$f : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (4.2)$$

En passant au coordonnées polaires on voit directement la bijectivité. Nous laissons comme exercice la vérification du fait que la fonction inverse  $f^{-1}(w) = \sqrt{w}$  est holomorphe (exercice 16).

## Fonctions harmoniques et applications en physique.

“Eine vollkommen in sich abgeschlossene mathematische Theorie, welche ... fortschreitet, ohne zu scheiden, ob es sich um die Schwerkraft, oder die Electricität, oder den Magnetismus, oder das Gleichgewicht der Wärme handelt.” (manuscript de Riemann 1850, *Werke* p. 545)

**Théorème 4.3 (Riemann 1851)** Soit  $f = u + iv$  holomorphe dans  $U$  avec  $u$  et  $v$  deux fois<sup>2</sup> continûment différentiables dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad (4.3)$$

i.e.,  $u$  et  $v$  satisfont “l’équation de Laplace” ( $u$  et  $v$  sont des fonctions “harmoniques”).

*Démonstration.* Les équations de Cauchy–Riemann sont  $u_x = v_y$  et  $v_x = -u_y$ . On dérive la première équation par rapport à  $x$  et la deuxième par rapport à  $y$ . Cela donne  $u_{xx} = v_{yx}$  et  $v_{xy} = -u_{yy}$ . Comme (voir le théorème de Schwarz, [HW, p. 317])  $v_{yx} = v_{xy}$ , on obtient la première équation de (4.3). Pour la deuxième, on dérive les équations de Cauchy–Riemann par rapport à  $y$  et  $x$  respectivement.  $\square$

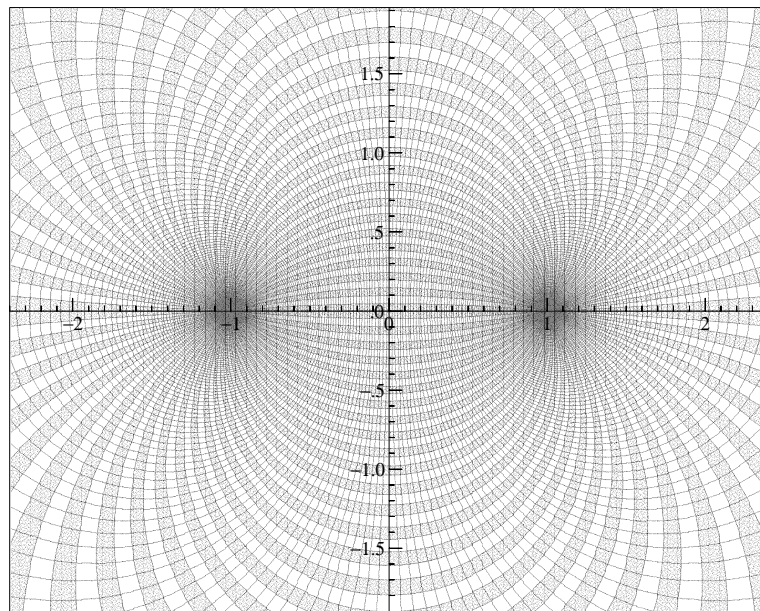


FIG. I.10: Champs d'un dipôle dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $w = \log(z + 1) - \log(z - 1)$

Grâce à cette découverte, Riemann a ouvert l'application des fonctions holomorphes à de nombreux problèmes de la physique, puisque cette équation est satisfaite par le potentiel gravitationnel d'un corps (Laplace 1785, voir *Oeuvres* I, Mécanique céleste, publié 1843, p. 157), par les champs électriques et magnétiques (Gauss et W. Weber à Göttingen) et par la chaleur en équilibre (Fourier 1807; cf. citation de Riemann ci-dessus). Il faut rajouter à cette liste certains mouvements de liquides (les mouvements sans rotationnel; d'Alembert 1752, Helmholtz 1858).

**Exemple 4.4** Le potentiel d'un dipôle (ou l'écoulement d'un liquide sortant d'une source et rentrant dans un trou) est créé par la fonction holomorphe  $w = \log(z + 1) - \log(z - 1)$  (pour des nombres complexes le logarithme est définie par  $\log z = \log |z| + i \arg z$ ; voir plus tard pour une discussion détaillée). La Fig. I.10 montre les courbes de niveau des fonctions harmoniques  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$ , données comme parties réelle et complexe de  $f(z) = \log(z + 1) - \log(z - 1)$ .

<sup>2</sup>Nous allons voir plus tard que chaque fonction holomorphe est infiniment différentiable. L'hypothèse concernant les deuxièmes dérivées sera donc superflue.

## I.5 Séries et fonctions analytiques

Pour  $c \in \mathbb{C}$  et pour  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , considérons la série

$$a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + a_3(z - c)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k \quad (5.1)$$

et étudions le domaine où elle représente une fonction, c.-à-d., où la série converge. La définition de la convergence de (5.1) est la même que pour une série dans  $\mathbb{R}$  avec la seule différence que la valeur absolue est maintenant définie sur  $\mathbb{C}$  et pas sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est un espace complet, on a aussi le critère de Cauchy (voir les paragraphes III.2 et III.7 de [HW]).

Rappelons que (5.1) converge *absolument*, si la série de terme général  $|a_k| \cdot |z - c|^k$  converge. Elle converge *uniformement* sur  $A \subset \mathbb{C}$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$  donné il existe un  $N$  (indépendant de  $z \in A$ ) tel que  $|\sum_{k=n}^m a_k(z - c)^k| < \varepsilon$  pour  $n, m \geq N$  et pour  $z \in A$ .

**Définition 5.1 (rayon de convergence)** Pour une série avec coefficients  $a_0, a_1, \dots$  on définit

$$\rho := \sup \left\{ |\zeta| ; \text{la série } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \text{ converge} \right\} \quad (5.2)$$

et on appelle  $\rho$  le rayon de convergence de la série.

**Théorème 5.2** Soit  $\rho$  le rayon de convergence de la série (5.1). Alors,

- pour chaque  $z$  avec  $|z - c| < \rho$ , on a convergence absolue;
- pour chaque  $z$  avec  $|z - c| > \rho$ , on a divergence;
- pour chaque  $r$  avec  $r < \rho$ , on a convergence uniforme sur le disque  $D_r(c)$ .

Une série (5.1) définit alors une fonction complexe sur le disque  $D_\rho(c)$ . La démonstration de ce théorème repose sur le critère des majorants.

**Lemme 5.3 (critère des majorants)** Supposons que  $|a_k| \leq \gamma_k$  pour tout  $k$  et que la série réelle  $\sum_{k \geq 0} \gamma_k r^k$  converge avec un  $r \geq 0$ . Alors, la série (5.1) converge absolument et uniformément sur  $D_r(c)$  et son rayon de convergence  $\rho$  satisfait  $\rho \geq r$ .

*Démonstration.* Pour  $z \in D_r(c)$  nous avons  $|\sum_{k=n}^m a_k(z - c)^k| \leq \sum_{k=n}^m \gamma_k r^k$  et l'affirmation est une conséquence du critère de Cauchy.  $\square$

Pour démontrer le théorème, choisissons un  $z_0$  satisfaisant  $r < |z_0 - c| < \rho$ , pour lequel la série converge (Fig. I.11). Une condition nécessaire est  $a_k(z_0 - c)^k \rightarrow 0$  et il existe donc un  $M$  tel que  $|a_k(z_0 - c)^k| \leq M$  pour tout  $k$ . Par conséquent,  $|a_k| \leq M/|z_0 - c|^k =: \gamma_k$ . Comme  $r/|z_0 - c| < 1$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \gamma_k r^k$  converge et on peut appliquer le critère des majorants pour  $z \in D_r(c)$ .  $\square$

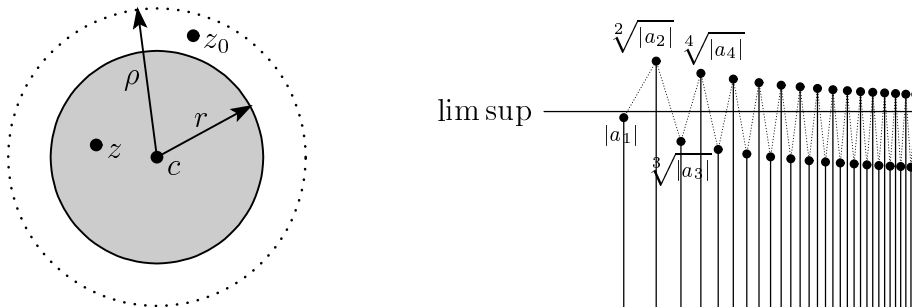


FIG. I.11: Preuve de la convergence uniforme et absolue pour  $|z - c| \leq r < \rho$ .

**Théorème 5.4** *Le rayon de convergence de la série (5.1) est donné par*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (\text{critère de la racine, Hadamard 1892}). \quad (5.3)$$

*Si la limite suivante existe, le rayon de convergence est aussi donné par*

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad (\text{critère du quotient}). \quad (5.4)$$

**Démonstration.** Si  $|a_k| \cdot |z - c|^k \leq r^k$  avec un  $r < 1$ , le critère des majorants garantit la convergence de la série (5.1). Cette condition peut être écrite sous la forme  $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - c| \leq r$ , et elle est satisfaite avec un  $r < 1$  pour  $k$  suffisamment grand si  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - c| < 1$ . Ceci implique que  $\rho \geq (\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$ . L'inégalité stricte  $\rho > (\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$  n'est pas possible, car sinon il existerait un  $z$  avec  $|z - c| < \rho$  et  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - c| > 1$ , c.-à-d.,  $|a_k| \cdot |z - c|^k \geq 1$  pour un nombre infini de  $k$ .

Pour la démonstration du critère du quotient on part avec la condition  $|a_{k+1}| \cdot |z - c|^{k+1} \leq r \cdot |a_k| \cdot |z - c|^k$  pour un  $r < 1$ . En écrivant cette condition comme  $(|a_{k+1}|/|a_k|)|z - c| \leq r$ , le reste de la preuve est identique à celle du critère de la racine.  $\square$

La considération des séries (5.1) avec argument complexe  $z \in \mathbb{C}$  nous permet d'élargir le domaine de définition d'un grand nombre des fonctions importantes. Voici quelques exemples:

**La fonction exponentielle** est définie par la série

$$\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad (5.5)$$

Le critère du quotient donne  $\rho = \infty$ . Ainsi, cette série converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et la fonction exponentielle est définie sur tout le plan complexe.

**Les fonctions trigonométriques** sont définies par

$$\begin{aligned} \cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Comme  $\exp z$ , les fonctions  $\cos z$  et  $\sin z$  sont définies pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . En remplaçant  $z$  par  $iz$  dans (5.5) et en rassemblant les termes sans et avec le facteur  $i$ , on obtient la *formule d'Euler*

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \quad (5.7)$$

(attention: on effectue un réarrangement d'une série, ce qui va être justifié dans le paragraphe I.7).

**La série logarithmique** est donnée par

$$\log(1 + z) := z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k. \quad (5.8)$$

Le rayon de convergence de cette série est  $\rho = 1$ . Le logarithme est donc défini par cette série sur le disque de rayon 1 centré en  $c = 1$ . Pour le moment, on n'a pas encore démontré que le logarithme est la fonction inverse de la fonction exponentielle (voir le paragraphe I.8).

**Définition 5.5 (fonction analytique)** Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $U \subset \mathbb{C}$  ouvert s'appelle analytique, si pour chaque  $c \in U$  il existe une série de la forme (5.1) avec un rayon de convergence  $\rho = \rho(c) > 0$  telle que sur le disque  $D_\rho(c)$  on a

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + a_3(z - c)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k. \quad (5.9)$$

Dans le reste de ce chapitre nous allons démontrer que chaque fonction analytique est holomorphe, nous discuterons le calcul avec des séries en présentant des exemples importants, et nous démontrerons qu'une série (5.1) est analytique dans le disque ouvert  $D_\rho(c)$ , si  $\rho$  désigne le rayon de convergence de la série.

## I.6 Holomorphie et analyticité des séries entières

Considérons une fonction  $f(z)$  définie par une série avec un rayon de convergence  $\rho > 0$  (pour simplifier la discussion, mais sans perdre la généralité nous supposons que le centre  $c$  est à l'origine):

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (6.1)$$

Cette fonction est continue sur  $D_\rho(0)$ , car la série converge uniformément sur  $D_r(0)$  pour  $r < \rho$  (appliquer le critère de Weierstrass; voir [HW], page 217).

**Théorème 6.1** La fonction  $f(z)$  de (6.1) est  $\mathbb{C}$ -différentiable sur le disque  $D_\rho(0)$  et sa dérivée est

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \quad (6.2)$$

*Démonstration.* On obtient la série (6.2) en dérivant (6.1) terme par terme. Comme  $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ , le critère de la racine montre que les deux séries (6.1) et (6.2) possèdent le même rayon de convergence. Il faut encore justifier la différentiation terme par terme, c.-à-d., qu'il est permis d'échanger différentiation et sommation.

Pour voir cela, nous considérons  $z$  et  $z_0$  satisfaisant  $|z|, |z_0| \leq r < \rho$ , et nous soustrayons

$$f(z) - f(z_0) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots - (a_0 + a_1z_0 + a_2z_0^2 + a_3z_0^3 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z^k - z_0^k).$$

de  $f(z)$ . Ceci donne

$$f(z) - f(z_0) = \psi(z)(z - z_0)$$

avec

$$\psi(z) = a_1 + a_2(z + z_0) + a_3(z^2 + zz_0 + z_0^2) + a_4(z^3 + z^2z_0 + zz_0^2 + z_0^3) + \dots \quad (6.3)$$

On voit tout de suite que  $\psi(z_0)$  sera la dérivée  $f'(z_0)$  annoncée en (6.2). Il nous reste à vérifier que la fonction  $\psi(z)$  est continue en  $z_0$ . Le  $k$ -ième terme de la série pour  $\psi(z)$  donne l'estimation

$$|a_k(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \dots + z_0^{k-1})| \leq k|a_k|r^{k-1}. \quad (6.4)$$

C'est le terme général, en valeur absolue, de la série (6.2) prise au point  $r$ . Nous savons que cette série converge absolument, et nous avons trouvé une série convergente qui majore la série (6.3) indépendamment de  $z$ . Le critère des majorants (Lemme 5.3) assure alors la convergence uniforme et, avec elle, la continuité.  $\square$

**Corollaire 6.2** Une fonction qui est analytique sur  $U$  est aussi holomorphe sur  $U$ .  $\square$



Le théorème précédent peut être appliqué à la fonction  $f'(z)$  et on voit itérativement qu'une fonction analytique n'est pas seulement une fois mais infiniment  $\mathbb{C}$ -différentiable (des exemples sont  $\exp z$ ,  $\cos z$  et  $\sin z$  sur  $\mathbb{C}$ ). La  $j$ -ième dérivée de (6.1) satisfait pour  $|z| < \rho$ ,

$$\frac{f^{(j)}(z)}{j!} = \sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} z^{k-j}, \quad (6.5)$$

et pour tout  $j$  cette série possède le même rayon de convergence que (6.1).

**Théorème 6.3 (série de Taylor)** *La fonction  $f(z)$  de (6.1) est analytique sur le disque  $D_\rho(0)$ . Pour  $c \in D_\rho(0)$  et  $z$  satisfaisant  $|z - c| < \rho - |c|$  on a*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - c)^j \quad \text{avec} \quad c_j = \frac{f^{(j)}(c)}{j!}.$$

Le rayon de convergence de cette série est  $\rho_c \geq \rho - |c| > 0$ .

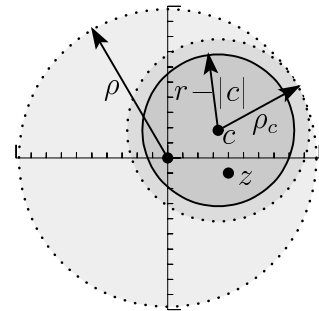
*Démonstration.* En utilisant le théorème binomial on obtient

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (c + z - c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} c^{k-j} (z - c)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} c^{k-j} \right) (z - c)^j.$$

Il reste à vérifier que l'échange de la sommation dans la dernière égalité est permis sous les hypothèses du théorème. Comme  $|z - c| \leq r - |c|$  avec  $r < \rho$ , une partie finie de la série double peut être majorée par

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k |a_k| \binom{k}{j} |c|^{k-j} |z - c|^j \leq \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k |a_k| \binom{k}{j} |c|^{k-j} (r - |c|)^j \leq \sum_{k=0}^m |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k =: B.$$

Le Théorème 7.1 du paragraphe suivant justifie cette échange et démontre la formule pour le rayon de convergence.  $\square$



## I.7 Calcul avec des séries

Dans les années 1870, Weierstrass a passé ses vacances en Suisse (au Rigi) et avait avec lui la Thèse de Riemann comme lecture d'été. Il a alors rencontré le physicien Helmholtz et s'est plaint auprès de lui de sa grande difficulté à comprendre les méthodes de Riemann. Helmholtz lui demanda le travail et, quelques jours plus tard, dit à Weierstrass: "moi je les trouve faciles et naturelles" (pour le texte original cf. A. Sommerfeld, Vorl. über Theoret. Physik, Vol. II, p. 124 ou [Remm91, p. 430]).

Il ne s'agit certainement pas d'un manque d'intelligence chez Weierstrass, mais plutôt d'une conception différente du mot "comprendre"! Chez Weierstrass, "compris" signifie "démontré avec toute la rigueur dont on est capable". Absolument rigoureux sont seulement l'algèbre et les polynômes avec un passage à la limite prudent (séries infinies et leur convergence uniforme).

Le but de ce paragraphe est de démontrer rigoureusement que la somme, le produit, la composition, ... des fonctions analytiques donnent des fonctions analytiques. Pour la somme, ceci est simple, mais les autres opérations nécessitent de travailler avec des réarrangements et avec des séries doubles. Commençons par rappeler un résultat du cours Analyse I [HW, p. 192–198].

**Réarrangement de séries doubles.** Considérons une famille  $\{a_{ij}\}_{i,j=0,1,2,\dots}$  de nombres complexes disposés en tableau comme dans Fig. I.12 et supposons que nous voulions tout additionner. Il y a bien des manières de le faire. On peut additionner les éléments de la ligne  $i$ , dénoter le

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{00} & + & a_{01} & + & a_{02} & + & a_{03} & + \dots = s_0 \\
+ & & + & & + & & + & + \\
a_{10} & + & a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & + \dots = s_1 \\
+ & & + & & + & & + & + \\
a_{20} & + & a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23} & + \dots = s_2 \\
+ & & + & & + & & + & + \\
a_{30} & + & a_{31} & + & a_{32} & + & a_{33} & + \dots = s_3 \\
+ & & + & & + & & + & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
= & & = & & = & & = & = \\
v_0 & + & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & + \dots = ???
\end{array} \tag{7.1}$$

FIG. I.12: Tableau d'une série double

résultat par  $s_i$ , et calculer  $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$  ; on peut aussi additionner les éléments de la colonne  $j$ , dénoter le résultat par  $v_j$ , et calculer  $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$ . On pourrait aussi écrire tous les éléments dans un arrangement linéaire. Par exemple, nous pouvons commencer par  $a_{00}$ , ensuite additionner les éléments  $a_{ij}$  pour lesquels  $i + j = 1$ , puis ceux avec  $i + j = 2$ , et ainsi de suite. Cela donne

$$a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{30} + a_{21} + a_{12} + \dots$$

La question qui se pose est la suivante: les différentes possibilités de sommation fournissent-elles la même valeur? A-t-on

$$s_0 + s_1 + s_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \tag{7.2}$$

et les arrangements linéaires convergent-ils aussi vers cette même valeur?

**Théorème 7.1** *Supposons que la série double (7.1) soit telle qu'il existe un  $B$  avec*

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \text{pour tout } m.$$

*Alors, les séries dans (7.2), et tous les arrangements linéaires de la série double convergent absolument. Les expressions dans (7.2) et tous les arrangements linéaires ont la même somme.*  $\square$

Considérons deux fonctions données par des séries

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \\
g(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots
\end{aligned} \tag{7.3}$$

avec rayon de convergence  $\rho_a > 0$  et  $\rho_b > 0$  respectivement. Il est évident qu'on a

$$f(z) + g(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \dots + (a_k + b_k)z^k + \dots \tag{7.4}$$

et que la série (7.4) a un rayon de convergence  $\rho \geq \min(\rho_a, \rho_b)$ .

**Produit.** Si l'on calcule le produit des deux séries (7.3), terme par terme, et si l'on collecte les termes avec la même puissance de  $z$ , on obtient la série

$$(a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)z^3 + \dots \tag{7.5}$$

La question est, pour quels  $z$  cette série converge et, en cas de convergence, est-ce que la série représente le produit  $f(z) \cdot g(z)$  ?

**Théorème 7.2 (Produit de Cauchy)** Soient  $\rho_a$  et  $\rho_b$  les rayons de convergence des deux séries (7.3). Alors, la série (7.5) a un rayon de convergence  $\rho \geq \min(\rho_a, \rho_b)$  et pour  $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$  on a

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) z^k. \quad (7.6)$$

En conséquence, le produit de deux fonctions analytiques est analytique.

*Démonstration.* Le produit, terme par terme, des séries (7.3) donne un tableau avec éléments  $a_i b_j z^{i+j}$ . Comme le produit  $f(z) \cdot g(z)$  correspond aux sommes doubles dans (7.2) et la série (7.5) est un arrangement linéaire, il suffit d'appliquer le Théorème 7.1. Pour  $|z| \leq r < \min(\rho_a, \rho_b)$  on a l'estimation  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_i b_j z^{i+j}| \leq (\sum_{i=0}^m |a_i| r^i) (\sum_{j=0}^m |a_j| r^j) =: B$ . Alors, la formule (7.6) est vraie pour  $z$  satisfaisant  $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$ .  $\square$

*Exemple.* Ce résultat nous permet de démontrer la formule  $\exp(\alpha z) \cdot \exp(\beta z) = \exp((\alpha + \beta)z)$  pour  $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ , et d'en déduire que  $\exp z \cdot \exp w = \exp(z + w)$ .

**Composition de séries convergentes.** Soit  $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  une série avec  $a_0 = 0$  (c.-à-d.,  $f(0) = 0$ ) et soit  $g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots$ . Cherchons à calculer une série pour la composition  $F(z) = g(f(z))$  (voir Fig. I.13). On insère la première série dans la deuxième et on réarrange la série en puissances de  $z$  :

$$\begin{aligned} F(z) &= b_0 + b_1(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)^2 + \dots \\ &= b_0 + b_1 a_1 z + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) z^2 + (b_1 a_3 + 2b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) z^3 + \dots \\ &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

De nouveau on se demande si cette série possède un rayon de convergence non nul et si elle représente la composition  $F(z) = g(f(z))$ .

**Théorème 7.3 (composition de séries)** Soient  $\rho_a > 0$  et  $\rho_b > 0$  les rayons de convergence des séries pour  $f(z)$  et  $g(w)$ . Choisissons  $r > 0$  tel que  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \rho_b$ .

Alors, la série  $F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$  de (7.7) converge pour  $|z| \leq r$  et on a

$$g(f(z)) = F(z).$$

*Démonstration.* Pour  $|r| < \rho_a$ , la fonction  $r \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k$  est bien définie, elle est continue et s'annule pour  $r = 0$ . Il est donc possible de choisir  $r > 0$  tel que  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \rho_b$  (Fig. I.13).

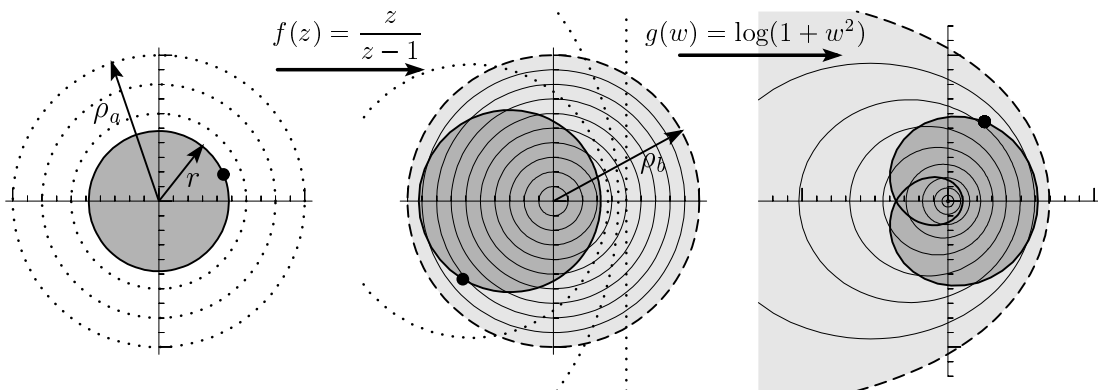


FIG. I.13: Composition de séries

En appliquant itérativement le Théorème 7.2, nous voyons que l'expression  $f(z)^i$  est une série<sup>3</sup>

$$f(z)^i = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right)^i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} z^j$$

avec un rayon de convergence  $\geq \rho_a$  et pour  $|z| \leq r < \rho_a$  on a  $\sum_{j=i}^{\infty} |a_{ij} z^j| \leq \sum_{j=i}^{\infty} |a_{ij}| r^j \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k)^i =: s^i$  avec  $s < \rho_b$ . Pour obtenir la série  $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$  on a en effet échangé la sommation dans

$$g(f(z)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i f(z)^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^j b_i a_{ij} \right) z^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = F(z).$$

La justification vient du Théorème 7.1, car  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^m |b_i a_{ij} z^j| \leq \sum_{i=0}^m |b_i| s^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| s^i =: B$  pour tout  $m \geq 0$ .  $\square$

Comme application considérons un *quotient*  $g(z)/f(z)$ . Pour le développer en série, il suffit de traiter  $1/f(z)$  car  $g(z)/f(z) = g(z) \cdot (1/f(z))$  et on sait déjà développer un produit de séries. Si  $a_0 \neq 0$  on peut mettre ce facteur en évidence et ainsi commencer la série de  $f(z)$  par 1 (un exemple intéressant d'un quotient est la série pour  $\tan z = \sin z / \cos z$ ).

**Théorème 7.4 (quotient)** Soit

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots =: 1 - h(z)$$

une série avec rayon de convergence  $\rho > 0$  et soit  $r > 0$  tel que  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < 1$ . Alors, on a pour  $|z| \leq r$ ,

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots$$

Les coefficients  $c_k$  peuvent être calculées en comparant les mêmes puissances de  $z$  dans l'identité  $(1 + a_1 z + \dots)(1 + c_1 z + \dots) = 1$  ou en calculant  $1 + h(z) + h(z)^2 + \dots$ .

*Démonstration.* On applique le Théorème 7.3 avec  $g(w) = (1 - w)^{-1} = 1 + w + w^2 + \dots$  et avec  $w = h(z)$ .  $\square$

Tous les résultats de ce paragraphe restent vrais si l'on considère des séries développées autour d'un point différent de l'origine. Par exemple, si  $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$  et  $g(w) = b_0 + b_1(w - w_0) + b_2(w - w_0)^2 + \dots$  avec  $w_0 = f(z_0) = a_0$ , alors sous les hypothèses du Théorème 7.3 on a  $g(f(z)) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$  pour  $|z - z_0| \leq r$ .

**Equations différentielles.** Soit une fonction  $g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots$  donnée, on cherche une fonction  $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  avec

$$\frac{dw}{dz} = g(w), \quad w(0) = 0, \quad (7.8)$$

(une condition initiale  $w(z_0) = w_0$  peut être traitée en considérant des séries développées autour de  $z_0$  et  $w_0$  respectivement). On insère la série pour  $w$  dans (7.8) et on utilise (7.7),

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots = g(f(z)) = b_0 + b_1 a_1 z + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) z^2 + \dots \quad (7.9)$$

Une comparaison des coefficients donne

$$a_1 = b_0, \quad 2a_2 = b_1 a_1, \quad 3a_3 = b_1 a_2 + b_2 a_1^2, \quad 4a_4 = b_1 a_3 + 2b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3, \quad \dots \quad (7.10)$$

et nous permet de calculer récursivement les coefficients  $a_k$  de la solution de manière unique. Ici, l'étude de la convergence est plaisante (Cauchy, *Exerc. d'analyse* 1841).

<sup>3</sup>Attention:  $i$  est ici une lettre de sommation et non  $\sqrt{-1}$ .

**Théorème 7.5** Si la série pour  $g(w)$  possède un rayon de convergence positif  $\rho_b > 0$ , alors la série  $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ , obtenue en comparant les coefficients dans (7.9), a aussi un rayon de convergence positif  $\rho_a > 0$  et donne une solution de l'équation différentielle.

*Démonstration.* La série  $g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots$  converge pour  $|w| < \rho_b$ . En posant  $w = q^{-1}$  avec  $0 < q^{-1} < \rho_b$  on en déduit que les coefficients peuvent être majorés par  $|b_k| \leq M q^k$ .

On cherche à majorer les coefficients  $a_k$  donnés récursivement par (7.10). L'inégalité du triangle avec la majoration pour  $b_k$  donne

$$|a_1| \leq M, \quad 2|a_2| \leq Mq|a_1|, \quad 3|a_3| \leq M(q|a_2| + q^2|a_1|^2), \quad \dots \quad (7.11)$$

L'idée est de définir une suite des nombres réels  $\alpha_k$  en remplaçant dans (7.11) les  $|a_k|$  par  $\alpha_k$  et les " $\leq$ " par " $=$ ". Cela donne

$$\alpha_1 = M, \quad 2\alpha_2 = Mq\alpha_1, \quad 3\alpha_3 = M(q\alpha_2 + q^2\alpha_1^2), \quad \dots \quad (7.12)$$

La première observation est qu'on a l'estimation

$$|a_k| \leq \alpha_k \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

(ceci se démontre par un argument de récurrence standard) et la deuxième observation est que les  $\alpha_k$  satisfont les relations de (7.10) si on remplace les  $b_k$  par  $Mq^k$ . Cela veut dire que la série  $w = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$  est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = M(1 + wq + w^2 q^2 + \dots) = \frac{M}{1 - wq}, \quad w(0) = 0. \quad (7.14)$$

Cette équation peut être résolue facilement (par "séparation des variables", [HW, p. 138])

$$(1 - wq) dw = M dz \quad \Rightarrow \quad w - \frac{w^2 q}{2} = Mz \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1 - \sqrt{1 - 2qMz}}{q}, \quad (7.15)$$

et sa solution peut être développée en série (à l'aide de la série binomiale), qui converge pour  $|z| < 1/(2qM)$ .  $\square$

*Exemples.* La fonction exponentielle  $w = \exp z$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{dw}{dz} = w$  et la fonction tangente  $\tan z = \sin z / \cos z$  est solution de  $\frac{dw}{dz} = 1 + w^2$  (exercice 32).

**Fonction inverse.** Soit  $w = f(z)$  avec  $w_0 = f(z_0)$  donnée par un développement  $w - w_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$ . On cherche le développement de la fonction inverse  $z = g(w)$  sous la forme  $z - z_0 = b_1(w - w_0) + b_2(w - w_0)^2 + b_3(w - w_0)^3 + \dots$ . Après des translations, on peut supposer  $z_0$  et  $w_0$  placé dans l'origine et on part de

$$\begin{aligned} w = f(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots && \text{donné;} \\ z = g(w) &= b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots && \text{cherché.} \end{aligned} \quad (7.16)$$

La fonction  $g(w)$  est l'inverse de  $f(z)$  si pour la fonction composée  $F(z) = g(f(z))$  dans (7.7) nous avons  $F(z) = z$ . Une comparaison des coefficients donne

$$b_1 a_1 = 1, \quad b_1 a_2 + b_2 a_1^2 = 0, \quad b_1 a_3 + 2b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3 = 0, \quad \dots \quad (7.17)$$

Si  $a_1 \neq 0$ , la première équation nous donne  $b_1 = 1/a_1$ , la deuxième  $b_2 = -b_1 a_2 / a_1^2$ , etc. Comme la  $k$ ième relation est de la forme  $b_k a_1^k + \dots = 0$ , où les trois points indiquent des expressions déjà calculées, la seule condition  $a_1 \neq 0$  nous permet de calculer récursivement tous les coefficients  $b_k$ .

La discussion de la *convergence* par la méthode des majorants (similaire à celle dans la démonstration du Théorème 7.5) est possible (voir le livre de H. Cartan), mais peu commode. Nous ramènerons la question à une équation différentielle (idée vue par Gerhard Wanner dans un cours de W. Gröbner 1963).

**Théorème 7.6** Soit  $w = f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  une série avec  $a_1 \neq 0$  et rayon de convergence  $\rho_a > 0$ , alors la série  $z = g(w) = b_1w + b_2w^2 + b_3w^3 + \dots$  avec coefficients donnés par (7.17) possède un rayon de convergence positif et on a  $g(f(z)) = z$  dans un voisinage de 0.

*Démonstration.* Si  $g(w)$  est bien définie dans un voisinage de 0, une différentiation de la relation  $g(f(z)) = z$  donne

$$g'(f(z))f'(z) = 1, \quad (7.18)$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots} = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots, \quad z(0) = 0 \quad (7.19)$$

pour la fonction  $z = g(w)$ . Par le Théorème 6.1 pour la dérivée et le Théorème 7.4 pour le quotient, la série  $c_0 + c_1z + \dots$  possède un rayon de convergence positif. On est maintenant en position d'appliquer le Théorème 7.5 qui dit que la solution de l'équation différentielle (7.19) est donnée par une série avec rayon de convergence positif. Cette série satisfait (7.18), c.-à-d.,  $F'(z) = 1$  pour  $F(z) = g(f(z))$ . En comparant les coefficients de  $F'(z)$  avec ceux de 1 et en utilisant  $F(0) = 0$ , on voit que  $F(z) = z$ .  $\square$

**Corollaire 7.7 (théorème d'inversion local)** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  (avec  $U \subset \mathbb{C}$  ouvert) analytique dans  $U$  et soit  $z_0 \in U$ . Si  $f'(z_0) \neq 0$ , la fonction est localement biholomorphe, c.-à-d., elle est biholomorphe entre des voisinages de  $z_0$  et de  $w_0 = f(z_0)$ .

*Démonstration.* Avec  $z$  et  $w$  remplacés par  $z - z_0$  et  $w - w_0$  dans le Théorème 7.6, la condition  $a_1 \neq 0$  devient  $f'(z_0) \neq 0$ .  $\square$

*Exemples.* La fonction  $f(z) = z^2$  (voir Fig. I.5) est localement biholomorphe dans un voisinage de chaque  $z_0 \neq 0$ . Pour la fonction de Joukovski on a  $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-2})$ . Elle est localement biholomorphe pour  $z_0 \neq \pm 1$  (voir Fig. I.7).

## I.8 La fonction exponentielle et le logarithme

Etudions en détail quelques fonctions analytiques: la fonction exponentielle, son inverse le logarithme, les fonctions trigonométriques et les puissances complexes.

**Fonction exponentielle.** A part les polynômes et les fractions rationnelles, la fonction exponentielle est la fonction holomorphe la plus importante. Elle est définie par la série

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (8.1)$$

dont le rayon de convergence est  $\rho = \infty$ .

Avec la fonction exponentielle, il est naturel de considérer aussi les fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}\cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}\end{aligned}\quad (8.2)$$

qui sont également définies pour tout  $z \in \mathbb{C}$  par ces séries. En remplaçant  $z$  par  $iz$  dans (8.1) et en rassemblant les termes sans et avec le facteur  $i$ , on obtient la *formule d'Euler* (1748)

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}. \quad (8.3)$$

Ce réarrangement de la série (8.1) est permis car elle converge absolument. Comme  $\cos(-z) = \cos z$  et  $\sin(-z) = -\sin z$ , on arrive à exprimer les fonctions trigonométriques en termes de la fonction exponentielle de la manière suivante:

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)). \quad (8.4)$$

**Équation différentielle.** Par différentiation terme par terme, on voit que la fonction exponentielle  $w = \exp(cz)$  (avec  $c \in \mathbb{C}$ ) est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = cw. \quad (8.5)$$

Cette propriété est caractéristique pour la fonction exponentielle, car si  $w = f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  satisfait (8.5), on a nécessairement  $ka_k = ca_{k-1}$ . Cette formule de récurrence donne  $a_k = a_0 c^k / k!$  et on trouve ainsi la fonction exponentielle  $f(z) = a_0 \exp(cz)$  comme la seule solution de l'équation différentielle satisfaisant  $f(0) = a_0$ .

Une autre propriété caractéristique est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 8.1 (théorème d'addition)** Soit  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  donnée par une série avec un rayon de convergence  $\rho > 0$  et avec  $a_0 \neq 0$ . Alors  $f(z)$  satisfait la relation

$$f(z+w) = f(z)f(w) \quad \text{pour } z, w \text{ avec } z, w, z+w \in D_\rho(0) \quad (8.6)$$

si et seulement si  $f(z) = \exp(cz)$  avec un  $c \in \mathbb{C}$ .

*Démonstration.* Avec le produit de Cauchy on a démontré au paragraphe I.7 que la fonction  $f(z) = \exp(cz)$  satisfait (8.6) (voir aussi l'exercice 27). Pour voir qu'elle est la seule fonction satisfaisant (8.6), nous dérivons cette relation par rapport à  $w$ , ce qui donne  $f'(z+w) = f(z)f'(w)$ . En posant  $w = 0$  on voit que  $f(z)$  satisfait l'équation différentielle (8.5) avec  $c = f'(0)$ . On a donc  $f(z) = a_0 \exp(cz)$ . Mais, pour que cette fonction satisfasse (8.6) il faut que  $a_0 = 1$ .  $\square$

Ce théorème d'addition combiné avec la formule d'Euler (8.3) donne pour  $z = x + iy$  que

$$\exp z = \exp(x + iy) = \exp x \exp(iy) = \exp x (\cos y + i \sin y). \quad (8.7)$$

Comme nous sommes familiers avec les fonctions réelles  $\exp x$ ,  $\cos y$  et  $\sin y$  (avec argument réel), cette formule nous permet de mieux comprendre l'application  $f(z) = \exp z$  illustrée en Fig. I.14. Les lignes verticales ( $x = \text{Const}$ ) sont envoyées sur des cercles avec rayon  $\exp x$ , les lignes horizontales ( $y = \text{Const}$ ) sur des rayons partant de l'origine avec un angle  $y$ . De plus,  $\exp z \neq 0$  quel que soit  $z \in \mathbb{C}$ .

On sait que les fonctions  $\sin y$  et  $\cos y$  sont  $2\pi$ -périodiques. Ceci implique que

$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp z \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ et } z \in \mathbb{C}. \quad (8.8)$$

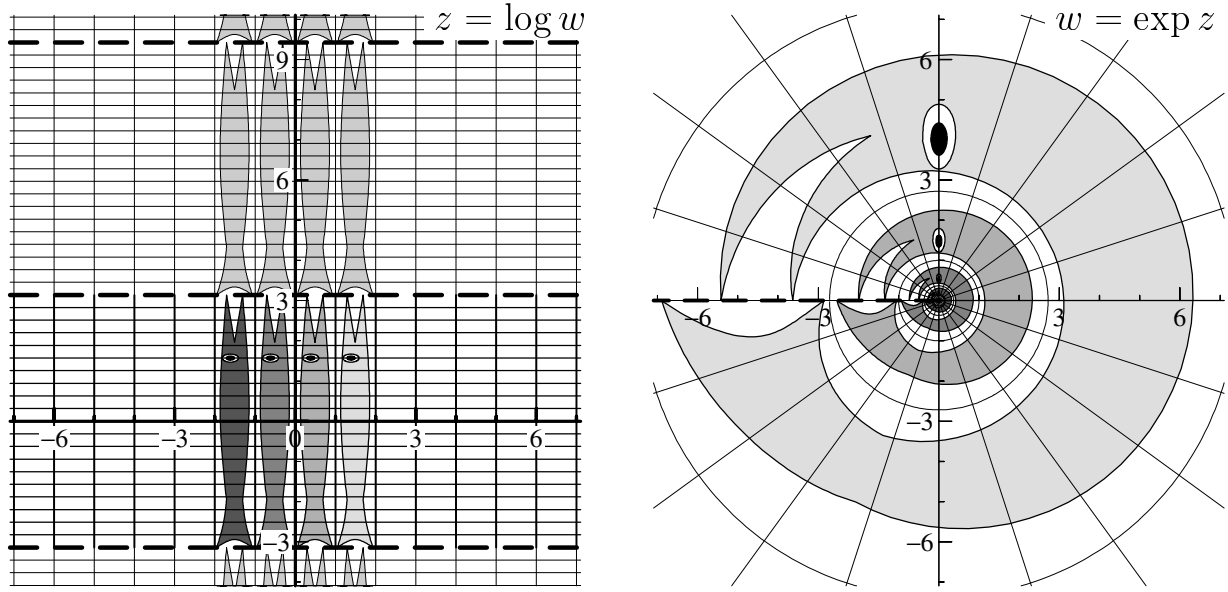


FIG. I.14: La fonction exponentielle et le logarithme

**Théorème 8.2** Pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f(z) = \exp z$  est biholomorphe comme application entre

$$\{z \in \mathbb{C} ; \eta - \pi < \operatorname{Im} z < \eta + \pi\} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \setminus R_\eta$$

où  $R_\eta = \{z = r \exp(i\eta \pm i\pi) ; r \geq 0\}$  est le rayon partant de l'origine avec angle  $\eta \pm \pi$ .

*Démonstration. Surjectivité.* Prenons  $w_0 \in \mathbb{C} \setminus R_\eta$  et écrivons ce nombre complexe en coordonnées polaires  $w_0 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ( $r > 0$  et  $\varphi \neq \eta \pm \pi \bmod{2\pi}$ ). Avec  $z_0 := \log r + i\varphi + 2k\pi i$  (où  $k$  est un entier) on a que  $\exp z_0 = w_0$ . Il suffit de choisir  $k$  afin que  $\varphi + 2k\pi$  soit dans l'intervalle ouvert  $(\eta - \pi, \eta + \pi)$  pour conclure la surjectivité de l'application exponentielle.

*Injectivité.* Soit  $\exp z_0 = \exp z_1$  avec  $z_0 = x_0 + iy_0, z_1 = x_1 + iy_1$  et  $\eta - \pi < y_0, y_1 < \eta + \pi$ . La formule (8.7) implique que  $x_1 = x_0$  (car  $\exp x_1 = |\exp z_1| = |\exp z_0| = \exp x_0$ ) et  $y_1 - y_0 = 2k\pi$  avec un entier  $k$ . Comme la distance  $|y_1 - y_0|$  est strictement plus petite que  $2\pi$ , il en suit  $k = 0$  et l'injectivité de l'application.

*Holomorphic.* La fonction  $f(z) = \exp z$  est analytique et donc holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Comme  $f'(z) = \exp z \neq 0$  partout dans  $\mathbb{C}$ , le théorème d'inversion local (Corollaire 7.7) implique que la fonction inverse est aussi holomorphe.  $\square$

**Le logarithme.** Le but est de définir le logarithme comme application inverse de la fonction exponentielle. Pour ceci il faut restreindre le domaine de définition de  $\exp z$ , par exemple, à la bande  $B := \{z \in \mathbb{C} ; -\pi < \operatorname{Im} z < +\pi\}$  (voir le Théorème 8.2). On obtient alors

$$\operatorname{Log} z := \log |z| + i \arg z \quad (8.9)$$

où l'argument  $\arg z$  est choisi pour que  $-\pi < \arg z \leq +\pi$ . Cette fonction, qui est holomorphe par le Théorème 8.2, est la *branche principale du logarithme*. Elle est définie sur  $\mathbb{C} \setminus R_0$  et elle est souvent notée  $\operatorname{Log} z$  (avec un L majuscule).

On peut aussi définir le logarithme comme *fonction multivaluée*

$$\log z := \log |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.10)$$

Il faut faire attention, car  $\log z$  n'est pas un seul nombre complexe mais un ensemble de nombres complexes. Quel que soit  $k$  dans (8.10), on a  $\exp(\log z) = z$ . En contraste avec  $\operatorname{Log} z$ , l'expression  $\log z$  est définie sur tout le plan complexe (à l'exception de l'origine). Pour un nombre réel négatif on a  $\log(-x) = \log x + (2k + 1)\pi i$  (si  $x > 0$ ).



**Équation différentielle.** Soit  $f(z) = \log z$  la fonction (8.10) avec un  $k$  fixé (par exemple,  $f(z) = \text{Log } z$ ), ou une des fonctions inverses de la fonction exponentielle vue au Théorème 8.2, alors  $f(z)$  est holomorphe et on a  $\exp(f(z)) = z$ . Une différentiation par rapport à  $z$  donne  $\exp(f(z))f'(z) = 1$ . En conséquence, la fonction  $w = \log z$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}. \quad (8.11)$$

La valeur initiale est  $w(1) = 0$  pour la branche principale et  $w(1) = 2k\pi i$  pour les autres branches.

**Développement en série.** Avec l'argument  $z$  remplacé par  $1+z$  on voit que  $\text{Log}(1+z)$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{dw}{dz} = 1/(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$ . Une intégration, terme par terme, donne alors

$$\text{Log } z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{pour } |z| < 1. \quad (8.12)$$

**La relation fonctionnelle.** Le théorème d'addition pour la fonction exponentielle implique que  $\exp(\log(zw)) = zw = \exp(\log z) \exp(\log w) = \exp(\log z + \log w)$ . On en déduit que

$$\log(zw) = \log z + \log w + 2k\pi i \quad (8.13)$$

pour deux nombres complexes non nuls. L'entier  $k$  est déterminé par la branche du logarithme choisie. Si l'on considère deux nombres complexes dans  $\mathbb{C} \setminus R_0$  et la branche principale du logarithme, on a

$$\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w + \begin{cases} 2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w < \pi \\ 0 & \text{si } \arg z + \arg w \in (-\pi, \pi) \\ -2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w > \pi \end{cases} \quad (8.14)$$

En particulier, on a  $\log z^n = n \log z + 2k\pi i$  pour des entiers  $n$  et donc aussi  $z^n = \exp(n \log z)$ . Cette formule est la motivation pour considérer aussi des puissances complexes.

**La puissance complexe.** Pour un nombre complexe  $c \in \mathbb{C}$  et pour la variable complexe  $z \neq 0$  nous définissons

$$z^c := \exp(c \log z). \quad (8.15)$$

Ici, la fonction  $\log z$  est multivaluée. Ceci signifie que  $z^c$  est aussi multivaluée en général. Pour chaque branche de  $\log z$ , cette fonction est holomorphe comme composition des fonctions holomorphes. Considérons quelques cas particuliers:

- Si  $c = n$  est un entier positif, on a  $z^c = z \cdot \dots \cdot z$  ( $n$  fois); cette valeur est unique;
- Si  $c = -n$  est un entier négatif, on a  $z^c = z^{-1} \cdot \dots \cdot z^{-1}$  ( $n$  fois); cette valeur est unique;
- Pour  $c = 1/n$ , la valeur  $z^c$  représente les  $n$  solutions de  $w^n = z$ , et on les obtient en prenant une solution et en la multipliant par  $\exp(2k\pi i/n)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) qui sont les  $n$ èmes racines d'unité;
- Si  $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est un nombre irrationnel (par exemple  $c = \sqrt{2}$ ), l'expression  $z^c$  représente une infinité des nombres complexes; ils sont denses sur le cercle avec rayon  $|z|^c$  centré à l'origine;
- Si  $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , l'expression  $z^c$  représente une infinité des nombres complexes; ils sont situés sur une spirale et donnés par  $z^c = \exp(c \text{Log } z) \exp(2k\pi ic)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

Échangeons maintenant les rôles de  $c$  et  $z$  dans (8.15) et considérons

$$c^z := \exp(z \text{Log } c). \quad (8.16)$$

Cette fois il s'agit d'une vraie fonction, car on a fixé  $\text{Log } c$  comme la valeur de la branche principale. Avec  $e := \exp(1) = 2.71828\dots$ , on a  $\text{Log } e = 1$  et donc aussi  $e^z = \exp(z \cdot 1) = \exp(z)$ . Ceci justifie la notation  $e^z$  pour la fonction  $\exp z$ .

## I.9 Exercices

1. Calculer les deux racines du polynôme

$$z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0.$$

2. Écrire le nombre complexe  $c = -2 + 2i$  en coordonnées polaires et calculer  $\sqrt[3]{c}$  (trois solutions).  
 3. En utilisant la formule de Cardano (voir [HW, p. 7]) calculer la solution réelle de l'équation

$$z^3 - z + 1 = 0.$$

Vérifier le résultat avec un logiciel comme Maple.

4. Considérons une application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ .

Avec l'identification  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  de (1.3) elle peut être écrite sous la forme  $w = f(z)$ .  
 Exprimer  $f(z)$  en termes de  $u, v$  et  $z = x + iy$ .

5. Décrire géométriquement les parties du plan complexe définies par

- a)  $|z| < 1, \quad |z + 1| < 1, \quad |z - 1| \leq 1,$
- b)  $\operatorname{Re} z \geq -1/3, \quad \operatorname{Re} z + 3 \operatorname{Im} z < 4,$
- c)  $3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4.$

6. Lesquels des ensembles de l'exercice 5 sont ouverts, fermés, bornés, compacts ?

7. Pour  $a, c \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{C}$  considérons l'équation

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0.$$

Montrer que cette équation représente un cercle dans  $\mathbb{C}$  si  $a \neq 0$  et  $|b|^2 > ac$ . Discuter le cas  $a = 0$ .  
 Que se passe-t-il si  $|b|^2 \leq ac$ ?

8. Avec l'identification  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  de (1.3) chaque application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  peut être écrite sous la forme

$$f(z) = \lambda z + \mu \bar{z} \tag{9.1}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  (uniquement déterminés).

9. Montrer qu'une application (9.1) satisfait

$$\mathbb{C}\text{-linéaire} \quad \Leftrightarrow \quad f(i) = if(1) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 0.$$

10. Étudier la fonction  $w = f(z) = z^{-1}$  et démontrer que cette fonction conserve les cercles, c.-à-d., l'image d'un cercle est un cercle.  
 11. L'image d'un cercle  $\{z; |z - a| = r\}$  par la transformation de Cayley (2.7) est de nouveau un cercle (ou une droite). Déterminer son centre et son rayon.  
 12. Soit  $D = \{z; |z| > 1\}$ , l'extérieur de cercle unité. Démontrer que la transformation de Joukowski

$$f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \quad \text{définie par} \quad z \mapsto w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right),$$

considérée comme application de  $D$  dans  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  est surjective et injective. Étudier l'application inverse  $f^{-1} : w \mapsto z$ . Dessiner les images inverses des lignes  $\operatorname{Im} w = \text{Const}$  (écoulement "potentiel" autour d'un cylindre).

*Indication.* L'image de  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  est  $w = \cos \varphi$ .

13. Décomposer la fonction  $w = f(z) = z^4$  en partie réelle et imaginaire  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Calculer les dérivées partielles et vérifier les équations de Cauchy–Riemann.

14. Soit  $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$  donnée. Trouver toutes les fonctions  $v(x, y)$  qui satisfont avec  $u(x, y)$  partout les équations de Cauchy–Riemann.
15. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathbb{C}$ -différentiable. Montrer que la fonction

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

est  $\mathbb{C}$ -différentiable sur  $\tilde{U} = \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \in U\}$ . Quelle est la dérivée de  $g(z)$ ?

16. La fonction carrée  $f(z) = z^2$ , vue comme application  $\mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , est bijective. Montrer que la fonction inverse  $f^{-1}(w) = \sqrt{w}$  est holomorphe.
17. A chaque matrice complexe  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $(c, d) \neq 0$  nous associons la fonction

$$f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Montrer que

$$f_{AB} = f_A \circ f_B \quad \text{c.-à-d.} \quad f_{AB}(z) = f_A(f_B(z)).$$

En déduire que, pour  $c \neq 0$  et  $\det A \neq 0$ , la fonction  $f_A(z)$  est biholomorphe entre  $\mathbb{C} \setminus \{-c^{-1}d\}$  et  $\mathbb{C} \setminus \{c^{-1}a\}$ . Quelle est la fonction inverse de  $f_A(z)$ ?

18. En utilisant le corollaire 3.3 démontrer que la fonction

$$\log z := \log |z| + i \arg z$$

est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

19. Trouver une solution  $u(x, y)$  du problème de Dirichlet suivant:

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad u(x, 0) = u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = x, \quad u(1, y) = y.$$

*Idée.* Considérer la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe (polynomial très simple).

20. Déterminer le rayon de convergence de la série binomiale ( $s \in \mathbb{R}$ )

$$(1+z)^s := 1 + sz + \frac{s(s-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{s(s-1) \cdots (s-k+1)}{k!} z^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k.$$

21. Déterminer le domaine de définition de la fonction de Bessel d'indice zéro définie par

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} z^{2k}.$$

22. On sait que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-i)^k$  converge pour  $z = 4$  et diverge pour  $z = -8$ . Que sait-on au sujet de la convergence ou de la divergence des séries suivantes?

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1+i)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k 9^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k 5^k.$$

23. Déterminer les coefficients de la série

$$\frac{z^2 + 11z - 2}{(2z - 1)(z^2 - 4)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (9.2)$$

et calculer le rayon de convergence de la série ainsi obtenue.

Pour une fraction rationnelle arbitraire, deviner une formule pour le rayon de convergence.

Quel est le rayon de convergence de la série qu'on obtient si l'on développe la fonction de (9.2) autour du point  $c = 1$ ?

*Indication.* Décomposition en fractions simples.

24. Soient  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  deux suites dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existe et que cette limite est non-négative. Alors on a toujours

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

(on a utilisé ce résultat dans la preuve du théorème sur la  $\mathbb{C}$ -différentiabilité d'une série entière).

Montrer par un contre exemple que l'affirmation

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

est fausse en général.

25. Soit  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  donnée par une série ayant  $\rho > 0$  comme rayon de convergence. Démontrer que

$$F(z) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} + a_3 \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

est une primitive de  $f(z)$  sur  $D_\rho(0)$ , c.-à-d., le rayon de convergence de cette série est  $\rho$  et on a que  $F'(z) = f(z)$ .

26. La fonction  $\arctan z$  est la primitive de  $f(z) = (1 + z^2)^{-1}$  qui s'anule pour  $z = 0$ . Calculer les coefficients de la série pour  $\arctan z$ .

Résultat.  $\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$

27. Démontrer que

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w.$$

28. Exprimer les fonctions  $\sin z$  et  $\cos z$  en termes de  $\exp(iz)$  et  $\exp(-iz)$  et utiliser le résultat de l'exercice 27 pour démontrer la formule

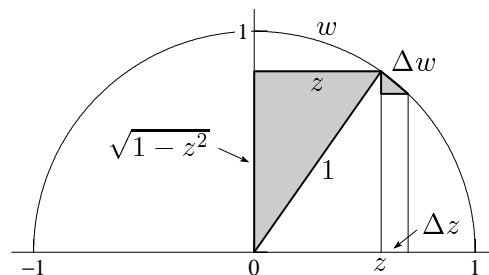
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

29. Calculer les cinq premiers termes de la série pour  $f(z) = \exp(s \log(1 + z))$  et comparer les avec la série de l'exercice 20.

30. Soit  $w = \arcsin z$ . Inspirez vous du dessin (qui lui même est inspiré d'un dessin de Newton 1669) pour voir que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Insérer pour cette dernière fonction la série binomiale et obtenir par intégration la série (de Newton) pour  $\arcsin z$ . Déterminer le rayon de convergence.



31. Les *nombre de Bernoulli* sont les coefficients de la série

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \frac{B_4}{4!}z^4 + \dots \quad (9.3)$$

- a) Démontrer la formule de récurrence

$$\binom{k}{0} B_0 + \binom{k}{1} B_1 + \dots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} = 0$$

et calculer les premiers dix nombres de Bernoulli.

- b) En observant que

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \quad (9.4)$$

démontrer que  $B_j = 0$  si  $j > 1$  est impair.

c) En remplaçant  $z$  par  $iz$  dans (9.4) trouver les coefficients de la série pour

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \quad (9.5)$$

d) Vérifier l'identité  $\tan z = \cot z - 2 \cot(2z)$  et en déduire la formule

$$\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \quad (9.6)$$

32. Déterminer les premiers termes de la série pour  $\tan z$  de plusieurs manières différentes:

a) comme le quotient des deux séries dans  $\tan z = \sin z / \cos z$ ;

b) comme fonction inverse de la série pour  $\arctan z$  (utiliser les formules pour la composition des séries);

c) comme solution de l'équation différentielle  $w' = 1 + w^2$  (justifier cette équation différentielle).

33. Soient  $\rho_a > 0$  et  $\rho_b > 0$  les rayons de convergence des séries pour  $f(z)$  et  $g(w)$  et soit  $f(0) = 0$ . La démonstration du théorème 7.3 (composition de séries) montre que la série pour la fonction composée  $g(f(z))$  possède un rayon de convergence

$$\rho \geq \min\left(\rho_a, \sup\left\{r \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \rho_b\right\}\right).$$

Calculer cette estimation du rayon de convergence pour l'inverse de la série  $\cos z$  :

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1 - f(z)} \quad \text{où} \quad f(z) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots$$

*Résultat.*  $\log(2 + \sqrt{3})$ .

34. Montrer que l'équation cubique

$$z^3 - 3z - w = 0 \quad (9.7)$$

possède une solution unique proche de 0 si  $w$  est suffisamment petit. Plus précisément, il existe des voisinages  $U$  de  $z_0 = 0$  et  $V$  de  $w_0 = 0$  tels que pour tout  $w \in V$  il existe un unique  $z \in U$  satisfaisant (9.7). Développer cette racine en puissances de  $w$  (calculer les premiers 3 termes).

35. Déterminer toutes les racines complexes des équations suivantes:

$$\sin z = 0, \quad \cos z = 0, \quad \exp(2z) - 5 \exp z + 4 = 0.$$

36. Développer la fonction  $f(z) = \log z$  (branche principale) en série autour d'un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  qui n'est pas sur l'axe réel négatif. Quel est le rayon de convergence de cette série?

37. *Une exercice difficile.* Démontrer, par récurrence, que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et pour  $n \geq 2$  on a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}.$$

En déduire que pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z.$$

38. Démontrer pour  $|x| < 1$  que

$$\arctan x = \frac{i}{2} \log \left( \frac{i+x}{i-x} \right)$$

a) à l'aide de la formule d'Euler appliquée à  $x = \tan z = \sin z / \cos z$ ;

b) à l'aide de séries entières pour  $\arctan z$  et  $\log(1+z)$ .

39. Démontrer les identités (d'Euler 1746 et de Johann Bernoulli 1702)

$$i^i = e^{-\pi/2}, \quad e^{i\pi/2} = i.$$

Quelles autres valeurs pour  $i^i$  et  $e^{i\pi/2}$  pourrait-on imaginer?

40. Pour un  $z$  fixé (par exemple,  $z := 1 + i$ ), les valeurs représentées par  $z^{0.1+i0.01}$  sont toutes sur une spirale. Donner cette spirale en coordonnées polaires sous la forme  $r = s(\varphi)$ .

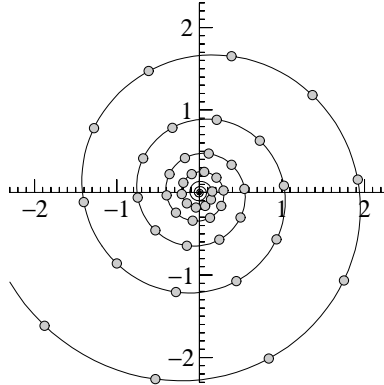


FIG. I.15: Les valeurs de  $(1 + i)^{0.1+i0.01}$  (Exercice 40).

# Chapitre II

## Calcul intégral et théorie de Cauchy

“Was soll man sich nun bei  $\int \varphi x \cdot dx$  für  $x = a + ib$  denken? ... Ich behaupte nun, dass das Integral  $\int \varphi x \cdot dx$  nach zweien verschiedenen Übergängen immer einerlei Werth erhalte.”

(C.F. Gauss 1811, lettre à Bessel, *Werke* 8, p. 91)

“L’intention de Cauchy, proclamée dans l’introduction de son mémoire, était de rendre rigoureuse une méthode d’intégration utilisée déjà par Euler et surtout par Laplace ...”

(B. Belhoste, *Cauchy*, p. 179, en parlant de Cauchy 1814)

Le “Mémoire” reconnu comme “le plus important des travaux de Cauchy” est intitulé *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre les limites imaginaires*, publié en 1825, en quelques exemplaires, et inclus seulement en 1974 dans les *Oeuvres de Cauchy* (cf. [Remmert 1991]).

Le but de ce chapitre est de donner un sens à  $\int_{c_0}^c f(z) dz$  où  $c_0, c$  sont des nombres complexes reliés par une courbe et  $z$  est une variable complexe. La théorie du calcul intégral complexe nous permet de mieux comprendre les fonctions holomorphes et analytiques introduites au chapitre I.

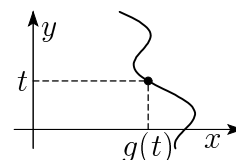
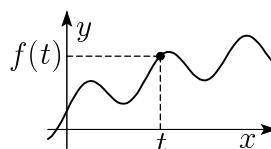
### II.1 Chemins et courbes

Comme motivation de la définition suivante, considérons une fourmi se promenant sur le plan complexe. On peut décrire son chemin en donnant à chaque instant  $t$  la position de la fourmi, i.e., les deux coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$ .

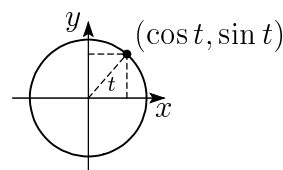
**Définition 1.1** Un *chemin* ou une *courbe paramétrée* dans  $\mathcal{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est une fonction continue d’un intervalle fermé dans  $\mathcal{C}$ , c.-à-d.,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Nous supposons en plus que  $\gamma(t)$  est continûment différentiable par morceaux.

Voici quelques exemples simples:

- Des fonctions  $y = f(x)$  et  $x = g(y)$  peuvent être écrites sous la forme  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$  resp.  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}$ .



- Un cercle dans le plan est donné par  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ .



- Soient  $c_1, c_2, c_3$  trois points dans  $\mathcal{C}$ . Le bord du triangle formé par ces trois points est décrit par

$$\gamma(t) = \begin{cases} c_1 + 3t(c_2 - c_1) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3 \\ c_2 + (3t - 1)(c_3 - c_2) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ c_3 + (3t - 2)(c_1 - c_3) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

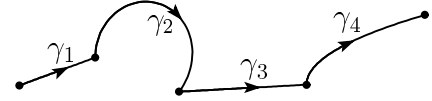
**Chemin renversé.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  un chemin dans  $\mathcal{C}$ . On dénote par  $(-\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  le chemin parcouru dans le sens inverse. Il est donné par  $(-\gamma)(t) := \gamma(1 - t)$ .

**Chemin composé.** Soit  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  un chemin et  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  un autre avec  $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ . Alors nous écrivons pour le *chemin composé* des deux chemins  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  en posant

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

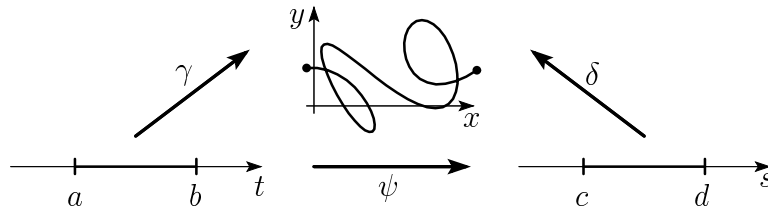
On peut aussi composer plusieurs chemins si le point final d'un chemin est égal au point de départ du chemin suivant.

On utilise la notation  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$ .



**Définition 1.2 (courbe)** Deux chemins  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont *équivalents* s'il existe un difféomorphisme  $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  (bijective et  $\psi$  ainsi que  $\psi^{-1}$  continûment différentiables) tel que  $\gamma = \delta \circ \psi$ , i.e.,  $\gamma(t) = \delta(\psi(t))$ .

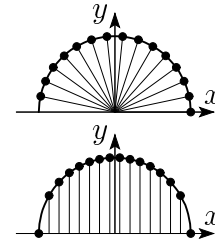
Une *courbe* est une classe d'équivalence de chemins. Une *courbe orientée* est une classe d'équivalence de chemins pour la relation précédente avec  $\psi$  strictement croissante.



*Exemple.* Les deux paramétrisations

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi,$$

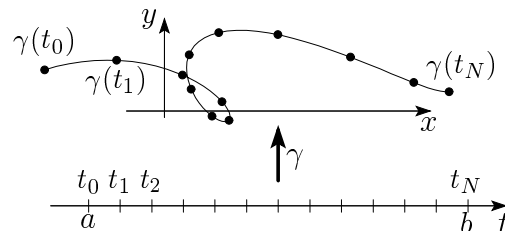
$$\delta(s) = \begin{pmatrix} -s \\ \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad -1 < s < 1.$$



représentent le même demi-cercle ( $s = \psi(t) = -\cos t$  dans la Définition 1.2). En interprétant le paramètre  $t$  respectivement  $s$  comme le temps, on observe que la courbe est parcourue avec une vitesse constante lors de la première paramétrisation. Lors de la deuxième, la partie au sommet est parcourue moins vite que les parties à gauche et à droite.

Pour une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ , considérons une subdivision  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  de l'intervalle  $[a, b]$  et les points correspondants sur la courbe. Une approximation de la longueur d'arc est la longueur du polygone reliant les points  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_N)$ . On obtient donc, en utilisant le théorème de Lagrange,

$$\begin{aligned} \text{longueur} &\approx \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} |\dot{\gamma}(t_i)| (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$



Ceci est une somme de Riemann. La limite quand  $\max_i |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$  donne alors la longueur cherchée.

**Définition 1.3 (longueur d'arc)** La *longueur* de la courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  est

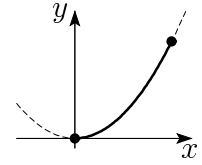
$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Un changement des coordonnées ( $s = \psi(t)$ ) montre que cette définition est indépendante du représentant d'une courbe. De plus, on a  $L(-\gamma) = L(\gamma)$  et  $L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ .



*Exemple.* Considérons la parabole  $y = x^2$  paramétrisée par  $\gamma(t) = (t, t^2)^T$ . Comme  $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)^T$ , on obtient pour la longueur d'arc entre  $t = 0$  et  $t = 1$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \dots = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}).$$



## II.2 Intégrales curvilignes

Le problème consiste à donner un sens à une intégrale complexe  $\int_{c_0}^c f(z) dz$  où  $c_0 = a_0 + ib_0$ ,  $c = a + ib$  et  $z$  parcourt un chemin  $\gamma(t)$  reliant  $c_0$  avec  $c$ .

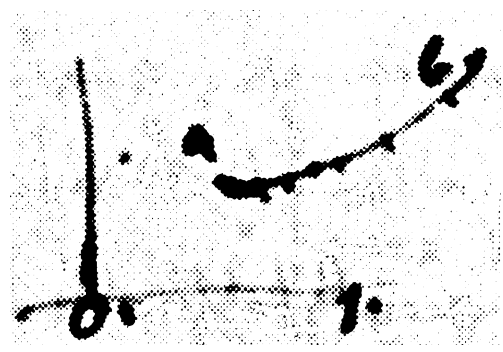
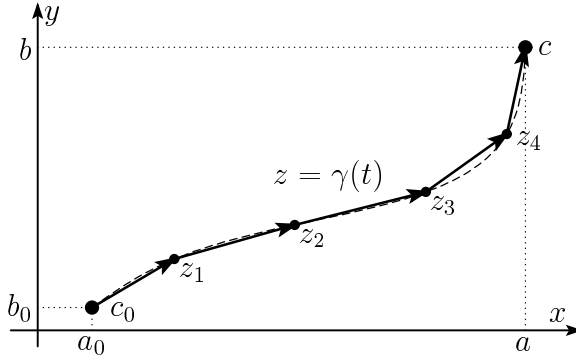


FIG. II.1: Chemin pour intégrale curviligne et un dessin de Riemann [Neuenschwander 1996]

L'idée est de placer sur la courbe une suite de points  $c_0 = z_0, z_1, \dots, z_n = c$  (Fig. II.1) et de poser

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \lim \left( f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \dots + f(z_{n-1})(z_n - z_{n-1}) \right) \quad (2.1)$$

où la limite est prise sur des subdivisions de plus en plus fines de la courbe. Supposons que la courbe soit déterminée par une application  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ , qui soit continûment différentiable par morceaux. Inspirés par  $z_k = \gamma(t_k)$ , pour lesquels  $z_{k+1} - z_k \approx \dot{\gamma}(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$  si  $t_{k+1} - t_k$  est suffisamment petit, l'expression de (2.1) devient une somme de Riemann. Ceci sert comme motivation de la définition suivante.

**Définition 2.1 (intégrale curviligne)** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  une courbe paramétrée qui est continûment différentiable par morceaux<sup>1</sup> et soit  $f(z)$  une fonction définie et continue sur le support  $\gamma([a, b])$  de la courbe. On définit alors l'intégrale curviligne comme

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt. \quad (2.2)$$

On doit maintenant montrer que cette intégrale curviligne est *bien définie*, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du choix de la paramétrisation de la courbe orientée.

**Théorème 2.2** Soient  $\gamma(t)$  et  $\delta(s)$  deux chemins équivalents (Définition 1.2) est soit  $\psi(t)$  strictement croissante. Alors on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz$$

De plus, l'intégrale curviligne est linéaire par rapport à  $f$  et satisfait

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

<sup>1</sup>Le chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  est différentiable par morceaux, s'il existe un partage  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$  tel que la restriction de  $\gamma(t)$  sur  $[a_{k-1}, a_k]$  est continûment différentiable pour tout  $k = 1, \dots, m$ . Dans cette situation, l'intégrale de (2.2) doit être interprétée comme la somme des intégrales sur les sous-intervalles.

**Démonstration.** Les deux chemins sont équivalents par  $\gamma(t) = \delta(\psi(t))$ . La substitution  $s = \psi(t)$ ,  $ds = \dot{\psi}(t) dt$  donne alors

$$\int_{\delta} f(z) dz = \int_c^d f(\delta(s)) \dot{\delta}(s) ds = \dots = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Les formules pour les chemins renversés et composés sont obtenues de la même manière.  $\square$

“Würde auch das Integral  $\int_{\partial B} (\zeta - c)^{-1} d\zeta$  verschwinden, so gäbe es keine Funktionentheorie!”  
(R. Remmert, *Funktionentheorie*, 1983)

**Exemple 2.3** Soit  $\gamma(t) = c + re^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$  une paramétrisation du cercle avec rayon  $r > 0$  centré au point  $c \in \mathbb{C}$ . Pour un entier  $n$ , on a

$$\int_{\gamma} (z - c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce résultat est obtenu par un calcul direct (la dernière égalité uniquement pour  $n \neq -1$ )

$$\int_{\gamma} (z - c)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n i r e^{it} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi}.$$

**Théorème 2.4** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin qui est continûment différentiable par morceaux et soit  $f(z)$  continue sur le support de  $\gamma$ , c.-à-d., sur  $\gamma([a, b])$ . Alors, on a

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma) \quad \text{où} \quad M = \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))|.$$

**Démonstration.** Si  $\gamma(t)$  est continûment différentiable, on a

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt \leq M \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = M \cdot L(\gamma).$$

Dans le cas où  $\gamma(t)$  est seulement continûment différentiable par morceaux, il faut appliquer ce raisonnement à chaque sous-intervalle où la fonction est continûment différentiable.  $\square$

## II.3 Existence des primitives

Le théorème fondamental du calcul différentiel dans  $\mathbb{R}$  exprime le fait que chaque fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possède une primitive  $F(x)$  et que  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Nous allons étudier si ce résultat reste vrai dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.1 (primitive)** Soient  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $U$ . Une fonction holomorphe  $F(z)$  s'appelle une *primitive* de  $f(z)$  si  $F'(z) = f(z)$  sur  $U$ .

**Théorème 3.2** Supposons qu'une fonction continue  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$  dans le domaine  $U \subset \mathbb{C}$ . Alors,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(c) - F(c_0) \quad (3.1)$$

pour chaque chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  pour lequel le point initial et le point final sont respectivement  $c_0$  et  $c$ , c.-à-d., pour lequel  $\gamma(a) = c_0$  et  $\gamma(b) = c$  (voir Fig. II.2).

En particulier, on a la condition nécessaire

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (3.2)$$

pour chaque chemin fermé, c.-à-d.,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

*Démonstration.* Si  $\gamma(t)$  est continûment différentiable, l'affirmation est une conséquence de

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = F(\gamma(t)) \Big|_a^b = F(c) - F(c_0).$$

Si  $\gamma(t)$  est seulement continûment différentiable par morceaux, il faut faire le même calcul pour chaque sous-intervalle et additionner les expressions.  $\square$

Ce théorème montre une énorme différence entre le calcul intégral dans  $\mathbb{R}$  et celui dans  $\mathcal{C}$ . Tandis que chaque fonction continue possède une primitive dans  $\mathbb{R}$ , ceci n'est pas vrai dans  $\mathcal{C}$ . Par exemple, la fonction continue  $f(z) = \bar{z}$  ne satisfait pas (3.2) et ne peut donc pas avoir une primitive (prendre le chemin fermé  $\gamma(t) = re^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ ). Même la fonction holomorphe  $f(z) = (z - c)^{-1}$  ne possède pas de primitive dans  $D_1(c) \setminus \{c\}$  (voir l'exemple 2.3).

Par contre, une fonction  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  avec rayon de convergence  $\rho > 0$  possède une primitive sur  $D_\rho(0)$ . Elle est donnée par

$$F(z) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} + a_3 \frac{z^4}{4} + \dots \quad (3.3)$$

(intégration terme par terme). Ceci est une conséquence du Théorème I.6.1.

Le théorème suivant montre que la condition (3.2) est aussi suffisante pour l'existence d'une primitive. Nous donnons la preuve si  $U$  est un *domaine étoilé*, c.-à-d., si  $U$  est ouvert et s'il existe un "centre"  $C \in U$  tel que pour tout  $z \in U$  le segment  $[C, z] := \{(1-t)C + tz; 0 \leq t \leq 1\}$  est entièrement dans  $U$  (voir Fig. II.2 à gauche).

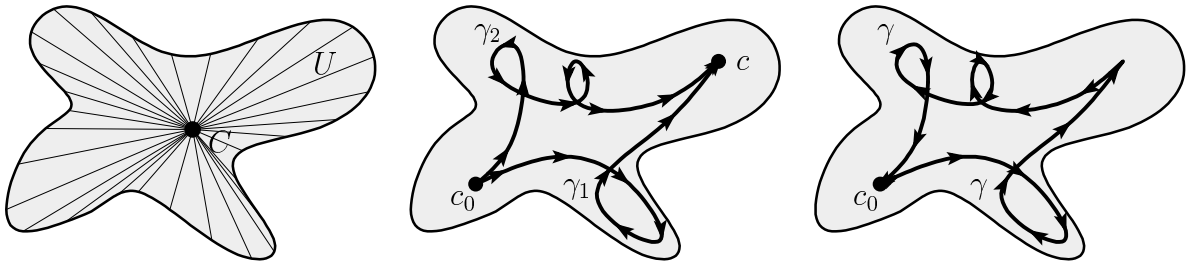


FIG. II.2: Domaine étoilé et illustration du Théorème 3.2

**Théorème 3.3 (critère d'intégrabilité)** Soit  $U$  un domaine étoilé de "centre"  $C$ . Supposons que  $f : U \rightarrow \mathcal{C}$  soit continue. Si pour chaque triangle  $\Delta$  ayant  $C$  comme sommet on a  $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$  ( $\partial\Delta$  étant le bord du triangle  $\Delta$ ), alors  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$  qui est donnée par

$$F(z) = \int_{[C,z]} f(\zeta) d\zeta \quad \text{pour } z \in U.$$

En particulier, on a (3.2) pour chaque chemin fermé dans  $U$ .

*Démonstration.* Comme  $U$  est un domaine étoilé, la fonction  $F(z)$  est bien définie. Fixons maintenant  $z_0 \in U$  et considérons  $z \in U$  proche de  $z_0$  tel que le triangle avec sommets  $C, z_0, z$  est entièrement dans  $U$ . L'intégrale sur le bord  $[C, z_0] + [z_0, z] - [C, z]$  de ce triangle est zéro. Par conséquent, on a

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta.$$

En écrivant  $f(\zeta) = f(z_0) + (f(\zeta) - f(z_0))$ , cette formule devient

$$F(z) = F(z_0) + f(z_0)(z - z_0) + \int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta,$$

dont l'intégrale peut être majorée par  $\max_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \cdot |z - z_0|$  (voir le Théorème 2.4). La fonction  $F(z)$  est donc  $\mathcal{C}$ -différentiable avec  $F'(z_0) = f(z_0)$ , car  $\max_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow z_0$  par la continuité de  $f(z)$ .  $\square$

## II.4 Théorème fondamental de Cauchy

Le but de ce paragraphe est de démontrer que chaque fonction holomorphe est intégrable, c.-à-d., possède une primitive. Jusqu'à maintenant nous savons seulement que les fonctions analytiques sont intégrables.

**Théorème 4.1 (lemme de Goursat)** Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe ( $\mathcal{C}$ -différentiable) dans un ouvert  $U \subset \mathcal{C}$ . Si  $\partial\Delta$  est le bord orienté d'un triangle  $\Delta \subset U$ , alors

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0. \quad (4.1)$$

*Démonstration.* (E. Goursat, *Acta Mathematica* 4, 1884; A. Pringsheim, *Trans. Amer. Math. Soc* 2, 1901). La preuve de Goursat s'appuie sur des rectangles. L'idée de Pringsheim est d'utiliser des triangles qui rend la preuve directement applicable à des domaines étoilés.

Soit alors  $\Delta$  un triangle et soit  $f$  holomorphe sur un voisinage de  $\Delta$  (voir Fig. II.3). Nous devons démontrer (4.1). À l'aide des centres de chacun des trois côtés, on découpe  $\Delta$  en 4 triangles semblables, mais deux fois plus petits. De ces 4 triangles, nous en choisissons un,  $\Delta_1$ , pour lequel l'intégrale (4.1) est maximale (en valeur absolue). Ensuite nous continuons de subdiviser  $\Delta_1$  de la même façon et arrivons à une suite  $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots$  avec

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \leq \dots \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \dots \quad (4.2)$$

L'intersection de cette suite contient un point  $z_0$ , car les  $\Delta_k$  sont compacts. Comme  $f(z)$  est  $\mathcal{C}$ -différentiable en  $z_0$ , nous avons  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \cdot (z - z_0)$  où  $r(z)$  est continue en  $z_0$  et  $r(z_0) = 0$ . Cette formule, insérée dans l'intégrale, donne

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz = f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0) dz + \int_{\partial\Delta_n} r(z) \cdot (z - z_0) dz. \quad (4.3)$$

Les deux premières intégrales sont nulles, car les fonctions 1 et  $(z - z_0)$  possèdent une primitive. Estimons encore la dernière: la continuité de  $r(z)$  en  $z_0$  signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|r(z)| < \varepsilon$  pour  $|z - z_0| < \delta$ . Prenons alors  $n$  assez grand pour que  $\Delta_n \subset D_\delta(z_0)$ .

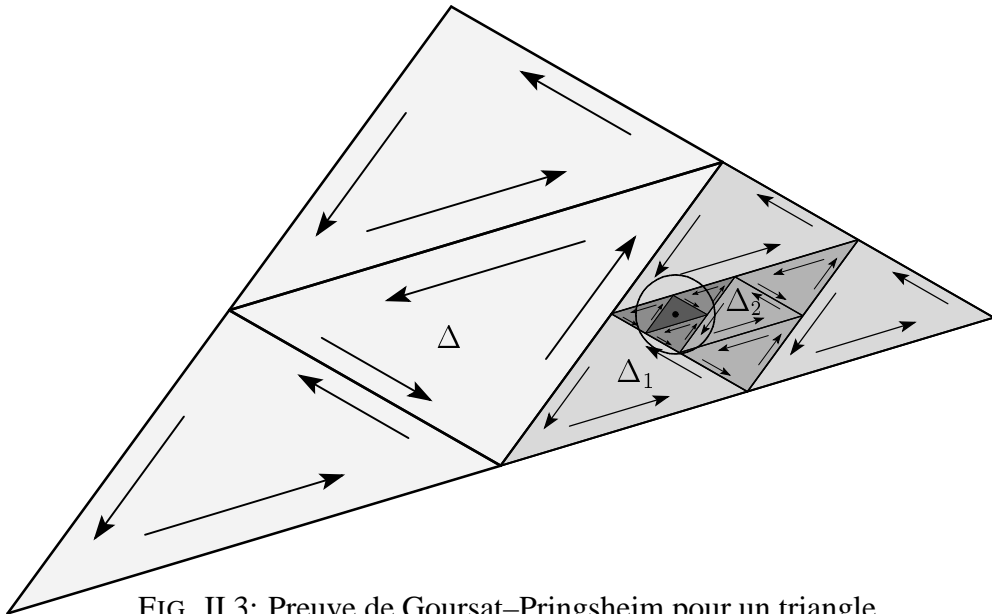


FIG. II.3: Preuve de Goursat–Pringsheim pour un triangle

Alors  $|z - z_0| \leq \text{Const} \cdot 2^{-n}$  et  $L(\partial\Delta_n) \leq \text{Const} \cdot 2^{-n}$ . On peut alors majorer la troisième intégrale de (4.3) à l'aide du Théorème 2.4 et avec l'estimation (4.2) on obtient

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \text{Const} \cdot 2^{-n} \cdot \text{Const} \cdot 2^{-n}. \quad (4.4)$$

Le  $\varepsilon$  étant arbitraire, cette intégrale doit être nulle.  $\square$

Nous sommes maintenant en position de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 4.2 (Cauchy 1825)** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un domaine étoilé avec centre  $C$ , et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $U$ . Alors,  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$ , donnée par

$$F(z) = \int_{[C,z]} f(\zeta) d\zeta \quad \text{pour } z \in U.$$

En particulier, on a  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$  pour chaque chemin fermé dans  $U$ .

*Démonstration.* L'affirmation est une conséquence immédiate du lemme de Goursat (Théorème 4.1) et du critère d'intégrabilité (Théorème 3.3).  $\square$

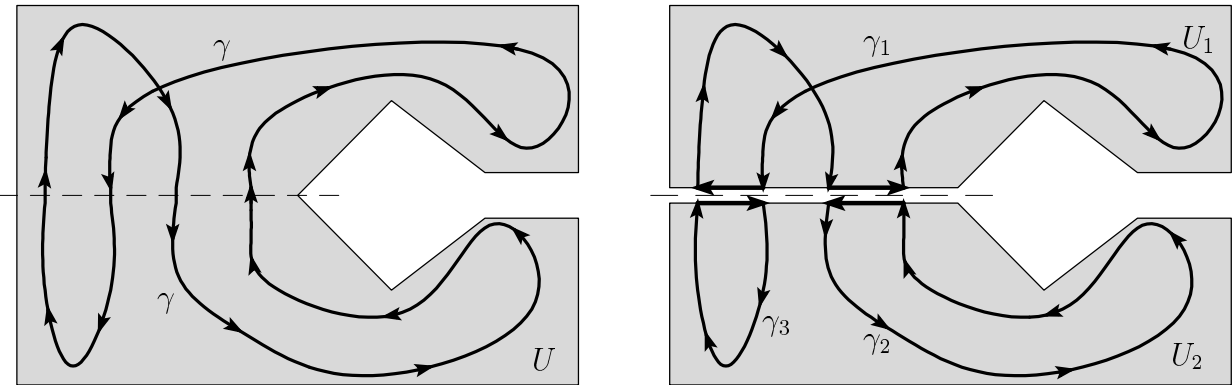


FIG. II.4: Couper un domaine non-étoilé en domaines étoilés

**Domaines plus généraux.** Le fait qu'une fonction holomorphe satisfait  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$  pour chaque chemin fermé (et donc l'existence d'une primitive) reste valable pour un domaine qui se laisse découper en un nombre fini de domaines étoilés (voir Fig. II.4). Il est néanmoins nécessaire que le chemin  $\gamma$  traverse chaque "ligne de coupe" dans chaque direction le même nombre de fois. Cela est vrai, si le domaine  $U$  est simplement connexe. Ainsi, l'intégrale sur  $\gamma$  se laisse décomposer (pour les chemins de la Fig. II.4) en

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (4.5)$$

car  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont chacun dans un domaine étoilé.

Remarquons encore que sans conditions sur l'ouvert  $U$ , l'énoncé du Théorème de Cauchy n'est pas correcte. Considérons par exemple la fonction  $f(z) = z^{-1}$  sur l'ensemble ouvert  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La fonction  $F(z) = \text{Log } z$  est une primitive sur le domaine étoilé  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  (plan complexe sans l'axe réel négatif) mais pas sur  $U$ . En effet, la condition nécessaire  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  n'est pas satisfaite pour le chemin  $\gamma(t) = e^{it}$  (cercle autour de l'origine).

**Exemple 4.3 (intégrales de Fresnel)** Comme première application du théorème de Cauchy, considérons

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3}$$

où le chemin  $\gamma$  se compose de trois parties: de 0 à  $R$  le long de l'axe réel, puis on monte verticalement, et retour sur la diagonale (voir la figure à droite; les courbes de niveau des parties réelle et imaginaire de  $f(z) = \exp(-z^2)$  sont aussi dessinées). L'intégrale sur  $\gamma_2$  est

$$I_2 = \int_0^R e^{-(R+it)^2} i dt = \int_0^R e^{-R^2+t^2} \cdot e^{-2iRt} i dt$$

donc

$$|I_2| \leq e^{-R^2} \int_0^R e^{t^2} dt \leq e^{-R^2} \int_0^R e^{Rt} dt = e^{-R^2} \frac{1}{R} (e^{R^2} - 1) \leq \frac{1}{R}.$$

Ainsi,  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0$ , et le Théorème de Cauchy nous donne  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_3$ . Du cours "Analyse I" nous savons que  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$  [HW, p. 346]. Ainsi nous arrivons à

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+i)^2 t^2} (1+i) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.6)$$

En partageant parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\int_0^{\infty} \cos 2t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin 2t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad (4.7)$$

et, à l'aide de substitutions,

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (4.8)$$

formules affirmées en [HW, p. 131] et démontrées de manière plus élégante qu'en [HW, p. 350].

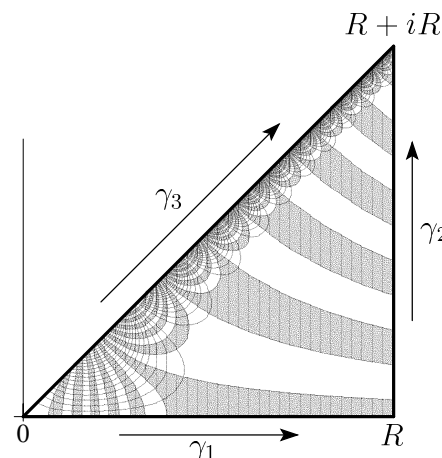
## II.5 Formule intégrale de Cauchy

"La plus belle création de Cauchy, et l'une des plus belles créations mathématiques de tous les temps ..."

(Georges de Rham, Discours d'Installation, Lausanne 1943)

La Révolution de juillet 1830 entraîne la chute de la dynastie des Bourbons. Cauchy, royaliste et ultracatholique, quitte Paris, laissant femme et enfants, et s'exile à Fribourg. Là, il cherche à fonder une académie catholique et part pour l'Italie, où il pense trouver le soutien des souverains réactionnaires. Finalement, soutenu par les jésuites, on lui offre à Turin une chaire de "physique supérieure". Son enseignement "était de toute confusion, passant tout d'un coup d'une idée, d'une formule à une autre, sans trouver le chemin de la transition. Son enseignement était un nuage obscur parfois illuminé par des éclairs de génie; mais il était fatigant pour des jeunes élèves, aussi, bien peu purent le suivre jusqu'au bout et de trente qu'ils étaient au début du cours, il restait un seul dernier sur la brèche" (voir *Belhoste*, p. 130).

À Turin, Cauchy découvre sa célèbre formule. Sa première publication est dans un article intitulé *Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites*, lu à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. La formule est devenue plus accessible en 1841 quand Cauchy la publie dans le tome 2 de ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique*.



**Théorème 5.1 (formule intégrale de Cauchy 1831)** Soit  $U$  un domaine étoilé et  $\gamma$  une courbe fermée parcourant  $\partial U$  dans le sens positif. Soit  $f(z)$  holomorphe dans un voisinage de l'adhérence  $\overline{U} = U \cup \partial U$ . Alors pour tout  $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5.1)$$

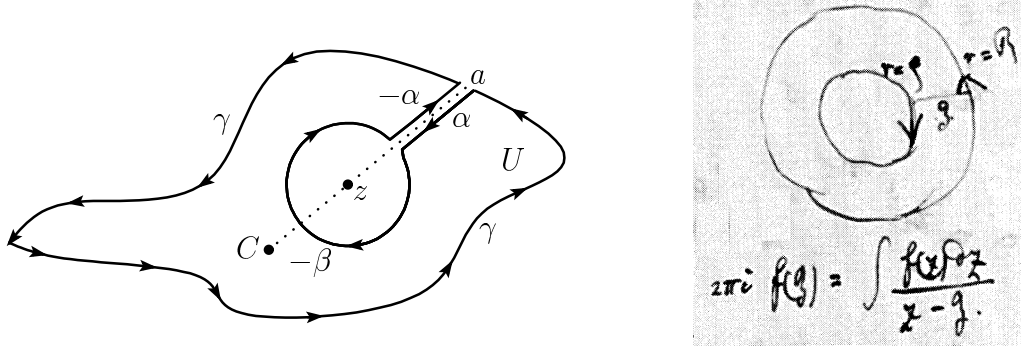


FIG. II.5: Chemin  $\gamma^*$  pour la preuve de la formule de Cauchy (à droite: manuscrit de Riemann, [Neuenschwander 1996, p. 120])

*Démonstration.* On fixe un  $z \in U$ . La fonction  $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$  dans l'intégrale (5.1) est holomorphe partout en  $U$ , sauf en  $\zeta = z$ . On doit donc ôter ce point "chirurgicalement". Soit  $C$  le "centre" du domaine étoilé  $U$  (voir Fig. II.2), et soit  $a$  la projection de  $z$  à partir de  $C$  sur le bord de  $U$  voir Fig. II.5 (si  $z = C$  on choisit pour  $a$  un point arbitraire de  $\partial U$ ). Le domaine  $U^* = U \setminus [z, a]$  est donc étoilé (pour le même centre  $C$ ).

La continuité en  $z$  de la fonction  $f(\zeta)$  implique que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|f(\zeta) - f(z)| \leq \varepsilon$  pour  $|\zeta - z| \leq \delta$ . Notons  $\beta$  le cercle centré en  $z$  de rayon  $\delta$ . Nous allons démontrer que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{\beta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \mathcal{O}(\varepsilon) = f(z) \cdot 2\pi i + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.2)$$

Pour montrer la première égalité dans (5.2), nous prenons le chemin  $\gamma^* = \gamma + \alpha - \beta - \alpha$  dans  $U^*$  (Fig. II.5) et appliquons le Théorème 4.2 pour le chemin  $\gamma^*$ . Cela donne le résultat désiré, car les intégrales sur  $+\alpha$  et  $-\alpha$  s'annulent.

La deuxième égalité de (5.2) résulte du fait que  $f(z)$  est continue. Nous estimons la différence

$$\left| \int_{\beta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \max_{|\zeta - z| = \delta} |f(\zeta) - f(z)| \cdot \max_{|\zeta - z| = \delta} \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| \cdot L(\beta) \leq \varepsilon \frac{1}{\delta} 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon. \quad (5.3)$$

La dernière égalité dans (5.2) suit d'un calcul direct comme dans l'Exemple 2.3. La formule (5.2) est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ . On obtient donc l'affirmation (5.1) en considérant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Le pouvoir extraordinaire de la formule de Cauchy (5.1) réside dans le fait que la variable  $z$  à gauche se retrouve à droite dans la simple forme  $(\zeta - z)^{-1}$ ; toutes les belles propriétés de cette dernière fonction se transmettent, à travers l'intégrale, à n'importe quelle fonction holomorphe. Elle va nous donner une suite de conséquences surprenantes.

**Propriété de la moyenne.** En prenant comme  $U$  un disque de rayon  $r > 0$  avec centre  $c$  et  $\gamma(t) = c + re^{it}$  avec  $0 \leq t \leq 2\pi$ , la formule de Cauchy donne

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) dt \quad (5.4)$$

si  $f(z)$  est holomorphe dans un voisinage de  $D_r(c)$ . Ceci signifie que la valeur  $f(c)$  au milieu du disque est la moyenne des valeurs de  $f(z)$  sur le bord du disque.

## II.6 Dérivées supérieures d'une fonction holomorphe

L'application la plus spectaculaire de la formule de Cauchy est le résultat suivant qui montre que chaque fonction holomorphe (c.-à-d.,  $\mathcal{C}$ -différentiable) est infiniment  $\mathcal{C}$ -différentiable et peut être représentée par une série avec rayon de convergence positif.

**Théorème 6.1 (Théorème de Cauchy–Taylor)** *Soit  $f(z)$  holomorphe dans un ouvert  $U$ . Alors pour tout  $c \in U$  la fonction  $f(z)$  possède un développement en série*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + a_3(z - c)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k \quad (6.1)$$

avec coefficients donnés par

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}} d\zeta. \quad (6.2)$$

Le chemin dans cette intégrale est  $\gamma(t) = c + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  où  $0 < r < \rho$  et  $\rho > 0$  est tel que  $D_\rho(c) \subset U$ . La série (6.1) possède un rayon de convergence  $\geq \rho$  ( $\rho$  est la plus petite distance entre  $c$  et le bord  $\partial U$ ) et elle représente  $f(z)$  dans le disque  $D_\rho(c)$ .

*Démonstration.* On utilise l'identité  $(1 - q)^{-1} = 1 + q + \dots + q^k + q^{k+1}/(1 - q)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c} \left( \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\zeta-c}} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta - c} + \frac{z - c}{(\zeta - c)^2} + \dots + \frac{(z - c)^k}{(\zeta - c)^{k+1}} + \frac{(z - c)^{k+1}}{(\zeta - c)^{k+1}(\zeta - z)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Insérée dans la formule de Cauchy (5.1), ceci donne

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + \dots + a_k(z - c)^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{z - c}{\zeta - c} \right)^{k+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.4)$$

Pour démontrer le théorème, il faut voir que le reste de la série dans (6.4), qu'on dénote par  $R_k(z)$ , converge vers zéro pour tout  $z \in D_\rho(c)$ . Fixons un tel  $z$  et choisissons  $r > 0$  et  $\theta < 1$  tels que  $|z - c| \leq \theta r < r < \rho$ . Alors pour tout  $\zeta \in \gamma$  on a  $|z - c| \leq \theta |\zeta - c|$ . Avec  $M$ , une borne supérieure de  $f(z)$  sur la courbe  $\gamma$ , et l'inégalité  $|\zeta - z| \geq |\zeta - c| - |z - c| \geq (1 - \theta)r$  pour  $\zeta \in \gamma$ , l'estimation du Théorème 2.4 donne

$$|R_k(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\theta^{k+1} \cdot M \cdot L(\gamma)}{(1 - \theta)r} \quad (6.5)$$

où  $L(\gamma) = 2r\pi$  est la longueur de la courbe. Ce terme tend donc vers zéro si  $k \rightarrow \infty$  et la série converge vers  $f(z)$ .  $\square$

En comparant la série (6.1) avec la série de Taylor du Théorème I.6.3 on obtient une formule intégrale pour les dérivées d'une fonction holomorphe.

**Corollaire 6.2 (formule de Cauchy pour la dérivée)** *Sous les hypothèses du Théorème 6.1 on a*

$$f^{(k)}(c) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - c)^{k+1}} dz. \quad (6.6)$$

Le théorème de Cauchy–Taylor est la dernière pièce dans une théorie qui nous permet de démontrer l'équivalence de trois propriétés fondamentales.



**Théorème 6.3** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ensemble ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

- $f(z)$  est holomorphe dans  $U$ , c.-à-d.,  $\mathbb{C}$ -différentiable dans  $U$ ,
- $f(z)$  est analytique dans  $U$ , c.-à-d., pour tout  $c \in U$  la fonction  $f(z)$  peut être développée en une série convergente dans une disque  $D_\rho(c)$  avec  $\rho > 0$ ,
- $f(z)$  est localement intégrable, c.-à-d., pour tout  $c \in U$  il existe un voisinage où  $f(z)$  possède une primitive.

Si  $U$  est un domaine étoilé, on peut supprimer le mot “localement” dans la troisième propriété, c.-à-d.,  $f(z)$  possède une primitive sur tout  $U$ .

*Démonstration.* Ce théorème est un résumé des résultats déjà démontrés (voir Fig. II.6). Pour la preuve de “intégrable implique analytique” on applique le Théorème 6.1 au primitive  $F(z)$  de  $f(z)$ .  $\square$

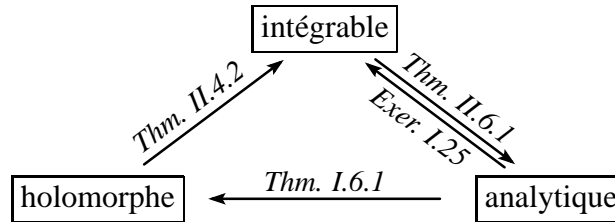


FIG. II.6: Équivalence de trois propriétés fondamentales

## II.7 Théorème fondamental de l'algèbre

Ce théorème affirme que chaque polynôme de degré  $n > 0$  possède au moins une (et, après division, exactement  $n$ ) racine(s) dans  $\mathbb{C}$ . Suite à la *Géométrie* de Descartes (1638), ce théorème a été chaudement discuté pendant des siècles. Plusieurs applications (intégration de fonctions rationnelles (Joh. Bernoulli 1702), équations différentielles à coefficients constants (Euler 1743), valeurs propres (Lagrange 1770)) ont toujours réactualisé le problème et conduit à plusieurs tentatives de démonstration. Finalement, Gauss (1799) a consacré toute sa thèse à 4 démonstrations de ce “Grundlehrsatz”. Une revue sur une centaine de démonstrations (correctes et fausses) à travers l’histoire par E. Netto et R. Le Vavasœur se trouve dans *Encycl. des Sc. Mathématiques* T. I, vol. 2, p. 189–205, et vaut la peine d’être consultée.

La démonstration est basée sur les inégalités de Cauchy et sur le Théorème de Liouville, qui sont des conséquences simples de la formule (6.6). Le fait que le théorème fondamental de l’algèbre devienne ici un “jeu d’enfants” de quelques lignes, nous montre une fois de plus la puissance de la théorie que nous venons de découvrir.

**Théorème 7.1 (inégalités de Cauchy)** Soit  $f(z)$  holomorphe dans le disque  $D_\rho(c)$ . Avec la notation  $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$  on a pour  $0 < r < \rho$  l’estimation

$$|f^{(k)}(c)| \leq \frac{k! \cdot M(r)}{r^k}. \quad (7.1)$$

*Démonstration.* On obtient ces estimations en appliquant l’estimation “standard” du Théorème 2.4 à l’intégrale dans (6.6) et en utilisant  $L(\gamma) = 2\pi r$  pour le cercle de rayon  $r$ .  $\square$

Le Théorème de Liouville est devenu célèbre après la publication de “Leçons ... faites en 1847 par M. J. Liouville” dans le *Crelle Journal* **88**, (1879), p. 277, par C.W. Borchardt. Cependant le théorème avait déjà été publié en 1844 par Cauchy.

On appelle une fonction  $f(z)$  *entière* si elle est holomorphe sur tout le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Des exemples sont les polynômes, les fonctions  $\exp(z)$ ,  $\cos(z)$ ,  $\sin(z)$ .

**Théorème 7.2 (Théorème de Liouville)** *Chaque fonction entière et bornée est constante.*

*Démonstration.* Par le Théorème de Cauchy–Taylor une fonction entière  $f(z)$  peut être écrite sous la forme d’une série  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  avec coefficients  $a_k$  donnés par (6.2). Comme  $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ , l’inégalité de Cauchy (Théorème 7.1) implique que

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

pour tout  $r > 0$ . Si on fait tendre  $r \rightarrow \infty$  (par hypothèse  $M(r)$  est majorée par  $M_0$  indépendant de  $r$ ), on arrive à  $a_k = 0$  pour  $k \geq 1$ .  $\square$

La même preuve montre aussi que si une fonction entière satisfait  $|f(z)| \leq \text{Const} \cdot |z|^n$  pour  $|z| \rightarrow \infty$  (donc  $M(r) \leq \text{Const} \cdot r^n$ ), alors la fonction est un polynôme de degré au plus  $n$ .

**Théorème 7.3 (Théorème Fondamental de l’Algèbre)** *Pour chaque polynôme*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{C} \text{ et } a_n \neq 0 \quad (7.2)$$

*il existe un  $z \in \mathbb{C}$  avec  $p(z) = 0$ .*

*Démonstration.* L’inégalité de triangle appliquée à  $a_n z^n = p(z) - a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_0$  donne

$$|p(z)| \geq r^n \cdot \left( |a_n| - \left( \frac{|a_{n-1}|}{r} + \dots + \frac{|a_0|}{r^n} \right) \right) \quad \text{pour } |z| = r. \quad (7.3)$$

Ceci implique l’existence d’un  $r_0 > 0$  tel que  $|p(z)| \geq r^n |a_n|/2$  pour  $|z| = r \geq r_0$ .

La démonstration du théorème est par l’absurde. Supposons que  $p(z)$  n’ait pas de racine dans  $\mathbb{C}$ . La fonction  $f(z) := 1/p(z)$  serait donc entière. La minoration précédente de  $p(z)$  montre alors que

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|a_n| r^n} \quad \text{pour } |z| = r \geq r_0. \quad (7.4)$$

Par compacité de  $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq r_0\}$ , la fonction  $f(z)$  est donc bornée partout (cf. [HW, p. 289]). Cela contredit le Théorème de Liouville, car  $f(z)$  n’est pas constante.  $\square$

Si  $z_1$  est une racine de  $p(z) = 0$ , on peut diviser  $p(z)$  par  $(z - z_1)$  (algorithme d’Euclide) et on obtient  $p(z) = (z - z_1)q(z)$  où  $q(z)$  est un polynôme de degré  $n - 1$ . En appliquant itérativement le Théorème 7.3 on arrive finalement à une factorisation  $p(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ .

## II.8 Principe du maximum

On doit ce théorème à Riemann [1851, p. 22] pour les fonctions harmoniques. D’après [Remmert 1991, p. 259], l’auteur de ce résultat important, pour le cas des fonctions holomorphes, est inconnu. Les premières traces semblent être un article de Schottky (1892) et de Carathéodory (1912).

**Lemme 8.1** *Soit  $f(z)$  holomorphe dans un ouvert  $U$ , continue dans  $\overline{U}$ . Si un point  $c \in U$  est un maximum local de  $|f(z)|$ , alors  $f(z)$  est constante dans un voisinage de  $c$ .*

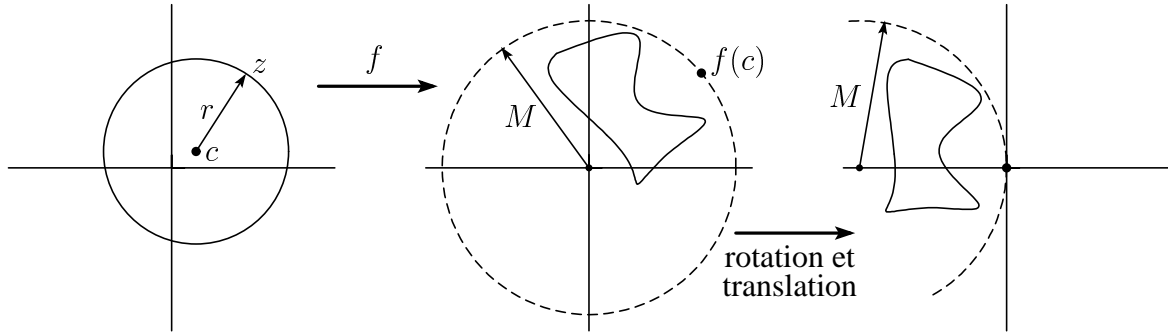


FIG. II.7: Démonstration du Lemme 8.1

*Démonstration.* Si  $f(c) = 0$ , le lemme est évident. Sinon, posons  $M = |f(c)|$ . D'après l'hypothèse, il existe  $r > 0$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour  $z = c + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Regardons l'image de cette courbe placée dans le disque fermé  $\overline{D}_M(0)$ . Avec une rotation par l'angle  $-\alpha = -\arg f(c)$  suivie d'une translation par  $-|f(c)|$ , nous ramenons le point  $f(c)$  sur l'axe réel et ensuite à l'origine. Après cette transformation la courbe est donnée par  $g(t) = e^{-i\alpha} f(c + re^{it}) - |f(c)|$  ou  $g(t) = e^{-i\alpha} (f(c + re^{it}) - f(c))$ . Par la propriété de la moyenne (formule (5.4)) nous avons

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0. \quad (8.1)$$

La courbe  $g(t)$  étant dans  $D_M(-M)$ , nous avons  $\operatorname{Re} g(t) < 0$  sauf si  $g(t) = 0$ . La continuité de  $g(t)$  et (8.1) impliquent que  $\operatorname{Re} g(t) = 0$  pour tout  $t$  (cf. [HW, p. 233, exercice 5.5]). Mais le seul point, où le cercle en question touche l'axe imaginaire, est 0. Ainsi  $g(t) = 0$  pour  $t \in [0, 2\pi]$  et  $f(z)$  est constante sur le bord de  $D_r(c)$ . Le facteur  $f(\zeta)$  peut donc sortir de l'intégrale (5.1), ce qui entraîne que  $f(z)$  est constante partout dans ce cercle.  $\square$

Rappelons qu'un ensemble  $U \subset \mathcal{C}$  s'appelle *connexe* (plus précisément *connexe par arcs*) si pour deux points arbitraires  $a, b \in U$  il existe un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  dans  $U$  avec  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

**Théorème 8.2 (Principe du Maximum, Fonctions Holomorphes)** Soit  $U$  un ensemble ouvert, borné et connexe, et soit  $f(z)$  holomorphe dans  $U$  et continue dans  $\overline{U}$ . Si  $|f(z)| \leq M$  pour  $z \in \partial U$ , alors

$$|f(z)| < M \quad \text{pour tout } z \in U \quad (8.2)$$

sauf si  $f(z) = \text{Const}$  dans  $U$ .

*Démonstration.* Soit  $M' = \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ . Si les seuls points maximaux sont sur  $\partial U$ , alors  $M' \leq M$  et les autres points satisfont (8.2). Sinon, il existe  $c \in U$  (notons que  $U$  est ouvert et donc  $c \notin \partial U$ ) avec  $|f(c)| = M'$ . Le clou de la démonstration consiste à regarder l'ensemble  $E = \{z \in U; f(z) = f(c)\}$ , qui est non vide (car  $c \in E$ ), fermé dans  $U$  (Théorème de Hausdorff [HW97, p. 295]), et ouvert (Lemme 8.1).

Pour montrer que  $E = U$ , ce qui complète la démonstration par la continuité de  $f(z)$  sur  $\overline{U}$ , nous prenons un point  $b \in U$  et un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  qui relie  $c$  avec  $b$  (ce chemin existe car  $U$  est connexe). Considérons le nombre  $t_0 := \sup\{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in E\}$ . Il existe car  $\gamma(0) = a \in E$ , on a  $\gamma(t_0) \in E$  car  $E$  est fermé, et  $t_0$  ne peut pas être plus petit que 1 car  $E$  est ouvert. Par conséquent  $t_0 = 1$  et on a  $b = \gamma(1) \in E$ .  $\square$

Dans les démonstrations du Lemme 8.1 et du Théorème 8.2 on n'a pas vraiment utilisé l'holomorphie de  $f(z)$ . On a seulement utilisé la propriété de la moyenne (qui est satisfaite par les fonctions holomorphes, mais aussi par leurs parties réelles et imaginaires).

Rappelons qu'une fonction réelle  $u(x, y)$  s'appelle *harmonique* (voir le Théorème I.4.3) si elle est deux fois continûment  $\mathbb{R}$ -différentiable et si  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

**Théorème 8.3 (Principe du Maximum, Fonctions Harmoniques)** *Soit  $U$  un ensemble ouvert, borné et connexe, et soit  $u(x, y)$  harmonique dans  $U$  et continue dans  $\overline{U}$ . Si  $N \leq u(x, y) \leq M$  pour  $(x, y) \in \partial U$ , alors*

$$N < u(x, y) < M \quad \text{pour tout } (x, y) \in U \quad (8.3)$$

sauf si  $u(x, y) = \text{Const}$  dans  $U$ .

*Démonstration.* Par le Lemme 8.4, la fonction harmonique  $u(x, y)$  est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. Donc, elle satisfait la propriété de la moyenne. Avec cette observation les démonstrations deviennent identiques à celles du Lemme 8.1 et du Théorème 8.2. Comme la fonction  $u(x, y)$  est réelle, on n'est pas obligé de travailler avec la valeur absolue et on obtient les majorations dans les deux directions.  $\square$

**Lemme 8.4** *Une fonction qui est harmonique sur un domaine  $U \subset \mathbb{C}$ , est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. En conséquence, chaque fonction harmonique est infiniment différentiable.*

*Démonstration.* Soit  $u(x, y)$  deux fois continûment différentiable satisfaisant  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  sur  $U$ . On vérifie facilement que la fonction

$$f(z) = f(x + iy) := u_x(x, y) - iu_y(x, y) \quad (8.4)$$

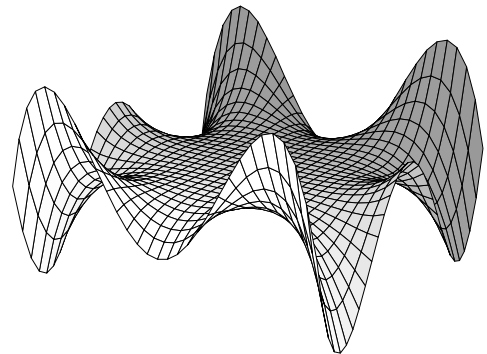
satisfait les équations de Cauchy–Riemann ( $(u_x)_x = (-u_y)_y$  et  $(-u_y)_x = -(u_x)_y$ ). Elle est donc holomorphe par le Corollaire I.3.3, et localement intégrable par le Théorème 4.2 de Cauchy. Dans un disque autour d'un point fixé  $c = a + ib$  il existe alors une primitive  $F(z)$  qui est donnée par  $F(z) = F(c) + \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$  où  $\gamma$  est une courbe arbitraire dans le disque qui relie  $c$  avec  $z$ . Prenons comme  $\gamma$  le chemin composé par les segments  $[a + ib, x + ib]$  et  $[x + ib, x + iy]$ . On a donc

$$\begin{aligned} F(z) &= F(c) + \int_a^x (u_x(t, b) - iu_y(t, b)) dt + \int_b^y (u_x(x, t) - iu_y(x, t)) i dt \\ &= F(c) + u(x, b) - u(a, b) + u(x, y) - u(x, b) + i \left( \int_b^y u_x(x, t) dt - \int_a^x u_y(t, b) dt \right) \end{aligned}$$

et on voit qu'avec le choix  $F(c) = u(a, b)$  de la constante d'intégration, la fonction  $u(x, y)$  est la partie réelle de la fonction holomorphe  $F(z)$ .  $\square$

*Remarque (interprétation physique des fonctions harmoniques).* Considérons une membrane élastique attachée à un fil de fer (courbe fermée dans  $\mathbb{R}^3$ ). La surface de la membrane est décrite par une fonction harmonique  $u(x, y)$  dans  $U \subset \mathbb{R}^2$  qui pour  $(x, y) \in \partial U$  décrit la courbe du fil de fer. Cette interprétation nous permet de bien comprendre le principe du maximum.

Le dessin de droite montre la partie réelle de la fonction holomorphe  $f(z) = z^6$  au-dessus du carré  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ .



## II.9 Prolongement analytique et théorème de l'image ouverte

Le théorème d'unicité, posé comme "Exercice" par Abel dans le *Crelle Journal*, vol. 2, p. 286, a été postulé pour les fonctions holomorphes sans preuve rigoureuse par Riemann [1851, p. 28]. La démonstration facile suivante démontre, une fois de plus, la grande utilité des séries entières.

**Théorème 9.1 (unicité)** Soient  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  deux fonctions holomorphes dans un ouvert  $U$  et soit  $f_1(z_j) = f_2(z_j)$  pour une suite  $z_1, z_2, z_3, \dots$ , qui converge vers  $c \in U$  et qui satisfait  $z_j \neq c$  pour tout  $j$ . Alors, il existe  $\rho > 0$  tel que  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  sont identiques dans le disque  $D_\rho(c)$ .

*Démonstration.* D'après le Théorème 6.1, les deux fonctions sont analytiques dans un voisinage de  $c$ . Après une translation, nous supposons que  $c = 0$  et nous considérons la différence

$$f_1(z) - f_2(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \quad (9.1)$$

Nous devons démontrer que  $a_k = 0$  pour tout  $k$ . Supposons, par l'absurde, que ceci n'est pas vrai et soit  $a_k$  le premier coefficient non nul. Alors

$$f_1(z) - f_2(z) = z^k \cdot g(z) \quad \text{où} \quad g(z) = a_k + a_{k+1}z + a_{k+2}z^2 + a_{k+3}z^3 + \dots \quad (9.2)$$

On voit que  $g(0) \neq 0$ . Comme  $g(z)$  est continue, il existe un voisinage de 0 où  $g(z) \neq 0$ . Ceci est une contradiction, car la suite  $\{z_j\}$  converge vers  $c = 0$  et  $g(z_j) = 0$  pour tout  $j$ .  $\square$

Le *prolongement analytique* est un principe, "vu" par Riemann, qui est devenu un point central de la théorie de Weierstrass. Il permet, entre autres, d'étendre le théorème de l'unicité à tout le domaine  $U$ .

**Théorème 9.2 (prolongement analytique)** Soient  $f_1(z)$  holomorphe dans l'ouvert  $U_1$  et  $f_2(z)$  holomorphe dans l'ouvert  $U_2$ . Si l'intersection  $U_1 \cap U_2$  est connexe et si  $f_1(z) = f_2(z)$  dans un disque  $D_\rho(c) \subset U_1 \cap U_2$ , alors (voir Fig. II.8)

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in U_1 \cap U_2. \quad (9.3)$$

*Démonstration.* Soit  $b$  un point quelconque de  $U_1 \cap U_2$ . Par connexité, il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$  reliant  $c$  avec  $b$ , c.-à-d.,  $\gamma(0) = c$  et  $\gamma(1) = b$ . Comme dans la démonstration du Théorème 8.2 nous posons  $t_0 := \sup\{t \in [0, 1] ; f_1(\gamma(s)) = f_2(\gamma(s)) \text{ pour } s \in [0, t]\}$ . Un tel  $t_0 > 0$  existe car  $f_1(z) = f_2(z)$  sur  $D_\rho(c)$ . La continuité de  $f_1(z) - f_2(z)$  implique  $f_1(\gamma(t_0)) = f_2(\gamma(t_0))$ , et grâce au Théorème 9.1 le nombre  $t_0$  ne peut pas être plus petit que 1. Par conséquent,  $t_0 = 1$  et on a  $f_1(b) = f_2(b)$ .  $\square$

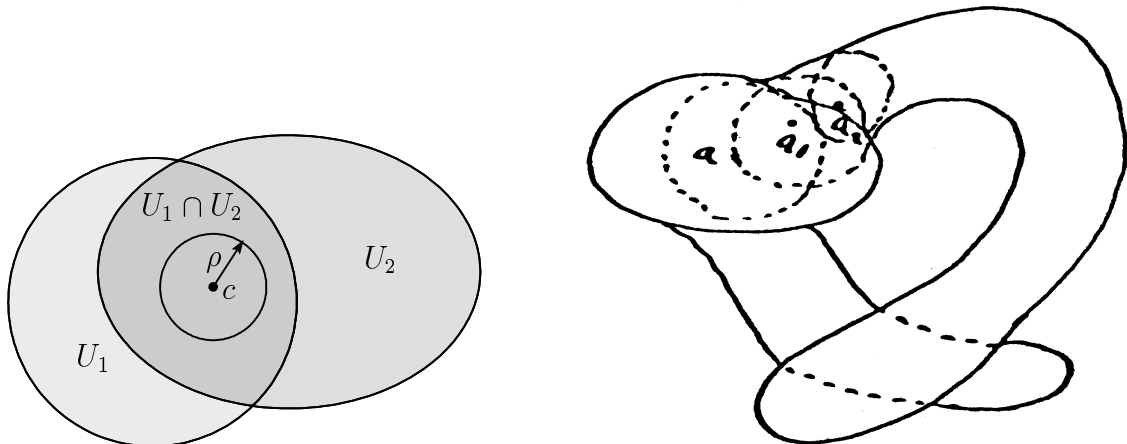


FIG. II.8: Prolongement analytique; à droite une illustration du cours de Riemann

Une situation typique du prolongement analytique est la suivante: soit  $f(z)$  donnée par une série dans un disque  $D_\rho(0)$ ; par exemple,  $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ . Nous prenons un point  $c \in D_\rho(0)$  et nous considérons la série de Taylor de  $f(z)$  développée autour de ce point (voir le Théorème I.6.3). La série  $f(z) = c_0 + c_1(z - c) + c_2(z - c)^2 + \dots$  ainsi obtenue converge certainement pour  $|z - c| < \rho - |c|$ . Mais, il est possible que le rayon de convergence de la nouvelle série soit plus grand que  $\rho - |c|$  et converge donc dans un domaine plus grand. Pour la fonction de notre exemple et avec  $c = -0.9$ , la nouvelle série possède un rayon de convergence  $\rho = 1.9$ .

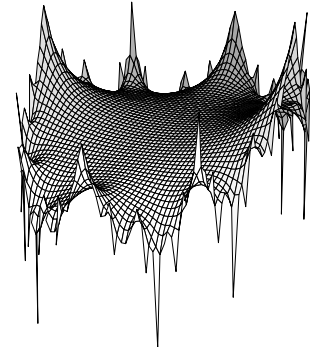
La fonction  $f(z)$  a été *prolongée en dehors* du disque initial, et ceci *de manière unique*. Ce procédé peut être répété plusieurs fois et permet de remplir un domaine de plus en plus grand, jusqu'à arriver, éventuellement, à un bord naturel. L'unicité est garantie seulement si l'intersection du domaine  $U_1$  où la fonction est déjà définie avec le nouveau disque est connexe (un contre-exemple est le logarithme après un contour de l'origine). Voir la Fig. II.8 pour un dessin historique illustrant ce phénomène.

**Exemple 9.3 (fonction sans prolongement)** Il existe des fonctions qui convergent dans un disque et qui ne permettent aucun prolongement en dehors de ce disque. L'exemple le plus simple est

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} \quad (9.4)$$

ayant un rayon de convergence  $\rho = 1$ . Évalué en  $re^{i\varphi}$  avec  $r < 1$  proche de 1, cette série donne pour la partie réelle (la figure montre la partie réelle au-dessus du disque  $D_1(0)$ )

$$\begin{aligned} \varphi = 0 : & \quad r + r^2 + r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \\ \varphi = \pi : & \quad -r + r^2 + r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} : & \quad 0 - r^2 + r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} : & \quad r/\sqrt{2} + 0 - r^4 + r^8 + r^{16} + \dots \end{aligned}$$



etc. À part un nombre fini de termes, la série devient  $g(r) = \sum_{k \geq n} r^{2^k}$  et pour  $r < 1$  on a  $g(r) = r^{2^n} + g(r^2)$ . Cette relation montre que la limite  $\lim_{r \rightarrow 1} g(r)$  ne peut pas être finie et on ne peut donc pas prolonger la fonction  $f(z)$  en dehors du disque  $D_1(0)$ . Il paraît paradoxal que surtout les séries convergeant très vite ont cette propriété.

Le théorème suivant montre que pour une fonction holomorphe l'image d'un ensemble ouvert est ouvert (on dit que l'application est ouverte). Cette propriété topologique a été découverte dans un cadre plus général par L.E.J. Brouwer dans les années 1910, et démontrée de façon élémentaire par Stoilow (1938) et H. Cartan.

Pour mieux comprendre cette propriété, étudions d'abord la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la Fig. II.9 (voir aussi [HW, p. 295]) qui est infiniment  $\mathbb{R}$ -différentiable mais pas holomorphe. Près de chaque point  $z_1 = (x_1, y_1)$  où la matrice jacobienne est inversible, l'application  $f$  est un difféomorphisme local. Par conséquent, pour tout voisinage  $V$  de  $z_1$  l'image  $f(V)$  est un voisinage de  $f(z_1)$ . Examinons alors les points où la matrice jacobienne est singulière : ces points forment une courbe<sup>2</sup>, le long de laquelle cette application forme un "pli". Si on choisit un point  $z_0$  sur cette courbe, l'image d'un disque  $U$  centré en  $z_0$  sera plié à cet endroit, et ne sera *pas ouverte*.

<sup>2</sup>Pour l'exemple de la Fig. II.9 cette courbe est donnée par la formule  $x = (4y^3 - 48y^2 - 6y + 11)/(24y^2 - 12)$

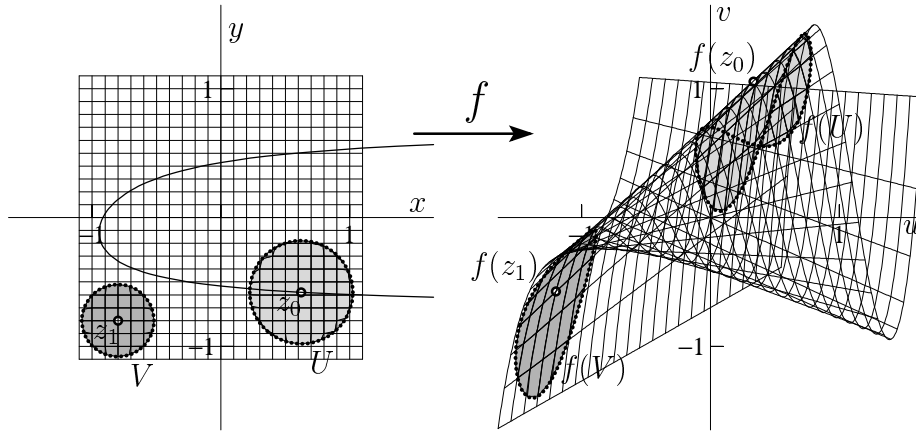


FIG. II.9: Contre-exemple :  $u = x + \frac{y}{2}$ ,  $v = (x+2)y^3 - \frac{3}{2}(x+1)y + \frac{x}{4}$

**Théorème 9.4 (théorème de l'image ouverte)** Soit  $U$  un ouvert et  $f(z)$  une fonction holomorphe qui est nulle part localement constante. Alors pour chaque ouvert  $V \subset U$  l'image  $f(V)$  est ouverte (on dit que  $f$  est une “application ouverte”).

*Démonstration.* Soit  $V \subset U$  et  $z_1 \in V$  un point avec  $f'(z_1) \neq 0$ . La fonction est localement biholomorphe près de  $z_1$  (Corollaire I.7.7) et par conséquent  $f(z_1)$  est un point intérieur de  $f(V)$ .

Il reste à considérer les points  $z_0 \in V$  avec  $f'(z_0) = 0$ . Par le Théorème 9.1 ces points sont *isolés*, car  $f(z)$  n'est pas localement constante. Dans un voisinage d'un tel point, la fonction  $f(z)$  s'enroule, similairement à la fonction  $z^k$ , que nous avons étudié dans le Chapitre I (voir Fig. I.5). L'ensemble  $f(V)$  contourne totalement le point  $f(z_0)$  (voir Fig. II.10) et est donc ouvert.

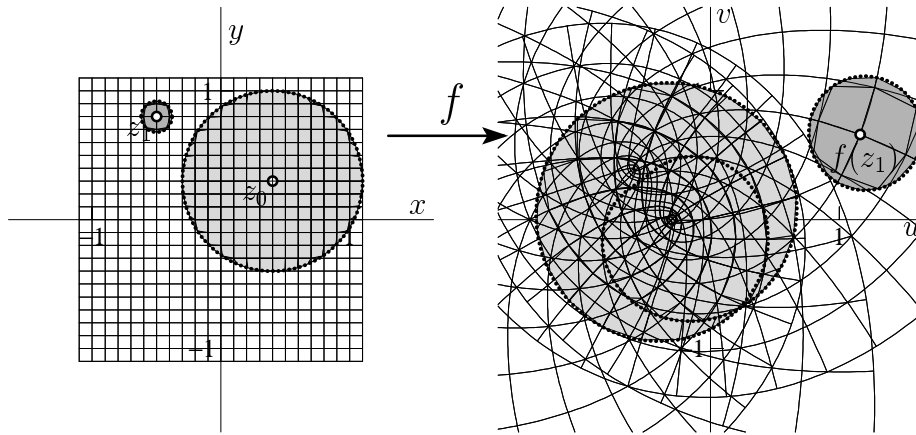


FIG. II.10: Illustration de la preuve du Théorème 9.4,  $w = (z + 0.7(1+i))(z - z_0)^2 - 0.3$ ;  $z_0 = 0.4 + 0.3i$ ,  $z_1 = -0.5 + 0.8i$ .

La preuve rigoureuse utilise les séries : après des translations, nous supposons  $z_0 = 0$  et  $f(z_0) = 0$ . Soit  $a_k$  ( $k \geq 2$ ) le premier terme non nul de la série pour  $f(z)$  :

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots = a_k z^k (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots). \quad (9.5)$$

Pour  $|z|$  suffisamment petit,  $1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$  peut être écrite comme  $(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots)^k$  (utiliser la série binomiale) et la fonction  $f(z)$  de (9.5) devient

$$f(z) = a_k (z(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots))^k = a_k (g(z))^k. \quad (9.6)$$

La fonction  $f(z)$  est donc la *composition* d'une fonction biholomorphe  $g(z)$  et de la fonction  $w^k$  bien connue. Notre inspiration géométrique est donc vérifiée et chaque point proche de  $f(z_0) = 0$  possède  $k$  préimages de  $f(z)$  qui sont proche de  $z_0$ .  $\square$

## II.10 Exercices

1. Considérons le demi-disque  $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Donner un chemin continûment différentiable par morceaux qui décrit le bord de cet ensemble.
2. Donner deux paramétrisations équivalentes mais différentes de l'ellipse

$$\left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

3. Démontrer en détail que la longueur d'une courbe est indépendante de la paramétrisation (considérer des chemins qui sont continûment différentiables par morceaux).
4. Calculer la longueur d'arc de la cycloïde  $\gamma(t) = (t - \sin t) + i(1 - \cos t)$  pour  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dessiner cette courbe.
5. Intégrer la fonction  $f(z) = e^z$  sur les deux chemins  $\gamma_1(t) = t + it^2$  (pour  $t \in [0, 1]$ ) et  $\gamma_2(t) = t^2 + it$  (aussi pour  $t \in [0, 1]$ ) ainsi que sur le chemin  $\gamma_1 - \gamma_2$ .  
Faire le même calcul pour la fonction  $f(z) = |z|^2$ .
6. Soit  $\partial K$  le bord (avec une paramétrisation qui est continûment différentiable et orientée positivement) d'un ensemble compact  $K \subset \mathbb{C}$ . Son aire est donné par

$$\text{aire}(K) = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z} dz. \quad (10.1)$$

Démontrer ce résultat d'abord pour un triangle et ensuite pour une union finie de triangles (par exemple, un rectangle).

7. À l'aide de la formule (10.1) calculer l'aire de l'ensemble fini limité par la courbe  $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$  (pour  $0 \leq t \leq 2\pi$ ) où  $\rho(t) = 1 + 3 \sin t$ . Faire un dessin.  
Quel aire représente l'intégrale  $(2i)^{-1} \int_{\gamma} \bar{z} dz$  si l'on intègre sur tout l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

8. En vous aidant du calcul de  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z+a}$  avec  $\gamma(t) = e^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ , montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + a \cos t}{1 + 2a \cos t + a^2} dt = 0 \quad \text{pour } |a| > 1, a \in \mathbb{R}.$$

*Indication.* Montrer que  $f(z) = (z+a)^{-1}$  possède une primitive sur le disque  $D_{\rho}(0)$  avec  $\rho = |a|$ .

9. En utilisant les techniques familières pour le calcul dans  $\mathbb{R}$ , calculer les primitives pour:

$$ze^{z^2}, \quad ze^z, \quad z^2 \sin(4z).$$

10. Si  $\gamma$  est l'arc de courbe de l'équation  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  joignant les points  $(1, 1)$  et  $(2, 3)$ , trouver la valeur de

$$\int_{\gamma} (12z^2 + 4iz) dz.$$

11. En évaluant  $\int_{\gamma} e^z dz$  sur le cercle  $|z| = 1$ , montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(t + \sin t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(t + \sin t) dt = 0.$$

12. En utilisant la formule de Cauchy pour l'intégrale  $\int_{\gamma} z^{-1} dz$  où  $\gamma$  est le contour d'une ellipse, montrer la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$



13. En s'inspirant du calcul des intégrales de Fresnel (Exemple 4.3) démontrer que

$$\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1-ia}{1+a^2} \quad \text{pour } a \in \mathbb{R} \quad \text{avec } |a| \leq 1.$$

14. Pour  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 0$  et  $r = \sqrt{p^2 + q^2}$  démontrer que

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{\cos(qx)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \sqrt{\frac{r+p}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin(qx)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \sqrt{\frac{r-p}{2}}.$$

*Indication.* Utiliser la substitution  $x = t^2$  dans l'intégrale de l'exercice 13.

15. Soit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  et notons

$$w_n(z) := (z - x_0)(z - x_1) \cdot \dots \cdot (z - x_n).$$

Considérons une courbe fermée  $\gamma$  autour du segment  $[a, b]$ , orientée positivement, et satisfaisant les conditions pour pouvoir appliquer la formule de Cauchy. Pour une fonction  $f(z)$  qui est holomorphe dans l'intérieur de la courbe et dans un voisinage de la courbe, démontrer que

$$p_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - x} \cdot \frac{w_n(z) - w_n(x)}{w_n(z)} dz$$

est un polynôme de degré  $n$  qui satisfait  $p_n(x_k) = f(x_k)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$  (polynôme d'interpolation; voir le cours "Analyse Numérique").

16. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $D_\rho(0)$  et soit  $\gamma(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  avec  $0 < r < \rho$ . Calculer

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)} d\zeta$$

en dépendance de la position de  $a$  et  $b$  par rapport au cercle  $\gamma$ .

17. Soit  $U \subset \mathbb{C}$  ouvert et  $c \in U$ . Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est continue dans  $U$  et holomorphe dans  $U \setminus \{c\}$ , alors  $f(z)$  est holomorphe dans tout  $U$ .

*Indication.* Démontrer que la fonction  $g(z) := (z - c)f(z)$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $c$  et donc aussi dans  $U$ . Appliquer ensuite le Théorème 6.1 à la fonction  $g(z)$ .

18. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $D_\rho(0)$  avec  $\rho > 1$ . Calculer les intégrales

$$\int_\gamma \left( 2 \pm \left( z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{f(z)}{z} dz$$

avec  $\gamma(t) = e^{it}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$  de deux manières différentes et en déduire les formules

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) dt = f(0) + \frac{f'(0)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2(t/2) dt = f(0) - \frac{f'(0)}{2}.$$

19. Les nombres de Bernoulli  $B_k$  sont les coefficients de la série

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \frac{B_4}{4!} z^4 + \dots \quad (10.2)$$

En utilisant le Théorème de Cauchy–Taylor et le résultat de l'exercice 17, démontrer que le rayon de convergence de cette série est  $\rho = 2\pi$ .

20. Démontrer que la fonction

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{2}{1 + z^2/4\pi^2}$$

est holomorphe dans le disque  $D_\rho(0)$  avec  $\rho = 4\pi$ . En déduire que les nombres de Bernoulli satisfont pour  $k \rightarrow \infty$ ,

$$B_{2k} \approx (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}.$$

21. *Différentiation numérique d'une fonction holomorphe.* Si  $f(z)$  est holomorphe dans le disque  $D_\rho(c)$  et si  $0 < r < \rho$ , on a que

$$f^{(k)}(c) = \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Démontrer que l'approximation numérique

$$f^{(k)}(c) \approx \frac{k!}{N r^k} \sum_{j=0}^{N-1} f(c + re^{it_j}) e^{-ikt_j} \quad \text{avec} \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}$$

donne le résultat exact si  $N > k$  et si  $f(z)$  est un polynôme de degré  $< k + N$ .

22. Pour la fonction  $f(z) = z^2 + z - 1$  calculer le maximum de  $|f(z)|$  dans le disque  $|z| \leq 1$ .
23. Considérons la fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}.$$

En appliquant le principe du maximum sur un demi-disque  $\{z; \operatorname{Re} z \leq 0, |z| \leq R\}$  avec un  $R$  très grand, démontrer que

$$|R(z)| \leq 1 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \leq 0.$$

24. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $D_\rho(0)$ . Pour  $0 \leq r < \rho$ , on définit

$$M(r) := \max \{|f(z)|; |z| = r\}.$$

Montrer que la fonction  $r \mapsto M(r)$  est continue et croissante. Elle est strictement croissante si et seulement si  $f(z)$  n'est pas une constante.

25. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le disque  $D_1(0)$ . Montrer qu'il existe un entier positif  $n$  tel que  $f(1/n) \neq 1/(n+2)$ .
26. Sur le disque  $D_1(0)$  considérons la fonction définie par la série

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k.$$

Déterminer le domaine maximal où  $f(z)$  peut être prolongée comme fonction analytique. Donner la valeur de  $f(2)$  de ce prolongement.

*Indication.* En dérivant l'identité  $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$  deux fois, essayer d'exprimer la fonction  $f(z)$  comme fraction rationnelle.

27. Soit  $f(z) = z^2 - 3z + 2$ . Calculer explicitement les images  $f(U)$  pour les disques ouverts

$$U = D_{0.5}(1) \quad \text{et} \quad U = D_1(1.5).$$

Montrer dans chacun des cas que  $f(U)$  est ouvert.

*Indication.* Ecrire  $f(z)$  sous la forme  $(z-c)^2 + d$ , et le bord de  $U$  sous la forme  $c + r(t)e^{it}$ .

28. Démontrer le "principe du maximum" à l'aide du théorème de l'image ouverte.

# Chapitre III

## Singularités et fonctions méromorphes

“Les singularités sont extrêmement importantes car on peut en tirer quelque chose en analyse complexe, cette branche des mathématiques qui étudie les fonctions définies sur un domaine du plan complexe ...” (www.techno-science.net, Astrophysique)

Des fonctions réelles avec des singularités nous sont familières (cours Analyse I), par exemple,  $1/x$ ,  $\sin x/x$ ,  $x \sin(1/x)$ , etc. Pour des fonctions complexes, l'étude des singularités est très différente et on peut obtenir des classifications intéressantes qui ne sont pas possibles dans le cas réel. Les singularités jouent un rôle important dans le calcul des intégrales (résidus).

### III.1 Le point à l'infini et la sphère de Riemann

Dans le cas réel, il est fréquent de “compactifier” l'axe en ajoutant un point  $-\infty$  et un deuxième point  $+\infty$ ; en géométrie projective, on introduit une “droite à l'infini”. En analyse complexe, il est plus naturel de considérer tout l'infini *comme un seul point*.

Une première motivation pour cette convention sont les fonctions rationnelles comme  $1/z$ , la transformation de Cayley (I.2.7) ou celle de Joukowski (I.2.10). On voit, par exemple, en Fig. I.6, que les deux “taches blanches”, représentant l'extérieur de la figure d'à côté, se rapetissent au point 1, si l'on imagine que l'extérieur s'agrandit à l'infini. Donc, le “point 1” correspond au “point  $\infty$ ” par cette application.

Une deuxième motivation est fournie par la *projection stéréographique* (Fig. III.1), qui projette une sphère  $S^2$  à partir du “pôle nord”  $N$  sur un plan parallèle à l'équateur. Elle est bijective entre le plan et la sphère, sans le point  $N$ . Ce point  $N$  correspond justement au “point  $\infty$ ” du plan. Cette identification de  $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  avec une sphère est connue sous le nom *sphère de Riemann*.

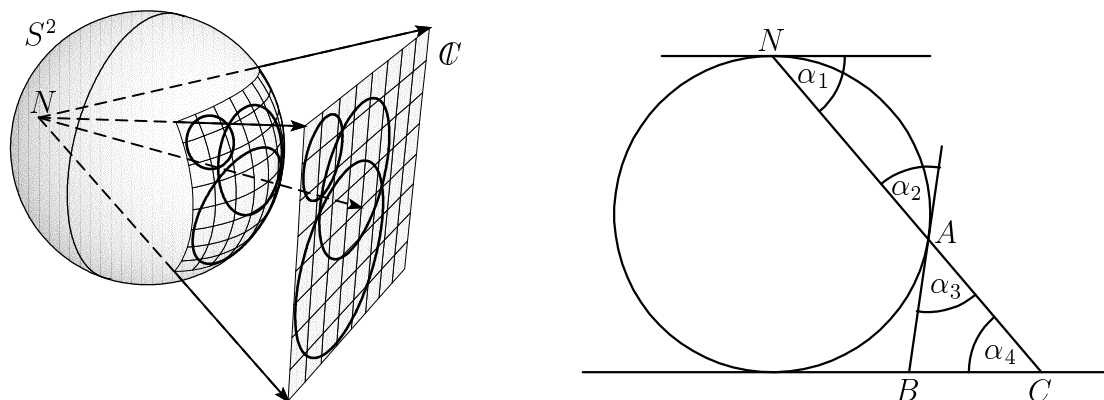


FIG. III.1: Projection stéréographique

On sait depuis l'Antiquité (Hipparchus, Ptolemaios) que cette projection *préserve les cercles* (cours Géométrie I, voir aussi Fig. III.1). Spécialement intéressant en analyse complexe est le fait (connu depuis le 17ème siècle, Halley 1696) que la projection stéréographique *préserve les angles*, c.-à-d., elle est *conforme*. Cela est dû au fait que chaque rayon de projection  $NAC$  traverse le plan tangent  $AB$  sous le même angle que le plan de projection  $BC$  (voir Fig. III.1, à droite: on a  $\alpha_1 = \alpha_4$ , car  $BC$  est parallèle au plan tangent à  $N$ , puis  $\alpha_1 = \alpha_2$  et  $\alpha_2 = \alpha_3$ , donc  $\alpha_3 = \alpha_4$ ).

Les propriétés d'un point complexe ou d'une fonction complexe en un point peuvent être étendues au point  $\infty$  à l'aide de l'application  $z \mapsto 1/z$  qui envoie  $\infty$  au point 0.

C'est ainsi qu'on peut définir qu'une suite  $\{z_k\}$  *converge vers le point*  $\infty$ , c.-à-d.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty, \quad (1.1)$$

si la suite  $\{1/z_k\}$  converge vers 0, c.-à-d., si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $K$  tel que  $|1/z_k| < \varepsilon$  pour  $k \geq K$  (ou, en posant  $R = 1/\varepsilon$ , si pour tout  $R > 0$  il existe  $K$  tel que  $|z_k| > R$  pour  $k \geq K$ ). La suite sur la sphère de Riemann qui correspond à une telle suite dans  $\mathcal{C}$ , converge vers le pôle nord  $N$ . Par exemple, la suite  $0, i, -2, -3i, 4, 5i, -6, -7i, 8, \dots$  converge vers  $\infty$  dans  $\overline{\mathcal{C}}$ . La suite  $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$  converge aussi vers  $\infty$  dans  $\overline{\mathcal{C}}$ , mais elle ne converge pas dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Si une fonction complexe  $f(z)$  est définie pour  $|z| > R$ , on note

$$f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) \quad \text{pour } \{z_k\} \text{ satisfaisant } \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$$

si cette limite existe et ne dépend pas de la suite  $\{z_k\}$ . Avec cette notation on peut définir qu'une fonction  $f(z)$  est *holomorphe (analytique)* au point  $\infty$ , si la fonction  $\hat{f}(w) := f(1/w)$  est holomorphe (analytique) au point  $w = 0$ . La fonction  $f(z) = 1/z$  pour laquelle  $\hat{f}(w) = w$  est alors holomorphe en  $\infty$ . La fonction de Cayley  $f(z) = (z+1)/(z-1)$  satisfait  $f(\infty) = 1$  et elle est holomorphe en  $\infty$  car la fonction  $\hat{f}(w) = f(1/w) = (1+w)/(1-w)$  est holomorphe en  $w = 0$ .

## III.2 Le développement de Laurent

“L'extension donnée par M. Laurent . . . nous paraît digne de remarque.”

(Cauchy 1843, voir Remmert 1991)

Si une fonction holomorphe tend vers l'infini ou cesse d'être holomorphe dans une région, on peut néanmoins sauver la série entière, à condition d'admettre aussi des puissances négatives. Cette extension a été présentée par P.A. Laurent (1813-1854, ingénieur de l'armée) à Cauchy, qui en a parlé à l'Académie (voir citation), mais qui ne l'a pas trouvée “digne” de publication.

**Théorème 2.1** Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un ouvert qui contient la couronne circulaire  $C_{\sigma, \rho}(c) := \{z \in \mathcal{C}; \sigma < |z - c| < \rho\}$ . Alors, pour  $z \in C_{\sigma, \rho}(c)$  on a

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-c)^k \quad (2.1)$$

où

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}} d\zeta, \quad k = \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

est la même formule que (II.6.2), mais aussi valable ici pour les  $k$  négatifs. Le chemin d'intégration est  $\gamma(t) = c + \eta e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  avec  $\sigma < \eta < \rho$  (les valeurs  $\sigma = 0$  et  $\rho = \infty$  sont admises).

La série  $\sum_{k \geq 0} a_k(z-c)^k$  converge pour  $|z-c| < \rho$ , et la série  $\sum_{k < 0} a_k(z-c)^k$  pour  $|z-c| > \sigma$ .

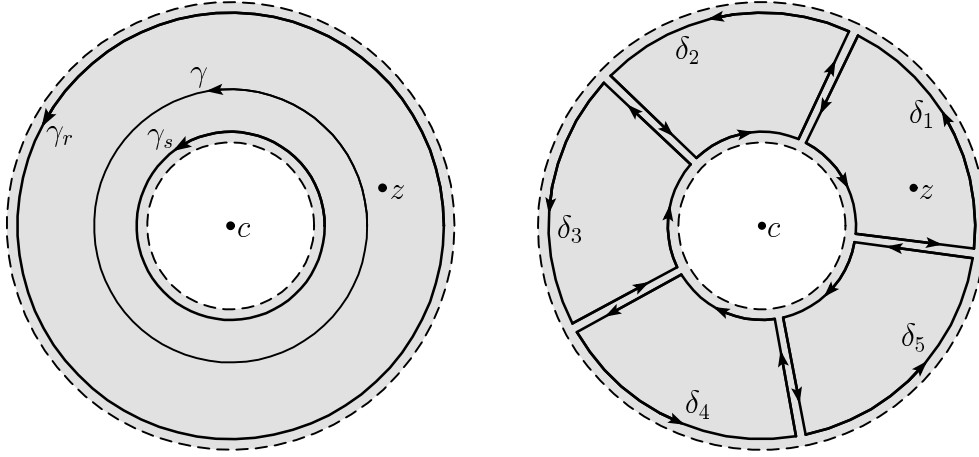


FIG. III.2: Preuve du Théorème de Laurent

*Démonstration.* Nous suivons de très près les idées de la démonstration du Théorème II.6.1 de Cauchy–Taylor qui est basée sur la formule intégrale (II.5.1) de Cauchy. Comme la couronne  $C_{\sigma,\rho}(c)$  n'est pas un domaine étoilé, on ne peut pas directement appliquer cette formule intégrale. On est alors obligé de diviser la couronne en plusieurs parties étoilées (voir la Fig. III.2).

Pour un  $z$  fixé à l'intérieur de la couronne  $C_{\sigma,\rho}(c)$  nous choisissons  $r, s > 0$  et  $\theta < 1$  tels que  $\sigma < s < s/\theta \leq |z - c| \leq \theta r < r < \rho$  et nous considérons les chemins  $\gamma_r(t) = c + re^{it}$ ,  $\gamma_s(t) = c + se^{it}$  et  $\delta_1(t), \dots, \delta_n(t)$ , dessinés dans la Fig. III.2 pour  $n = 5$ . La formule intégrale de Cauchy (II.5.1) appliquée au chemin  $\delta_1$ , et le Théorème II.4.2 appliqué aux autres  $\delta_j$  (notons que la fonction  $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$  est holomorphe dans l'intérieur de  $\delta_j$  pour  $j \neq 1$ ) donnent

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{pour } j = 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

En additionnant les intégrales sur les  $\delta_j$ , la contribution des segments reliant les cercles  $\gamma_r$  et  $\gamma_s$  se simplifie, et on obtient  $\int_{\delta_1} + \dots + \int_{\delta_n} = \int_{\gamma_r} - \int_{\gamma_s}$ . Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta. \quad (2.4)$$

La première intégrale dans (2.4) peut être traitée comme dans la preuve du Théorème II.6.1 et donne naissance aux termes avec  $k \geq 0$  dans (2.1). Comme l'intégrand des intégrales (2.2) est holomorphe dans la couronne, le chemin  $\gamma_r$  peut être déplacé librement vers  $\gamma$  sans changer la valeur de l'intégrale.

Pour la deuxième intégrale, nous échangeons  $\zeta \leftrightarrow z$  dans (II.6.3), ainsi la série devient convergente pour  $|\zeta - c| < |z - c|$ . Cela donne

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - c} + \frac{\zeta - c}{(z - c)^2} + \dots + \frac{(\zeta - c)^k}{(z - c)^{k+1}} + \frac{(\zeta - c)^{k+1}}{(z - c)^{k+1}(z - \zeta)}, \quad (2.5)$$

et inséré dans la deuxième intégrale de (2.4) crée les termes avec  $k < 0$ . Le reste peut être estimé de la même manière, car  $|\zeta - c|/|z - c| \leq \theta < 1$  pour  $\zeta$  se déplaçant sur le chemin  $\gamma_s$ .  $\square$

L'inégalité de Cauchy (voir (7.1))

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{avec} \quad M(r) = \max_{|z-c|=r} |f(z)| \quad (2.6)$$

( $\sigma < r < \rho$ ) reste valable pour les  $k$  positifs et négatifs.

**Exemple 2.2** Considérons la fonction  $f(z) = 1/(1 + z^2)$  et cherchons le développement de Laurent autour du point  $c = 0.4 + 0.6i$ . Pour calculer les coefficients, les formules intégrales (2.2) ne sont pas toujours pratiques. On essaiera plutôt d'utiliser des séries de Taylor connues.

La fonction  $f(z) = 1/(1 + z^2)$  est holomorphe partout sauf au points  $\pm i$  qui sont à distance  $\sigma \approx 0.566$  et  $\rho \approx 1.65$  de  $c$  (voir la Fig. III.3). Pour calculer le développement de Laurent dans la couronne entre ces deux rayons, nous décomposons la fonction en fractions simples,

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z - i} + \frac{1}{-i - z} \right). \quad (2.7)$$

On suit la démonstration précédente et on remplace les deux fractions simples par les deux séries géométriques (2.5) et (II.6.3), une fois avec  $\zeta$  remplacé par  $i$  et l'autre fois par  $-i$ , en faisant attention à la convergence. Ainsi, on obtient pour (2.7)

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{2i} \left( \dots + \frac{(i - c)^2}{(z - c)^3} + \frac{i - c}{(z - c)^2} + \frac{1}{z - c} + \frac{1}{-i - c} + \frac{z - c}{(-i - c)^2} + \frac{(z - c)^2}{(-i - c)^3} + \dots \right).$$

La valeur absolue de cette série tronquée ( $-24 \leq k \leq 24$ ) peut être admirée en Fig. III.3.

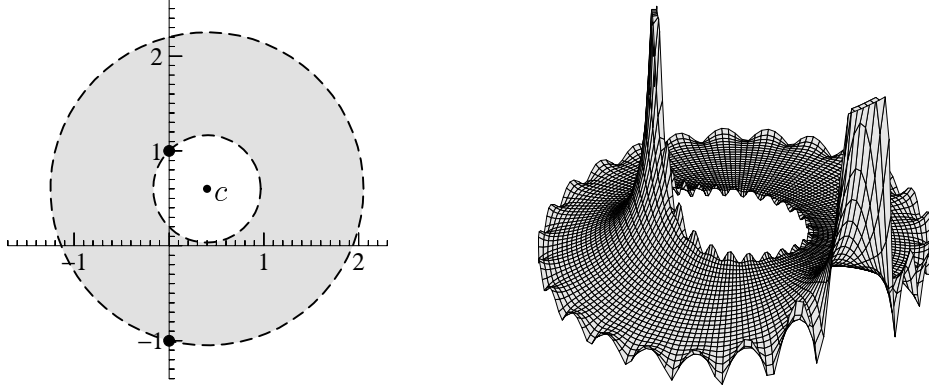


FIG. III.3: Domaine et module de  $\pm 24$  termes d'une série de Laurent pour  $1/(1 + z^2)$ .

### III.3 Singularités isolées

Si une fonction  $f(z)$  est holomorphe dans un disque épointé ( $\rho > 0$ )

$$D_\rho^*(c) := \{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z - c| < \rho\} = D_\rho(c) \setminus \{c\}, \quad (3.1)$$

nous appelons  $c$  une *singularité isolée*. Le but de ce paragraphe est de classer les singularités isolées et d'étudier les fonctions holomorphes proches de leurs singularités isolées.

Le disque épointé  $D_\rho^*(c)$  est une couronne  $C_{\sigma,\rho}(c)$  avec  $\sigma = 0$ . On peut donc appliquer le Théorème 2.1 et considérer le développement de Laurent

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - c)^2} + \frac{a_{-1}}{z - c} + a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - c)^k$$

pour  $z \in D_\rho^*(c)$ . On distingue les trois possibilités suivantes:

1. *singularité supprimable*, si  $a_k = 0$  pour tout  $k < 0$ ;
2. *pôle d'ordre  $m > 0$* , si  $a_k = 0$  pour  $k < -m$ , mais  $a_{-m} \neq 0$ ;
3. *singularité essentielle*, si un nombre infini de  $a_k$  avec  $k < 0$  sont non nuls.

## 1) Singularités supprimables

Une singularité supprimable s'appelle aussi singularité virtuelle ou singularité effaçable. Comme le théorème suivant nous montre, il ne s'agit pas d'une vraie singularité.

**Théorème 3.1** Soit  $f(z)$  holomorphe dans un disque épointé  $D_\rho^*(c)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

1.  $f(z)$  possède une singularité supprimable en  $c$ ;
2.  $f(z)$  se prolonge holomorphiquement au disque entier  $D_\rho(c)$ ;
3. la limite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  existe dans  $\mathbb{C}$ ;
4.  $f(z)$  est bornée au voisinage de  $c$ .

*Démonstration.* L'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) suit du développement de Laurent en posant  $f(c) := a_0$ . La condition (2) entraîne (3), car chaque fonction holomorphe est continue. L'existence de la limite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = a$  implique que pour tout  $z$  dans un voisinage de  $c$  la valeur de  $f(z)$  est proche de  $a \in \mathbb{C}$ , donc (3)  $\Rightarrow$  (4).

Il reste à démontrer (4)  $\Rightarrow$  (1). Si  $|f(z)| \leq M_0$  dans un voisinage de  $c$ , alors  $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)| \leq M_0$ . Par conséquent, les inégalités de Cauchy (2.6), pour  $r \rightarrow 0$ , montrent que  $a_k = 0$  pour tout  $k < 0$ . Ainsi, le développement de Laurent devient une série entière.  $\square$

## 2) Pôles

Si  $f(z)$  possède un pôle d'ordre  $m$  en  $c$ , on peut mettre en évidence le facteur  $(z - c)^{-m}$  dans le développement de Laurent et on obtient

$$f(z) = (z - c)^{-m} (a_{-m} + a_{-m+1}(z - c) + a_{-m+2}(z - c)^2 + \dots). \quad (3.2)$$

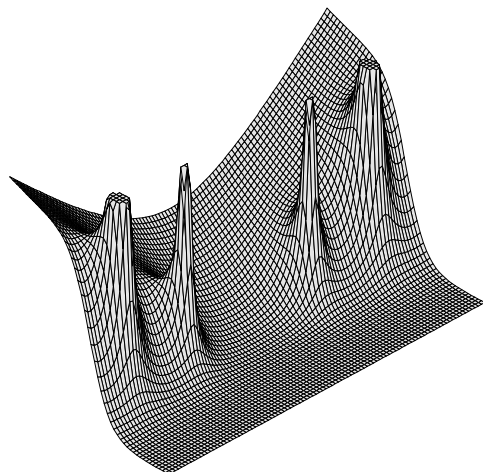
**Théorème 3.2** Soit  $f(z)$  holomorphe dans un disque épointé  $D_\rho^*(c)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

1.  $f(z)$  possède en  $c$  un pôle d'ordre  $m > 0$ ;
2.  $f(z) = (z - c)^{-m} g(z)$  où  $g(z)$  est holomorphe dans le disque entier  $D_\rho(c)$ ;
3. la limite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$  existe dans  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Démonstration.* Les implications (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3) sont une conséquence immédiate de (3.2). Supposons maintenant que  $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$ . La fonction  $f(z)$  est alors non nulle dans un voisinage du point  $c$  et l'inverse  $h(z) = 1/f(z)$  est bien définie et holomorphe dans un disque épointé  $D_r^*(c)$  avec  $0 < r \leq \rho$ . Comme  $\lim_{z \rightarrow c} h(z) = 0$ , on déduit du Théorème 3.1 que  $h(z)$  est holomorphe dans le disque entier  $D_r(c)$  et que  $h(c) = 0$ . Par conséquent,  $h(z) = (z - c)^m h_0(z)$  avec un  $m > 0$  et avec  $h_0(c) \neq 0$ . La fonction  $f(z) = 1/h(z)$  possède donc un développement de Laurent de la forme (3.2).  $\square$

Un pôle d'ordre  $m$  est typiquement présent dans un quotient  $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$  de deux fonctions holomorphes où  $f_1(c) \neq 0$  et le dénominateur  $f_2(z)$  possède un zéro de multiplicité  $m$  en  $c$ .

Une illustration est donnée pour la fonction  $z/(e^z - 1)$ , qui possède des pôles simples en  $c = \pm 2i\pi k$ ,  $k \neq 0$  et une singularité supprimable en  $c = 0$ . La figure montre la valeur absolue au-dessus du domaine  $[-8, 8] \times [-16, 16]$ .



### 3) Singularités essentielles

Dans le cas d'une singularité essentielle, le comportement de  $f(z)$ , quand  $z$  se rapproche de  $c$ , est caractérisé par le théorème suivant.

**Théorème 3.3 (Casorati 1868, Weierstrass 1876)** Soit  $f(z)$  holomorphe dans un disque épointé  $D_\rho^*(c)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

1.  $f(z)$  possède en  $c$  une singularité essentielle;
2. pour tout  $r$  avec  $0 < r \leq \rho$ , l'ensemble  $f(D_r^*(c))$  est dense dans  $\mathbb{C}$ ;
3. la limite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  n'existe pas dans  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Démonstration.* L'implication (2)  $\Rightarrow$  (3) est évidente car, au cas où  $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = a \in \overline{\mathbb{C}}$  existe,  $f(z)$  est proche de  $a$  si  $z$  est proche de  $c$  et  $f(D_r^*(c))$  ne peut donc pas être dense dans  $\mathbb{C}$ .

Si la limite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  n'existe pas dans  $\overline{\mathbb{C}}$ , le point  $c$  ne peut pas être une singularité supprimable ni un pôle. Donc, l'implication (3)  $\Rightarrow$  (1) est vraie.

Pour démontrer (1)  $\Rightarrow$  (2), supposons que  $c$  est une singularité essentielle et (par l'absurde) qu'il existe  $r > 0$  tel que  $f(D_r^*(c))$  n'est pas dense dans  $\mathbb{C}$ . Il existe alors  $a \in \mathbb{C}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $|f(z) - a| \geq \varepsilon$  pour tout  $z \in D_r^*(c)$ . Ceci nous permet de considérer la fonction

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a} \quad \text{c.-à-d.} \quad f(z) = a + \frac{1}{g(z)}. \quad (3.3)$$

Elle est holomorphe et bornée ( $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ ) dans  $D_r^*(c)$ . D'après le Théorème 3.1,  $g(z)$  se prolonge holomorphiquement à  $D_r(c)$ . Si  $g(c) \neq 0$ , alors  $1/g(z)$  est holomorphe dans  $D_r(c)$  et si  $g(c) = 0$  (zéro de multiplicité  $m$ ), alors  $1/g(z)$  a un pôle d'ordre  $m$  en  $c$ . On en déduit (voir (3.3)) que  $f(z)$  est holomorphe ou que  $f(z)$  a un pôle d'ordre  $m$  en  $c$ . Ceci contredit le fait que  $f(z)$  possède une singularité essentielle en  $c$ .  $\square$

Une illustration est donnée en Fig. III.4, pour la fonction

$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} \mp \dots$$

une fonction qui, dans le cas réel, est si aimable (voir [HW, p. 253]). Les *deux* tours qui apparaissent forment *une* singularité, les lignes de niveau de  $|f(z)|$  sont des lemniscates (Exercice 7). L'argument de  $f(z)$  se comporte beaucoup plus violemment, avec une infinité de rotations sur chacune de ces lemniscates. La validité du Théorème de Casorati–Weierstrass est évidente ici.

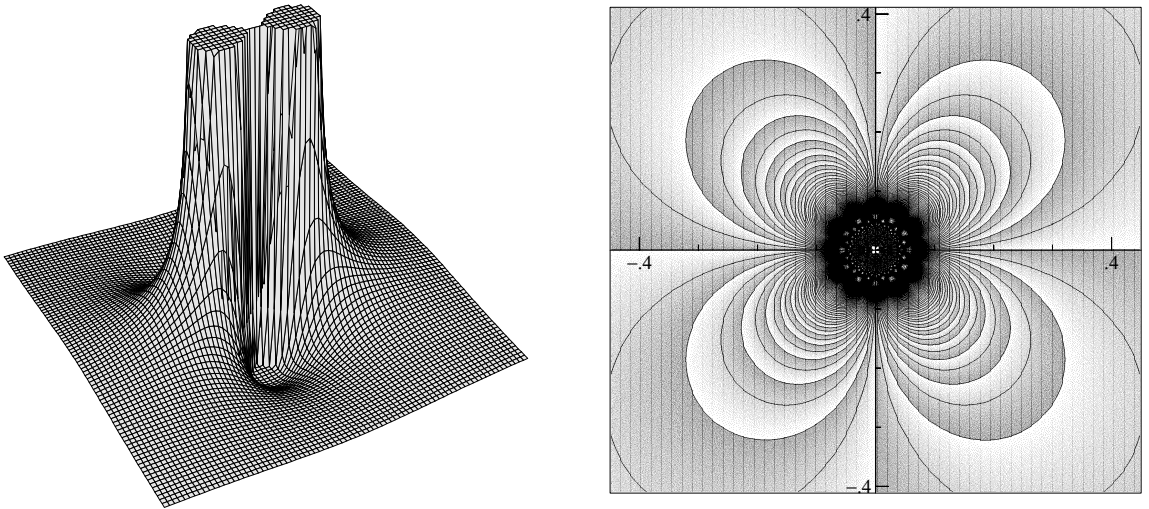


FIG. III.4: Fonction  $e^{-1/z^2}$  avec singularité essentielle; la valeur absolue à gauche et les lignes de niveau avec valeurs  $k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) de  $\arg f(z)$  à droite.



### III.4 Théorème des résidus

“**résidu** [ré-zi-du] n. m. (du lat. *residuus*, qui est de reste). Ce qui reste . . .”

(Larousse Dictionnaire Universel)

Le Théorème des résidus généralise le théorème de Cauchy II.4.2 aux fonctions ayant des singularités isolées à l'intérieur du chemin d'intégration. Il fut pour Cauchy l'instrument principal pour trouver des valeurs d'intégrales définies.

**Définition 4.1** Soit  $f(z)$  holomorphe dans un disque épointé  $D_\rho^*(c)$ . La quantité

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta =: \text{Res}(f, c) \quad (4.1)$$

où  $\gamma(t) = c + re^{it}$  pour  $0 \leq t \leq 2\pi$  et  $0 < r < \rho$ , est appelée *le résidu de  $f(z)$  au point  $c$*  (c.-à-d. la seule chose qui reste de  $f(z)$  après intégration).

Le résidu est le coefficient de  $(z - c)^{-1}$  du développement de Laurent. On peut le calculer par développement en séries. Pour des pôles simples, on a les formules commodess

$$\text{Res}(f, c) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z) \quad \text{et} \quad \text{Res}(f, c) = \frac{f_1(c)}{f_2'(c)} \quad (4.2)$$

si  $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$  avec  $f_1(c) \neq 0$  et si  $f_2(z)$  possède un zéro simple en  $z = c$ .

Si  $c$  est un pôle d'ordre  $m$  de  $f(z)$ , on pose  $g(z) = (z - c)^m f(z)$ . Alors, le résidu de  $f(z)$  en  $c$  est le  $m - 1$ -ième terme de la série de Taylor de  $g(z)$ , c.-à-d.

$$\text{Res}(f, c) = \frac{1}{(m - 1)!} g^{(m-1)}(c). \quad (4.3)$$

**Théorème 4.2 (Cauchy 1826)** Soit  $U$  un domaine étoilé et  $\gamma$  une courbe fermée parcourant  $\partial U$  dans le sens positif. Soit  $f(z)$  holomorphe dans un voisinage de l'adhérence  $\overline{U} = U \cup \partial U$ , à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées  $c_1, c_2, \dots, c_k$  dans  $U$ . Alors,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, c_j). \quad (4.4)$$

*Démonstration.* La preuve est très similaire à celle du Théorème II.5.1 (formule intégrale de Cauchy). La seule différence réside dans le fait que nous avons maintenant *plusieurs* points singuliers à contourner par de petits cercles (voir Fig. III.5). Comme auparavant, cela marche sans autre complication si le domaine de définition est étoilé. On projette les singularités vers le bord

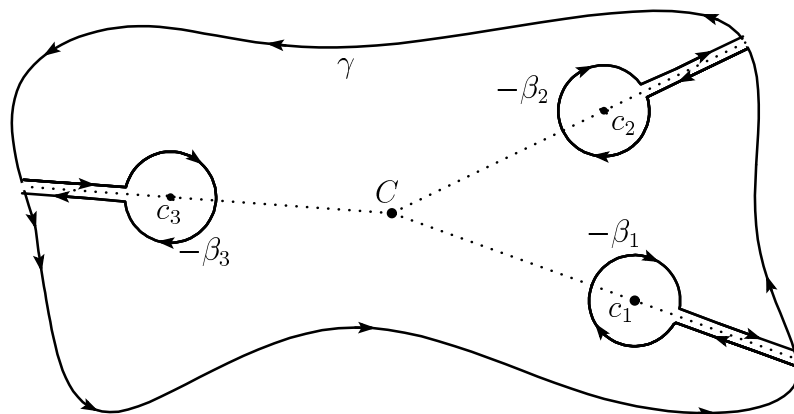


FIG. III.5: Preuve du théorème des résidus

et on applique le Théorème II.4.2 de Cauchy à un chemin  $\gamma^*$  qui comprend  $\gamma$ , les cercles autour des singularités et les connexions. Les intégrales sur les chemins aller et retour disparaissent, il ne reste que

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^k \int_{\beta_j} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (4.5)$$

où les  $\beta_j$  sont les cercles qui contournent les points singuliers dans le sens positif. On obtient la formule (4.4) en remplaçant les dernières intégrales par (4.1).  $\square$

Si une fonction  $f(z)$  est holomorphe dans un domaine  $U$  et si  $z \in U$  est un point fixé, alors la fonction

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (4.6)$$

possède  $z$  comme seul point singulier avec  $\text{Res}(g, z) = f(z)$  (voir (4.2)). Dans ce cas, le Théorème 4.2 des résidus devient la formule intégrale de Cauchy (II.5.1).

### III.5 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

“La théorie des résidus se prête avec une merveilleuse simplicité à la recherche des intégrales définies, et voici comment:”  
(H. Laurent, *Théorie des Résidus*, 1865)

Nous sommes maintenant de retour à la toute première motivation de Cauchy pour entreprendre ses recherches en analyse complexe, à savoir la justification et la généralisation des calculs d'intégrales entrepris par Euler et Laplace.

“L’art” de trouver des intégrales définies a été cultivé tout au long des 18<sup>ème</sup> et 19<sup>ème</sup> siècle, Dirichlet et Kronecker ont donné des cours (jusqu’à 6 heures hebdomadaires) sur le sujet. Aujourd’hui, il existe de longues tables (par ex. celles de Gröbner–Hofreiter ou Gradstein–Ryshik qui témoignent d’un travail incroyable) et des programmes informatiques (par ex. Maple ou Mathematica), qui “crachent” ces intégrales en quelques millisecondes. Mais, pour un esprit scientifique, il est, encore et toujours, intéressant de voir comment ces trésors du savoir ont été trouvés.

L’idée est très simple: on choisit une fonction  $f(z)$ , on choisit un chemin  $\gamma$  et on évalue l’intégrale (4.4) en calculant les résidus; ensuite on la partage en parties réelle et imaginaire, et on trouve deux formules d’intégrales (dont une est souvent triviale). Discutons quelques situations typiques qui conduisent à des intégrales intéressantes.

#### 1) Intégrales impropres. Considerons des intégrales

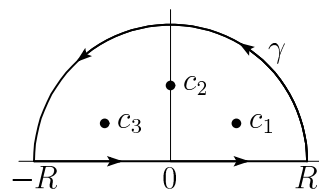
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

où la fonction  $f(z)$  n’a qu’un nombre fini de singularités (aucune sur l’axe réel) et satisfait  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$ .

Comme chemin d’intégration on prend l’intervalle réel  $[-R, R]$ , suivi d’un grand demi-cercle  $R \cdot e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  (voir la petite figure). Sous la condition  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$ , l’intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 pour  $R \rightarrow \infty$  et on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c_k > 0} \text{Res}(f, c_k), \quad (5.1)$$

où la somme est sur toutes les singularités  $c_k$  de  $f(z)$  dans le demi-plan supérieur.



*Exemple.* De cette manière on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}$$

sans avoir besoin de calculer une primitive de la fonction  $f(x) = 1/(x^6 + 1)$ . En effet, les singularités concernées sont  $c_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$ ,  $c_2 = i$  et  $c_3 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$ . Les résidus correspondants sont  $c_k^{-5}/6$  par la deuxième formule de (4.2). Ainsi,  $\text{Res}(f, c_1) = e^{\frac{-5i\pi}{6}}/6$ ,  $\text{Res}(f, c_2) = -i/6$  et  $\text{Res}(f, c_3) = e^{\frac{-i\pi}{6}}/6$  dont la somme est  $-2i/6$ .

**2) Intégrales trigonométriques.** Pour une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$$

on considère le cercle unité  $\gamma(t) = e^{it}$  avec  $0 \leq t \leq 2\pi$  et on observe que

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = \int_{\gamma} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (5.2)$$

Il suffit alors de calculer les singularités et leurs résidus pour la fonction de la deuxième intégrale dans (5.2). Si  $F(u, v)$  est une fonction rationnelle, l'intégrant de (5.2) est aussi rationnel.

*Exemple.* On obtient les formules (pour  $p \in \mathbb{R}$ )

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2} = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - p)(1 - pz)} = \frac{2\pi}{1 - p^2} \quad \text{si } |p| < 1 \quad (5.3)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{p + \cos t} = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2pz + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - 1}} \quad \text{si } p > 1. \quad (5.4)$$

Pour le deuxième exemple, il y a un pôle  $c_1 = -p + \sqrt{p^2 - 1}$  à l'intérieur du cercle unité  $\gamma$  de résidu  $\text{Res}(f, c_1) = 1/(2\sqrt{p^2 - 1})$ .

L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(p + \cos t)^2} = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2 - 1})^3} \quad \text{si } p > 1 \quad (5.5)$$

nécessite le calcul du résidu d'un pôle double. Pour éviter cela, on peut dériver l'intégrale (5.4) par rapport au paramètre  $p$ .

**3) Transformation de Fourier.** Il s'agit des intégrales impropres de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx,$$

où la fonction  $g(z)$  n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel) et satisfait  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ .

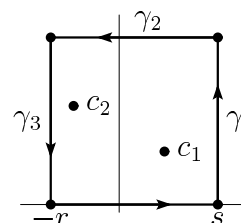
Comme chemin nous considérons le bord du carré (voir la petite figure) où  $r > 0$  et  $s > 0$  sont suffisamment grands pour que toutes les singularités soient dans l'intérieur du carré. Notant  $M(r) := \max_{|z| \geq r} |g(z)|$  qui converge vers zéro pour  $r \rightarrow \infty$ , l'intégrale sur  $\gamma_2(t) = -t + i(r+s)$ ,  $t \in [-s, r]$  peut être majorée par (pour  $a > 0$ )

$$\left| \int_{\gamma_2} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq M(r+s) e^{-a(r+s)} (r+s) \rightarrow 0 \quad \text{si } r+s \rightarrow \infty.$$

Pour l'intégrale sur  $\gamma_1(t) = s + it$ ,  $t \in [0, s+t]$  on obtient

$$\left| \int_{\gamma_1} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq M(s) \int_0^{r+s} e^{-at} dt \leq \frac{M(s)}{a} (1 - e^{-a(r+s)}) \leq \frac{M(s)}{a} \rightarrow 0 \quad \text{si } s \rightarrow \infty$$

et l'intégrale sur  $\gamma_3(t)$  peut être majorée de la même manière. Ainsi nous obtenons



$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c_k > 0} \text{Res}(f, c_k) \quad \text{si } a > 0 \quad (5.6)$$

où  $f(z) = g(z)e^{iaz}$  et la somme est sur toutes les singularités  $c_k$  de  $g(z)$  dans le demi-plan supérieur.

*Exemple.* On obtient alors sans calculs compliqués que, pour  $a > 0$  et pour  $b \in \mathcal{C}$  avec  $\text{Re } b > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - ib} dx = 2\pi i e^{-ab} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x + ib} dx = 0.$$

Une addition resp. soustraction de ces deux intégrales donne le formules de Laplace (1810)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b \cos(ax)}{x^2 + b^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-ab}.$$

**4) Transformation de Mellin.** Considérons avec  $a \in \mathcal{C}$  et  $0 < \text{Re } a < 1$  l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} g(x) x^{a-1} dx$$

où la fonction  $g(z)$  n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel) et satisfait  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)z^a = 0$  ainsi que  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)z^a = 0$ .

Rappelons que la puissance  $z^a$  est en général multivaluée et donnée par  $z^a = \exp(a \log z)$ . Pour obtenir une fonction holomorphe il faut fixer une branche du logarithme. Nous considérons  $\log z = \log |z| + i \arg z$  où l'argument est choisi pour que  $0 \leq \arg z < 2\pi$ . Par le Théorème I.8.2 la fonction  $\log z$  et alors aussi  $z^a$  sont holomorphes dans le plan complexe privé de l'axe réel positif. Pour un réel  $x > 0$  et pour  $z \rightarrow x$ , la limite d'en haut et celle d'en bas sont différentes; on a respectivement  $x^a$  et  $e^{2\pi i a} x^a$ .

Pour définir le chemin d'intégration, nous prenons un  $s > 0$  très petit et un  $r > 0$  très grand, et nous considérons les deux cercles de rayons  $s$  et  $r$  reliés par des segments horizontaux proches de l'axe réel positif (voir la petite figure). Avec  $M(r) := \max_{|z|=r} |g(z)z^a|$ , les intégrales sur les cercles peuvent être majorées par

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z) z^{a-1} dz \right| \leq 2\pi M(r) \quad \text{et} \quad \left| \int_{\gamma_s} g(z) z^{a-1} dz \right| \leq 2\pi M(s) \quad (5.7)$$

et convergent vers zéro pour  $r \rightarrow \infty$  et  $s \rightarrow 0$  (par hypothèse sur la fonction  $g(z)$ ). Le théorème des résidus implique alors que, dans la limite  $r \rightarrow \infty$  et  $s \rightarrow 0$ , on a

$$\int_0^{\infty} g(x) x^{a-1} dx - e^{2\pi i a} \int_0^{\infty} g(x) x^{a-1} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, c_j)$$

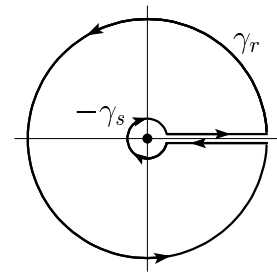
où  $c_1, \dots, c_k$  sont les singularités de  $g(z)$  et les résidus sont calculés pour  $f(z) = g(z)z^{a-1}$ . En utilisant le fait que  $1 - e^{2\pi i a} = -e^{i\pi a} 2i \sin(\pi a)$  cette formule devient

$$\int_0^{\infty} g(x) x^{a-1} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, c_j). \quad (5.8)$$

*Exemple.* Avec  $g(z) = 1/(1+z)$  on obtient la formule (pour  $0 < \text{Re } a < 1$ )

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},$$

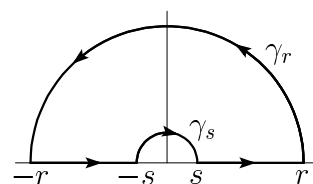
car le résidu de  $f(z) = z^{a-1}/(1+z)$  en  $c_1 = -1$  est  $(-1)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-1)} = e^{(a-1)i\pi} = -e^{i\pi a}$ .



### 5) Une formule d'Euler. Pour démontrer

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

nous posons  $f(z) = e^{iz}/z$  et nous considérons le chemin de la figure avec  $s$  petit et  $r$  grand.



Le petit demi-cercle est nécessaire pour éviter le pôle à l'origine. L'intégrale sur le grand demi-cercle  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  peut être estimée à l'aide de  $\sin t \geq 2t/\pi$  sur  $[0, \pi/2]$  par

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\pi} dt = \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{r}.$$

Elle converge vers zéro si  $r \rightarrow \infty$ . Comme la fonction  $e^{iz}/z$  est holomorphe dans l'intérieur du chemin fermé, une intégration sur ce chemin donne pour  $r \rightarrow \infty$

$$\int_{-s}^{-s} \frac{e^{ix}}{x} dx - i \int_0^\pi e^{s(\cos t + i \sin t)} dt + \int_s^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx = 0.$$

L'intégrale au milieu converge vers  $\pi$  si  $s \rightarrow 0$ . En échangeant  $x$  par  $-x$  dans la première intégrale et en utilisant  $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$  nous obtenons la formule cherchée.

### 6) Encore des intégrales impropres. Cherchons à calculer

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

où la fonction  $f(z)$  n'a qu'un nombre fini de singularités (aucune sur l'axe réel positif, l'origine incluse) et satisfait  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) \cdot \log z = 0$ .

L'idée est de considérer la fonction  $g(z) := f(z) \cdot \log z$  et le même chemin que pour la transformation de Mellin. Comme dans (5.7) on démontre que l'intégrale de  $g(z)$  sur le grand cercle disparaît si  $r \rightarrow \infty$ . Celle sur le petit cercle avec rayon  $s$ , peut être estimée comme suit:

$$\left| \int_{\gamma_s} g(z) dz \right| \leq 2\pi s \cdot \max_{|z|=s} |f(z)| \cdot (|\log s| + 2\pi).$$

Elle converge aussi vers zéro pour  $s \rightarrow 0$ , car  $f(z)$  n'a pas de singularité à l'origine. Pour l'intégrale sur le chemin entier il reste alors (pour  $r \rightarrow \infty$  et  $s \rightarrow 0$ )

$$\int_0^\infty f(x) \log x dx - \int_0^\infty f(x) (\log x + 2\pi i) dx$$

et le théorème des résidus donne

$$\int_0^\infty f(x) dx = - \sum_{j=1}^k \text{Res}(g, c_j). \quad (5.9)$$

*Exemple.* Comme application concrète, calculons l'intégrale suivante:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Pour les trois singularités  $c_1 = e^{i\pi/3}$ ,  $c_2 = -1$ ,  $c_3 = e^{-i\pi/3}$  les résidus de  $g(z) = \log z / (1+z^3)$  sont respectivement  $-i\pi(1+i\sqrt{3})/18$ ,  $i\pi/3$  et  $-5i\pi(1-i\sqrt{3})/18$ . La formule (5.9) donne la valeur affirmée de l'intégrale.

### III.6 Fonctions méromorphes

“μέρος, partie” et “μορφή, forme”

(Dictionnaire Grec Français, Hachette)

Les fonctions méromorphes sont des fonctions qui ont presque (en partie) la forme des fonctions holomorphes. Plus précisément on a :

**Définition 6.1 (Briot–Bouquet 1875)** Une fonction  $f(z)$  est *méromorphe* dans un ouvert  $U$ , si elle est holomorphe dans  $U$  sauf en des points isolés où elle peut avoir des pôles.

Les fonctions méromorphes dans un domaine  $U$  peuvent être additionnées, multipliées et dérivées sans sortir de l'ensemble des fonctions méromorphes. L'avantage par rapport aux fonctions holomorphes est que les fonctions méromorphes peuvent aussi être divisées entre elles.

**Théorème 6.2** Si  $f(z)$  et  $g(z)$  sont méromorphes dans  $U$ , leur quotient  $f(z)/g(z)$  est aussi méromorphe. L'ensemble des fonctions méromorphes dans  $U$  forme alors un corps.

*Démonstration.* Les singularités de  $f(z)/g(z)$  sont les pôles de  $f(z)$  et  $g(z)$  et les zéros de  $g(z)$ . Pour un tel point  $c$  on a  $f(z) = (z - c)^m f_1(z)$  avec  $m \leq 0$  et  $f_1(c) \neq 0$  et  $g(z) = (z - c)^n g_1(z)$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $g_1(c) \neq 0$ . Le quotient  $f(z)/g(z) = (z - c)^{m-n} f_1(z)/g_1(z)$  possède en  $c$  une singularité supprimable (si  $m \geq n$ ) ou un pôle d'ordre  $n - m$ .  $\square$

*Exemples.* Toutes les fonctions holomorphes, mais aussi les fonctions rationnelles ainsi que les fonctions  $\tan z = \sin z / \cos z$ ,  $\cot z = \cos z / \sin z$ ,  $f(z) = z/(e^z - 1)$ , etc., sont méromorphes.

**Décomposition en fractions simples.** Pour les fonctions rationnelles, la décomposition en fractions simples est souvent très utile. Nous reprenons un exemple de [HW, p. 119–120]:

$$f(z) = \frac{6z^4 - 20z^2 + 4z + 19}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4} = \frac{6z^4 - 20z^2 + 4z + 19}{(z - 1)^3(z + 2)^2} \quad (6.1)$$

Nous avons un pôle d'ordre 3 en  $z = 1$  et un d'ordre 2 en  $z = -2$ . La fonction  $f(z) \cdot (z - 1)^3$  n'a plus de pôle en  $z = 1$ . Nous développons cette fonction en série de Taylor et obtenons le développement de Laurent (qui converge pour  $0 < |z - 1| < 3$ )

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^3} - \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{3}{z - 1} + \frac{8}{9} - \frac{7}{27}(z - 1) + \frac{2}{27}(z - 1)^2 + \dots \quad (6.2)$$

et similairement pour l'autre pôle (cette fois pour  $0 < |z + 2| < 3$ )

$$f(z) = -\frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{3}{z + 2} - \frac{34}{27} - \frac{14}{27}(z + 2) - \frac{17}{81}(z + 2)^2 + \dots \quad (6.3)$$

*Idée:* Si on dénote les “parties principales” de ces développements par

$$\ell_1(z) = \frac{1}{(z - 1)^3} - \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{3}{z - 1} \quad \text{et} \quad \ell_2(z) = -\frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{3}{z + 2}, \quad (6.4)$$

alors  $f(z) - \ell_1(z) - \ell_2(z)$  n'a plus de pôle et, par le Théorème 3.1, est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , il suit du Théorème II.7.2 de Liouville que cette différence est zéro et

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^3} - \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{3}{z - 1} - \frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{3}{z + 2} \quad (6.5)$$

(cf. [HW, formule (II.5.11)]).

Rappelons que  $f(z)$  possède un pôle d'ordre  $m$  en  $c = \infty$ , si  $\hat{f}(w) = f(1/w)$  en a un au point  $w = 0$ . Ceci signifie que  $\hat{f}(w) = w^{-m} f_1(w)$  où  $f_1(w)$  est holomorphe proche 0 et  $f_1(0) \neq 0$ . Alors,  $f(z) = z^m f_1(z)$  où  $f_1(z)$  est holomorphe dans un voisinage de  $z = \infty$  et  $f_1(\infty) \neq 0$ . Par exemple, un polynôme de degré  $m$  possède en  $\infty$  un pôle d'ordre  $m$ .

**Théorème 6.3** Si  $f(z)$  est une fonction méromorphe sur  $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$ , alors  $f(z)$  ne possède qu'un nombre fini de pôles et est une fraction rationnelle.

*Démonstration.* Comme les singularités (ici le point infini est inclus) d'une fonction méromorphe sont isolées, il existe  $R > 0$  tel que  $f(z)$  ne possède pas de singularité à l'extérieur de  $B_R(0)$  (sauf éventuellement en  $z = \infty$ ) et seulement un nombre fini dans  $\overline{B_R(0)}$ . Soient  $c_1, \dots, c_k$  les pôles de  $f(z)$  situés dans  $\mathcal{C}$ . Si  $m_j$  est l'ordre de  $c_j$ , on considère la fonction

$$g(z) := (z - c_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - c_k)^{m_k} \cdot f(z)$$

qui est holomorphe dans tout  $\mathcal{C}$ . Si  $f(z)$  a un pôle d'ordre  $m > 0$  en  $\infty$  ou si  $f(z)$  est holomorphe dans un voisinage de  $\infty$  ( $m = 0$ ), on a  $|g(z)| \leq \text{Const}|z|^{m+m_1+\dots+m_k}$ . Par la remarque suivant le Théorème II.7.2 de Liouville, la fonction  $g(z)$  est un polynôme de degré au plus  $m + m_1 + \dots + m_k$ . Par conséquent,  $f(z)$  est une fonction rationnelle.  $\square$

**Cas d'une infinité de pôles.** Soit, par exemple,  $f(z) = \cot z = \cos z / \sin z$ . Il y a des pôles simples aux points  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , avec  $\text{Res}(f, k\pi) = 1$ . La formule analogue à (6.5) serait ici

$$\begin{aligned} \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} &= \text{graph} \\ &= \dots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

formule trouvée par Euler, à l'aide de son produit pour  $\sin z$  (voir *Introductio* 1748, Chap. X, §178). Voici d'autres exemples :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \text{graph} \\ &= \dots - \frac{1}{z+2\pi} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} - \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 z} &= \text{graph} \\ &= \dots + \frac{1}{(z+2\pi)^2} + \frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{(z-2\pi)^2} + \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\cos z}{\sin^2 z} &= \text{graph} \\ &= \dots - \frac{1}{(z+2\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{(z-2\pi)^2} - \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Notre but est de démontrer ces formules. Tout d'abord remarquons que les séries (6.6) et (6.7) ne convergent pas sans autre précision (série harmonique). Pour donner un sens à ces formules il faut grouper ensemble les termes  $(z + k\pi)^{-1} + (z - k\pi)^{-1} = 2z/(z^2 - k^2\pi^2)$ .

Pour une fonction méromorphe avec pôle  $c_j$  nous notons par  $\ell_j(z)$  la *partie principale* dans le développement de Laurent autour de  $c_j$  (c.-à-d., les termes avec indices négatifs). Pour une courbe fermée  $\gamma$  autour de l'origine, nous notons par  $d(\gamma)$  la distance de  $\gamma$  à l'origine et par  $L(\gamma)$  sa longueur.

**Théorème 6.4 (Mittag-Leffler)** Soit  $f(z)$  méromorphe dans  $\mathbb{C}$  avec pôles  $c_1, c_2, c_3, \dots$  ( $c_j \neq 0$ ). Considérons une suite  $\{\gamma_k\}$  de courbes fermées contournant l'origine et satisfaisant  $d(\gamma_k) \rightarrow \infty$  pour  $k \rightarrow \infty$  et  $L(\gamma_k)/d(\gamma_k) \leq C$ , sur lesquelles

$$|f(z)| \leq M \quad \text{pour } z \in \gamma_k \text{ et } k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.10)$$

Alors on a

$$f(z) = f(0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) \quad (6.11)$$

où  $\text{Int}(\gamma_k)$  désigne l'intérieur de la courbe  $\gamma_k$ .

Si  $c_0 = 0$  est un pôle de  $f(z)$ , il faut remplacer  $f(0)$  dans la formule (6.11) par  $\ell_0(z)$  plus le terme constant dans le développement de Laurent autour de  $c_0 = 0$ .

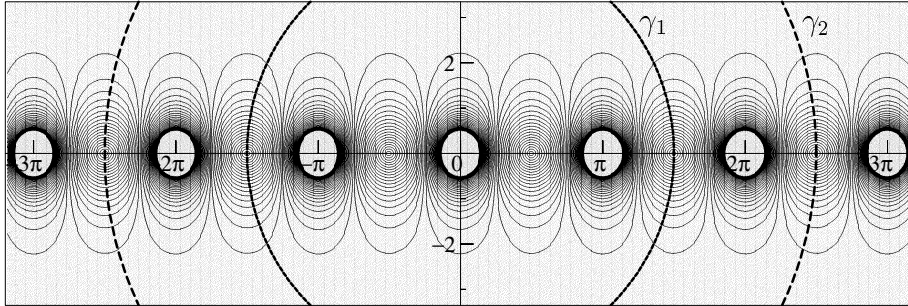
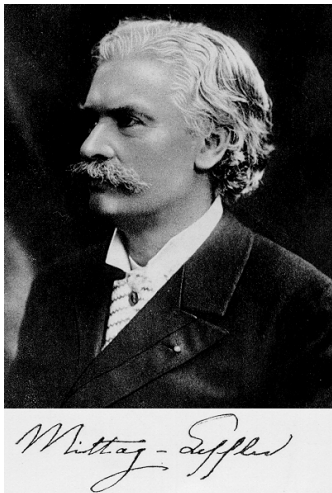


FIG. III.6: Illustration de la preuve du "Théorème de Mittag-Leffler" pour  $f(z) = \cot z$



**Démonstration.** Ce théorème est une version simplifiée du célèbre théorème de Mittag-Leffler, qui fut publié dans *Acta Math.* vol. 4, 1884.

Comme les singularités de  $f(z)$  sont isolées, il n'y a qu'un nombre fini des pôles à l'intérieur de  $\gamma_k$  (voir Fig. III.6). L'idée est d'enlever ces singularités et de considérer la fonction

$$f(z) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} \ell_j(z)$$

qui est holomorphe dans un voisinage de  $\text{Int}(\gamma_k)$  (voir Fig. III.7). La formule intégrale de Cauchy donne alors

$$f(z) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} \ell_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} \ell_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (6.12)$$

pour  $z$  dans l'intérieur de  $\gamma_k$  et différent de pôles. Dans cette situation, la fonction  $g_j(\zeta) = \ell_j(\zeta)/(\zeta - z)$  possède les pôles  $z$  et  $c_j$  avec résidus  $\text{Res}(g_j, z) = \ell_j(z)$  et  $\text{Res}(g_j, c_j) = -\ell_j(z)$ .



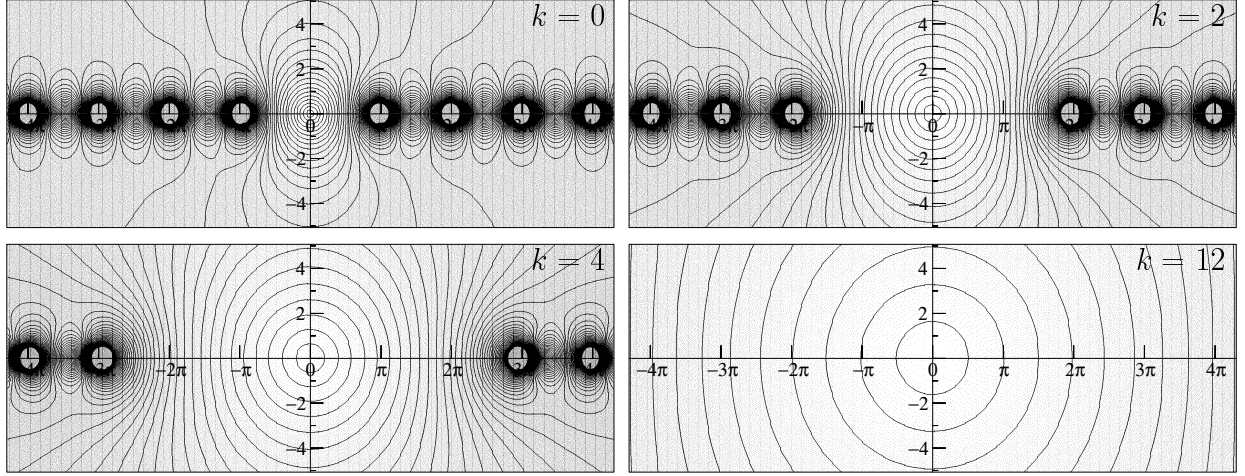


FIG. III.7: Courbes de niveau pour la valeur absolue de  $f(z) = \cot z - \sum_{j=0}^k \ell_j(z)$

Le théorème des résidus donne alors que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{\ell_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (6.13)$$

et la formule (6.12) (appliquée une fois pour  $z$  et une deuxième fois pour  $z = 0$ ) implique que

$$f(z) - f(0) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta) z}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta.$$

Nous majorons cette dernière intégrale en utilisant (6.10)) et l'hypothèse sur  $\gamma_k$ , ce qui donne

$$\left| f(z) - f(0) - \sum_{c_j \in \text{Int}(\gamma_k)} (\ell_j(z) - \ell_j(0)) \right| \leq \frac{M|z| L(\gamma_k)}{2\pi d(\gamma_k) d(\gamma_k, z)} \leq \frac{M|z| C}{2\pi d(\gamma_k, z)} \quad (6.14)$$

où  $d(\gamma_k, z)$  est la distance minimale entre  $z$  et la courbe  $\gamma_k$ . Pour  $z$  fixé, cette distance tend vers l'infini pour  $k \rightarrow \infty$  et la majoration dans (6.14) tend vers zéro.

Dans le cas où l'origine est un pôle de la fonction  $f(z)$ , on applique cette démonstration à la fonction  $f(z) - \ell_0(z)$  qui est holomorphe près de l'origine.  $\square$

**Exemple 6.5 (formules d'Euler)** Considérons la fonction  $f(z) = \cot z$  (voir la formule (6.6)). Pour la courbe  $\gamma_k$  nous prenons le bord du carré avec sommets  $(k + 1/2)\pi(\pm 1 \pm i)$ . On a  $d(\gamma_k) = (k + 1/2)\pi \rightarrow \infty$  et  $L(\gamma_k) = 8d(\gamma_k)$ . La fonction  $f(z)$  peut être majorée à l'aide de

$$|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Sur les parties verticales de  $\gamma_k$  on a  $|f(z)| \leq 1$  et sur les parties horizontales  $|f(z)| \leq \sqrt{2}$  car  $|\sinh y| \geq 1$  pour  $|y| \geq 3\pi/2$ . La formule (6.11) du Théorème de Mittag-Leffler implique alors que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{z + j\pi} - \frac{1}{j\pi} \right) + \left( \frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{j\pi} \right) \right) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}$$

ce qui justifie d'une part la formule (6.6). D'autre part, en multipliant cette formule par  $z$ , la série devient (avec  $\frac{q}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ )

$$z \cdot \cot z = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{z^2}{j^2\pi^2}}{1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}} = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{j^{2k}\pi^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} \right) \frac{-2}{\pi^{2k}} z^{2k}. \quad (6.15)$$

Cette série, comparée à (I.9.5), donne les formules

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.16)$$

l'un des plus formidables triomphes d'Euler. Même le cas  $k = 1$  fut une énigme pour Leibniz et Joh. Bernoulli pendant un demi-siècle (plus précisément: de 1673 à 1740).

La formule (6.7) peut être justifiée de la même manière. Pour la fonction  $f(z) = 1/\sin^2 z$  (voir la formule (6.8)) on a des pôles d'ordre 2 et le Théorème de Mittag-Leffler donne

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{(z+j\pi)^2} - \frac{1}{(j\pi)^2} \right) + \left( \frac{1}{(z-j\pi)^2} - \frac{1}{(j\pi)^2} \right) \right).$$

En utilisant la formule (6.16) pour  $k = 1$  et  $B_2 = 1/6$ , les termes constants s'annulent et on retrouve la formule (6.8). La formule (6.9) peut aussi être vérifiée de cette manière.

### III.7 Principe de l'argument

À l'aide du théorème des résidus nous démontrons ici le célèbre “*principe de l'argument*”. La première application de ce principe est due à Riemann (1859, *Werke* p. 148, pour estimer le nombre de zéros de sa “fonction  $\zeta$ ”), une deuxième par E.J. Routh (1877, dans un travail sur la stabilité d'un système).

**Théorème 7.1 (Principe de l'argument)** *Soit  $U$  un domaine étoilé et  $\gamma$  la courbe fermée parcourant  $\partial U$  dans le sens positif. Si  $f(z)$  est méromorphe dans un voisinage de l'adhérence  $\overline{U} = U \cup \partial U$  et sans zéro ni pôle sur  $\gamma$ , alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = Z(f) - P(f) \quad (7.1)$$

où  $Z(f)$  et  $P(f)$  sont, respectivement, le nombre de zéros et le nombre de pôles de  $f(z)$  à l'intérieur de  $\gamma$ , comptés avec leur multiplicité.

*Démonstration.* La fonction  $f'(z)/f(z)$  est méromorphe et possède des pôles là où  $f(z)$  est soit zéro soit infinie. À l'aide de (4.2), on voit que

$$\begin{aligned} \text{si } f(z) &= (z-c)^m g(z), \quad g(c) \neq 0 & \text{alors} & \quad \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}, c \right) = m \\ \text{si } f(z) &= \frac{g(z)}{(z-c)^m}, \quad g(c) \neq 0 & \text{alors} & \quad \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}, c \right) = -m. \end{aligned}$$

Le théorème des résidus pour cette fonction donne l'affirmation (7.1). □

**Interprétation géométrique du principe de l'argument.** Le quotient  $f'(z)/f(z)$  est la dérivée de  $\log(f(z))$ . Aussi longtemps que la valeur de  $f(z)$  reste dans un domaine où  $\log w$  est définie et analytique, on a trouvé une primitive de  $f'(z)/f(z)$  et par conséquent on a

$$\int_{\gamma_t} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log(f(\gamma(t))) - \log(f(\gamma(0))) \quad (7.2)$$

où  $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$  dénote une partie de la courbe  $\gamma$ . Si on veut appliquer cette formule à la courbe entière  $\gamma$ , il faut interpréter  $\log w$  comme fonction multi-valuée. Néanmoins la partie réelle de  $\log w$  (qui est  $\log |w|$ ) est le même pour  $w = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0))$  (la courbe  $\gamma$  est fermée). Ainsi

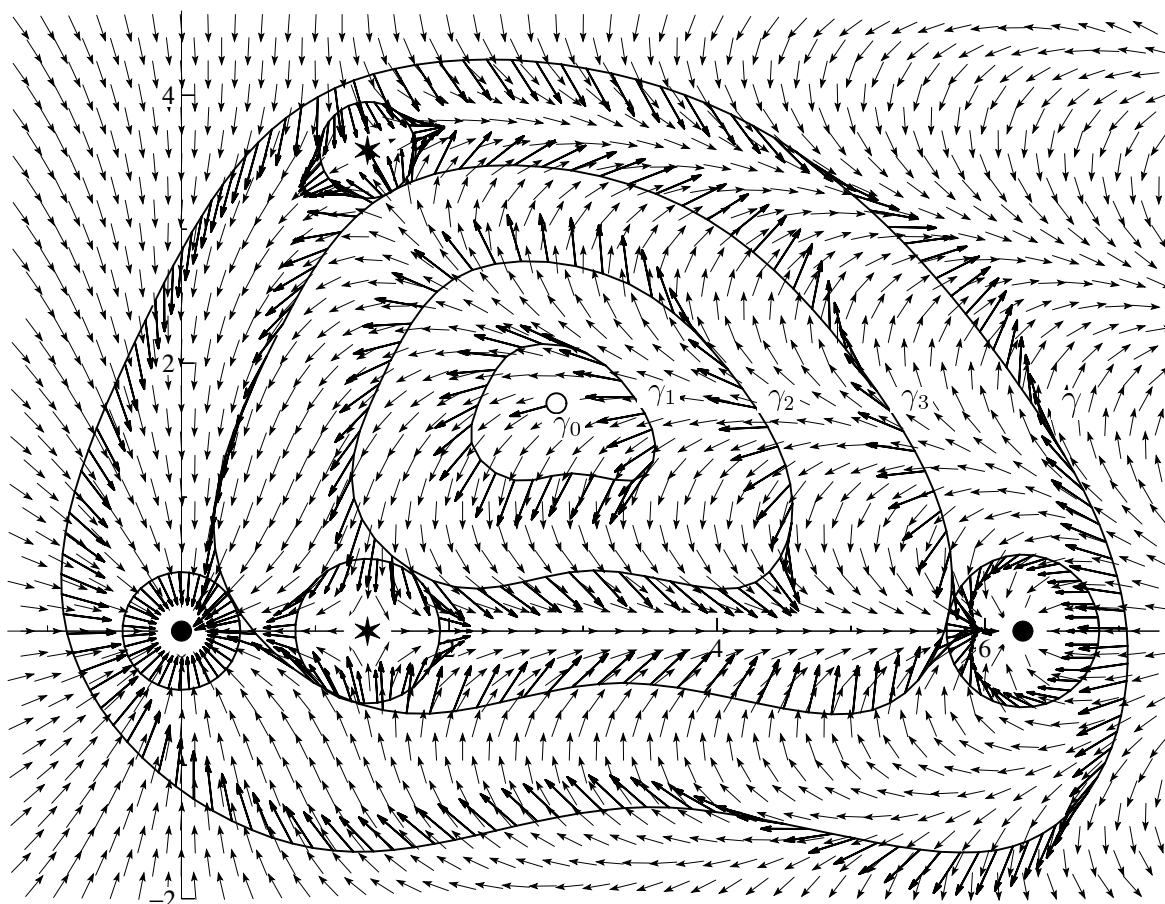


FIG. III.8: Le principe de l'argument pour la fonction  $f(z) = \sin(z/2)/(e^{az} - b)$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log(f(\gamma(1))) - \log(f(\gamma(0))) = i(\arg(f(\gamma(1))) - \arg(f(\gamma(0)))) \quad (7.3)$$

Ceci est un multiple entier de  $2\pi i$  et compte le nombre de tours qu'effectue le vecteur  $f(z)$ , quand  $z$  parcourt  $\gamma$  dans le sens positif.

*Exemple.* Dans la Figure III.8 sont dessinés les vecteurs  $f(z)$  attachés au point  $z$  pour la fonction  $f(z) = \sin(z/2)/(e^{az} - b)$  où  $a = 1.75$  et  $b = 11.4$ . Cette fonction possède deux zéros ( $z = 0$  et  $z = 2\pi$ ) et deux pôles ( $z = (\ln b)/a$  et  $z = (\ln b + 2i\pi)/a$ ) à l'intérieur du chemin  $\gamma$ . On peut observer que l'entier (7.1) vaut 0 pour les courbes  $\gamma_0, \gamma_1$  et  $\gamma_2$ , il vaut  $-1$  pour  $\gamma_3$  et de nouveau 0 pour la courbe  $\gamma$ .

Ce théorème possède d'innombrables applications, entre autres le "théorème de Rouché" et une  $n+1$ -ème preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

**Théorème 7.2 (théorème de Rouché)** Soient  $f(z)$  et  $g(z)$  des fonctions méromorphes dans un ouvert  $U$  et soit  $\gamma$  une courbe telle que le principe de l'argument peut être appliqué. Si

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{pour tout } z \in \gamma, \quad (7.4)$$

alors

$$Z(f) - P(f) = Z(g) - P(g).$$

En particulier, quand  $f(z)$  et  $g(z)$  sont holomorphes, alors elles ont le même nombre de zéros à l'intérieur de  $\gamma$ .

*Démonstration.* En conséquence de (7.4), les fonctions  $f(z)$  et  $g(z)$  n'ont ni zéros ni pôles sur  $\gamma$ . Il existe alors un voisinage  $V$  de la courbe  $\gamma$  où le quotient  $h(z) = f(z)/g(z)$  est holomorphe et tel que

$$|h(z) - 1| < 1 \quad \text{pour } z \in V.$$

Ceci implique que la fonction  $\text{Log}(h(z))$  est bien définie dans  $V$  et qu'elle est une primitive de  $h'(z)/h(z)$ . Pour la courbe fermée  $\gamma$  on obtient donc  $\int_{\gamma} h'(z)/h(z) dz = 0$ . L'égalité  $h'/h = f'/f - g'/g$  et le principe de l'argument permettent de conclure.  $\square$

Donnons encore quelques applications typiques de ce résultat:

- *Une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.* Soit  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  un polynôme de degré  $n$ . Sur un cercle de rayon  $R$  (avec  $R$  suffisamment grand) on a  $|p(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|$ . Le théorème de Rouché implique que  $p(z)$  possède le même nombre de zéros dans  $D_R(0)$  que  $g(z) = a_n z^n$  (c.-à-d., exactement  $n$  zéros, comptés avec leurs multiplicités).
- *Continuité des zéros d'un polynôme.* Soit  $p(z, \lambda) = a_n(\lambda)z^n + \dots + a_1(\lambda)z + a_0(\lambda)$  un polynôme à coefficients dépendant continûment d'un paramètre  $\lambda$ . Si  $z = c$  est une racine de  $p(z, \lambda_0)$  de multiplicité  $m$ , alors pour  $\varepsilon$  et  $|\lambda - \lambda_0|$  assez petits, le polynôme  $p(z, \lambda)$  a  $m$  racines dans le disque  $D_{\varepsilon}(c)$ . Ceci suit du théorème de Rouché, car il existe un  $d > 0$  tel que

$$|p(z, \lambda) - p(z, \lambda_0)| < d \leq |p(z, \lambda_0)| \quad \text{pour } |z - c| = \varepsilon.$$

Un  $d > 0$  satisfaisant la deuxième inégalité existe, parce que les zéros sont isolés. La première inégalité est due à la continuité des coefficients, si  $\lambda$  est suffisamment proche de  $\lambda_0$ .

- *Lemme de Hurwitz.* Soit  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  une suite de fonctions holomorphes dans  $U$  qui converge localement uniformément vers une fonction holomorphe  $f(z)$  (c.-à-d., converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de  $U$ ). Supposons que  $f(z)$  ne s'annule pas sur le bord  $\partial D_r(c)$  d'un disque. Alors, pour  $n$  suffisamment grand,  $f_n(z)$  et  $f(z)$  ont le même nombre de zéros dans  $D_r(c)$ . Pour la démonstration de ce lemme on remarque que  $|f_n(z) - f(z)| < d \leq |f(z)|$  sur  $\partial D_r(c)$ .

## III.8 Exercices

1. Calculer les limites suivantes dans  $\overline{\mathcal{C}}$  (si elles existent)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^4 + 3z - 4, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2+z}{z^2-3}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{3z+1}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \exp z, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{1}{z}\right).$$

2. Lesquelles des fonctions suivantes sont holomorphes dans un voisinage de  $z = \infty$ :

$$2z^3 + z - 3, \quad \frac{1+z}{2-3z}, \quad \sin z, \quad \exp\left(\frac{z}{1+z^2}\right).$$

3. Soit  $(\xi, \eta, \zeta)$  un point de la sphère de Riemann, c.-à-d.,  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ . Calculer sa projection stéréographique  $z_N$  à partir du pôle nord  $(0, 0, 1)$  sur le plan passant par l'équateur. Calculer également sa projection  $z_S$  à partir du pôle sud  $(0, 0, -1)$ . Montrer que

$$z_N \cdot \overline{z_S} = 1.$$

Ceci motive l'étude de l'infini à l'aide de la transformation  $z \mapsto 1/z$ .

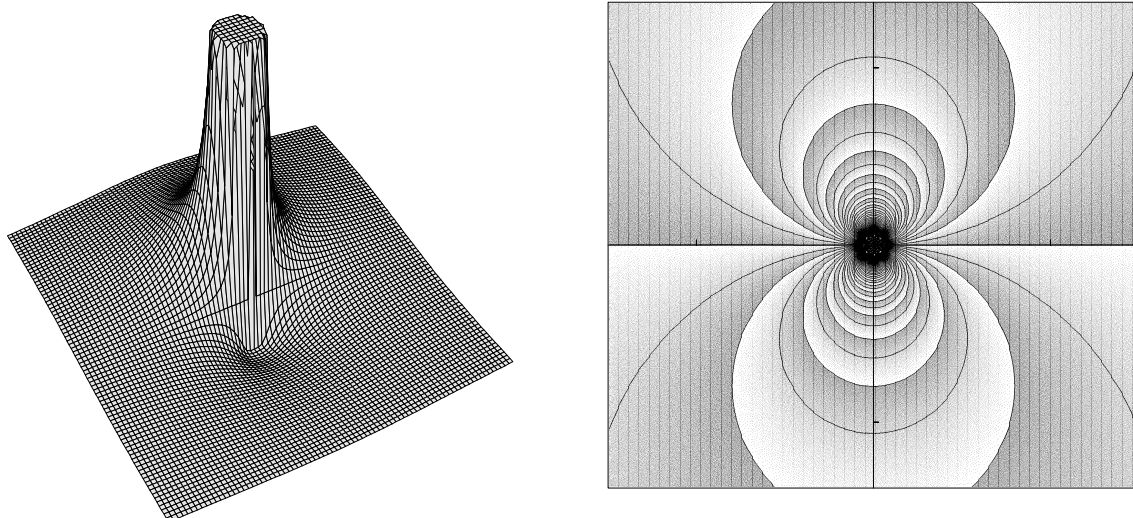


FIG. III.9: Fonction  $e^{1/z}$  avec singularité essentielle; la valeur absolue à gauche et les lignes de niveau avec valeurs  $k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) de  $\arg f(z)$  à droite.

4. Pour la fonction  $f(z) = \exp(1/z)$ , démontrer par un calcul direct que pour tout  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et pour tout  $\rho > 0$  il existe un  $z \in D_\rho(0)$  avec  $f(z) = w$  (voir la Fig. III.9).

5. La fonction

$$f(z) = \frac{6}{z(z+1)(z-2)}$$

est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 2\}$ . Calculer les trois développements de Laurent: pour  $0 < |z| < 1$ , pour  $1 < |z| < 2$  et pour  $2 < |z| < \infty$ .

6. Les fonctions suivantes possèdent une singularité au point  $c = 0$ . Décider s'il s'agit d'une singularité supprimable, d'un pôle (quel ordre) ou d'une singularité essentielle:

$$\frac{3+z}{z^4(5+3z^2)}, \quad \frac{1}{\tan z}, \quad \frac{\sin z}{z}, \quad \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{z}{e^z - 1 - z - z^2/2}.$$

7. Pour la fonction  $f(z) = e^{-1/z^2}$ , démontrer que les lignes de niveau de  $|f(z)|$  et de  $\arg f(z)$  sont des lemniscates (voir la Fig. III.4).

*Rappel.* La célèbre "lemniscate" de Jac. Bernoulli est définie par  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  (voir [HW, p. 314, 315 et 329]).

8. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles:

$$\frac{2z+1}{z^2-z-2}, \quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2, \quad \frac{\sin z}{z^2}, \quad \frac{\cos z}{\sin z}.$$

9. En utilisant le théorème des résidus calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + e^{-z}}{z^3} dz$$

où  $\gamma$  parcourt le bord du carré de sommets  $\pm 2 \pm 2i$  dans le sens positif.

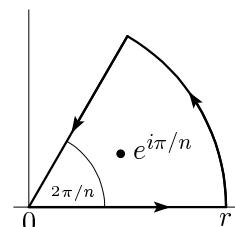
10. Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

11. Démontrer que pour des entiers  $m, n$  satisfaisant  $0 < m < n$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi m/n)}.$$

*Indication.* Considérer le chemin de la figure.



12. Soit  $p(z)$  un polynôme de degré  $n \geq 2$ . Démontrer que la somme des résidus de la fonction  $1/p(z)$  est zéro.

13. Par la méthode des résidus, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t} dt = \frac{\pi}{12}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-3\sin t)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

14. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx.$$

*Indication.* Utiliser les mêmes idées que pour l'intégrale du type (5) dans le paragraphe III.5.

15. Démontrer que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0.$$

*Indication.* Prendre un chemin comme dans l'intégrale du type (5) dans le paragraphe III.5 et une détermination du logarithme qui est une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C}$  privé de la demi-droite d'argument  $-\pi/2$ .

16. Vérifier la formule

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{\log^2 a - \log^2 b}{2(a-b)} \quad \text{pour } a > b > 0.$$

17. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+6x+13}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2(kx)}{x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3} dx.$$

18. En appliquant le théorème de Mittag-Leffler démontrer la formule

$$\tan z = 2z \left( \frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right).$$

En déduire que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

19. Démontrer que toutes les racines du polynôme  $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$  sont situées entre les cercles  $|z| = 1$  et  $|z| = 2$ .

*Indication.* Appliquer le théorème de Rouché avec  $g(z) = 12$  sur le petit cercle et avec  $g(z) = z^7$  sur le grand cercle.

20. Soit  $f(z)$  holomorphe sur le disque unité  $U := D_1(0)$  et continue sur l'adhérence  $\overline{U}$  et supposons que  $F(\overline{U}) \subset U$ . Démontrer alors (à l'aide du théorème du Rouché) que  $f(z) = z$  possède exactement une solution  $z \in U$ .

21. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe et supposons que le bord de l'ensemble

$$A = \{z \in \mathbb{C}; |f(z)| > 1\}$$

soit paramétré par un chemin  $\gamma(t)$  au sens positif. Rappelons que  $\vec{a} = \dot{\gamma}(t)$  est le vecteur tangent à cette courbe et  $\vec{n} = -i\dot{\gamma}(t)$  le vecteur normal orienté vers l'extérieur.

a) Expliquer pourquoi on a  $\partial \log |f(z)| / \partial \vec{n} \leq 0$  dans cette situation;

b) En utilisant les équations de Cauchy-Riemann pour  $\log(f(z))$ , montrer que  $\partial \arg f(z) / \partial \vec{a} \leq 0$ .

c) Montrer que  $\arg f(z)$  est strictement décroissant le long de  $\gamma$  (dériver  $f(\gamma(t)) = e^{i \arg f(\gamma(t))}$ ).

Ce résultat est illustré dans la Fig. III.10 pour la fonction

$$f(z) = \frac{1 + z(1-2a) + z^2(1/2 - 2a + a^2)}{(1-az)^2 \exp(z)}. \quad (8.1)$$

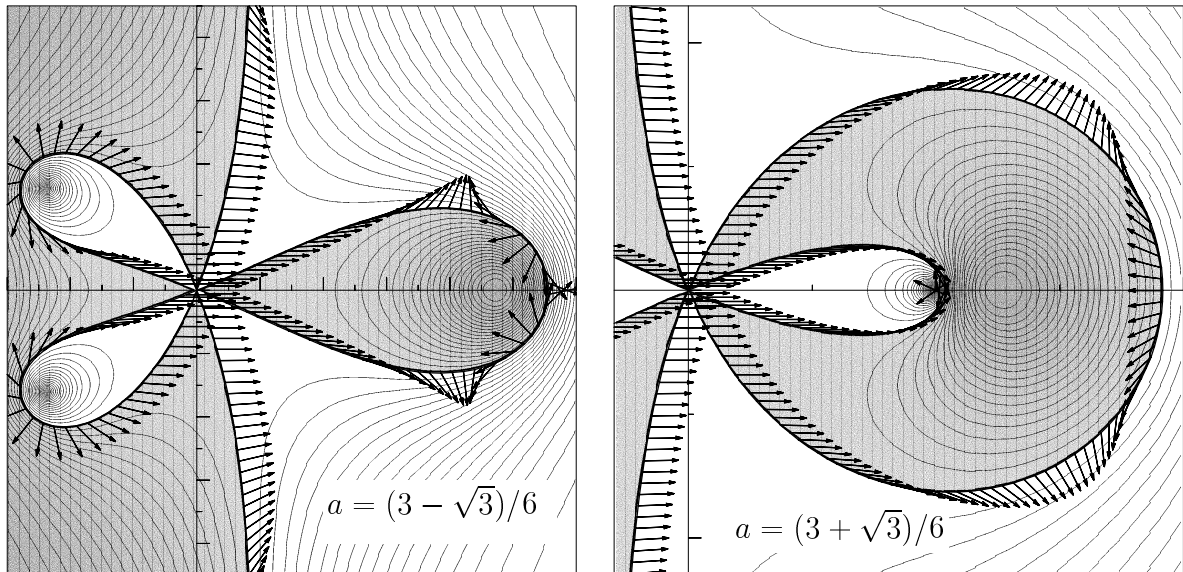


FIG. III.10: L'ensemble  $A = \{z \in \mathbb{C} ; |f(z)| > 1\}$  pour la fonction  $f(z)$  de (8.1).

22. Dans la Fig. III.10<sup>1</sup> sont dessinés les vecteurs  $f(z)$  attachés au point  $z = \gamma(t)$  sur la courbe qui décrit le bord de l'ensemble  $A = \{z \in \mathbb{C} ; |f(z)| > 1\}$  (pour la fonction  $f(z)$  de (8.1)). Uniquement en regardant cette figure, décider combien de zéros ou pôles sont dans chacune des composantes connexes bornées de  $A$  et de  $A^c$ .
23. En utilisant le théorème de Rouché, démontrer le résultat suivant qu'on appelle aussi le "lemme de Zarantonello": soit  $|c| > r$  et soit  $p(z)$  un polynôme de degré  $k$  satisfaisant  $p(c) = 1$ . Alors, on a

$$\max_{|z|=r} |p(z)| \geq \left( \frac{r}{|c|} \right).$$

*Indication.* Comparer la fonction  $f(z) = (z/c)^k - p(z)$  avec  $g(z) = (z/c)^k$ .

<sup>1</sup>Cette figure est prise du livre "Solving Ordinary Differential Equations II" de Hairer & Wanner.





# Chapitre IV

## Séries de Fourier

La théorie de ce chapitre nous permet de mieux comprendre toute sorte de phénomènes *périodiques*. Elle a son origine au 18<sup>ème</sup> siècle dans l'interpolation de fonctions périodiques en astronomie, dans l'étude de la corde vibrante et du son avant d'entrer en force en sciences grâce à la *Théorie de la Chaleur* de Fourier (1822), voir le chapitre V.

Comme exemple, considérons la digitalisation d'un son (Fig. IV.1). On a enregistré 22 000 impulsions par seconde, dont 1024 sont dessinées (ceci correspond à  $1024/22 \approx 46.5$  millisecondes). Il n'y a pas de doute que ces données représentent un phénomène périodique. On est souvent intéressé par l'étude du spectre d'un tel signal, par les fréquences dominantes, par la suppression d'un bruit de fond éventuel, etc.

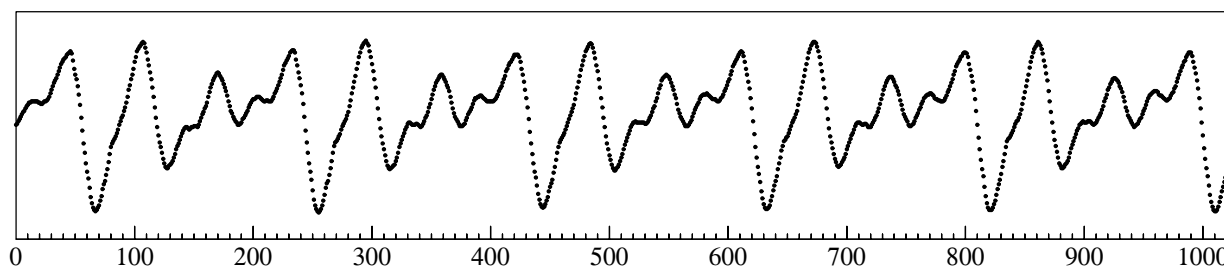


FIG. IV.1: Digitalisation du son “o” prononcé par Martin

A part la résolution de certaines équations aux dérivées partielles, on utilise aujourd'hui des séries de Fourier (sa version discrète FFT, voir le cours “Analyse Numérique”; un des “Top 10 Algorithms of the 20th Century”) et des modifications (ondelettes ou “wavelets”) dans beaucoup d'applications en informatique (compression de sons, compression d'image, JPEG).

### IV.1 Définitions mathématiques et exemples

**Fonctions périodiques.** Les fonctions  $\sin x$ ,  $\cos x$ , mais aussi  $\sin 2x$ ,  $\cos 5x$  sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques, c.-à-d. elles vérifient la relation

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Polynômes trigonométriques.** Les combinaisons linéaires de  $\sin kx$  et de  $\cos kx$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques. Elles sont de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + \sum_{k=1}^N b_k \sin kx, \quad (1.1)$$

où les  $a_k$  et  $b_k$  sont des coefficients réels. On appelle (1.1) un *polynôme trigonométrique*.

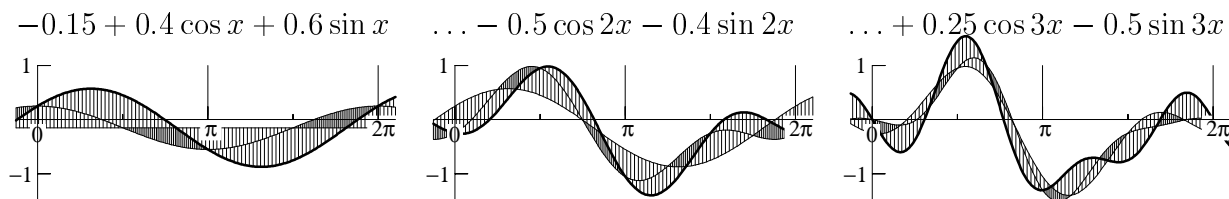


FIG. IV.2: Plusieurs polynômes trigonométriques

**Formule d'Euler et représentation complexe.** La formule d'Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1.2)$$

nous permet de simplifier l'expression (1.1). En effet, en additionnant et en soustrayant la formule (1.2) et  $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$ , on en déduit

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.3)$$

Le polynôme trigonométrique (1.1) peut donc être écrit sous la forme

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} \quad (1.4)$$

où

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{aligned} \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}). \end{aligned}$$

Avec ces formules, on peut passer de la représentation réelle (1.1) à la représentation complexe (1.4) et vice-versa.

**Coefficients de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique.** Considérons d'abord un polynôme trigonométrique  $f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ , multiplions-le par  $e^{-ilx}$  et intégrons de 0 à  $2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ilx} dx = \sum_{k=-N}^N c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = 2\pi c_l,$$

car  $\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} e^{imx} \Big|_0^{2\pi} = 0$  pour  $m \neq 0$  et l'intégrale est égale à  $2\pi$  pour  $m = 0$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Comme les fonctions sont  $2\pi$ -périodiques, on peut écrire  $\int_{-\pi}^{\pi}$  ou  $\int_a^{2\pi+a}$  au lieu de  $\int_0^{2\pi}$ .

Si  $f(x)$  est  $2\pi$ -périodique, mais pas nécessairement un polynôme trigonométrique, on appelle (1.5) les *coefficients de Fourier* de la fonction  $f(x)$ .

**Définition 1.1 (Série de Fourier)** Soit  $f(x)$  une fonction  $2\pi$ -périodique telle que les intégrales dans (1.5) existent. On appelle "série de Fourier de  $f(x)$ " la série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{où} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1.6)$$

et on écrit  $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ . La série de Fourier peut également être écrite sous la forme

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \sin kx$$

avec  $a_k, b_k$  donnés par (1.5).

Pour le moment, on sait seulement qu'on a égalité dans  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  pour des polynômes trigonométriques. Le sujet de ce chapitre est d'étudier la convergence de cette série et la question quand cette identité reste vraie pour des fonctions  $2\pi$ -périodiques arbitraires.

**Exemple 1.2** Étudions comment une fonction  $f(x)$  est approximée par sa série de Fourier. La Fig. IV.3 montre six fonctions  $2\pi$ -périodiques ainsi que plusieurs troncatures de leurs séries de Fourier associées. Les six fonctions sont:

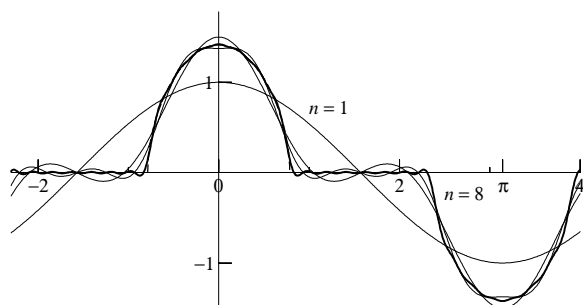
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 \cos 2x} & \text{si } |x| \leq \pi/4 \\ 0 & \text{si } \pi/4 \leq |x| \leq 3\pi/4 \\ -\sqrt{2 \cos 2x} & \text{si } 3\pi/4 \leq |x| \leq \pi \end{cases} \quad f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{si } |x| < \pi$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \quad \text{si } |x| < \pi$$

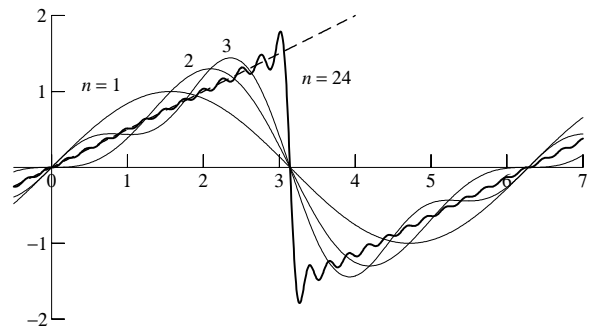
$$f(x) = \log\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \quad \text{si } |x| < \pi$$

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -\pi/4 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

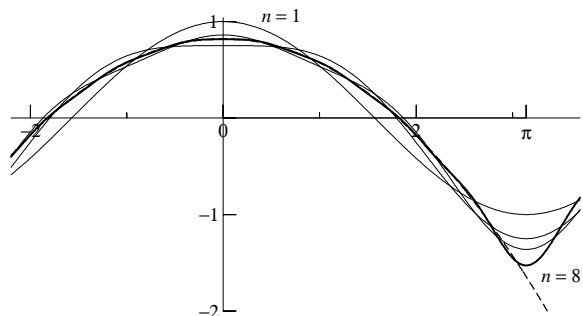
$$f(x) = \frac{\pi}{2} |\sin x|$$



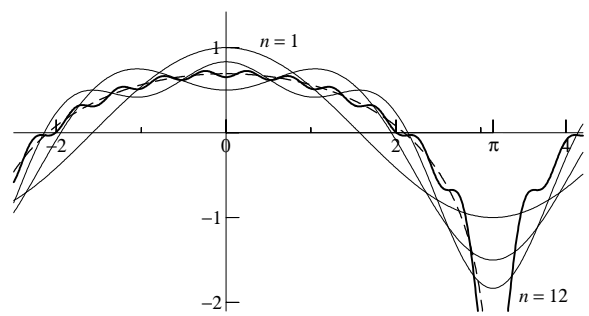
$$y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 7x + \dots$$



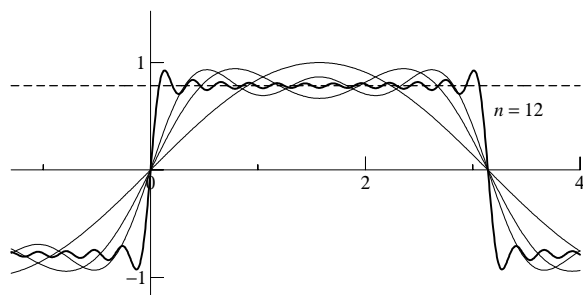
$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$



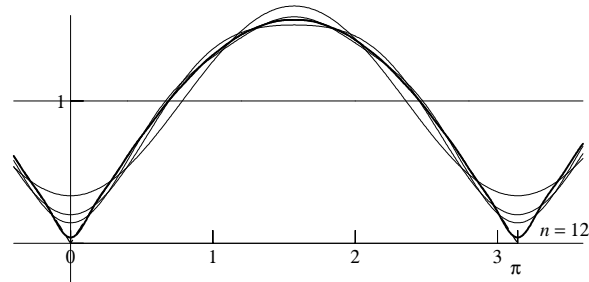
$$y = \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \dots$$



$$y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \dots$$



$$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$



$$y = 1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4x - \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6x - \dots$$

FIG. IV.3: Quelques fonctions  $2\pi$ -périodiques avec des séries de Fourier tronquées associées

Vérifions, par exemple pour la fonction  $f(x) = x/2$  ( $|x| < \pi$ ), que la série de Fourier est celle donnée dans le dessin correspondant de la Fig. IV.3. Un calcul direct donne:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos kx \, dx = 0 \quad (\text{parce que } x \cos kx \text{ est impaire}),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin kx \, dx = \frac{1}{2\pi} \left( -x \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Remarquons que, en général, on a

- $a_k = 0$  si la fonction  $f(x)$  est impaire, c.-à-d. si  $f(-x) = -f(x)$  (série de sinus),
- $b_k = 0$  si la fonction  $f(x)$  est paire, c.-à-d. si  $f(-x) = f(x)$  (série de cosinus).

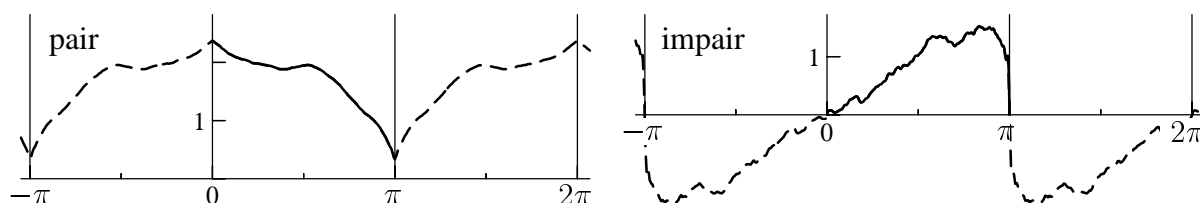


FIG. IV.4: Illustration des fonctions paires et impaires

**Exemple 1.3** Étudions encore la fonction du début de ce chapitre qui est la digitalisation d'un son (Fig. IV.1). Sur l'intervalle comprenant tous les 1024 points elle n'est visiblement pas périodique. Par contre, les premiers 944 points (reliés par des segments de droite) représentent une fonction qui peut être prolongée périodiquement. Sa période est  $T = \frac{944}{22\,000}$  secondes. Si on dénote cette fonction par  $F(t)$  ( $t$  en secondes), la fonction  $f(x) = F(t)$  avec  $x = 2\pi t/T$  devient  $2\pi$ -périodique et on peut appliquer les formules de ce paragraphe. On cherche donc une représentation

$$F(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{2\pi t}{T}.$$

La Fig. IV.5 montre les modules de  $c_k$  en fonction de  $k$ . On les calcule numériquement par FFT, voir le cours "Analyse Numérique". Comme  $f(x)$  est réelle, on a  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . On observe que les coefficients de Fourier dominants correspondent tous à des multiples de 5. La fréquence dominante de ce son est donc de  $5/T = 5 \cdot 22\,000/944 \approx 116.5$  Hz.

Essayons de retrouver le son de la Fig. IV.1 à partir de son spectre (c.-à-d. à partir des coefficients de Fourier  $c_k$ ). Quelques valeurs de  $c_k$  sont données dans le tableau IV.1. Dans la Fig. IV.6 nous dessinons quelques séries de Fourier tronquées. D'abord nous prenons uniquement les termes avec  $k = +15$  et  $k = -15$ , c.-à-d. la fonction  $c_{-15}e^{-15ix} + c_{15}e^{15ix}$ . Ceci donne la fonction

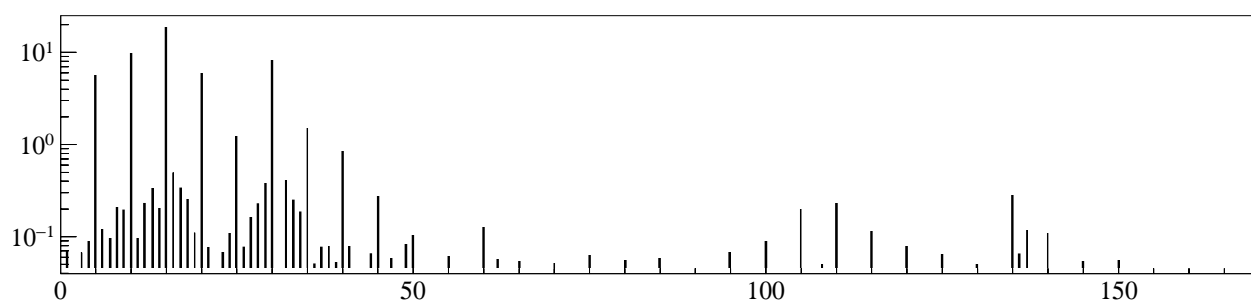


FIG. IV.5: Le spectre (valeur absolue de  $c_k$  en fonction de  $k$ ) pour le son de la Fig. IV.1

$k$	$c_k$	$ c_k $	$k$	$c_k$	$ c_k $
5	$5.61 - 0.35i$	5.62	20	$5.45 - 1.93i$	5.78
10	$4.27 - 8.71i$	9.70	25	$0.31 - 1.19i$	1.23
15	$-13.53 + 12.82i$	18.64	30	$-7.84 - 2.18i$	8.14

TAB. IV.1: Coefficients de Fourier pour le son de la Fig. IV.1

pointillée dans la Fig. IV.6 (un sinus pur). Si on tient en plus compte des coefficients avec  $k = \pm 10$  et  $k = \pm 30$  on obtient la fonction traitillée, et en ajoutant les termes correspondant à  $k = \pm 5$  et  $k = \pm 20$  on obtient la courbe solide. Elle est déjà une très bonne approximation du son actuel. On voit qu'avec très peu d'information on peut reconstituer le signal original.

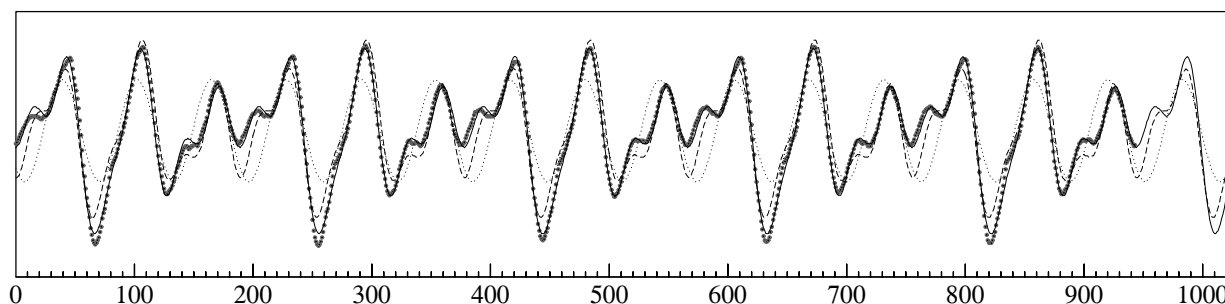


FIG. IV.6: Approximation par un polynôme trigonométrique

## IV.2 Lemme de Riemann et fonctions à variation bornée

Si l'on se donne une fonction "arbitraire"  $f(x)$  sur  $[0, 2\pi]$ , et si l'on calcule les coefficients  $a_k$ ,  $b_k$  respectivement  $c_k$  par (1.5), on peut se demander :

- la série de Fourier va-t-elle converger?, converger uniformément?
- au cas où elle converge, va-t-elle converger vers  $f(x)$ ?

Ces questions, affirmées dans un élan de jeunesse par Fourier à partir de 1807, se sont avérées par la suite plus difficiles que prévues.

Une première approche pour étudier la convergence de la série de Fourier consiste à dériver des majorations pour  $|c_k|$  et d'utiliser le fait que  $|c_k e^{ikx}| \leq |c_k|$ .

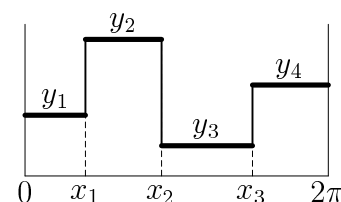
**Lemme 2.1** Soit  $e : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier sur un nombre fini d'intervalles, alors les coefficients de Fourier (1.5) sont majorés par

$$|a_k| \leq \frac{Const}{|k|}, \quad |b_k| \leq \frac{Const}{|k|}, \quad |c_k| \leq \frac{Const}{|k|} \quad \text{pour tout } k. \quad (2.1)$$

*Démonstration.* Pour des fonctions en escalier (voir le petit dessin) on peut explicitement calculer les coefficients de Fourier. On obtient, par exemple,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n y_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i k} (y_1 + e^{-ikx_1}(y_2 - y_1) + e^{-ikx_2}(y_3 - y_2) + \dots - y_n), \end{aligned}$$

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi|k|} (|y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + \dots + |y_n - y_1|) \leq \frac{Const}{|k|}.$$



Les estimations pour  $a_k$  et  $b_k$  sont obtenues par leur relation avec  $c_k$  et  $c_{-k}$

□

**Lemme 2.2 (Lemme de Riemann)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable (au sens de Riemann), alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin kx \, dx = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx \, dx = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{\pm i k x} \, dx = 0.$$

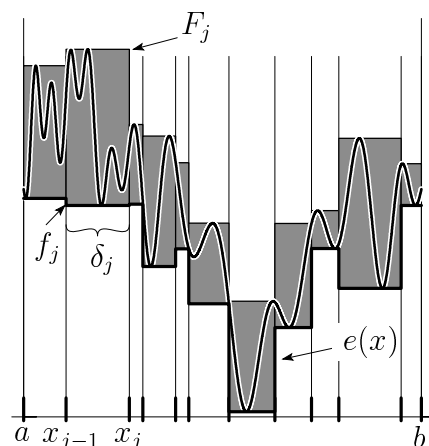
Ceci implique que les coefficients de Fourier satisfont  $a_k \rightarrow 0$ ,  $b_k \rightarrow 0$  et  $c_k \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe un partage  $D$  de l'intervalle  $[a, b]$  tel que (dans la notation de [HW, p. 222], voir le dessin à droite)

$$S(D) - s(D) = \sum_{j=1}^n (F_j - f_j) \delta_j < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Notons  $e(x)$  la fonction en escalier qui assume les valeurs  $f_j$  sur  $(x_{j-1}, x_j)$ . Pour cette fonction nous avons par (2.1) que pour  $N$  suffisamment grand,

$$\left| \int_a^b e(x) e^{\pm i k x} \, dx \right| < \varepsilon \quad \text{si } k \geq N. \quad (2.3)$$



Dans chaque intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$  on a  $|(f(x) - e(x))e^{\pm i k x}| \leq (F_j - f_j)$ , et l'on trouve par (2.2) que la différence des intégrales sur  $f(x)e^{\pm i k x}$  et  $e(x)e^{\pm i k x}$  est plus petite que  $\varepsilon$ . Ainsi, on a l'estimation  $|\int_a^b f(x)e^{\pm i k x} \, dx| < 2\varepsilon$  pour  $k \geq N$ .  $\square$

Le Théorème 2.4 ci-après est le résultat d'un long développement commençant par S.D. Poisson (*Th. math. Chaleur* 1835, p. 185), G.G. Stokes (1849), jusqu'à F. Riesz (*Math. Zeitschr.* 2, 1918, p. 312). Il est inspiré par l'estimation de la démonstration du Lemme 2.1, laquelle nous amène à la définition suivante (C. Jordan, *Cours d'Analyse*, Tome I) :

**Définition 2.3 (Variation totale et fonctions à variation bornée)** La variation totale d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$V_{[a,b]}f := \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b} \left( \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right).$$

On dit que  $f$  est à variation bornée si  $V_{[a,b]}f < \infty$ .

Afin de mieux comprendre les fonctions à variation bornée, voici quelques propriétés :

- Une fonction est à variation bornée si et seulement si elle est différence de deux fonctions monotones croissantes (voir Fig. IV.7).

Pour une fonction monotone  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on a  $V_{[a,b]}u = |u(b) - u(a)|$ . Elle est donc à variation bornée. Comme  $V_{[a,b]}(-u) = V_{[a,b]}(u)$  et  $V_{[a,b]}(u + v) \leq V_{[a,b]}u + V_{[a,b]}v$ , aussi la différence de deux fonctions monotones est à variation bornée.

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  à variation bornée. Avec la notation  $v(x) := V_{[a,x]}f$  on a la relation  $|f(y) - f(x)| \leq V_{[x,y]}f = v(y) - v(x)$  pour  $x < y$ . Par conséquent,  $v(x) - f(x) \leq v(y) - f(y)$  et aussi  $v(x) + f(x) \leq v(y) + f(y)$ . Les deux fonctions  $f^+ = (v + f)/2$  et  $f^- := (v - f)/2$  sont alors monotones croissantes et leur différence donne la fonction  $f$  (dans Fig. IV.7 on a ajouté la constante  $f(0)/2$  aux deux fonctions  $f^+$  et  $f^-$ ).

- Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée, alors  $f$  est intégrable (au sens de Riemann).

Ceci est une conséquence du fait que chaque fonction monotone est intégrable au sens de Riemann ([HW] p. 228).

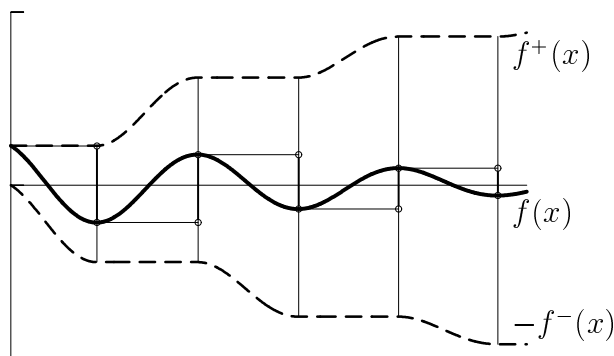


FIG. IV.7: Fonction à variation bornée comme somme de fonctions monotones

- Si  $f$  est continûment différentiable, alors  $f$  est à variation bornée.  
Sur l'intervalle compact  $[a, b]$  on a  $|f'(x)| \leq M$ . Le théorème de Lagrange nous donne alors

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n |f'(\xi_j)| \cdot |x_j - x_{j-1}| \leq M(b - a).$$

- Une fonction  $f$  peut être à variation bornée sans être continue.  
Considérons, par exemple, des fonctions en escalier.
- Une fonction  $f$  peut être continue sans être à variation bornée.  
Un exemple est la fonction  $f(x) = x \sin(1/x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Théorème 2.4** a) Si  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée, alors les coefficients de Fourier satisfont pour  $k \neq 0$

$$|c_k| \leq \frac{\text{Const}}{|k|} \quad (\text{de même pour } a_k \text{ et } b_k). \quad (2.4)$$

b) Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $2\pi$ -périodique,  $p - 1$  fois continûment différentiable et  $p$  fois différentiable par morceaux avec  $f^{(p)}|_{[0, 2\pi]}$  à variation bornée, alors

$$|c_k| \leq \frac{\text{Const}}{|k|^{p+1}} \quad (\text{de même pour } a_k \text{ et } b_k). \quad (2.5)$$

*Démonstration.* a) Pour un  $k$  fixé, nous approchons  $f(x)$  de plus en plus finement par des fonctions en escalier  $e(x)$ , ainsi les intégrales

$$\int_a^b e(x) e^{\pm i k x} dx \quad \text{convergent vers} \quad \int_a^b f(x) e^{\pm i k x} dx$$

(voir la démonstration du Lemme de Riemann). Mais, par la démonstration du Lemme 2.1, ces premières intégrales restent toujours majorées par  $V_{[0, 2\pi]} e / (2\pi |k|) \leq V_{[0, 2\pi]} f / (2\pi |k|) \leq \text{Const} / |k|$  avec une constante qui ne dépend pas de la fonction  $e(x)$ .

b) Si  $f(x)$  est différentiable par morceaux, on fait une intégration par parties

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{f(x) e^{-ikx}}{-2k\pi i} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2k\pi i} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.6)$$

Le terme intégré disparaît grâce à la périodicité de  $f(x)$ . Le deuxième terme est le coefficient de Fourier de la fonction dérivée  $f'(x)$  avec un facteur  $(ik)^{-1}$  en plus. On peut donc appliquer l'estimation (2.4) à  $f'(x)$ . Si  $f(x)$  possède plus de régularité on peut répéter cette intégration par parties pour obtenir (2.5).  $\square$

**Exemples de la Fig. IV.3.** La deuxième et la cinquième fonction de la Fig. IV.3 sont à variation bornée, mais elles ne sont pas continues sur tout l'intervalle. On comprend alors pourquoi les coefficients de Fourier diminuent comme  $Const/k$ . La quatrième fonction n'est pas bornée et donc pas à variation bornée. Cela n'empêche pas les coefficients de diminuer aussi comme  $Const/k$ .

La troisième et la sixième fonction de la Fig. IV.3 possèdent une première dérivée qui est à variation bornée, d'où un comportement en  $Const/k^2$ . La première fonction est à variation bornée, mais sa dérivée ne l'est pas. On peut démontrer (par le produit de Wallis) que les coefficients de Fourier se comportent comme  $Const/k^{1.5}$ .

## IV.3 Etude élémentaire de la convergence

Comme  $|e^{ikx}| = 1$ , nous savons par le critère de Weierstrass ([HW], p. 217) que la série de Fourier (1.6) est uniformément convergente si la série de termes  $c_k$  converge absolument. Par conséquent, sous la condition (b) du Théorème 2.4, il est certain que la série de Fourier converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$  vers une fonction continue. Mais, on ne sait pas encore si elle converge vraiment vers la fonction  $f(x)$ . Dans le cas où  $|c_k| \approx C/k$  (cas (a) du Théorème 2.4), ce raisonnement ne peut pas être appliqué.

Pour étudier la convergence vers  $f(x)$  de la série de Fourier, nous considérons les sommes partielles

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{où} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (3.1)$$

Un résultat intéressant avec une preuve extrêmement simple a été publiée par P.R. Chernoff, *Amer. Math. Monthly*, vol. 87, No. 5 (1980), p. 399–400.

**Théorème 3.1** Soit  $f(x)$  intégrable sur  $[0, 2\pi]$  et différentiable au point  $x_0 \in (0, 2\pi)$ . Alors les sommes partielles  $S_n(x_0)$  convergent vers  $f(x_0)$  si  $n \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.* Après soustraction d'une constante, nous pouvons supposer que  $f(x_0) = 0$ . Comme  $f(x)$  est différentiable en  $x_0$ , on a par Carathéodory que  $f(x) = \psi(x) \cdot (x - x_0)$  avec  $\psi(x)$  continue en  $x_0$ . L'idée géniale est de poser

$$g(x) := \frac{f(x)}{e^{i(x-x_0)} - 1} = \frac{\psi(x)}{i} \cdot \frac{i(x - x_0)}{e^{i(x-x_0)} - 1}. \quad (3.2)$$

La fonction  $z/(e^z - 1)$  nous est bien connu (voir les "Nombres de Bernoulli" dans (I.9.3)) et possède une singularité supprimable en  $z = 0$ . Donc  $g(x)$  est continue en  $x_0$  et intégrable sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Notons  $c_k$  les coefficients de Fourier de  $f(x)$  et  $d_k$  les coefficients de Fourier de  $g(x)$ . Par (1.6) nous avons alors

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) (e^{i(x-x_0)} - 1) e^{-ikx} dx = d_{k-1} e^{-ix_0} - d_k. \quad (3.3)$$

Avec cette formule, les sommes partielles  $S_n(x)$ , évaluées en  $x = x_0$ , deviennent

$$S_n(x_0) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx_0} = \sum_{k=-n}^n (d_{k-1} e^{i(k-1)x_0} - d_k e^{ikx_0}) = d_{-n-1} e^{i(-n-1)x_0} - d_n e^{inx_0}, \quad (3.4)$$

ce qu'on appelle une *série télescopante*. Le Lemme de Riemann, appliqué à la fonction  $g(x)$ , montre que  $d_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . Nous avons alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = 0 = f(x_0)$ .  $\square$



## IV.4 Noyau de Dirichlet et convergence ponctuelle

“L’auteur de ce travail (Cauchy) avoue lui même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est pourtant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m’a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n’est pas même suffisante pour les cas auxquels l’auteur la croit applicable.”

(Dirichlet, *Crelle Journal*, vol. 4 (1829), p. 157)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (pour plus de précisions voir H. Minkowski, *Jahresber. DMV* XIV, 1905, p. 149–163), né en Allemagne en 1805 de parents émigrés français, passe les années 1822–1827 à Paris; cette visite aura des conséquences bouleversantes pour les mathématiques. Il fait la connaissance de Fourier, Poisson et Cauchy. Poisson a publié une première preuve de convergence des séries de Fourier, où Cauchy découvre une faute. Cauchy publie ensuite une deuxième preuve, où Dirichlet découvre une faute (voir citation). Après son retour en Allemagne (à 22 ans, sur initiative d’Alexander von Humboldt à Breslau, puis à Berlin) il écrit un chef-d’œuvre (*Crelle Journal* 1829), qui donne la première preuve rigoureuse de convergence des séries de Fourier. De plus, cet article est à l’origine du concept moderne d’une fonction. Dirichlet devient ensuite le père spirituel du jeune Riemann et lui transmet la passion des séries trigonométriques, qui donnera naissance, entre autres, à l’intégrale de Riemann. De Riemann, l’intérêt de ces séries passe à Weierstrass (son exemple d’une fonction sans dérivée est une telle série) et à ses élèves (Heine), qui propose en 1870 au jeune Cantor d’étudier la convergence des séries trigonométriques. Ces recherches de Cantor l’amènent à la théorie des ensembles, sans laquelle les mathématiques du 20<sup>e</sup> siècle seraient impensables.

Considérons les sommes partielles  $S_n(x)$  d’une série de Fourier, comme elles sont introduites dans (3.1). Si on écrit les intégrales pour  $c_k$  avec une nouvelle variable d’intégration  $t$ , on peut insérer ces formules dans la série et échanger somme et intégration. On obtient ainsi

$$S_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \cdot e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(t) \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} \right) dt = \int_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t) dt$$

où

$$D_n(x-t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} \quad (4.1)$$

est le *noyau de Dirichlet*. Une formule plus compacte est donnée dans le lemme suivant.

**Lemme 4.1 (Noyau de Dirichlet)** *Le noyau de Dirichlet est donné par*

$$D_n(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n+1/2)s}{\sin s/2} \quad (4.2)$$

*et la somme partielle de la série de Fourier satisfait*

$$S_n(x) = \int_0^\pi (f(x+s) + f(x-s)) D_n(s) ds. \quad (4.3)$$

*Démonstration.* En écrivant (4.1) sous forme d’une série géométrique, on obtient à l’aide de la formule d’Euler

$$\begin{aligned} 2\pi D_n(s) &= e^{-ins} (1 + e^{is} + e^{2is} + \dots + e^{2nis}) = e^{-ins} \frac{1 - e^{(2n+1)is}}{1 - e^{is}} \\ &= \frac{e^{-ins} - e^{i(n+1)s}}{1 - e^{is}} = \frac{e^{-i(n+1/2)s} - e^{i(n+1/2)s}}{e^{-is/2} - e^{is/2}} = \frac{\sin(n+1/2)s}{\sin s/2}. \end{aligned}$$

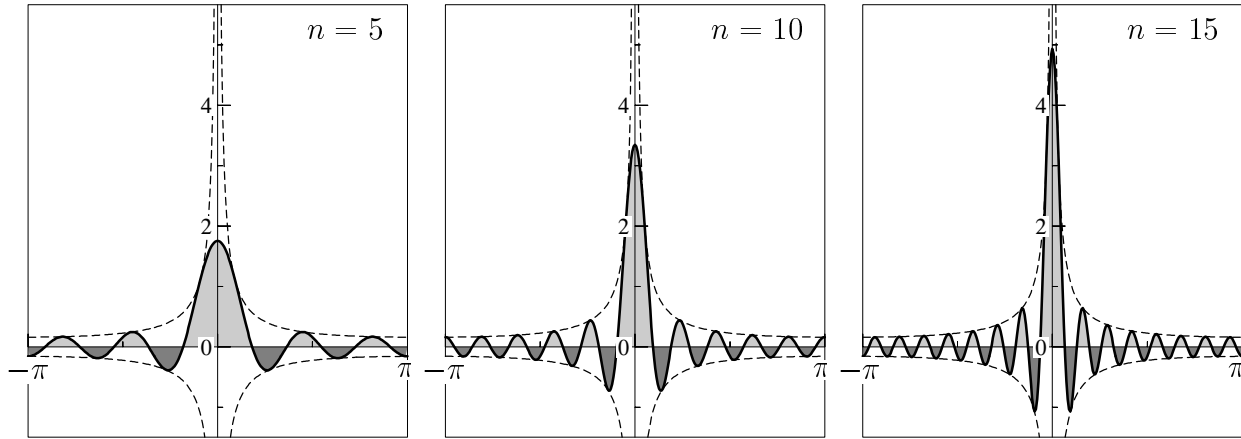


FIG. IV.8: Noyaux de Dirichlet  $D_n(s)$  avec l'enveloppe  $1/(2\pi \sin(s/2))$  en pointillée.

La formule pour la somme partielle est donnée par le calcul suivant:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \int_{x-2\pi}^x f(x-s) D_n(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_n(s) ds \\ &= \int_0^{\pi} f(x-s) D_n(s) ds + \int_{-\pi}^0 f(x-s) D_n(s) ds = \int_0^{\pi} (f(x+s) + f(x-s)) D_n(s) ds. \end{aligned}$$

Dans la première ligne on a utilisé la  $2\pi$ -périodicité de  $D_n(s)$  et de  $f(x-s)$  et dans la deuxième ligne le fait que  $D_n(s) = D_n(-s)$ .  $\square$

Nous sommes ici à un point, où K. Knopp écrit (voir page 362): “Durch diesen Satz sind zwar die Fragen . . . noch keineswegs . . . erledigt, . . . aber es ist jedenfalls eine wesentlich neue Angriffsmöglichkeit zu ihrer Erledigung geschaffen.” Les fonctions  $D_n(s)$  ressemblent fort à une *suite de Dirac* (voir [HW, p. 266]) et on pourrait s’attendre à ce que la convolution  $\int_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t) dt$  tend vers  $f(x)$  si  $n \rightarrow \infty$ . Malheureusement, les  $D_n(s)$  ne forment pas précisément une suite de Dirac, car les *constantes de Lebesgue*

$$\lambda_n := \int_0^{2\pi} |D_n(s)| ds \rightarrow \infty \quad \text{pour } n \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

On doit soigneusement étudier l’intégrale dans (4.3) et profiter des annulations dues aux changements de signe dans  $D_n(s)$ .

Pour le résultat suivant, l’hypothèse essentielle sera que  $f(x)$  est à variation bornée. Rappelons qu’une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions monotones. Pour une fonction monotone la limite à droite  $f(x_0+) := \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  et la limite à gauche  $f(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  existent. Donc elles existent aussi pour les fonctions à variation bornée.

**Théorème 4.2 (Dirichlet 1829)** *Soit  $f(x)$  une fonction  $2\pi$ -périodique et  $f|_{[0,2\pi]}$  à variation bornée. Alors la série de Fourier converge pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  et*

- si  $f$  est continue en  $x_0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0)$ ,
- si  $f$  est discontinue en  $x_0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0-) + f(x_0+)). \quad (4.5)$$

(le premier cas est en fait un cas particulier du deuxième).

**Démonstration.** Nous utiliserons la propriété  $\int_0^\pi D_n(s) ds = 1/2$  du noyau de Dirichlet qui est une conséquence de  $D_n(-s) = D_n(s)$  et de  $\int_{-\pi}^\pi D_n(s) ds = \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} e^{iks} ds = 1$ . La formule (4.3) nous suggère de considérer l'expression

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x_0 + s) D_n(s) ds - \frac{f(x_0+)}{2} &= \int_0^\pi (f(x_0 + s) - f(x_0+)) D_n(s) ds \\ &= \int_0^\pi g(s) \frac{\sin((n+1/2)s)}{s} ds \quad \text{où} \quad g(s) = \frac{1}{\pi} (f(x_0 + s) - f(x_0+)) \frac{s/2}{\sin s/2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le but est de démontrer que cette dernière intégrale tend vers zéro pour  $n \rightarrow \infty$ . Comme  $f(x)$  est à variation bornée, on peut supposer sans perte de généralité que  $f(x)$  et donc aussi  $g(s)$  sont monotones croissantes.

Par définition de  $g(s)$  on a  $\lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 0$ . Ceci implique que, pour un  $\varepsilon > 0$  arbitraire, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$0 \leq g(s) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < s < \delta. \quad (4.7)$$

Nous partageons alors l'intégrale (4.6) en (en utilisant l'abréviation  $m := n + 1/2$ )

$$\int_0^\delta g(s) \frac{\sin ms}{s} ds + \int_\delta^\pi g(s) \frac{\sin ms}{s} ds. \quad (4.8)$$

L'intégrale sur l'intervalle  $[\delta, \pi]$  tend vers zéro par le Lemme 2.2 (Lemme de Riemann), car la singularité en  $s = 0$  est écartée. Tout l'art (de Dirichlet) réside dans une estimation soignée de l'intégrale sur l'intervalle  $[0, \delta]$ . Ici nous avons besoin de la monotonie de  $g(s)$ , ce qui est une conséquence de l'hypothèse sur la variation bornée de  $f(x)$ .

L'idée est de remplacer la fonction  $g(s)$  par une fonction en escalier  $e(s)$ , qui prend la valeur  $e_k = g((2k-1)\pi/m)$  sur l'intervalle  $[2(k-1)\pi/m, 2k\pi/m]$ . Comme  $g(s)$  est monotone croissante, on a  $e(s) \geq g(s)$  si  $\sin ms > 0$  et  $e(s) \leq g(s)$  si  $\sin ms < 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^\delta g(s) \frac{\sin ms}{s} ds &\leq \int_0^\delta e(s) \frac{\sin ms}{s} ds \\ &= e_1 \cdot I_1 + e_2 \cdot I_2 + \dots \leq \varepsilon \cdot \int_0^\delta \frac{\sin ms}{s} ds \leq \varepsilon M \end{aligned}$$

car  $I_1, I_2, \dots$  sont des intégrales avec valeur positive. La constante  $M = 1.8519$  majore l'intégrale

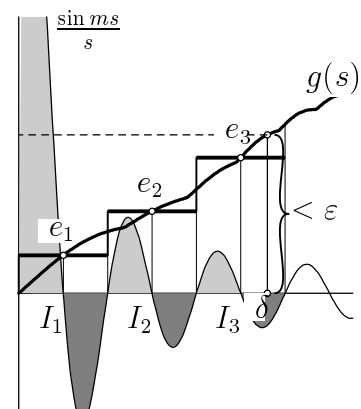
$$\int_0^\delta \frac{\sin ms}{s} ds = \int_0^{m\delta} \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma = Si(m\delta)$$

(voir Figure IV.9 à droite). Pour obtenir une minoration de la même intégrale, nous remplaçons  $g(s)$  par une fonction en escalier qui prend la valeur  $g(2k\pi/m)$  sur l'intervalle  $[(2k-1)\pi/m, (2k+1)\pi/m]$ . Les deux estimations ensemble montrent que la première intégrale de (4.8) devient arbitrairement petite. Ceci démontre que l'expression (4.6) converge vers zéro pour  $n \rightarrow \infty$ .

De la même manière, on démontre

$$\int_0^\pi f(x_0 - s) D_n(s) ds - \frac{f(x_0-)}{2} \rightarrow 0$$

et en utilisant la formule (4.3) on en déduit (4.5). □



## IV.5 Le phénomène de Gibbs

“Willard GIBBS, 1839-1903, war der grösste Thermodynamiker Amerikas und zugleich, neben BOLTZMANN, der Begründer der statistischen Mechanik.”

(A. Sommerfeld, *Part. Diffgl. der Physik*, 1947, p. 10)

Proche d’une discontinuité  $x_0$  d’une fonction  $f(x)$ , la série de Fourier tronquée ne donne pas une bonne approximation (voir les 2ième et 5ième dessin de la figure IV.3). Bien que pour chaque  $x \neq x_0$  (où  $f$  est continue) les sommes partielles  $S_n(x)$  convergent vers  $f(x)$ , l’erreur maximale est indépendante de  $n$  (pour  $n \rightarrow \infty$ ). Mais l’endroit où l’erreur est maximale tend vers la discontinuité  $x_0$ ; voir le dessin de gauche de la figure IV.9. Cette propriété s’appelle le phénomène de Gibbs (1899).

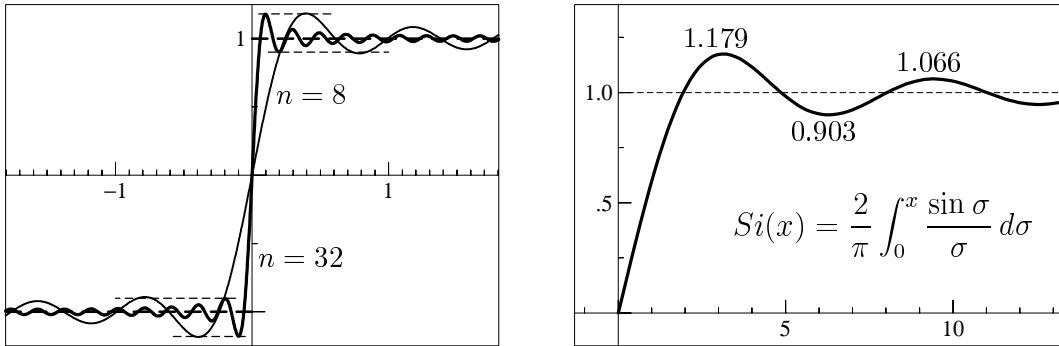


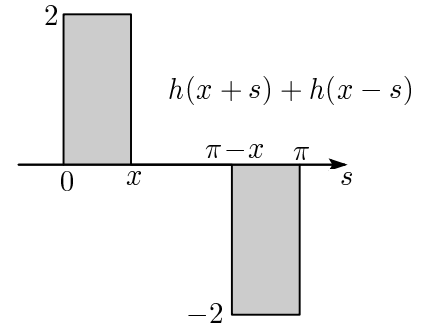
FIG. IV.9: Sommes partielles  $S_n(x)$  pour une fonction en escalier (gauche) et la fonction  $Si(x)$  (droite)

**Cas particulier.** Pour expliquer le phénomène de Gibbs, considérons d’abord la fonction en escalier (dessin de gauche de la figure IV.9)

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Les sommes partielles de la série de Fourier associée à cette fonction satisfont pour  $x \in [0, \pi/2]$  (voir le lemme 4.1)

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^\pi (h(x+s) + h(x-s)) D_n(s) ds \\ &= 2 \int_0^x D_n(s) ds - 2 \int_{\pi-x}^\pi D_n(s) ds. \end{aligned}$$



Supposons maintenant que  $(n + \frac{1}{2})x \leq c$  (par exemple avec  $c \approx 10$ ). La deuxième intégrale est majorée par  $\mathcal{O}(n^{-1})$  parce que  $|D_n(s)| \leq (\pi\sqrt{2})^{-1} \approx 0.23$  pour  $s \in [\pi/2, \pi]$  et parce que la longueur de l’intervalle d’intégration est  $x = \mathcal{O}(n^{-1})$ . En utilisant  $\sin \frac{s}{2} = \frac{s}{2}(1 + \mathcal{O}(s^2))$  et la substitution  $\sigma = (n + \frac{1}{2})s$ , la première intégrale devient

$$2 \int_0^x D_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(n + 1/2)s}{\sin s/2} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)x} \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

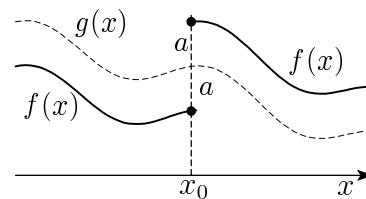
Avec la fonction  $Si(x)$ , définie dans le dessin de droite de la figure IV.9, nous avons donc

$$S_n(x) = Si\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Cela démontre que, pour  $n$  grand, la fonction  $S_n(x)$  est maximale pour  $(n + \frac{1}{2})x \approx 3.2$  et que la valeur maximale de  $S_n(x)$  est d’environ 1.179, c.-à-d. presque 18% trop grand.

**Cas général.** Considérons une fonction  $2\pi$ -périodique  $f(x)$  qui possède une discontinuité (saut de hauteur  $2a$ ) au point  $x_0$ . Définissons une fonction continue  $g(x)$  afin que

$$f(x) = g(x) + ah(x - x_0),$$



où  $h(x)$  est la fonction du cas particulier. Supposons que les sommes partielles de la série de Fourier associée à la fonction  $g(x)$  convergent uniformément vers cette fonction dans un voisinage de  $x_0$ . Nous avons donc que, proche de  $x_0$ , les fonctions  $S_n(x)$  associées à  $f(x)$  satisfont

$$S_n(x) = g(x) + a \operatorname{Si}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Ceci explique l'erreur proche de la discontinuité dans le 2ième et le 5ième dessin de la figure IV.3.

## IV.6 Fonctions continues, Théorème de Fejér

“Fejér avait l'habitude de travailler couché sur le dos par terre, et en regardant le plafond. Sa femme de ménage s'en est étonnée, et pensait d'abord qu'il était malade. Lorsque Fejér l'a rassuré qu'il était en bonne santé, elle a explosé : Monsieur le Professeur ! Vous allez donner quelques heures à l'université, puis vous rentrez et vous vous couchez par terre. Mais enfin, quand travaillez-vous ?”

(Sain Márton, *A matematikátörténeti ABC*, trad. et comm. par E. Bayer)

Un des grands mystères du 19e siècle a été de savoir si, pour chaque fonction *continue*, la série de Fourier converge vers  $f$ . Malgré les défauts de la preuve de Cauchy (1826) pour ce résultat, il a été généralement accepté (par Dirichlet et Riemann). Un contre-exemple de du Bois-Reymond (1873) a mis fin à cet espoir et, vers la fin du 19e siècle, *le seul* résultat rigoureusement établi concernant la convergence des ces séries a été la preuve de Dirichlet de 1829, suivie de quelques variantes (Dini, Jordan).

Dans cette situation morose, une sensation éclate: un jeune Hongrois de 20 ans publie dans les Comptes Rendus de 1900 (p. 984) sur 4 pages la preuve que, *pour chaque fonction continue* périodique, les *sommes de Cesàro* convergent uniformément vers  $f$ . Fejér est un des principaux architectes d'une école mathématique hongroise de tout premier ordre (Lanczos, Erdős, Erdélyi, F. et M. Riesz, Turán, Pólya, Szegő, J. von Neumann, Kalmár, Kàrmàn, Halmos, Haar, Wigner).

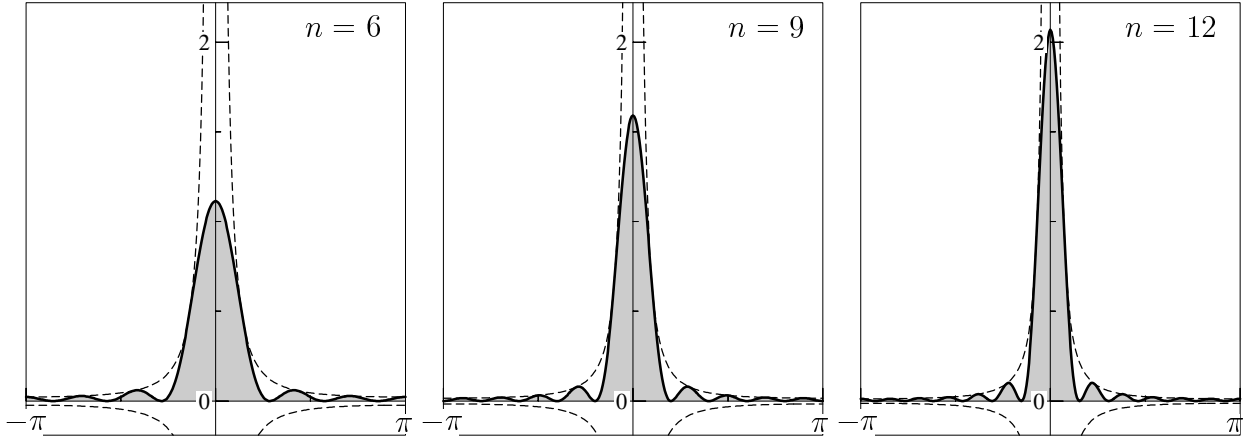
**Sommes de Cesàro.** Dans les années 1890, de nombreux chercheurs (Stieltjes, Cesàro, Poincaré et E. Borel) ont tenté de “dompter” des séries irrégulières en théorie des nombres ou des séries divergentes par des processus de “lissage” ou “sommation”. La méthode la plus simple est celle de Cesàro (voir aussi Cauchy 1821, p. 59): on remplace une suite  $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$  par

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}}{n}. \quad (6.1)$$

Un exercice “must” pour tout cours de première année (voir [HW, p. 187]): si la suite des  $s_n$  converge, alors la suite des  $\sigma_n$  converge aussi et vers la même limite. Mais cette dernière peut converger, même si la première ne converge pas. Par exemple,  $\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ .

Si l'on applique cette idée à la suite de sommes partielles  $S_n(x)$  de (3.1), on aura la formule

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S_j(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq j} c_k e^{ikx} = \sum_{|k| < n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{ikx}. \quad (6.2)$$

FIG. IV.10: Noyaux de Fejér  $F_n(s)$ 

En exprimant les sommes partielles  $S_n(x)$  à l'aide du noyau de Dirichlet  $D_n(s)$  de (4.2), on obtient pour la somme partielle de Cesàro

$$\sigma_n(x) = \int_0^{2\pi} F_n(x-t) f(t) dt \quad (6.3)$$

où le noyau de Fejér  $F_n(s)$  est donné par

$$F_n(s) = \frac{D_0(s) + D_1(s) + \dots + D_{n-1}(s)}{n}. \quad (6.4)$$

**Lemme 6.1 (Noyau de Fejér)** *Les noyaux de Fejér satisfont pour  $s \in [-\pi, \pi]$ ,*

$$F_n(s) = \frac{1}{2\pi n} \left( \frac{\sin \frac{n}{2}s}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2. \quad (6.5)$$

*Démonstration.* L'identité  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$  implique que

$$2 \sin\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)s\right) = \sum_{j=0}^{n-1} (\cos(js) - \cos((j+1)s)) = 1 - \cos(ns) = 2 \sin^2\left(\frac{ns}{2}\right).$$

La définition (6.4) ensemble avec la formule (4.2) pour  $D_j(s)$  donnent (6.5).  $\square$

**Lemme 6.2 (Suite de Dirac)** *Les noyaux de Fejér forment une suite de Dirac, c.-à-d., ils satisfont*

$$F_n(s) \geq 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds = 1 \quad \text{pour tout } n \quad (6.6)$$

*et, pour  $\varepsilon > 0$  et  $\pi \geq \delta > 0$  arbitraire, il existe  $N$  tel que*

$$\int_{s \notin (-\delta, \delta)} F_n(s) ds \leq \varepsilon \quad \text{pour } n \geq N. \quad (6.7)$$

*Démonstration.* L'affirmation (6.6) est une conséquence immédiate de (6.5), de (6.4) et du fait que  $\int_{-\pi}^{\pi} D_j(s) ds = 1$ . Pour démontrer (6.7), fixons  $\varepsilon > 0$  et  $\pi \geq \delta > 0$  arbitraire. On peut donc trouver un  $N$  tel que pour  $n \geq N$  et pour  $\delta \leq |s| \leq \pi$  l'estimation  $F_n(s) \leq \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2\pi}$  est vraie. Ceci démontre (6.7). Notons qu'on a aussi

$$1 - \varepsilon < \int_{-\delta}^{\delta} F_n(s) ds \leq 1, \quad (6.8)$$

car  $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds = 1$ .  $\square$

**Théorème 6.3 (Fejér 1900)** a) Pour chaque fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ , les sommes de Cesàro de la série de Fourier convergent uniformément vers  $f(x)$ .

b) Au cas où  $f(x)$  est continue par morceaux<sup>1</sup>, la convergence vers  $f(x)$  est uniforme dans chaque intervalle fermé sans point de discontinuité, et on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} \quad (6.9)$$

en chaque point  $x_0$  de discontinuité.

*Démonstration.* a) La preuve est similaire à la preuve de Landau du “Théorème d’Approximation de Weierstrass” ([HW, p. 265]). Nous décomposons la différence entre  $\sigma_n(x)$  et  $f(x)$  en trois parties (d’abord on restreint l’intégrale sur  $(x - \delta, x + \delta)$ , puis on remplace  $f(t)$  par  $f(x)$ ):

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \left| \int_0^{2\pi} f(t) F_n(t-x) dt - \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) F_n(t-x) dt \right| \quad ((1))$$

$$+ \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) F_n(t-x) dt - \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x) F_n(t-x) dt \right| \quad ((2))$$

$$+ \left| f(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} F_n(t-x) dt - f(x) \right|. \quad ((3))$$

D’après des théorèmes d’Analyse I ([HW], p. 207 et 219),  $f(t)$  est bornée et uniformément continue sur l’intervalle compact  $[0, 2\pi]$ .

Nous commençons par choisir un  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Puis, nous avons un  $\delta > 0$  pour satisfaire  $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$  uniformément en  $x$  si  $|t - x| < \delta$ . Ensuite, nous prenons  $n$  suffisamment grand pour satisfaire (6.7) et donc aussi (6.8). Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} |((1))| &\leq \varepsilon M && \text{par (6.7) et } |f(t)| \leq M \\ |((2))| &\leq \varepsilon && \text{car } |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ uniformément en } x \\ |((3))| &\leq \varepsilon M && \text{par (6.8) et } |f(t)| \leq M. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Donc,  $|\sigma_n(x) - f(x)| \leq (2M + 1)\varepsilon$  pour tout  $x \in [0, 2\pi]$  et la convergence uniforme est établie.

b) Supposons que  $f(x)$  est seulement continue par morceaux. Comme dans la démonstration du Lemme 4.1, formule (4.3), nous avons

$$\sigma_n(x) = \int_0^\pi (f(x+s) + f(x-s)) F_n(s) ds.$$

La démonstration est maintenant similaire à celle du Théorème 4.2, mais beaucoup plus simple. Nous considérons

$$\int_0^\pi f(x_0+s) F_n(s) ds - \frac{f(x_0+)}{2} = \int_0^\pi (f(x_0+s) - f(x_0+)) F_n(s) ds \quad (6.11)$$

et nous séparons l’intégrale en  $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$  où  $\delta > 0$  est tel que  $|f(x_0+s) - f(x_0+)| < \varepsilon$  pour  $0 < s < \delta$ . Ainsi, l’intégrale sur  $[0, \delta]$  est majorée par  $\varepsilon$  et celle sur  $[\delta, \pi]$  par  $M\varepsilon$ , car  $f(x)$  est bornée et le noyau de Fejér satisfait (6.7).  $\square$

<sup>1</sup>Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue par morceaux s’il existe un partage  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  tel que  $f(x)$  est continue sur chaque intervalle ouvert  $(x_j, x_{j+1})$  et à chaque point de discontinuité la limite à droite  $f(x_j+)$  et la limite à gauche  $f(x_j-)$  existent.

### Contre-Exemple de Fejér (fonction continue avec série de Fourier divergente)

Neuf ans après son premier coup d'éclat, Fejér trouve une deuxième “trivialitászavá” pour faire un pied de nez aux grands maîtres du 19e siècle : son exemple d'une fonction continue pour laquelle la série de Fourier diverge en un point (*Crelle J.* 137, 1909, p. 1–5; *Ges. Arbeiten I*, p. 538). Auparavant, un premier exemple, très compliqué, est dû à P. du Bois-Reymond (1873), un deuxième, déjà plus simple, à H.A. Schwarz, un troisième à Lebesgue (*Leçons*, p. 84–88). Mais seulement Fejér apporte une simplicité qui le rend approprié, comme il dit, “für Vorlesungszwecke”.

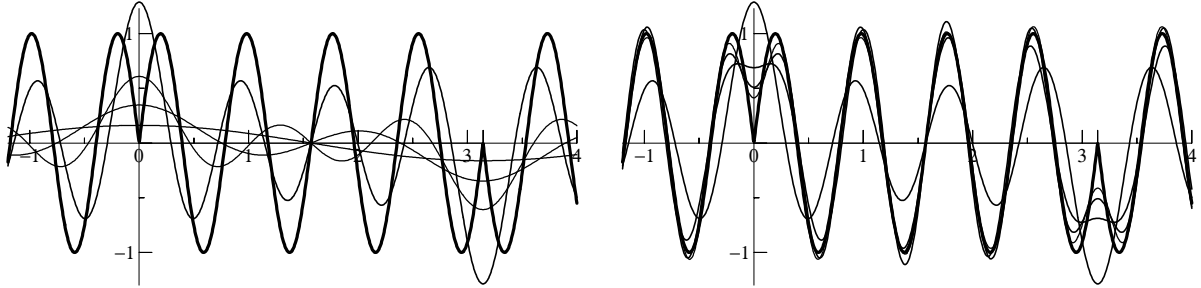
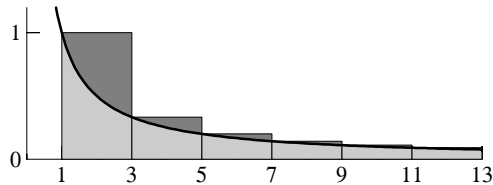


FIG. IV.11: Série “cosinus” pour  $\sin 8x$ ,  $k = 1, 3, 5, 7$  (gauche),  $k = 7, 9, 11, 13$  (droite).

**Motivation.** Considérons la fonction  $g(x) = \sin Nx$  sur  $[0, \pi]$  et prolongeons la en une fonction paire. Sa série de Fourier va être une “série cosinus” (voir Fig. IV.11) avec coefficients (utiliser la formule  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ )

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin Nx \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{N-k} + \frac{1}{N+k} \right) \quad \text{si } N \pm k \text{ est impair et } a_k = 0 \text{ sinon.}$$

On voit que les  $a_k$  non-nuls sont positifs pour  $k < N$  et négatifs pour  $k > N$ . La somme partielle  $S_n(0) = \sum_{k=0}^n a_k$  est alors maximale pour  $n = N$  (une sorte de résonance), ensuite elle décroît de manière monotone vers zéro, comme il se doit car  $g(0) = 0$ . On a  $S_n(0) \geq 0$  pour tout  $n$  et on peut minorer la valeur maximale  $S_N(0)$  à l'aide de l'aire d'une hyperbole :



$$\begin{aligned} S_N(0) &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{N/2} \left( \frac{1}{N-2j+1} + \frac{1}{N+2j-1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{2}{2j-1} > \frac{1}{\pi} \log(2N+1). \end{aligned} \quad (6.12)$$

**Le contre-exemple.** On considère donc (Fig. IV.12) la fonction paire qui sur  $[0, \pi]$  est donnée par

$$f(x) = \sin 2x + \frac{\sin 2^4 x}{4} + \frac{\sin 2^9 x}{9} + \frac{\sin 2^{16} x}{16} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{m^2} x}{m^2}. \quad (6.13)$$

Le dénominateur  $m^2$  assure la convergence uniforme, et donc la continuité de  $f(x)$ . Les sommes partielles  $S_n(0)$  de cette fonction ont une “résonance” vers  $n = 2^{m^2}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , dont la hauteur dépassera

$$S_{2^{m^2}}(0) > \frac{1}{m^2 \pi} \log(2 \cdot 2^{m^2} + 1) > \frac{1}{\pi} \log 2 \quad (6.14)$$

(voir (6.12)). Ainsi,  $S_n(0)$  ne convergera pas vers  $f(0) = 0$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

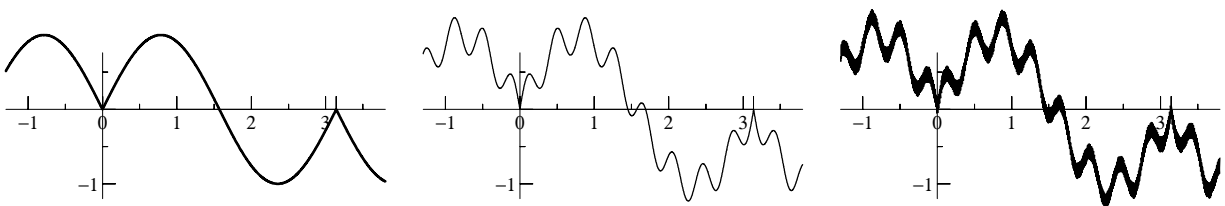


FIG. IV.12: Exemple de Fejér



**Remarques.** Une fois un exemple  $f(x)$  trouvé, pour lequel la série de Fourier diverge en *un* point, on peut, à l'aide de translations et superpositions, fabriquer un exemple pour lequel la série diverge en un *nombre dénombrable de points*.

La fonction (6.13) de la Fig. IV.12 n'est certainement pas à variation bornée. Cela peut aider à comprendre pourquoi le concept de variation bornée a tellement facilité les preuves des paragraphes précédents.

La théorie de convergence des séries de Fourier pour *fonctions continues* a trouvé dans les années 60 une certaine maturité, grâce à un théorème de Kahane et Katznelson (pour chaque ensemble  $E$  de mesure nulle il existe une fonction continue tel que  $S_n$  diverge sur  $E$ ), et un théorème réciproque de Carleson (pour chaque fonction continue périodique les  $S_n$  convergent vers  $f$  sauf sur un éventuel ensemble de mesure nulle).

**Exemple 6.4** Pour quatre fonctions de l'Exemple 1.2 nous montrons dans la Fig. IV.13 (à comparer avec la Fig. IV.3) quelques approximations par des sommes partielles de Cesàro  $\sigma_n(x)$ . Nous observons que les oscillations proches des discontinuités (phénomène de Gibbs) ont disparu.

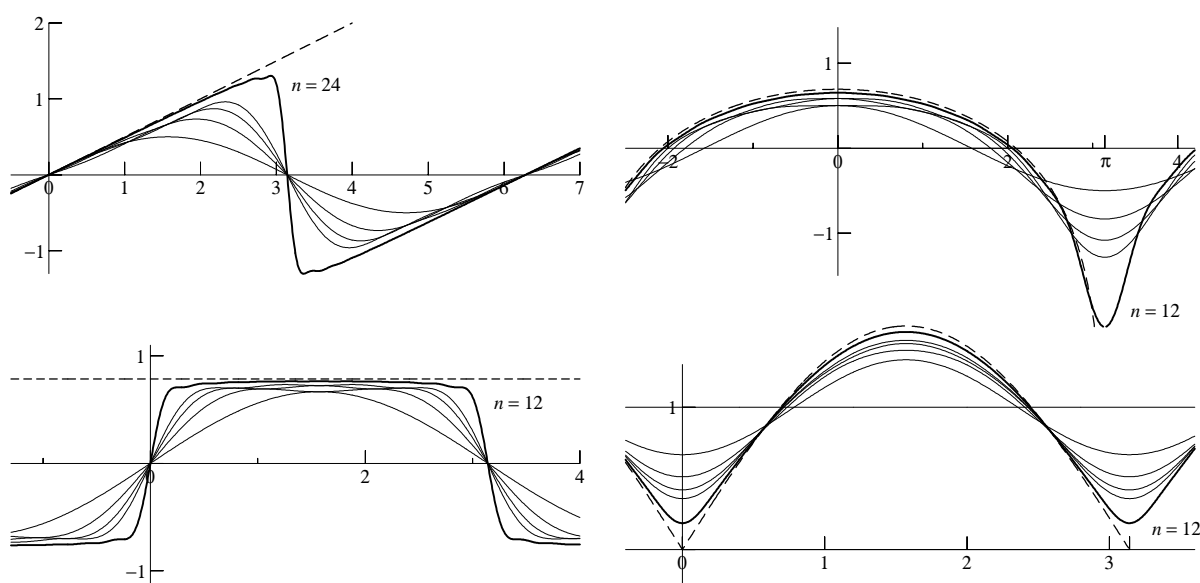


FIG. IV.13: Approximation par des sommes de Cesàro

## IV.7 Systèmes orthogonaux

Pour nous rapprocher d'une théorie plus générale (séries de Fourier, Sturm–Liouville, polynômes de Legendre, fonctions sphériques, etc.), et pour simplifier la notation, considérons l'espace

$$\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} ; f \text{ Riemann-intégrable sur } [a, b]\} \quad (7.1)$$

avec la forme sesquilinéaire semi-définie positive (on dira “produit scalaire”)

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (7.2)$$

On désigne par

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad (7.3)$$

la semi-norme correspondante.

Pour un calcul avec cette semi-norme, on a les propriétés suivantes :

- l'inégalité de Cauchy–Schwarz  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$  ;
- l'estimation  $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty$  ; par suite, la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique ;
- si  $f$  et  $g$  sont perpendiculaires, c.-à-d.,  $\langle f, g \rangle = 0$ , alors on a  $\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$  (Théorème de Pythagore) ;
- restreinte aux fonctions continues, la semi-norme  $\|f\|_2$  est une norme ; c.-à-d.,  $\|f\|_2 = 0$  est satisfaite seulement si  $f = 0$ .

**Définition 7.1 (système orthogonal)** Une suite de fonctions  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$  forme un *système orthogonal* si

$$\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = 0 \quad \text{pour } k, \ell \geq 0, k \neq \ell.$$

On a un *système orthonormal* si, de plus,  $\|\varphi_k\|_2 = 1$  pour tout  $k \geq 0$ .

**Exemple 7.2** a) Le système

$$\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, e^{3ix}, e^{-3ix}, \dots\} \quad (7.4)$$

forme un système orthogonal pour des fonctions dans  $\mathcal{R}([0, 2\pi], \mathcal{C})$ . Il est orthonormal si on divise les fonctions par  $\sqrt{2\pi}$ . La suite des fonctions

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\} \quad (7.5)$$

forme aussi un système orthogonal pour l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

b) Sur l'espace  $\mathcal{R}([0, \pi], \mathcal{C})$  des fonctions définies sur un intervalle de longueur  $\pi$ ,

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x, \dots\} \quad (7.6)$$

est un système orthogonal. Un autre système orthogonal sur le même espace est

$$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \dots\}. \quad (7.7)$$

Notons que (7.5) n'est pas orthogonale sur  $\mathcal{R}([0, \pi], \mathcal{C})$ .

c) Le polynômes de Legendre

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad \dots \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad \dots \quad (7.8)$$

forment un système orthogonal dans  $\mathcal{R}([-1, 1], \mathcal{C})$  (voir le cours “Analyse Numérique”).

Soit  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  un système orthonormal dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$  (un système orthogonal peut toujours être normalisé en divisant  $\varphi_k$  par sa norme  $\|\varphi_k\|_2$ ) et soit  $f$  une combinaison linéaire finie de la forme  $f = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ . En prenant le produit scalaire avec  $\varphi_j$  et en utilisant l'orthonormalité du système  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$ , on obtient la formule  $c_j = \langle f, \varphi_j \rangle$  pour les coefficients. Ceci est la motivation pour généraliser les séries de Fourier à des systèmes orthonormaux arbitraires.

**Définition 7.3** Soit  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  un système orthonormal dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$  et soit  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$ . On appelle

$$f \sim \sum_{k \geq 0} c_k \varphi_k \quad \text{avec} \quad c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad (7.9)$$

*série de Fourier*, et les  $c_k$  sont les *coefficients de Fourier*. On utilise la notation  $\sim$  comme dans la Définition 1.1 pour indiquer qu'il s'agit d'une identification formelle.

Le résultat suivant montre que la série de Fourier tronquée possède une propriété d'optimalité. Elle est la meilleure approximation de  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$  dans la classe de fonctions qui s'expriment comme des combinaisons linéaires de  $\varphi_k$  jusqu'au degré  $n$ .

**Théorème 7.4** Soit  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  un système orthonormal dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$ , soit la fonction  $f$  Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et soit  $\sum_{k \geq 0} c_k \varphi_k$  sa série de Fourier. Pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $d_0, \dots, d_n$  on a

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2 \leq \left\| f - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k \right\|_2.$$

En particulier, parmi tous les polynômes trigonométriques  $T_n(x) = \sum_{|k| \leq n} d_k e^{ikx}$  de degré  $n$ , celui pour lequel

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \rightarrow \min$$

est la série de Fourier tronquée  $S_n(x)$ .

*Démonstration.* La différence  $f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$  est orthogonale à tous les fonctions  $\varphi_j$  avec  $j \leq n$  ainsi qu'à leurs combinaisons linéaires :

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, \sum_{j=0}^n x_j \varphi_j \right\rangle = \sum_{j=0}^n \overline{x_j} \langle f, \varphi_j \rangle - \sum_{k,j=0}^n c_k \overline{x_j} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \sum_{j=0}^n \overline{x_j} c_j - \sum_{k=0}^n c_k \overline{x_k} = 0.$$

En appliquant le Théorème de Pythagore avec  $x_k = c_k - d_k$  on obtient

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k \right\|_2^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2^2 + \left\| \sum_{k=0}^n (c_k - d_k) \varphi_k \right\|_2^2 \geq \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2^2 \quad (7.10)$$

ce qui montre l'affirmation.  $\square$

**Théorème 7.5** Soit  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  un système orthonormal dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$ , soit la fonction  $f$  Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et soit  $\sum_{k \geq 0} c_k \varphi_k$  sa série de Fourier. Alors,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad (\text{inégalité de Bessel}) \quad (7.11)$$

et en particulier la série  $\sum_{k \geq 0} |c_k|^2$  converge. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2 \quad (\text{égalité de Parseval}) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (7.12)$$

*Démonstration.* En prenant  $d_k = 0$  dans l'égalité de (7.10), on obtient

$$\|f\|_2^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2^2 + \left\| \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2^2 + \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \geq \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \quad (7.13)$$

quel que soit  $n$  et l'inégalité de Bessel est démontrée. L'égalité de Parseval découle de l'égalité dans (7.13).  $\square$

Remarquons que l'inégalité de Bessel fournit une nouvelle preuve du Lemme de Riemann.

**Définition 7.6 (système complet)** On dira qu'un système orthonormal  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$  est *complet* (ou *total*) si pour toute fonction  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$  on a

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \quad (7.14)$$

**Propriétés de systèmes complets.**

a) Pour toute fonction  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$ , la série de Fourier *converge en moyenne quadratique* vers  $f$  (ceci est la formule (7.14) exprimée en mots), même si la série ne converge pas point par point.

b) Si  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  est complet dans  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$  et si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors

$$f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle f, \varphi_k \rangle = 0 \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

Si les coefficients de Fourier sont tous nuls, l'identité de Parseval implique que  $\|f\|_2 = 0$ . Par continuité la fonction  $f$  est donc identiquement nulle.

c) Si  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  est complet, alors la série de Fourier d'une fonction  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$  peut être intégrée terme par terme indépendamment de la convergence de la série; c.-à-d., si  $f(x) \sim \sum_{k \geq 0} c_k \varphi_k(x)$ , alors on a pour tout  $x_1 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{k \geq 0} c_k \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x) dx.$$

Des estimations élémentaires et l'inégalité de Cauchy–Schwarz donnent

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x) dx \right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx \\ &\leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx \leq \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2 \cdot \sqrt{b-a}. \end{aligned}$$

Par définition de la complétude cette majoration converge vers zéro pour  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 7.7 (convergence en moyenne quadratique)** Le système  $\{1, e^{\pm ix}, e^{\pm 2ix}, e^{\pm 3ix}, \dots\}$  est complet dans  $\mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ . Ceci signifie que pour toute fonction  $f \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{C})$  on a

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

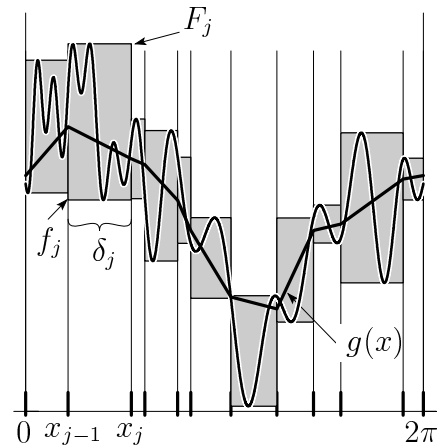
où  $c_k$  sont les coefficients de Fourier de  $f$ .

**Démonstration.** Dans une première partie nous montrons que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction continue et  $2\pi$ -périodique  $g(x)$  telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \leq \varepsilon. \quad (7.15)$$

Par hypothèse (voir aussi la démonstration du Lemme 2.2 de Riemann) il existe un partage  $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  tel que pour la différence des sommes de Riemann  $S(D) - s(D) = \sum_{j=1}^n (F_j - f_j) \delta_j < \varepsilon'$ . Nous prenons pour  $g(x)$  une fonction linéaire par morceaux (voir la petite figure) qui prend au point  $x_j$  une valeur dans

l'intersection  $[f_j, F_j] \cap [f_{j+1}, F_{j+1}]$ . Pour obtenir une fonction  $2\pi$ -périodique, nous remplaçons  $f(2\pi)$  par  $f(0)$  (si nécessaire) et nous choisissons  $g(0) = g(2\pi)$  dans  $[f_n, F_n] \cap [f_1, F_1]$ . Ainsi, la fonction  $g(x)$  est dans la partie grise de la figure et nous obtenons sur l'intervalle  $[x_{j-1}, x_j]$  l'estimation  $|f(x) - g(x)|^2 \leq M(F_j - f_j)$ . Nous en déduisons l'affirmation (7.15) avec  $\varepsilon = M\varepsilon'$ .



Par le Théorème 6.3 de Fejér, les sommes de Césaro  $\sigma_n(x)$  de la série de Fourier pour  $g(x)$  convergent uniformément vers  $g(x)$ . Pour  $n$  suffisamment grand on a donc

$$\int_0^{2\pi} |g(x) - \sigma_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon. \quad (7.16)$$

L'inégalité élémentaire  $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$  donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx &= \int_0^{2\pi} |(f(x) - g(x)) + (g(x) - \sigma_n(x))|^2 dx \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx + 2 \int_0^{2\pi} |g(x) - \sigma_n(x)|^2 dx \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Dans la norme  $\|\cdot\|_2$ , les sommes partielles de la série de Fourier donnent la meilleure approximation parmi tous les polynômes trigonométriques de degré  $n$  (voir le Théorème 7.4). Ceci implique que

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - \sigma_n\|_2 \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

et l'affirmation du théorème est démontrée.  $\square$

**Corollaire 7.8** *Le système orthogonal  $\{\cos kx\}_{k \geq 0} \cup \{\sin kx\}_{k \geq 1}$  est complet dans  $\mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ . Le système orthogonal  $\{\cos kx\}_{k \geq 0}$  est complet dans  $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ . Le système orthogonal  $\{\sin kx\}_{k \geq 1}$  est complet dans  $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* La première affirmation est une conséquence immédiate du Théorème 7.7. Pour la deuxième, considérons une fonction arbitraire dans  $\mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ . Nous la prolongeons en une fonction paire (voir la figure IV.4) et ensuite en une fonction  $2\pi$ -périodique. La série de Fourier de cette prolongation est une série en cosinus et, par le Théorème 7.7, elle converge vers  $f$  en moyenne quadratique sur l'intervalle  $[0, \pi]$ . Pour la troisième affirmation nous prolongeons la fonction  $f \in \mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$  en une fonction impaire.  $\square$

**Théorème 7.9 (Weierstrass 1885)** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe un polynôme  $p(x)$  tel que*

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

*Démonstration.* Après un changement des coordonnées de la forme  $x \mapsto \alpha + \beta x$  nous pouvons supposer que  $0 < a < b < 2\pi$ . Nous prolongeons  $f(x)$  de manière continue et  $2\pi$ -périodique sur tout  $\mathbb{R}$ . Pour cette fonction les sommes de Césaro de la série de Fourier convergent uniformément vers  $f(x)$ . Il existe donc un polynôme trigonométrique  $T_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$  tel que

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in [0, 2\pi].$$

Comme combinaison linéaire des fonctions exponentielles, la série de Taylor de  $T_n(x)$  possède un rayon de convergence  $\rho = \infty$ . En tronquant la série de Taylor on obtient un polynôme  $p(x)$  qui satisfait  $|T_n(x) - p(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ . L'inégalité de triangle permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 7.10** *Le système orthogonal formé par les polynômes  $P_k(x)$  de Legendre (7.8) est un système complet dans  $\mathcal{R}([-1, 1], \mathbb{C})$ .*

*Démonstration.* Comme dans la démonstration du Théorème 7.7 on peut se ramener au cas d'une fonction continue  $f(x)$ . La même démonstration montre qu'il suffit de prouver l'existence d'un polynôme  $p(x)$  pour lequel  $\|f - p\|_2$  est arbitrairement petit. Mais, ceci est une conséquence immédiate du Théorème de Weierstrass.  $\square$

## IV.8 L'espace de Hilbert $\ell^2$

“Notre sujet . . . devra être considéré comme marquant une première étape dans la *Théorie des fonctions d'une infinité de variables*, encore naissante, mais qui fournira peut-être bientôt les méthodes les plus puissantes de toute l'Analyse.” (F. Riesz 1913, *Oeuvres* II, p. 833)

Dans le cadre de ses recherches sur les équations intégrales, Hilbert a entamé dans les premières années du 20<sup>ème</sup> siècle un vaste programme d'étude de *fonctions à une infinité de variables*. Une série de Fourier est justement une “fonction” dépendant d'une infinité de variables  $c_1, c_2, c_3, \dots$ . Allons donc élargir la théorie de l'espace  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  au cas de dimension  $\infty$ . Nous n'écrirons pas  $\mathbb{C}^\infty$ , car ici les différentes normes (voir [HW, p. 275]) ne vont plus être équivalentes et les espaces vont être différents pour les différentes normes.

L'identité de Parseval (7.12) nous montre déjà le chemin : nous allons surtout nous intéresser à la norme euclidienne.

**Définition 8.1** On dénote l'espace des suites carré-sommables par

$$\ell^2(\mathbb{C}) := \left\{ (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots) ; c_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \right\}. \quad (8.1)$$

Si on se restreint aux suites réelles on écrit  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

Dans cet espace nous avons un *produit scalaire* et une *norme* :

$$\langle c, d \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \bar{d}_k, \quad \|c\|_2 := \sqrt{\langle c, c \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2} \quad (8.2)$$

On devrait maintenant s'attaquer à de nombreuses petites preuves fastidieuses, car pleines de choses sont “triviales” dans  $\mathbb{C}^n$ , mais elles ne le sont plus pour une infinité de variables. Par exemple, si  $c \in \ell^2$  et  $d \in \ell^2$  on doit démontrer que  $c + d \in \ell^2$ , i.e., que  $\sum |c_k + d_k|^2 < \infty$ . Pour cela on écrit quelques lignes fades et l'on utilise l'inégalité de Cauchy–Schwarz  $|\langle c, d \rangle| \leq \|c\|_2 \cdot \|d\|_2$ . Une chose est cependant intéressante à démontrer, le fait que  $\ell^2$  est complet.

**Définition 8.2** Un espace vectoriel est *complet* si chaque suite de Cauchy est une suite convergente. Un espace complet avec produit scalaire et norme s'appelle un *espace de Hilbert*.

**Théorème 8.3** Les espaces  $\ell^2(\mathbb{R})$  et  $\ell^2(\mathbb{C})$  sont complets.

*Démonstration.* Soit

$$\begin{aligned} c^{(1)} &= (c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, \dots) \\ c^{(2)} &= (c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, c_3^{(2)}, \dots) \\ c^{(3)} &= (c_0^{(3)}, c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, c_3^{(3)}, \dots), \quad \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

une suite de Cauchy, c.-à-d., pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire il existe un entier  $N$  tel que  $\|c^{(n)} - c^{(m)}\|_2 < \varepsilon$  pour  $n, m > N$ . Pour chaque entier  $r$ , nous avons alors

$$\sqrt{\sum_{k=0}^r |c_k^{(n)} - c_k^{(m)}|^2} < \varepsilon \quad (8.4)$$

et aussi  $|c_k^{(n)} - c_k^{(m)}| < \varepsilon$ . Ceci signifie que pour chaque  $k$  la suite  $\{c_k^{(n)}\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{C}$  (un espace complet). Par conséquent, cette suite converge :  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} = c_k$ . En passant à la limite  $m \rightarrow \infty$  dans (8.4), on obtient

$$\sqrt{\sum_{k=0}^r |c_k^{(n)} - c_k|^2} \leq \varepsilon. \quad (8.5)$$

Cette inégalité est vraie pour chaque  $r$ . Ainsi,

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{(n)} - c_k|^2} = \|c^{(n)} - c\|_2 \leq \varepsilon. \quad (8.6)$$

Cela signifie que  $c^{(n)} - c \in \ell^2$ , donc aussi  $c \in \ell^2$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{(n)} = c$ .

*Remarque.* Chaque système orthonormal complet donne suite à une application

$$\mathcal{I} : \mathcal{R}([a, b], \mathcal{C}) \rightarrow \ell^2(\mathcal{C}) \quad (8.7)$$

qui envoie une fonction  $f$  sur la suite des coefficients de Fourier, c.-à-d.,  $\mathcal{I}(f) = \{c_k\}_{k \geq 0}$  où  $f \sim \sum_{k \geq 0} c_k \varphi_k$ . Par l'identité de Parseval, la suite  $\{c_k\}_{k \geq 0}$  est en effet dans  $\ell^2(\mathcal{C})$ , et on a que  $\|f\|_2 = \|\mathcal{I}(f)\|_2 = \|\{c_k\}_{k \geq 0}\|_2$ . En identifiant les fonctions avec la même série de Fourier, on obtient alors une isométrie. Cette dernière application n'est pas surjective, car l'espace  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$  n'est pas complet (voir Exercice 29).

Un problème important est de trouver un espace qui contient  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$  et qui soit complet pour que cette isométrie devienne bijective. Pour ce but, il s'avère que l'intégrale de Riemann n'est pas suffisante. L'*intégrale de Lebesgue* permet d'interpréter le complété de  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$  comme un espace de classes de fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue (voir le cours Analyse III pour plus de détails).

## IV.9 Ondelette de Haar

L'analyse de Fourier est basée sur les fonctions

$$e^{ikx} = \text{[A continuous sine wave representing a plane wave]} \quad \text{Figure 1.1}$$

qui sont uniformes sur tout l'intervalle considéré. Elle ne peut pas traiter de manière efficace des *phénomènes locaux*. Par exemple, on a des grandes difficultés d'approximer une fonction proche d'une discontinuité (phénomène de Gibbs). Dans le traitement des images, où on est typiquement confronté à des changements abruptes de couleurs, ceci est un grand désavantage. Le but est alors de trouver un système orthogonal de  $\mathcal{R}([a, b], \mathcal{C})$  pour lequel la série de Fourier s'adapte mieux aux phénomènes locaux.

L'origine de la “base de Haar” que nous allons présenter dans ce paragraphe, est légèrement différente. Après le ‘désastre’ des théorèmes de convergence pour séries de Fourier et fonctions continues (fausse preuve de Cauchy, correction de Dirichlet, contre-exemple de Fejér), Hilbert pose à son étudiant A. Haar le problème suivant : trouver (enfin) une base de fonctions orthogonales, où la convergence (uniforme) est *assurée* pour toute fonction continue. Le résultat de ces recherches est la “base de Haar” (1910, voir la figure IV.14).

**La base de Haar (ondelettes de Haar).** Sur l'intervalle  $[0, 1]$  nous considérons la fonction constante  $\varphi(x) = 1$  ainsi que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ -1 & \text{si } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Elle s'appelle *ondelette mère* et nous permet de construire toutes les autres fonctions de la base par dilatation et par translation :

$$\psi_{k,\ell}(x) = 2^{k/2} \psi(2^k x - \ell) \quad \text{pour } k \geq 0 \text{ et } \ell = 0, 1, \dots, 2^k - 1.$$

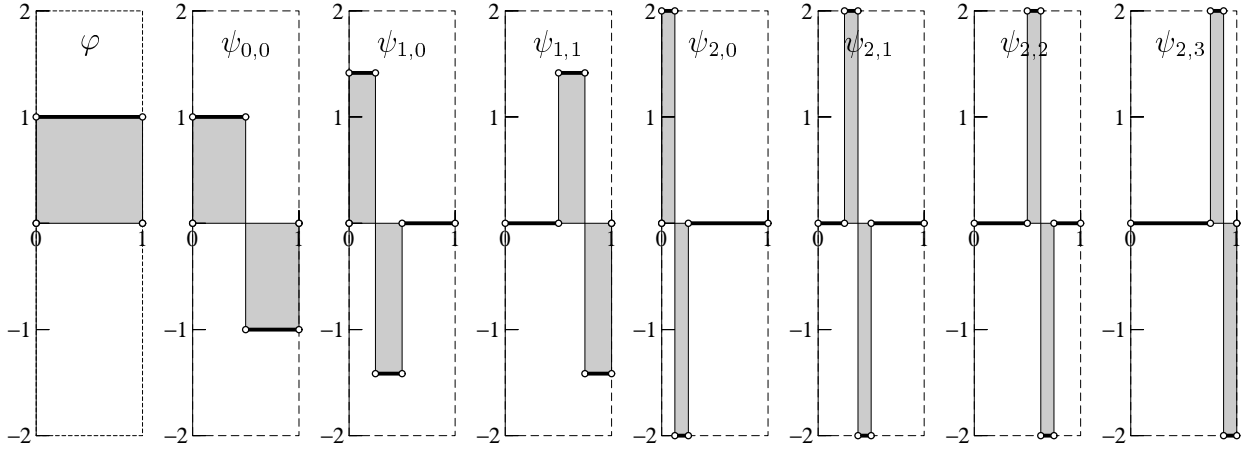


FIG. IV.14: Les ondelettes de Haar

On voit une grande différence avec la base de sinus  $\{\sin k\pi x\}_{k \geq 1}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . La première fonction  $\psi_{0,0} = \psi$  ressemble beaucoup la fonction  $\sin \pi x$ . Pour  $k$  fixé, les fonctions  $\psi_{k,\ell}$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, 2^k - 1$  correspondent ensemble à la fonction  $\sin 2^k \pi x$ . Elles permettent mieux de s'adapter aux phénomènes locaux. Par contre, on a beaucoup moins de fréquences à disposition (seulement les puissances de 2).

**Théorème 9.1** Les fonctions

$$\{ \varphi, \psi_{k,\ell} \ ; \ k \geq 0, \ell = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \} \quad (9.1)$$

forment un système orthonormal de l'espace  $\mathcal{R}([0, 1], \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* L'orthogonalité du système est facilement vérifiée en distinguant plusieurs cas. Comme la fonction  $|\psi_{k,\ell}(x)|^2$  vaut  $2^k$  sur un intervalle de longueur  $2^{-k}$  et zéro ailleurs, on a que  $\|\psi_{k,\ell}\|_2 = 1$  pour tout  $k, \ell$ .  $\square$

Chaque combinaison linéaire  $c_0\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{2^k-1} c_{k,\ell}\psi_{k,\ell}$  est une fonction en escalier. Elle est dans l'espace  $E_n$  de fonctions qui sont constantes sur les intervalles  $I_{n,\ell} = [2^{-n}\ell, 2^{-n}(\ell+1)]$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ . La valeur  $y_\ell$  de cette combinaison linéaire sur  $I_{n,\ell}$  est donnée par (pour  $n = 3$ )

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{0,0} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

La matrice dans (9.2) est orthogonale à une constante près. Ceci entraîne que chaque fonction en escalier dans  $E_n$  peut être écrite sous forme d'une telle combinaison linéaire.

**Lemme 9.2** Soit  $f \in \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{C})$ . Si  $c_0 = \langle f, \varphi \rangle$ ,  $c_{k,\ell} = \langle f, \psi_{k,\ell} \rangle$  sont les coefficients de Fourier pour la base de Haar, alors la somme partielle

$$S_n(x) = c_0 \varphi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{2^k-1} c_{k,\ell} \psi_{k,\ell}(x)$$

est la fonction en escalier qui prend la valeur moyenne  $y_{n,\ell} := 2^n \int_{I_{n,\ell}} f(x) dx$  sur l'intervalle  $I_{n,\ell} = [2^{-n}\ell, 2^{-n}(\ell+1)]$  (pour  $\ell = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ).



**Démonstration.** La fonction  $S_n(x)$  est dans l'espace  $E_n$ . Par le Théorème 7.4, cette fonction minimise la norme  $\|f - S_n\|_2$  parmi toutes les fonctions en escalier dans  $E_n$ . Par conséquent, la valeur  $y_{n,\ell}$  de  $S_n(x)$  sur l'intervalle  $I_{n,\ell}$  minimise l'expression

$$\int_{I_{n,\ell}} |f(x) - y_{n,\ell}|^2 dx \rightarrow \min.$$

En calculant les dérivées par rapport aux parties réelle et imaginaire de  $y_{n,\ell}$  on voit que la valeur optimale est donnée par  $y_{n,\ell} := 2^n \int_{I_{n,\ell}} f(x) dx$ .  $\square$

**Théorème 9.3** Pour chaque fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ , la série de Fourier pour la base de Haar converge uniformément vers  $f(x)$ , c.-à-d., pour les fonctions  $S_n(x)$  du Lemme 9.2 on a  $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

**Démonstration.** Sur l'intervalle compact  $[0, 1]$  la fonction  $f(x)$  est uniformément continue. Pour un  $\varepsilon > 0$  arbitraire, il existe donc un  $\delta > 0$  pour lequel  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$  si  $|x - t| < \delta$ . En intégrant l'inégalité  $-\varepsilon < f(x) - f(t) < \varepsilon$  par rapport à  $t$  sur l'intervalle  $I_{n,\ell}$ , on obtient  $|f(x) - 2^n \int_{I_{n,\ell}} f(t) dt| < \varepsilon$  pour  $x \in I_{n,\ell}$  si  $2^{-n} < \delta$ . Par le Lemme 9.2 ceci signifie que  $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$  pour tout  $x \in [0, 1]$ , si  $2^{-n} < \delta$ , et la convergence uniforme est établie.  $\square$

**Corollaire 9.4** Le système orthonormal (9.1) est complet dans  $\mathcal{R}([0, 1], \mathcal{C})$ .

**Démonstration.** Par le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 7.7 il suffit de considérer des fonctions continues. La complétude est une conséquence du Théorème 9.3, car la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique.  $\square$

Les fonctions trigonométriques  $\{e^{ikx}\}$  et la base de Haar sont deux cas extrêmes pour des systèmes orthogonaux. Pour le premier, les fonctions sont d'une très grande régularité, mais on est confronté au phénomène de Gibbs proche des discontinuités. Pour le deuxième, les fonctions de la base sont peu régulières (elles sont discontinues), mais elles s'adaptent bien aux phénomènes locaux.

Un grand problème est de trouver un système orthonormal complet qui est formé par des fonctions régulières (continue, différentiable, à support compact, etc.) qui localisent bien. Les diverses réponses à cette question (ondelettes de Meyer, ondelettes de Daubechies, ...) nécessitent la connaissance de fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue et des moyens de l'analyse fonctionnelle (voir le cours "Analyse III").

## IV.10 Exercices

1. Considérons la série de Fourier  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  avec

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k} + \frac{i}{k^2} & \text{si } k \neq 0; \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Ecrire cette série sous la forme  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx)$ .

Réciproquement, transformer la série de Fourier donnée en notations réelles par

$$a_k = \frac{2}{1+k^4} \quad \text{pour } k \geq 0, \quad b_k = \frac{4i}{k} \quad \text{pour } k \geq 1$$

en la série correspondante en notations complexes.

2. Calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique donnée par (voir la 5ème fonction de la Fig. IV.3)

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -\pi/4 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

3. Calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique donnée par (voir la 2ème fonction de la Fig. IV.3)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \quad \text{pour } |x| \leq \pi.$$

4. Soit  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction avec série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \sin kx.$$

Calculer les séries de Fourier de

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x - \pi) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ f(x + \pi) & \text{si } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Quelle est la parité de ces fonctions ?

5. Calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique donnée par

$$f(x) = \cos(ax) \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

où  $a$  n'est pas entier.

Résultat :

$$\frac{2}{\pi} \sin(a\pi) \left( \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a \cos(kx)}{a^2 - k^2} \right)$$

6. En supposant que la série de Fourier de l'exercice 5 représente la fonction  $\cos(ax)$ , montrer que

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right)$$

(à comparer avec la formule (III.6.7)).

7. On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait une condition de Lipschitz d'ordre  $\alpha > 0$  s'il existe  $c > 0$  tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad \text{pour } x, y \in [a, b]. \quad (10.1)$$

a) Une fonction, qui satisfait (10.1) avec  $\alpha > 1$ , est constante.

b) Une fonction, qui satisfait (10.1) avec  $\alpha = 1$ , est à variation bornée.

c) Pour  $\alpha < 1$ , trouver une fonction  $f(x)$  qui satisfait (10.1) mais qui n'est pas à variation bornée.

*Indication.* Sur l'intervalle  $[0, 1]$ , considérer la fonction qui satisfait  $f(0) = 0$ ,  $f(1/k) = (-1)^k/k^\alpha$  et qui est linéaire sur chaque intervalle  $[1/(k+1), 1/k]$ .

8. Considérons une fonction qui satisfait (10.1) et qui est  $2\pi$ -périodique. Montrer que les coefficients de Fourier satisfont l'estimation

$$|c_k| \leq \frac{c}{2} \left( \frac{\pi}{|k|} \right)^\alpha \quad \text{pour tout } k.$$

*Indication.* Par un changement de variables montrer que

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ikx} dx.$$

Prendre la moyenne arithmétique de ces deux représentations de  $c_k$ .

9. Pour quelle valeur de  $\alpha$ , la fonction  $f(x) = x^\alpha \sin(1/x)$  est-elle à variation bornée sur  $[0, 1]$  ?

10. Montrer qu'une série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \sin kx$$

peut être écrite sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} \rho_k \cos(kx + \theta_k)$$

où  $\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ . Exprimer  $\theta_k$  en termes de  $a_k$  et  $b_k$ .

11. Soit  $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ , où  $P(u, v)$  est un polynôme à deux variables. Montrer qu'il y a seulement un nombre fini des coefficients de Fourier de  $f(x)$  qui sont non nulles.

12. a) En utilisant le théorème des résidus (intégrales trigonométriques), calculer la série de Fourier de

$$f(x) = \frac{4 - 2 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}.$$

b) A l'aide de la série géométrique, vérifier que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\cos(kx)}{2^k}$$

est bien égal à  $f(x)$ .

13. Soit  $g(w)$  analytique dans un voisinage de la couronne circulaire  $\{w \in \mathbb{C}; 1/r \leq |w| \leq r\}$  avec un  $r > 1$ . Montrer que les coefficients de Fourier de la fonction  $f(x) = g(e^{ix})$  satisfont l'estimation (décroissance exponentielle)

$$|c_k| \leq \frac{Const}{r^k}.$$

14. Démontrer que les noyaux de Dirichlet possèdent la propriété que

$$\int_0^\pi |D_n(s)| ds \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty.$$

15. Justifier la formule

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

16. Pour  $x \in [0, 1]$ , montrer les formules

$$x - x^2 = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)^3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\pi x}{k^2}.$$

17. Soit  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux et designons par  $c_k$  ses coefficients de Fourier. La fonction

$$F(x) = -c_0 x + \int_0^x f(t) dt$$

est continue, à variation bornée et  $2\pi$ -périodique. Montrer (intégration par parties) que

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{ik} (e^{ikx} - 1).$$

Ainsi on a l'égalité

$$\int_0^x f(t) dt = c_0 x - i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{k} (e^{ikx} - 1).$$

18. Soit la fonction  $f(x)$  définie par la série

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Si cette série converge uniformément, démontrer que les  $c_k$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $f(x)$ .

19. (Somme d'Abel) Soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

une série dont les sommes partielles  $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  satisfont

$$|s_n| \leq M \quad \text{pour tout } n.$$

Alors, pour chaque suite  $\{a_k\}$  satisfaisant  $0 \leq a_{k+1} \leq a_k$  pour tout  $k$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ , on a que la série

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots$$

converge et que sa somme est majorée par  $M a_0$ .

*Indication.* Soit  $S_n = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ . En utilisant l'identité

$$S_n = s_0(a_0 - a_1) + s_1(a_1 - a_2) + \dots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n,$$

démontrer que  $\{S_n\}$  forme une suite de Cauchy.

20. Considérons les deux séries

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (10.2)$$

Si les coefficients  $\{a_k\}$  et  $\{b_k\}$  sont positifs et convergent monotoniquement vers zéro, alors les deux séries de (10.2) convergent pour tout  $x$  sauf éventuellement pour les valeurs  $x = 2k\pi$  dans le cas de la première série. De plus, on a convergence uniforme sur chaque intervalle fermé  $[\delta, 2\pi - \delta]$  avec  $\delta > 0$ .

*Indication.* Majorer  $\sum_{k=0}^n \cos kx$  et  $\sum_{k=0}^n \sin kx$  et utiliser la sommation d'Abel.

21. Pour quelles valeurs de  $x$ , les fonctions représentées par les séries

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\log k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 3kx}{k}$$

sont-elles continues ? Quel est le graphe de la deuxième fonction ?

22. Soient  $f, g$  deux fonctions  $2\pi$ -périodiques continues et à variation bornée. Montrer que les coefficients de Fourier complexes de la convolution

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) dt$$

sont  $c_k \cdot d_k$ , où  $c_k$  et  $d_k$  sont celles pour  $f$  respectivement  $g$ .

23. Supposons que les fonctions  $f$  et  $g$  soient données par des séries

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

qui convergent uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que les coefficients de Fourier du produit  $f(x) \cdot g(x)$  sont données par  $(c * d)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j d_{k-j}$ .

24. Soient

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad \text{et} \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin kx.$$

a) Développer  $f(x)$  en série de Fourier par rapport au système orthonormal  $\{\varphi_k(x)\}_{k \geq 1}$ .

b) Calculer les sommes partielles  $S_{2n}(x)$ .

c) Calculer les sommes de Cesàro  $\sigma_{2n}(x)$ .

*Indication.* Démontrer  $I_{k+1} = I_{k-1}$  pour les intégrales  $I_k = \int_0^\pi \sin kx / \sin x \, dx$ .

*Résultat.* 
$$S_{2n}(x) = 2 \cdot \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}, \quad \sigma_{2n}(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin(nx) \cos((n+1)x)}{n \sin^2 x}$$

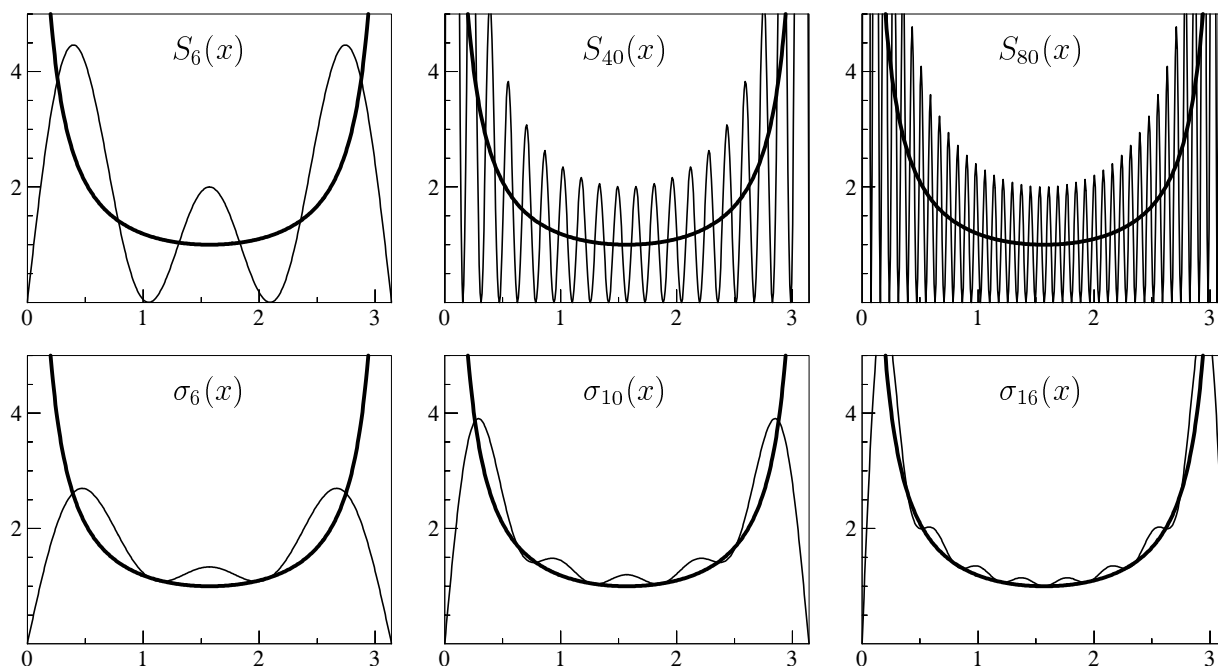


FIG. IV.15: Sommes partielles  $S_n(x)$  et sommes de Cesàro  $\sigma_n(x)$  pour la fonction de l'Exercice 24

25. Donner une suite  $\{g_k(x)\}$  de fonctions dans  $\mathcal{R}([0, 1], \mathbb{C})$  qui satisfait  $\|g_k\|_2 \geq 1$  pour tout  $k \geq 0$  et pour laquelle  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

26. Démontrer que  $\{\pi^{-1/2} \sin((k + \frac{1}{2})x)\}_{k \geq 0}$  forme un système orthogonal dans  $\mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

27. Soit  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  un système orthogonal complet de  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$ . Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$ , et si  $c_k, d_k$  sont les coefficients de Fourier de  $f, g$ , montrer que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \geq 0} c_k \bar{d}_k.$$

28. Démontrer que

$$\{ \sin x, \quad \sin 3x, \quad \sin 5x, \quad \sin 7x, \quad \dots \}$$

est un système orthogonal dans  $\mathcal{R}([0, \pi/2], \mathbb{C})$ . Est-il complet ?

29. On considère la suite de fonctions  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ x^{-1/4} & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vérifier que cette suite est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$  par rapport à la semi-norme  $\|\cdot\|_2$ . Démontrer que cette suite n'a pas de limite dans cette espace.

30. *Fonctions de Rademacher.* Pour  $k = 0, 1, 2$ , dessiner les fonctions

$$r_k(x) = \text{sign}(\sin 2^k \pi x).$$

Démontrer que le système  $\{r_k\}_{k \geq 0}$  est orthonormal dans  $\mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ , mais il n'est pas complet.

*Indication.* Chaque fonction, qui est symétrique par rapport à la droite  $x = 1/2$ , est orthogonale à  $r_k$  pour tout  $k \geq 1$ .

31. Combien de termes de la série de Fourier pour la base de Haar sont nécessaires pour approximer la fonction  $f(x) = x$  sur  $[0, 1]$  avec un erreur maximale de 0.01 ? Ceci n'est pas possible avec le système orthogonal  $\{\sin k\pi x\}_{k \geq 1}$  !

# Chapitre V

## Equations aux dérivées partielles

Contrairement aux équations différentielles ordinaires (voir le cours “Analyse II, partie réelle”), les équations aux dérivées partielles ont comme fonction inconnue une *fonction de plusieurs variables* et l'équation contient des dérivées partielles. Les séries de Fourier ont été les premiers outils pour leur solution. Nous considérons ce chapitre surtout comme une application intéressante de la théorie des séries de Fourier (chapitre IV).

### V.1 Equation des ondes (corde vibrante)

Initié par Taylor (1713) et Joh. Bernoulli (1728, *Opera* III, p. 198–210), le problème de la corde vibrante fut l'un des principaux champs de recherche et de disputes (d'Alembert, Clairaut, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange) au XVIII<sup>e</sup> siècle. Il représente la première EDP (équation aux dérivées partielles) de l'histoire.

**Établissement de l'équation.** Nous suivons les idées de Joh. Bernoulli: on s'imagine la corde représentée par une suite de points de masse de distance  $\Delta x$  entre eux. On voudrait connaître à tout instant  $t$  les positions  $u_k(t)$  du  $k$ -ème point (voir la figure V.1). Nous supposons les  $u_k$

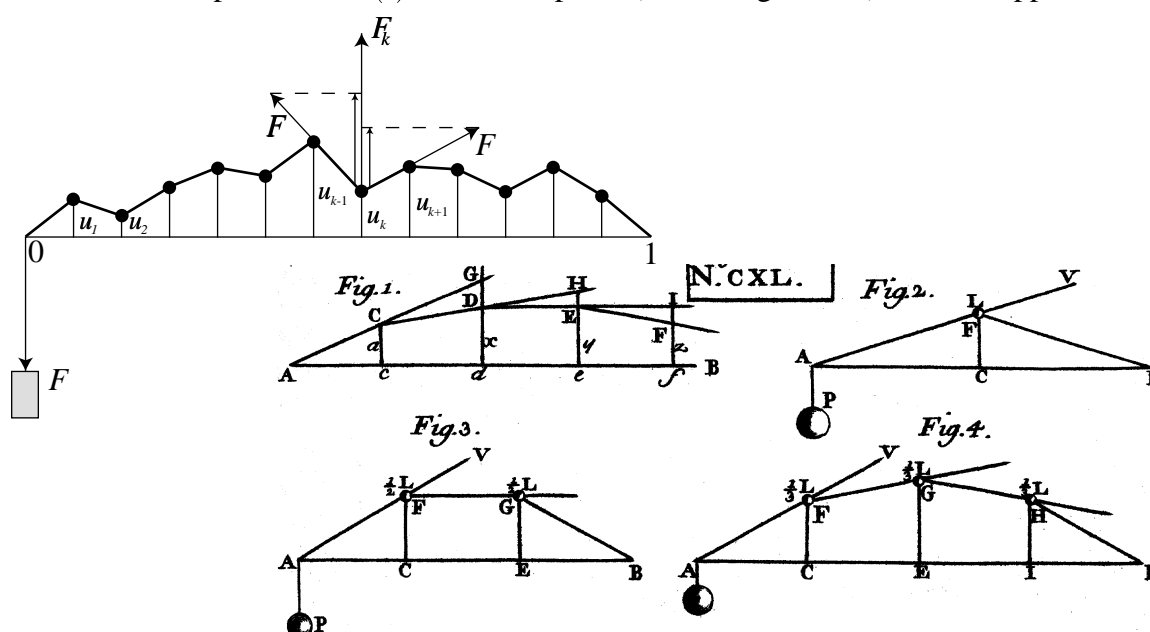


FIG. V.1: Les forces agissant sur la corde, et dessins de Joh. Bernoulli (1728)

“petites”. Si  $F$  est la tension de la corde, la force transversale  $F_k$  au  $k$ ème point est, par Thalès,

$$F_k = F \left( \frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta x} + \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x} \right) = F \left( \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta x} \right) \approx F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k, \cdot) \Delta x. \quad (1.1)$$

Dans la dernière expression on considère la position comme fonction de deux variables,  $u_k(t) = u(x_k, t)$ . Par la loi de Newton (1687) “force égale masse fois accélération”, cette expression doit être égale à

$$\rho \Delta x \cdot \frac{d^2 u_k}{dt^2} \approx \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_k, \cdot). \quad (1.2)$$

Ainsi, pour  $\Delta x \rightarrow 0$ , les équations (1.1) et (1.2) nous amènent à chercher une fonction  $u(x, t)$  avec

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } a = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \text{ sera la vitesse de propagation.} \quad (1.3)$$

**Remarque.** Pour cette équation, d'Alembert (1747, “*Recherches sur la Courbe que forme une Corde tendue mise en vibration*”, *Hist. de l'Acad. Berlin*, vol 3, p. 214–219) a trouvé la solution  $u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$ , où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions arbitraires (“Cette méthode qui est sûrement une des plus ingénieuses qu’on ait tirées jusqu’ici de l’Analyse . . .”; Lagrange 1759, *Oeuvres* 1, p. 63). Nous nous intéressons maintenant aux solutions obtenues à l’aide de séries trigonométriques, une technique qui peut être généralisée à d’autres situations.

**Equations des ondes avec conditions initiales et conditions aux bords.** Pour déterminer la solution de la corde vibrante il faut encore préciser la position et la vitesse de la corde à un instant fixé (par exemple  $t = 0$ ) et il faut donner des conditions aux extrémités de la corde. Ainsi, le problème complet s’écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{pour } 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) && \text{pour } 0 < x < \ell \quad (\text{conditions initiales}) \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\ell, t) = 0 && \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{conditions aux bords}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Méthode de la séparation des variables.** Cette méthode, adoptée par Fourier à de nombreuses reprises, souvent appelée “méthode de Fourier”, est appliquée pour la première fois par d'Alembert à la corde vibrante en 1750. Elle consiste à rechercher la solution  $u(x, t)$  comme produit d’une fonction  $X(x)$ , ne dépendant que de  $x$ , et une fonction  $T(t)$ , ne dépendant que de  $t$ , c.-à-d.,

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (1.5)$$

Ainsi, l’équation de la corde (1.3) devient

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t). \quad (1.6)$$

La deuxième idée consiste à diviser cette relation par  $X(x) \cdot T(t)$  pour obtenir

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (1.7)$$

où la conclusion est la suivante: *ce qui est à gauche, ne dépend pas de  $x$ , ce qui est à droite, ne dépend pas de  $t$ , donc le tout doit être une constante, que nous appelons  $-\lambda$ .* Nous avons obtenu deux équations différentielles ordinaires, que nous traitons l’une après l’autre: commençons par

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + B \cdot \sin \sqrt{\lambda} x. \quad (1.8)$$

Les deux conditions aux bords dans (1.4) donnent  $A = 0$  pour  $x = 0$  et  $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$  pour  $x = \ell$ .



Ainsi, il faut que  $\sqrt{\lambda}\ell = k\pi$ , et on obtient pour la fonction  $X(x)$ ,

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad X(x) = \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.9)$$

L'autre équation de (1.7) nous donne

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = c \cdot \cos(a\sqrt{\lambda_k}t) + d \cdot \sin(a\sqrt{\lambda_k}t). \quad (1.10)$$

Cela, inséré dans (1.5) donne, pour chaque  $k = 1, 2, 3, \dots$ , une solution. Toutes ces solutions peuvent être additionnées, car notre équation différentielle est *linéaire* (similairement à [HW, p. 144]). Ainsi, la solution générale devient par superposition

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \left( c_k \cos \frac{ak\pi t}{\ell} + d_k \sin \frac{ak\pi t}{\ell} \right). \quad (1.11)$$

Pour déterminer les coefficients inconnus  $c_k$  et  $d_k$ , nous utilisons les conditions initiales de (1.4). Ainsi, en posant  $t = 0$  dans (1.11), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k \geq 1} c_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} &\Rightarrow c_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \\ g(x) = \sum_{k \geq 1} d_k \frac{ak\pi}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} &\Rightarrow d_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^\ell g(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx. \end{aligned} \quad (1.12)$$

### Exemple (la corde d'un piano).

“Eine genaue Analyse der Bewegung der Saite nach dem Anschlag eines Klavierhammers würde ziemlich verwickelt sein.”

(H. Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen*, 1862, p. 610)

Calculons le mouvement d'une corde de piano. Supposons que le marteau, couvert d'un feutre élastique, transmet à la corde, initialement au repos ( $f(x) = 0$ ), une vitesse initiale de

$$g(x) = C(x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \quad \text{si} \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = 0.6, \beta = 0.75, C = 10^5 \quad (1.13)$$

et  $g(x) = 0$  sinon. On pose  $a^2 = 4$  et  $\ell = 1$  dans l'équation (1.4).

Par bonheur, MAPLE existe pour calculer les intégrales (1.12). On obtient  $c_k = 0$  et

$$d_k = \frac{4C}{\pi^6 k^6} \left( (k^2 \pi^2 (\alpha - \beta)^2 - 12)(\cos \beta k\pi - \cos \alpha k\pi) + 6k\pi(\alpha - \beta)(\sin \beta k\pi + \sin \alpha k\pi) \right).$$

Ces coefficients convergent rapidement vers zéro (comme  $\mathcal{O}(k^{-4})$ ). La convergence uniforme de la série de Fourier est alors assurée. La Fig. V.2 donne une illustration de  $u(x, t)$  calculée par (1.11) avec  $n = 5$ ,  $n = 10$  et  $n = 20$  termes de la série.

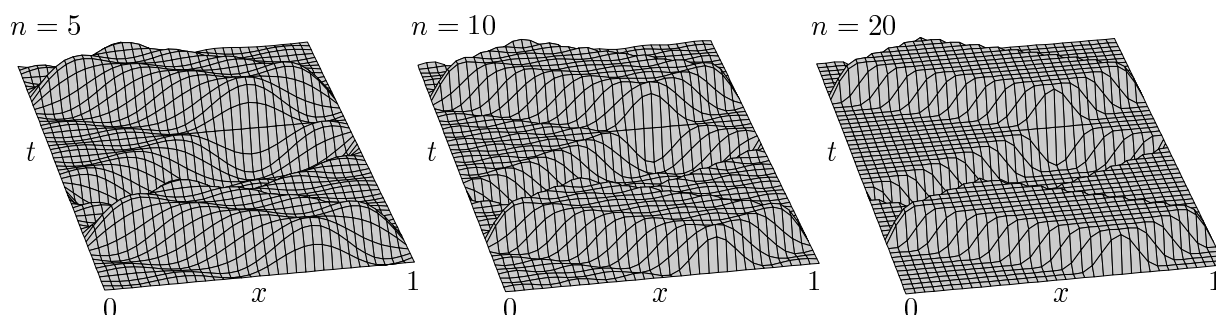


FIG. V.2: Mouvement d'une corde de piano (5, 10 resp. 20 termes de (1.11))

## V.2 L'équation de la chaleur

“... son analyse ... laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur ...”

(Laplace, Lagrange, Legendre; cité d'après [Burk1914, p. 957])

“FOURIERS *Théorie analytique de la Chaleur* ist die Bibel des mathematischen Physikers.”

(A. Sommerfeld, *Part. Diffgl. der Physik*, 1947, la toute première phrase de ce livre)

Nous voici donc au livre qui est à l'origine des séries de Fourier, la *Théorie analytique de la Chaleur* de Joseph Fourier. Un premier manuscrit présenté par Fourier à l'Académie en 1807, et un second en 1811, ont rencontré une vive opposition de la part du Comité (voir ci-dessus). Seulement après la mort de Lagrange en 1813, violemment opposé aux idées avant-gardistes de Fourier, ce livre a finalement été publié en 1822.

**Dérivation de l'équation.** Fourier explique l'origine de son équation sur une centaine de pages, en pensant à des molécules “extrêmement voisines” et à “la quantité de chaleur que l'une des molécules reçoit de l'autre est proportionnelle à la différence de température de ces deux molécules” [Fourier 1822, p. 41]. Au cas d'un “prisme d'une petite épaisseur” (p. 60), chaque molécule a un voisin de gauche et un voisin de droite, et la température  $u_k$  de la  $k$ -ème molécule augmente, très similairement à la situation de la corde vibrante (1.1),

$$\frac{du_k}{dt} \approx \text{Const} \left( \frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta x^2} + \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x^2} \right) = \text{Const} \left( \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (2.1)$$

et, après le passage  $\Delta x \rightarrow 0$ , nous sommes amenés à chercher une fonction  $u(x, t)$ , exprimant la température au point  $x$  à l'instant  $t$ , satisfaisant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

[Fourier 1822, p. 102]. Ici,  $a$  est une constante dépendant du matériel (chaleur spécifique et conductivité calorifique). Contrairement à l'équation de la corde vibrante, nous avons là une dérivation par rapport à  $t$  d'ordre 1.

**Conditions initiales et conditions aux bords.** Nous supposons connaître pour un temps  $t = 0$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < \ell \quad (\text{condition initiale}) \quad (2.3)$$

et il faut donner des conditions qu'on impose aux bords de la tige. Les plus fréquentes (et les plus faciles à traiter) surviennent quand les bords de la tige sont plongés dans de “l'eau glacée”, c.-à-d.,

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{condition aux bords}). \quad (2.4)$$

**Méthode de la séparation des variables.** Comme dans le paragraphe V.1 nous cherchons la solution sous la forme d'un produit  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ . L'équation de la chaleur (2.2) devient alors

$$X(x) \cdot T'(t) = aX''(x) \cdot T(t). \quad (2.5)$$

Une division par  $X(x) \cdot T(t)$  sépare les variables et permet de conclure l'existence d'une constante  $\lambda$  telle que

$$\frac{1}{a} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (2.6)$$

De nouveau, nous sommes confrontés à deux équations différentielles ordinaires: celle pour  $X(x)$  (les conditions aux bords incluses) est exactement la même que dans le paragraphe V.1 et nous

obtenons (1.9) comme solution. L'autre équation de (2.6) nous donne  $T' = -a\lambda T$  avec comme solution  $T(t) = c \cdot e^{-a\lambda t}$ . Cela, inséré dans  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  donne, pour chaque  $k = 1, 2, 3 \dots$ , une solution et nous obtenons la solution générale par superposition

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot \exp\left(-a\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t\right). \quad (2.7)$$

Si l'on pose ici  $t = 0$ , on obtient, à l'aide de la condition initiale (2.3), les formules

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot f(x) dx \quad (2.8)$$

ce qui est la réponse complète à notre problème.

### Exemple (équation de la chaleur pour une tige).

“La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles.” (Fourier 1822, p. xij)

Considérons une tige de longueur  $\ell = 1$  et posons  $a = 0.01$ . Pour  $f(x)$  (distribution initiale de la température) nous prenons la fonction qui relie les points  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{5}{6}, 0)$ ,  $(\frac{11}{12}, \frac{3}{4})$ ,  $(1, 0)$  par des segments de droite. En l'absence d'un intérêt particulier pour une expression analytique des coefficients de Fourier, calculons les numériquement par une formule de quadrature. Le résultat peut être admiré en Fig. V.3. La solution  $u(x, t)$  résultant de (2.7) et tronquée après  $n$  termes est présentée en Fig. V.4 pour trois valeurs différentes de  $n$ . On voit que, pour  $t = 0$ , les pointes très aiguës nécessitent un grand nombre de termes. Mais dès que  $t$  a légèrement augmenté, la diffusion efface toutes les irrégularités et un petit nombre de termes suffit.

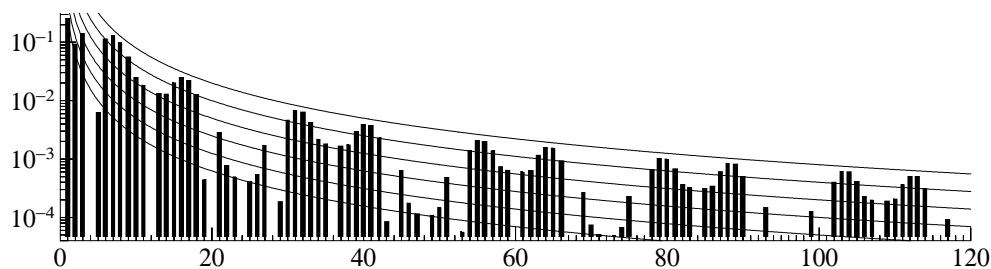


FIG. V.3: Spectre pour la fonction initiale (+ quelques courbes  $C \cdot n^{-2}$ )

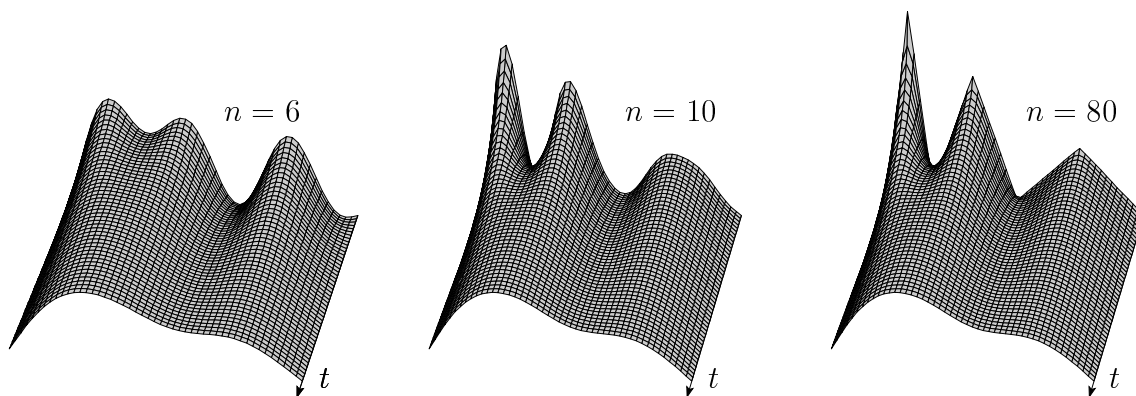


FIG. V.4: Solution de l'équation de la chaleur

### V.3 Le problème de Dirichlet pour l'équation du potentiel

“Hierzu kann in vielen Fällen . . . ein Princip dienen, welches Dirichlet zur Lösung dieser Aufgabe für eine der Laplace'schen Differentialgleichung genügende Function . . . in seinen Vorlesungen . . . seit einer Reihe von Jahren zu geben pflegt.”

(Riemann 1857, *Werke* p. 97)

L'équation du potentiel (équation de Laplace), en deux variables, est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1)$$

Tirant son origine de l'astronomie (Laplace 1785, Legendre 1785), cette équation a une grande importance dans presque toute la physique et en analyse complexe (voir le Théorème I.4.3).

**Problème de Dirichlet.** Soit donné un domaine  $U$  (ouvert, borné, avec bord qui est différentiable par morceaux) et une fonction  $f(x, y)$  définie sur  $\partial U$ . Trouver  $u(x, y)$  avec

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } U \quad \text{et} \quad u(x, y) = f(x, y) \quad \text{sur } \partial U. \quad (3.2)$$

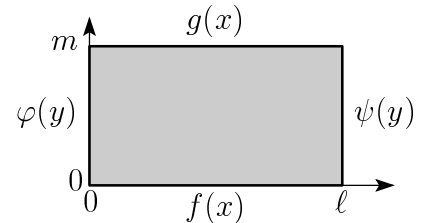
Riemann (1857) évoque une “solution” simple de ce problème qu'il nomme “Principe de Dirichlet” (voir citation): choisir parmi toutes les fonctions celle pour laquelle

$$\frac{1}{2} \iint_U \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \rightarrow \min \quad \text{et} \quad u(x, y) = f(x, y) \quad \text{sur } \partial U. \quad (3.3)$$

C'est un problème variationnel en deux variables (d'une sorte d'“énergie minimale”), et son “équation d'Euler-Lagrange” (voir “Analyse II, partie réelle”) est justement l'équation du potentiel. La solution du problème de Dirichlet en toute généralité a dû attendre le siècle suivant (Hilbert, Sobolev, Lax-Milgram).

#### Le problème de Dirichlet pour un rectangle.

Considérons le rectangle  $0 \leq x \leq \ell$  et  $0 \leq y \leq m$  et exprimons les conditions aux bords par quatre fonctions données  $f(x), g(x)$  ( $0 \leq x \leq \ell$ ) et  $\varphi(y), \psi(y)$  ( $0 \leq y \leq m$ ). Trouver la solution de (3.2) qui satisfasse ces conditions.



**Solution.** Nous supposons d'abord  $\varphi(y) = \psi(y) = 0$ . Posons, pour séparer les variables,  $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ , ce qui donne pour (3.2)

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \quad (3.4)$$

Car  $X(0) = X(\ell) = 0$ , nous avons pour  $X$  et  $\lambda$  les mêmes solutions qu'en (1.9). L'équation pour  $Y$  devient  $Y'' - \lambda Y = 0$ , et donne pour  $Y(y)$  les fonctions hyperboliques  $Y(y) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda} y + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} y$ . Pour faciliter le traitement des conditions aux bords  $y = 0$  et  $y = m$ , nous choisissons comme base  $\sinh \sqrt{\lambda} y$  (qui est nul en  $y = 0$ ) et  $\sinh \sqrt{\lambda}(m - y)$  (qui est nul en  $y = m$ ). Ainsi, nous avons, de nouveau par superposition, la solution générale

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \left( c_k \cdot \sinh \frac{k\pi y}{\ell} + d_k \cdot \sinh \frac{k\pi(m-y)}{\ell} \right). \quad (3.5)$$

Si l'on insère ici les conditions initiales  $y = 0$  et  $y = m$ , on trouve

$$d_k = \frac{2}{\ell \cdot \sinh \frac{k\pi m}{\ell}} \int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot f(x) dx, \quad c_k = \frac{2}{\ell \cdot \sinh \frac{k\pi m}{\ell}} \int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot g(x) dx. \quad (3.6)$$

Similairement (échanger  $x \leftrightarrow y$ ), on calcule une solution  $v(x, y)$  qui est nulle sur les droites horizontales et satisfait  $\varphi(y), \psi(y)$  pour  $0 \leq y \leq m$ . La solution finale est alors  $u(x, y) + v(x, y)$ .

**Exemple.** Pour satisfaire notre sens esthétique, choisissons  $m = 1$  et  $\ell = 1.618\dots$ , le nombre d'or. Pour le dessin de la figure V.5 nous partageons les côtés en 34 et 55 (nombres de Fibonacci) sous-intervalles. Les fonctions du bord sont

$$f(x) = \sqrt{\left(-2 \cos \frac{2\pi x}{\ell}\right)^+} = \sin \frac{\pi x}{\ell} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \sin \frac{7\pi x}{\ell} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin \frac{11\pi x}{\ell} + \dots \quad (3.7)$$

(où on utilise la convention  $f(x)^+ = \max(f(x), 0)$ ) et

$$g(x) = \min\left(\frac{\pi^2 x}{4\ell}, \frac{\pi^2(\ell - x)}{4\ell}\right) = \sin \frac{\pi x}{\ell} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{\ell} - \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi x}{\ell} + \dots \quad (3.8)$$

Comme façade est, nous prenons simplement  $\psi(y) = \sin \pi y$ , et à l'ouest, encore plus simple,  $\varphi(y) = 0$ . Le résultat peut être vu en figure V.5.

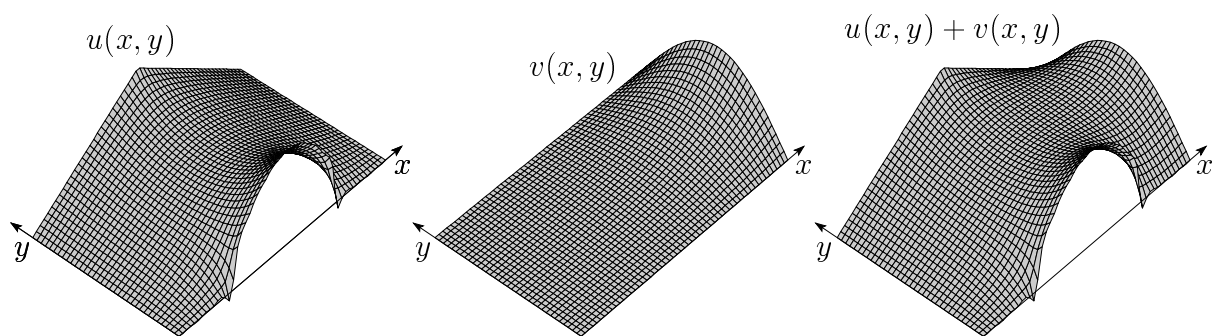


FIG. V.5: Un problème de Dirichlet pour un rectangle

### Le problème de Dirichlet pour le disque.

Un deuxième cas, où le problème de Dirichlet peut être résolu à l'aide des séries de Fourier est celui d'un disque. Soit  $D$  le disque unitaire. Nous choisissons des coordonnées polaires  $r, \varphi$  ( $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Pour la fonction  $v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  l'équation de Laplace (3.2) devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.9)$$

La séparation des variables  $v(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$  donne les deux équations ordinaires

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = \lambda, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda. \quad (3.10)$$

Puisque  $\Phi(\varphi)$  doit être périodique de période  $2\pi$ , il faut que  $\lambda = \lambda_k = k^2$  et  $\Phi(\varphi) = a \cos k\varphi + b \sin k\varphi$ . Ensuite l'équation pour  $R(r)$  devient

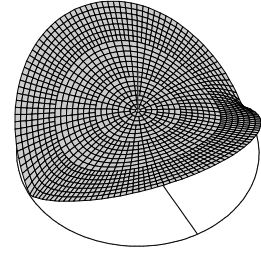
$$r^2 R'' + r R' - k^2 R = 0. \quad (3.11)$$

Il s'agit d'une équation du type "Cauchy" (voir [HW, p. 152]), pour laquelle on pose  $R(r) = r^q$  avec un  $q$  inconnu. L'équation (3.11) donne  $q(q-1) + q - k^2 = 0$ , c.-à-d.,  $q = \pm k$ . La solution  $q = -k$  possède une singularité pour  $r \rightarrow 0$ , donc la seule solution valable est  $R(r) = r^k$ . Le tout donne, par superposition, la solution générale

$$v(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (3.12)$$

**Condition au bord.** Si la condition au bord est exprimée par  $v(1, \varphi) = f(\varphi)$  pour  $0 < \varphi < 2\pi$ , on voit que les  $a_k$  et  $b_k$  sont tout simplement les coefficients de Fourier de la fonction  $f(\varphi)$ .

Comme exemple, considérons la condition au bord  $f(\varphi) = |\sin \varphi|$  en utilisant la série de la figure IV.3. La solution est dessinée dans la petite figure ( $n = 40$  termes de la série).



**La formule de Poisson.** Une représentation intéressante de la solution est due à Poisson (1815, voir [Burk1914, p. 997]) : l'idée consiste à introduire les formules (IV.1.5) pour les coefficients de Fourier  $a_k$  et  $b_k$  dans (3.12). Après un échange de l'intégration avec la somme on obtient

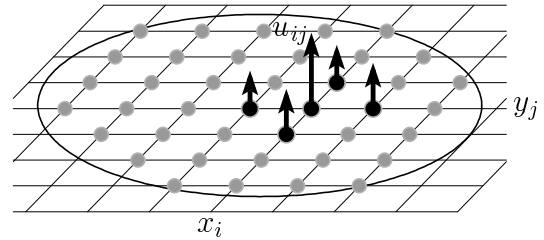
$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\cos k\varphi \cos k\psi + \sin k\varphi \sin k\psi) \right) f(\psi) d\psi. \quad (3.13)$$

Ici on se sert de la formule  $\cos k\varphi \cos k\psi + \sin k\varphi \sin k\psi = \cos k(\varphi - \psi)$ . La somme peut être évaluée en considérant la partie réelle de  $1 + 2 \sum_{k \geq 1} q^k = 1 + 2q/(1 - q) = (1 + q)/(1 - q)$  avec  $q := re^{i(\varphi - \psi)}$ . On obtient ainsi pour la solution de (3.9),

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2} f(\psi) d\psi. \quad (3.14)$$

## V.4 Equation des ondes (membrane circulaire)

Nous généralisons les idées de Joh. Bernoulli (voir le paragraphe V.1) à deux dimensions dans l'espace. On s'imagine la membrane représentée par des points de masse situés sur une grille (distance  $\Delta x$  en direction de l'axe  $x$ , et  $\Delta y$  en direction de  $y$ ). On cherche à connaître les vibrations transversales  $u_{ij}(t)$  de la membrane. Comme pour la corde vibrante, la force transversale au point  $(x_i, y_j)$  est



$$\begin{aligned} F_{ij} &= (F \Delta y) \left( \frac{u_{i-1,j} - u_{ij}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta x} \right) + (F \Delta x) \left( \frac{u_{i,j-1} - u_{ij}}{\Delta y} + \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta y} \right) \\ &\approx F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, \cdot) \Delta x \Delta y + F \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, \cdot) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

où on considère la vibration transversale comme fonction de trois variables,  $u_{ij}(t) = u(x_i, y_j, t)$ . Par la loi de Newton (force égale masse fois accélération) on obtient donc

$$\rho \Delta x \Delta y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) \approx F \Delta x \Delta y \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right).$$

En passant à la limite  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$ , en utilisant la notation  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  et l'abréviation  $a^2 = F/\rho$ , cette équation nous amène à (pour une membrane qui est fixée au bord)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u && \text{pour } (x, y) \in \Omega, \quad ?t > 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), && \text{pour } (x, y) \in \Omega \quad (\text{condition initiale, position}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= g(x, y) && \text{pour } (x, y) \in \Omega \quad (\text{condition initiale, vitesse}) \\ u(x, y, t) &= 0 && \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega, \quad ?t > 0 \quad (\text{condition au bord}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où, pour une membrane circulaire,  $\Omega = \{(x, y) ; x^2 + y^2 < 1\}$ .

**Première séparation des variables.** Comme pour l'équation des ondes dans une dimension, nous séparons le temps  $t$  des variables d'espace et nous cherchons des solutions de la forme  $u(x, y, t) = T(t) \cdot v(x, y)$ . Ceci conduit à

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta v(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda^2. \quad (4.2)$$

On a le droit de supposer que la constante dans (4.2) est négative. En effet, si  $v(x, y)$  est telle que  $\Delta v = C v$  dans  $\Omega$  (le disque unité) et  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on obtient par une intégration par parties (pour le premier terme par rapport à  $x$ , pour le deuxième par rapport à  $y$ )

$$\iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = - \iint_{\Omega} v \cdot \Delta v dx dy = -C \iint_{\Omega} v^2 dx dy,$$

ce qui montre que  $C < 0$ , si  $v(x, y)$  n'est pas identiquement nulle.

L'équation différentielle pour  $T(t)$  dans (4.2) donne les oscillations en temps

$$T(t) = A \cos(a\lambda t) + B \sin(a\lambda t) \quad (4.3)$$

et pour  $v(x, y)$  on obtient le problème (l'équation de Helmholtz)

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda^2 v &= 0 & \text{sur } \Omega \\ v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si  $\Omega$  est le disque unité, on peut résoudre ce problème. Il est naturel d'introduire des coordonnées polaires  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  et de considérer la fonction  $w(r, \varphi) = v(x, y) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . En exprimant le Laplacien  $\Delta v$  en terme de  $w$ , le problème (4.4) devient

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 w = 0 \quad (4.5)$$

$$w(1, \varphi) = 0, \quad w(r, 0) = w(r, 2\pi), \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, 0) = \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, 2\pi), \quad (4.6)$$

où la limite  $\lim_{r \rightarrow 0} w(r, \varphi)$  est constante et indépendante de  $\varphi$ .

**Deuxième séparation des variables.** Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (4.5), nous posons  $w(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$  ce qui donne

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda^2 r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = C.$$

La condition de périodicité,  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$  et  $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ , implique que  $C = n^2$  avec un entier  $n$ . Les solutions pour  $\Phi(\varphi)$  sont alors

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi. \quad (4.7)$$

Pour la fonction  $R(r)$  on obtient l'équation différentielle

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (4.8)$$

avec les conditions aux bords

$$R(1) = 0 \quad \text{et} \quad R(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ \text{une valeur finie} & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour  $\lambda > 0$ , la transformation  $x = \lambda r$  et  $y(x) = R(r)$  nous permet d'éliminer le paramètre  $\lambda$  de l'équation différentielle (4.8), car  $R'(r) = \lambda y'(x)$  et  $R''(r) = \lambda^2 y''(x)$ . On obtient ainsi l'équation de Bessel (4.10).

**L'équation de Bessel.** La transformation  $x = \lambda r$  et  $y(x) = R(r)$  dans l'équation différentielle (4.8) nous conduit à l'équation de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (4.10)$$

Nous considérons uniquement le cas où  $n$  est un entier non-négatif. Une particularité de l'équation de Bessel (4.10) est que le coefficient de  $y''$  s'annule en un point où on s'intéresse à la solution (il s'agit d'une équation différentielle avec une singularité).

Les termes principaux  $x^2 y'' + xy' + \dots$  de (4.10) sont les mêmes que pour une équation du type Cauchy et on est tenté de chercher une solution sous la forme  $y(x) = x^\alpha$ . Comme ceci ne marche pas, on essaie avec une perturbation d'une telle fonction :

$$y(x) = x^\alpha \sum_{j \geq 0} c_j x^j = \sum_{j \geq 0} c_j x^{j+\alpha} \quad \text{avec } c_0 \neq 0. \quad (4.11)$$

En insérant (4.11) dans (4.10) on obtient

$$\sum_{j \geq 0} c_j (j + \alpha)(j + \alpha - 1) x^{j+\alpha} + \sum_{j \geq 0} c_j (j + \alpha) x^{j+\alpha} + (x^2 - n^2) \sum_{j \geq 0} c_j x^{j+\alpha} = 0.$$

Une comparaison des coefficients donne

$$c_0 (\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2) = 0 \quad (4.12)$$

$$c_1 ((1 + \alpha)\alpha + (1 + \alpha) - n^2) = 0 \quad (4.13)$$

$$c_j ((j + \alpha)(j + \alpha - 1) + (j + \alpha) - n^2) + c_{j-2} = 0, \quad j \geq 2. \quad (4.14)$$

Comme  $c_0 \neq 0$ , l'équation (4.12) implique  $\alpha^2 - n^2 = 0$ , ce qui fixe la valeur de  $\alpha$ . La possibilité  $\alpha = -n$  (pour  $n > 0$ ) ne nous intéresse pas, parce que la fonction (4.11) possède une singularité en  $x = 0$  et ne peut donc pas satisfaire les conditions (4.9). Continuons alors notre calcul avec l'autre possibilité  $\alpha = n$ . L'équation (4.13) devient  $c_1(2n + 1) = 0$  et implique  $c_1 = 0$ . Finalement, la relation (4.14) donne la formule de récurrence  $c_j \cdot j(j + 2n) + c_{j-2} = 0$  pour  $j \geq 2$ . Le fait que  $c_1 = 0$  implique que  $c_j = 0$  pour tout  $j$  impair. Pour  $j = 2k$  on a  $c_{2k} \cdot 4k(k + n) + c_{2k-2} = 0$  et on voit par récurrence que

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k k! \prod_{i=1}^k (i + n)} c_0.$$

Avec le choix  $c_0 = 1/(2^n n!)$ , la fonction  $y(x)$  de (4.11) devient

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! (n + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (4.15)$$

Cette fonction s'appelle *fonction de Bessel* d'indice  $n$  (voir la figure V.6). Le critère du quotient

$$\left| \frac{c_{2k}}{c_{2(k+1)}} \right| = 4(k + 1)(k + 1 + n) \rightarrow \infty$$

montre que la série dans (4.15) converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

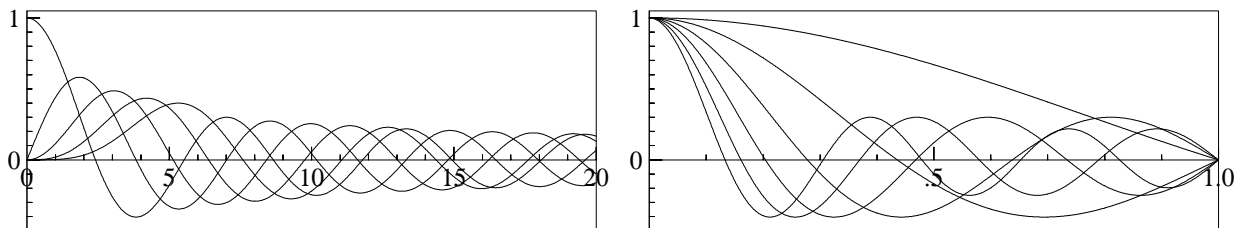
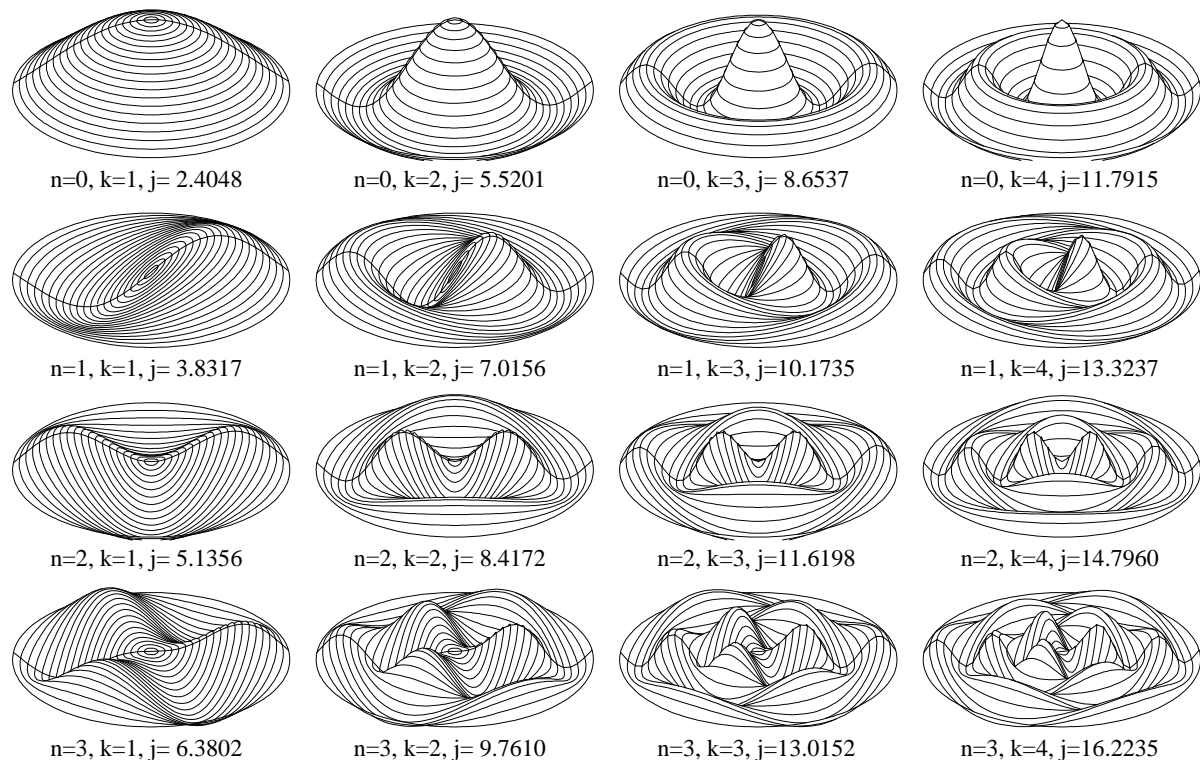


FIG. V.6: Fonctions de Bessel  $J_n(x)$  (gauche),  $J_0(j_{0k} r)$  (droite)



FIG. V.7: Fonctions propres  $J_n(j_{nk}r) \cos n\varphi$  du Laplacien sur le disque

**Solution de l'équation des ondes (membrane circulaire).** Pour tout  $\lambda > 0$ , la fonction  $R(r) = J_n(\lambda r)$  est solution de l'équation différentielle (4.8) et elle satisfait la condition pour  $R(0)$  de (4.9). Afin de satisfaire aussi la condition  $R(1) = 0$  de (4.9), il faut que  $\lambda$  soit une racine de  $J_n(\lambda) = 0$ . Le dessin à gauche de la figure V.6 montre que pour tout entier  $n \geq 0$ , la fonction de Bessel  $J_n(x)$  possède une infinité de zéros satisfaisant

$$0 < j_{n1} < j_{n2} < j_{n3} < \dots$$

Cette affirmation est donnée ici sans démonstration. Elle est obtenue comme application de la théorie de Sturm–Liouville qui est parfois traitée au cours Analyse II (partie réelle).

La fonction  $R(r) = J_n(j_{nk}r)$  satisfait alors l'équation différentielle (4.8) et la condition au bord (4.9). Par conséquent, pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$w(r, \varphi) = J_n(j_{nk}r) (a_{nk} \cos n\varphi + b_{nk} \sin n\varphi)$$

est une solution de l'équation de Helmholtz (4.5) en coordonnées polaires qui satisfait les conditions au bord (4.6). En la multipliant par (4.3) où  $\lambda$  est remplacé par  $j_{nk}$  on obtient par superposition la solution générale  $u(x, y, t)$  de l'équation des ondes (4.1):

$$\begin{aligned} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi, t) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 1} J_n(j_{nk}r) (a_{nk} \cos n\varphi + b_{nk} \sin n\varphi) \cos(a j_{nk} t) \\ &+ \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 1} J_n(j_{nk}r) (c_{nk} \cos n\varphi + d_{nk} \sin n\varphi) \sin(a j_{nk} t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Il reste à déterminer les coefficients  $a_{nk}$ ,  $b_{nk}$ ,  $c_{nk}$  et  $d_{nk}$  afin de satisfaire les conditions initiales pour la position et la vitesse dans (4.1). Pour ce calcul nous utiliserons une relation d'orthogonalité des fonctions de Bessel.

**Théorème 4.1 (orthogonalité des fonctions de Bessel)** Soient  $0 < j_{n1} < j_{n2} < j_{n3} < \dots$  les zéros positifs de  $J_n(x)$ , alors on a

$$\int_0^1 J_n(j_{nk}r) J_n(j_{n\ell}r) r dr = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq \ell \\ \frac{1}{2} (J'_n(j_{nk}))^2 & \text{pour } k = \ell. \end{cases}$$

*Démonstration.* Posons  $\lambda_k := j_{nk}$  et  $y_k(r) := J_n(\lambda_k r)$ . Cette fonction satisfait l'équation différentielle (4.8) qui, après une division par  $r$ , peut être écrite sous la forme auto-adjointe

$$(ry'_k)' + \left(\lambda_k^2 r - \frac{n^2}{r}\right) y_k = 0, \quad y_k(1) = 0. \quad (4.17)$$

Deux intégrations par parties donnent (en utilisant  $y_k(1) = y_\ell(1) = 0$ )

$$\int_0^1 (ry'_k(r))' y_\ell(r) dr = ry'_k(r) y_\ell(r) \Big|_0^1 - \int_0^1 ry'_k(r) y'_\ell(r) dr = \dots = \int_0^1 (ry'_\ell(r))' y_k(r) dr.$$

En remplaçant  $(ry'_k)'$  par l'expression de (4.17) on obtient

$$-\int_0^1 \left(\lambda_k^2 r - \frac{n^2}{r}\right) y_k(r) y_\ell(r) dr = -\int_0^1 \left(\lambda_\ell^2 r - \frac{n^2}{r}\right) y_\ell(r) y_k(r) dr \quad (4.18)$$

et par conséquent aussi

$$(\lambda_k^2 - \lambda_\ell^2) \int_0^1 y_k(r) y_\ell(r) r dr = 0$$

ce qui entraîne l'orthogonalité pour  $k \neq \ell$ .

Une multiplication de (4.17) par  $ry'_k$  donne  $(ry'_k)(ry'_k)' + (\lambda_k^2 r^2 - n^2) y_k y'_k = 0$  ce qui peut être écrit sous la forme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (ry'_k(r))^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( y_k^2(r) (\lambda_k^2 r^2 - n^2) \right) - y_k^2(r) \lambda_k^2 r = 0.$$

On intègre cette identité de 0 à 1 pour obtenir (observer que  $y_k(1) = 0$  et que  $y_k(0) = 0$  si  $n > 0$ )

$$\frac{1}{2} (y'_k(1))^2 = \lambda_k^2 \int_0^1 y_k(r) y_k(r) r dr.$$

L'affirmation du théorème pour  $k = \ell$  est maintenant une conséquence de  $y_k(r) = J_n(\lambda_k r)$  et de  $y'_k(r) = \lambda_k J'_n(\lambda_k r)$ .  $\square$

**Satisfaire les conditions initiales.** Commençons par celle pour la position  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ . Nous travaillons en coordonnées polaires et nous développons la fonction en série de Fourier

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \sum_{n \geq 0} (A_n(r) \cos n\varphi + B_n(r) \sin n\varphi). \quad (4.19)$$

Les coefficients de Fourier peuvent être calculés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \\ A_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n \geq 1 \\ B_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

En comparant la série (4.19) avec la solution  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$  de (4.16), on obtient

$$A_n(r) = \sum_{k \geq 1} a_{nk} J_n(j_{nk} r), \quad B_n(r) = \sum_{k \geq 1} b_{nk} J_n(j_{nk} r). \quad (4.20)$$

Il reste à multiplier ces formules par  $r J_n(j_{n\ell} r)$  et d'intégrer sur l'intervalle  $[0, 1]$ . La relation

d'orthogonalité pour les fonctions de Bessel donne alors

$$a_{n\ell} = \frac{2}{(J'_n(j_{n\ell}))^2} \int_0^1 A_n(r) J_n(j_{n\ell} r) r dr, \quad b_{n\ell} = \frac{2}{(J'_n(j_{n\ell}))^2} \int_0^1 B_n(r) J_n(j_{n\ell} r) r dr. \quad (4.21)$$

Un calcul analogue permet de déterminer les coefficients  $c_{nk}$  et  $d_{nk}$  dans (4.16) à partir des coefficients de Fourier  $C_n(r)$  et  $D_n(r)$  de la fonction  $g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  (condition initiale pour la vitesse). Avec les valeurs de  $a_{nk}$ ,  $b_{nk}$ ,  $c_{nk}$ ,  $d_{nk}$  ainsi trouvées et insérées dans (4.16), nous avons complètement résolu le problème (4.1) sur le disque unité.

*Remarque.* Les séries de (4.20) avec coefficients définies par (4.21), s'appellent *séries de Fourier–Bessel*. À l'aide de la théorie de Sturm–Liouville on peut démontrer que le système orthogonal  $\{J_n(j_{nk} r)\}_{k \geq 1}$  est complet sur l'intervalle  $[0, 1]$  par rapport au produit scalaire avec fonction de poid  $\omega(r) = r$ . Ceci implique que pour toute fonction dans  $\mathcal{R}([0, 1], \mathbb{C})$  la série converge en moyenne quadratique vers  $f(x)$ . Pour obtenir la convergence ponctuelle ou uniforme il faut supposer plus de régularité (continuité, différentiabilité, ...) de la fonction.

## V.5 Transformation de Fourier

“On considère ici le mouvement de la chaleur dans une masse solide homogène, dont toutes les dimensions sont infinies.” (Fourier, *Théorie Anal. de la Chaleur* 1822, Chap. IX)

Si on veut calculer le mouvement de la chaleur dans un fil de longueur infinie, on peut prendre les formules du paragraphe V.2 et faire tendre  $\ell \rightarrow \infty$ . Mais comme il y a déjà un passage à la limite (la somme infinie dans la série de Fourier) il faut faire attention.

Prenons une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui tend rapidement vers zéro si  $x \rightarrow \pm\infty$ , et considérons la série de Fourier pour sa restriction sur l'intervalle  $[-\pi\ell, \pi\ell]$ :

$$f(x) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx/\ell} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{2\pi\ell} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} f(t) e^{-ikt/\ell} dt. \quad (5.1)$$

Si la fonction satisfait  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ , les coefficients  $c_k$  convergent vers zéro si  $\ell \rightarrow \infty$  (à cause du facteur  $(2\pi\ell)^{-1}$  devant l'intégrale). La série de Fourier tronquée (avec un  $n$  fixé) donne alors une mauvaise approximation de  $f(x)$  (voir les deux dessins de la Figure V.8 qui utilisent le même nombre de termes).

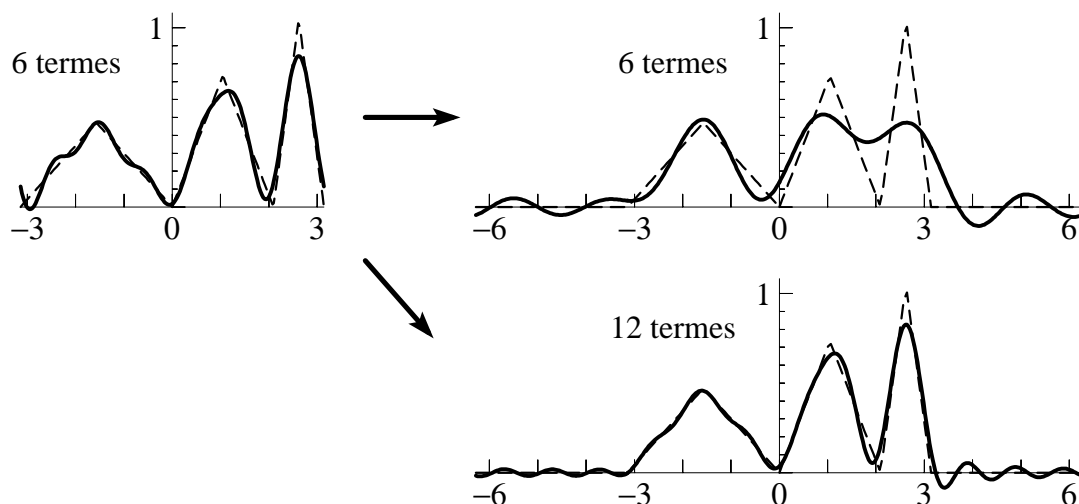


FIG. V.8: Série de Fourier sous le passage  $\ell \mapsto 2\ell$

Simultanément avec  $\ell$ , on doit augmenter le nombre de termes pris en considération (voir la troisième image dans la Figure V.8). L'idée est de prendre  $n = m\ell$  termes dans la série tronquée (où  $m$  est une constante et  $\ell$  est supposé être entier). En posant  $\omega_k = k/\ell$  pour  $|k| \leq m\ell$ , on obtient alors en insérant les coefficients  $c_k$  dans la série tronquée

$$\sum_{k=-m\ell}^{m\ell} c_k e^{ikx/\ell} = \sum_{k=-m\ell}^{m\ell} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k x} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

Dans cette formule on reconnaît une somme de Riemann et en laissant tendre  $\ell$  et  $m$  vers l'infinie, les deux membres convergent formellement vers

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega. \quad (5.2)$$

L'intégrale de Riemann étant définie seulement pour un intervalle compact, nous sommes obligés de considérer des intégrales impropres (voir [HW, Sect. III.8]). Nous introduisons l'espace

$$\mathcal{RG}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; f|_{[-n,n]} \in \mathcal{R}([-n,n], \mathbb{C}) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n |f(x)| dx < \infty \right\} \quad (5.3)$$

de fonctions absolument intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 5.1 (Transformation de Fourier)** Soit  $f \in \mathcal{RG}(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier de  $f$  est la fonction sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.4)$$

Souvent on utilise aussi la notation  $(\mathcal{F}f)(\omega)$  pour  $\hat{f}(\omega)$ .

Ainsi, la formule (5.2) ressemble à merveille aux formules (IV.1.6) : la somme (sur  $k$ ) dans (IV.1.6) est devenue une intégrale (sur  $\omega$ ), et les coefficients  $c_k$  deviennent la fonction  $\hat{f}(\omega)$ . Grâce à cette analogie, les coefficients de Fourier  $c_k$  sont souvent notés par  $\hat{f}(k)$ . Une grande partie de résultats du chapitre IV peut être formulée et démontrée pour la transformée de Fourier. Commençons par le Lemme de Riemann et la théorie de Dirichlet.

**Lemme 5.2 (Riemann–Lebesgue)** Soit  $f(x)$  une fonction absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $\hat{f}(\omega)$  est uniformément continue et satisfait  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$  pour  $\omega \rightarrow \pm\infty$ .

*Démonstration.* Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $m > 0$  tel que  $\int_{|x| \geq m} |f(x)| dx < \varepsilon$ . Pour  $\omega, \omega_0 \in \mathbb{R}$  nous avons alors

$$\sqrt{2\pi} |\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}| \cdot |f(t)| dt \leq 2\varepsilon + m|\omega - \omega_0| \int_{-m}^m |f(t)| dt,$$

où la dernière majoration utilise  $|e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}| \leq 2$  pour  $|t| \geq m$  et le théorème des accroissements finis pour  $|t| \leq m$  :  $|e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}| \leq \sup_s |ite^{-ist}| \cdot |\omega - \omega_0| \leq m|\omega - \omega_0|$ . La continuité uniforme de  $\hat{f}(\omega)$  en découle.

Comme  $\sqrt{2\pi} |\hat{f}(\omega)| \leq \varepsilon + \left| \int_{-m}^m f(t) e^{i\omega t} dt \right|$ , le Lemme de Riemann (Lemme IV.2.2) donne  $\sqrt{2\pi} |\hat{f}(\omega)| \leq 2\varepsilon$  si  $|\omega|$  est assez grand.  $\square$

**Théorème 5.3** Soit  $f \in \mathcal{RG}(\mathbb{R})$  et à variation bornée sur chaque intervalle compact. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m}^m \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

*Démonstration.* Pour  $m > 0$  on introduit une fonction  $F_m(x)$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_m(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m}^m \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega. \quad (5.5)$$

Puisque  $|\int_{|t| \geq n} f(t) e^{-i\omega t} dt| \leq \int_{|t| \geq n} |f(t)| dt \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , la limite dans (5.5) est uniforme en  $\omega$  et on peut échanger la limite avec l'intégrale sur  $\omega$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n f(t) \left( \int_{-m}^m e^{i\omega(x-t)} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin m(x-t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \frac{\sin ms}{s} ds, \end{aligned}$$

car l'intégrale sur  $\omega$  peut être déterminée explicitement et vaut  $2(x-t)^{-1} \sin m(x-t)$ . Le reste de la démonstration est identique à celle du Théorème IV.4.2.  $\square$


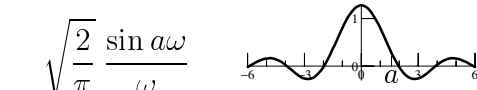
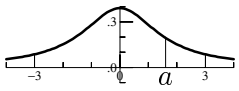
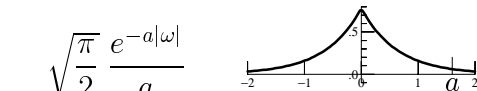
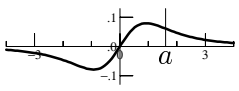
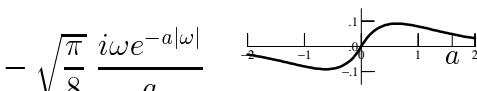
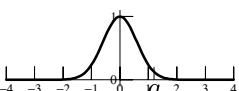
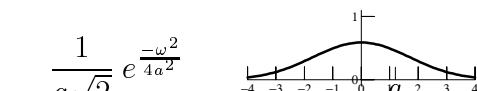
Une conséquence immédiate est la formule d'inversion.

**Corollaire 5.4 (formule d'inversion de Fourier)** Soit  $f(x)$  une fonction continue, à variation bornée sur chaque intervalle compact et dans  $\mathcal{RG}(\mathbb{R})$ . Si  $\hat{f}(\omega)$  est absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ , alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad \square$$

Pour travailler avec la transformation de Fourier, il est utile d'avoir une petite table à sa disposition (voir la table V.1). De telles tables ont été publiées par Campbell & Forster 1948, Erdélyi et al. 1954. La plus impressionnante est de F. Oberhettinger, *Math. Grundlehren* XC (1957) qui

TAB. V.1: Petite table de la transformée de Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega x} d\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$
 $\begin{cases} 1 & \text{si }  x  < a, \\ 0 & \text{si }  x  \geq a; \end{cases}$	 $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$
 $\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	 $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a \omega }}{a}$
 $\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$	 $-\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{i\omega e^{-a \omega }}{a}$
 $e^{-a^2 x^2} \quad (a > 0)$	 $\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

contient sur 200 pages quelques 1800 formules. L'introduction d'une page et demie mise à part, cet ouvrage ne contient que des formules et vaut la peine d'être feuilleté. L'éditeur n'a pas omis de préciser, comme à l'accoutumée, qu'il était "interdit de le traduire dans une langue étrangère". La table V.1 est un extrait de Gradshteyn-Ryzhik, p. 1147.

## Convolution

"C'est là la propriété essentielle de la transformation de Fourier, et qui est la *raison d'être* de ses applications . . ."

(L. Schwartz, *Cours* 1958, p. 25.)

Nous avons déjà rencontré la convolution à plusieurs occasions : théorème d'approximation de Weierstrass [HW, p. 267], les formules de Dirichlet (IV.4.1) et Fejér (IV.6.3) et la formule intégrale de Cauchy (II.5.1). On définit la *convolution* de deux fonctions  $f$  et  $g$  par

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt. \quad (5.6)$$

Le facteur "gênant"  $1/\sqrt{2\pi}$  sera le bienvenu dans la preuve du théorème suivant, théorème donnant une simple relation entre la convolution et la transformation de Fourier.

**Théorème 5.5** *Soient  $f$  et  $g$  des fonctions absolument intégrables et bornées. La transformée de Fourier de leur convolution est le produit des deux transformées de Fourier, plus précisément*

$$(\widehat{f * g})(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega). \quad (5.7)$$

*Démonstration.* Il faut insérer la définition (5.6) dans la transformée de Fourier (5.4), changer les intégrations à volonté et faire une substitution triviale :

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot e^{-i\omega(x-t)} dx \right) g(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dans l'intégrale intérieure on substitue  $\xi = x - t$ , ainsi l'intégrale double se décompose en un produit de deux intégrales simples.  $\square$

## Transformée d'une Dérivée

Voici la propriété importante pour les applications de la transformation de Fourier aux résolutions des équations différentielles.

**Théorème 5.6** *Si  $f(x)$  et ses dérivées  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sont dans  $\mathcal{RG}(\mathbb{R})$ , alors*

$$(\widehat{f'})(\omega) = i\omega \cdot \widehat{f}(\omega), \quad (\widehat{f''})(\omega) = (i\omega)^2 \cdot \widehat{f}(\omega). \quad (5.9)$$

*Démonstration.* La preuve est par intégrations par parties. On a

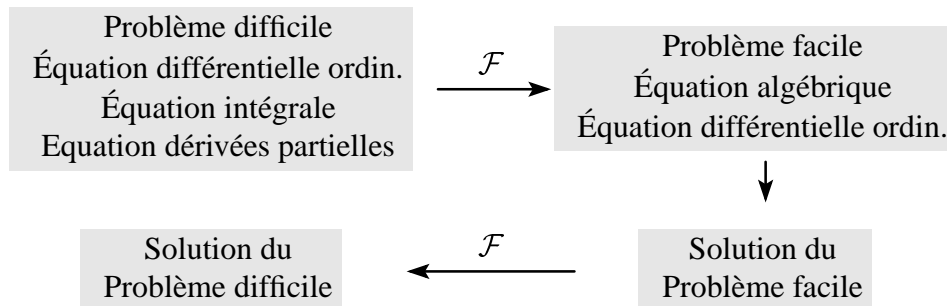
$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Comme  $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$  et  $f' \in \mathcal{RG}(\mathbb{R})$ , on voit que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  existent. Ces limites sont nulles car  $f \in \mathcal{RG}(\mathbb{R})$ . Une autre façon de voir le résultat est de dériver l'intégrale de la transformation inverse (Corollaire 5.4) par rapport au "paramètre"  $x$ .  $\square$

Comme exemple, voir les formules 2 et 3 dans la table V.1.

## Application aux équations différentielles et intégrales

Le schéma est le suivant : la transformation de Fourier change une équation différentielle (ou une équation intégrale avec convolution) en une équation plus simple. Cette équation est résolue, puis la transformée inverse donne la solution.



Ci-dessous quelques exemples faciles. (Des exemples plus compliqués de la physique — “the theory of vibrations”, “the conduction of heat in solids”, “slowing down of neutrons”, “hydrodynamical problems”, “atomic and nuclear physics”, “two-dimensional stress systems”, “symmetrical stress systems” — dans le “state-of-the-art” de 1951, constituent plus de 80% du livre de Sneddon. Aujourd’hui, les progrès des méthodes numériques et des ordinateurs ont quelque peu tempéré cet enthousiasme.)

**Equation de la chaleur.** Voyons avec quelle élégance la transformée de Fourier nous amène à la solution de l’équation de la chaleur pour un fil infini :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty \end{array} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \begin{array}{c} \frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = -a^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t) \end{array} \\
 & & \downarrow \\
 \begin{array}{c} u(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2t}} * f(x) \end{array} & \xleftarrow{\mathcal{F}} & \begin{array}{c} \hat{u}(\omega, t) = e^{-a^2 \omega^2 t} \cdot \hat{u}(\omega, 0) \\ = e^{-a^2 \omega^2 t} \cdot \hat{f}(\omega) \end{array}
 \end{array}$$

Sous des conditions sur  $f(x)$  qui permettent de faire toutes ces opérations, la solution est alors donnée par la *formule de Poisson*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds. \quad (5.10)$$

**Une équation intégrale.** Cherchons une fonction  $y(x)$  telle que

$$\begin{array}{ccc}
 \int_{-\infty}^{\infty} y(x-u) \cdot y(u) du = e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{2\pi} \hat{y}(\omega) \cdot \hat{y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-\omega^2}{4}} \\
 & & \downarrow \\
 y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} e^{-2x^2} & \xleftarrow{\mathcal{F}} & \hat{y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^{1/4}} e^{\frac{-\omega^2}{8}}
 \end{array}$$

## V.6 Exercices

1. Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fois continûment différentiables, la fonction  $u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$  est une solution de l'équation des ondes  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ . Déterminer les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  pour satisfaire les conditions (avec  $f$  et  $g$  convenables)

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & \quad \text{pour } 0 < x < \ell \quad (\text{conditions initiales}) \\ u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0 & \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{conditions aux bords}). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Le résultat est

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + at) + f(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds. \quad (6.2)$$

2. La fonction  $u(x, t)$  de (6.2) est bien définie tant que  $[x - at, x + at] \subset [0, \ell]$ . Comment faut-il prolonger les fonctions  $f$  et  $g$  en dehors de l'intervalle  $[0, \ell]$  pour que (6.2) soit une solution pour  $x \in [0, \ell]$  et pour tout  $t \geq 0$ . Discuter les conditions sur  $f$  et  $g$  afin que  $u(x, t)$  soit deux fois continûment différentiable.
3. *L'équation des tuyaux sonores.* En supposant que les extrémités du tuyau soient ouvertes, on est confronté au problème (avec  $f$  et  $g$  convenables)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \quad \text{pour } 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & \quad \text{pour } 0 < x < \ell \quad (\text{conditions initiales}) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 & \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{conditions aux bords}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

a) Montrer que (6.2) représente la solution de (6.3), si l'on prolonge les fonctions  $f$  et  $g$  de façon à ce qu'elles soient paires et périodiques de période  $2\ell$ .

b) En utilisant la méthode des séries de Fourier, trouver une autre représentation de la solution de (6.3).

4. L'énergie de la corde vibrante (en temps  $t$ ) est donné par

$$H[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right) dx.$$

Montrer que l'énergie est préservée en temps.

5. On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0$$

pour un conducteur linéaire de longueur  $\ell$ . Trouver les solutions correspondant aux conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0.$$

6. Considérons le *problème de Neumann* sur le disque  $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ :

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6.4)$$

( $\partial u / \partial \vec{n}$  est la dérivée en direction de la normale  $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ).

En supposant connue la série de Fourier pour  $g(e^{i\varphi})$ , calculer la solution de (6.4).



7. Démontrer une des formules suivantes ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)), \quad J'_0(x) = -J_1(x) \quad (6.5)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \quad (6.6)$$

8. Démontrer la formule (de Bessel 1816)

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \xi - n\xi) d\xi. \quad (6.7)$$

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0$  pour tout  $x \geq 0$ .

*Indication.* En utilisant la série de Taylor, démontrer la formule pour  $n = 0$ . Ensuite, vérifier que l'intégrale dans l'équation (6.7) satisfait les formules (6.5).

9. En sachant que

$$J_0(2.13) = 0.14960677044884, \quad J_1(2.13) = 0.56499698056413,$$

utiliser la formule de récurrence (6.6) pour calculer  $J_n(2.13)$  pour  $n = 2, 3, \dots, 30$ . Le résultat est-il en contradiction avec l'affirmation de l'exercice précédent?

Essayer d'expliquer l'apparante contradiction en étudiant toutes les solutions de

$$y_{n+1} - 2by_n + y_{n-1} = 0$$

où  $b > 1$  est une constante donnée.