

ooo
o
o
oooo

ooo
oooooooo
oooooooo

oo
oo
ooo

o
o

Contrôle optimal et méthodes homotopiques

Université de Genève

Joseph Gergaud, Thomas Haberkorn et Pierre Martinon

Mercredi 18 octobre 2006

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
ooo o o oooo	ooo ooooooooo ooooooooo	oo oo ooo	o o		

Transfert orbital

Contrôle optimal

$$p_0 \neq 0$$

Structure du contrôle optimal

Existence de solution

Propriété de la fonction de tir

Méthodes homotopiques

Difficultés de la méthode de tir

Méthodes homotopiques

Algorithmes homotopiques

Résultats numériques

Convergence

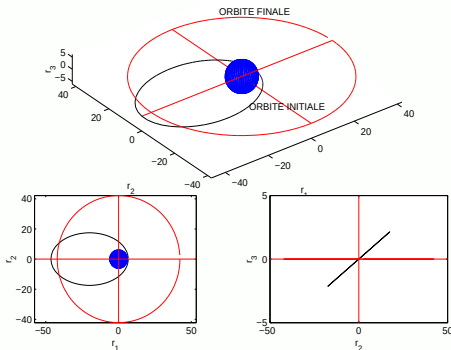
Minima locaux

Exemples de solutions

Condition du deuxième ordre

Conclusion

Transfert orbital



- ▶ Transfert LEO - GOE:
 $P_0 = 11.625 \text{ Mm}$, $e_0 = 0.75$ et
 $i_0 = 7^\circ$
- ▶ Masse initiale: $m_0 = 1500 \text{ kg}$
- ▶ Poussées faibles: $T_{\max} = 0.1 \text{ N}$
- ▶ Coûts
 - ▶ Minimisation de t_f
 - ▶ Maximisation de la masse finale
 - ▶ Minimisation de "l'énergie"



Contrat CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES

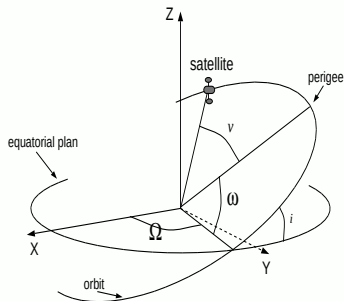
Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
○○○ ○ ○ ○○○	○○○ ○○○○○○○○ ○○○○○○○○	○○ ○○ ○○○	○ ○	○ ○	

Coordonnées

- Coordonnées cartésiennes (on néglige le terme en J_2)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{T}}{m}$$

- Coordonnées de Gauss modifiées $x = (P, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$:



$$\left\{ \begin{array}{lcl} P & = & a(1 - e^2) \\ e_x & = & e \cos(\Omega + \omega) \\ e_y & = & e \sin(\Omega + \omega) \\ h_x & = & \tan(i/2) \cos \Omega \\ h_y & = & \tan(i/2) \sin \Omega \\ L & = & \Omega + \omega + \nu + 2\pi n \text{ (cumulée)} \end{array} \right.$$

n = Nombre de révolutions

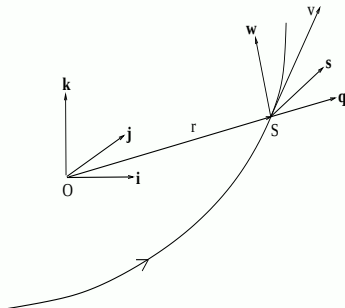
ooo
o
o
ooo

ooo
oooooooo
oooooooo

oo
oo
ooo

o
o

Contrôle



- ▶ Repère ortho-radial (q, s, w)

- ▶ On normalise le contrôle

$$T = T_{\max} u$$

La contrainte sur le contrôle devient $|u| \leq 1$

$$\left(|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \right)$$

- ▶ Équation d'état:

$$\dot{x} = f_0(x) + (T_{\max}/m) \sum_{i=1}^3 f_i(x) u_i$$

$$\dot{m} = -\frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} |u|$$

Coûts

- ▶ Résultats préliminaires
 - ▶ $\min t^f$
 $t_{\min}^f T_{\max} \approx c^{te}$ (T. Le, S. Geffroy, R. Épenoy)
 - ▶ $\min L^f$
 $(L_{\min}^f - L^0) T_{\max} \approx c^{te}$ (T. Haberkorn)
- ▶ Maximisation de la masse finale: $\max m(t^f)$
 $\iff$ Minimisation de la consommation : $\min \int_0^{t^f} |u| dt$

Problème de contrôle optimal

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^{t_f} |u| dt \\ \dot{x} = f_0(x) + (T_{\max}/m) \sum_{i=1}^3 f_i(x) u_i \\ \dot{m} = -\beta T_{\max} |u| \\ |u| \leq 1 \\ \text{Conditions initiales et finales} \\ L^f \text{ libre} \\ t^f \text{ fixé} \end{array} \right.$$

$p_0 \neq 0$

Condition nécessaire I

Coordonnées cartésiennes

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^{t_f} |u| dt \\ \dot{r} = v \\ \dot{v} = \Gamma(r) + (T_{\max}/m)u \\ \dot{m} = -\beta T_{\max}|u| \\ |u| \leq 1 \\ (r(0), v(0), m(0)) \text{ fixés} \\ (r(t_f), v(t_f)) \text{ fixés} \\ t_f \text{ fixé} \end{array} \right.$$

avec

► Équation adjointe

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -{}^t\Gamma'(r)p_v \\ \dot{p}_v &= -p_r \\ \dot{p}_m &= \frac{T_{\max}}{m^2}(u|p_v) \end{aligned}$$

► Cond. de transversalité

$$p_m(t_f) = 0$$

► Min. de l'Hamiltonien

$$u = \operatorname{argmin}_{|w| \leq 1} H(r, v, m, w, p_0, p_r, p_v, p_m)$$

$$H(r, v, m, p_0, p_r, p_v, p_m) = (p_0 - \beta T_{\max} p_m)|u| + \frac{T_{\max}}{m}(u|p_v) + (v|p_r) + (\Gamma(r)|p_v)$$

$p_0 \neq 0$

Condition nécessaire II

Proposition

Si

(H_1) : les orbites initiale et finale sont différentes
est vraie alors p_v a au plus un nombre fini de zéros

Démonstration

Sinon il existe $(t_k) \rightarrow \bar{t}$ tels que $p_v(t_k) = 0$. Par suite

- ▶ $\frac{p_v(t_k) - p_v(\bar{t})}{t_k - \bar{t}} = 0 \longrightarrow \dot{p}_v(\bar{t}) = -p_r(\bar{t})$
- ▶ $p_v(\bar{t}) = p_r(\bar{t}) = 0 \Rightarrow p_v = p_r = 0 \Rightarrow p_m = 0 \Rightarrow p_0 \neq 0$
- ▶ $0 = u = \operatorname{argmin}_{|w| \leq 1} \{H(w) = p_0 |w|\}$

□

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
	○○● ○ ○ ○○○	○○○ ○○○○○○○○ ○○○○○○○○	○○ ○○ ○○○		○ ○

$p_0 \neq 0$

$p_0 \neq 0$

Proposition

Si (H_1) et (H_2) sont vraies alors $p_0 \neq 0$

(H_2) : Le temps final t_f est strictement supérieur au temps minimal t_{fmin}

Démonstration

Sinon (Cauchy–Schwarz)



$$H(r, v, m, p_0, p_r, p_v, p_m) \geq \left(-\frac{T_{\max}}{m} |p_v| - \beta T_{\max} p_m \right) |u| + \dots$$

► $u = -\alpha p_v, \alpha \geq 0 \Rightarrow \dot{p}_m = -\alpha (T_{\max}/m^2) |p_v|^2 \leq 0$

$\Rightarrow p_m(t) \geq 0 \quad (p_m(t_f) = 0)$

► $|u| = 1$ presque partout $\Rightarrow \int_0^{t_f} |u| dt = t_f = t_{fmin}$

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
	○○○ ● ○ ○○○	○○○ ○○○○○○○○ ○○○○○○○○	○○ ○○ ○○○		○ ○

Structure du contrôle optimal

Structure du contrôle optimal

On prend $p_0 = 1$, on note $y = (x, p) = (r, v, m, p_r, p_v, p_m)$ et on pose

$$\psi(y) = 1 - \beta T_{\max} p_m - \frac{T_{\max}}{m} |p_v|$$

Proposition

Si (H_1) et (H_2) sont vraies et $p_v \neq 0$ alors le contrôle optimal s'écrit:

$$u(y) = \begin{cases} -\frac{p_v}{|p_v|} & \text{si } \psi(y) < 0 \\ -\alpha \frac{p_v}{|p_v|} & \text{si } \psi(y) = 0 \\ 0 & \text{si } \psi(y) > 0. \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1] \quad (1)$$

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
○○○ ○ ● ○○○	○○○ ○○○○○○○ ○○○○○○○	○○ ○○ ○○○	○ ○	○ ○	

Existence de solution

Existence de solution

Proposition

Si (H_2) et

(H_3) : *L'état reste dans l'ensemble*

$A = \{(r, v, m) \in \mathbf{R}^7; r > r_0 > 0, m > \chi_0 > 0\}$ *sont vraies alors le problème de maximisation de la masse finale a une solution*

Démonstration

- ▶ Toutes les hypothèses du théorème d'existence de Filippov sont vérifiées sauf la convexité de $f(t, x, U)$ ($\dot{x} = f(t, x, u)$)
- ▶ On utilise les coordonnées sphériques (Oberle et Taubert)
- ▶ On utilise les solutions généralisées (Gamkrelidze, Young):
 - ▶ On convexifie $f(t, x, U)$
 - ▶ On vérifie que la solution du problème convexifié est une paire admissible de notre problème

Méthode de tir

Le Principe du Maximum de Pontriaguine donne le problème aux deux bouts:

$$(BVP) \begin{cases} \dot{y} = \varphi(y) & t \in [0, t_f] \quad t \text{ fixé} \\ r(0) = r_0; v(0) = v_0; m(0) = m_0 \\ r(t_f) = r_f; v(t_f) = v_f; p_m(t_f) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\varphi(y) = \begin{pmatrix} v \\ \Gamma(r) + \frac{T_{max}}{m} \\ -\beta T_{max}|u| \\ -\Gamma'(r)p_v \\ -p_r \\ \frac{T_{max}}{m^2}(u|p_v) \end{pmatrix}$$



fonction de tir

$$S : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$z \longmapsto S(z) = ((y(t_f; z))_{I_f} - y_f)$$

où $y(., z)$ est la solution du problème de Cauchy:

$$(IVP)_z \begin{cases} \dot{y} = \varphi(y) & t \in [0, t_f] \quad t \text{ fixé} \\ r(0) = r_0; v(0) = v_0; m(0) = m_0 \\ p(0) = z \end{cases}$$

$$(y(t_f; z))_{I_f} = (r(t_f), v(t_f), p_m(t_f))_{I_f}$$

$$y_f = (r_f, v_f, 0)$$

Propriété de la fonction de tir

$$\Omega = \{z \in \mathbf{R}^n | x(t; z) \in A, \\ p_v(t; z) \neq 0, \\ \psi^2(y(t; z)) + (p_r(t; z) | p_v(t; z))^2 \neq 0, \\ \psi(y(0; z)) \neq 0 \quad \text{and} \quad \psi(y(t_f; z)) \neq 0\}$$

On a

Proposition

1. $\psi_z(t) = \psi(y(t; z))$ est C^1 et il existe au plus un nombre fini d'instants de commutation (i.e. tels que $\psi(y(t; z)) = 0$)
2. Ω est ouvert et S est C^∞ dans Ω

Démonstration

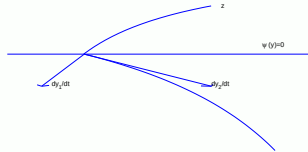
1. Soit $z \in \Omega$, on pose $\psi_z(t) = \psi(y(t; z))$

$$\dot{\psi}_z(t) = -\frac{T_{max}}{m(t; z)} \frac{(p_v(t; z)|p_r(t; z))}{|p_v(t; z)|} \quad (2)$$

Donc ψ_z est C^1 et les 0 de $\psi_z(t)$ sont isolés

2.

$$\dot{\psi}_z(t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \dot{y}_1(\bar{t}; z) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \dot{y}_2(\bar{t}; z) \neq 0$$



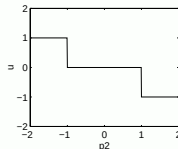
Trajectoire transverse à la surface de commutation



Problème simple

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \int_0^2 |u(t)| dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(2) = 0.5 \\ x_2(2) = 0 \end{array} \right.$$

$$(BVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ x(0) = x^0 \\ x(2) = x^f \end{array} \right. \text{ avec}$$



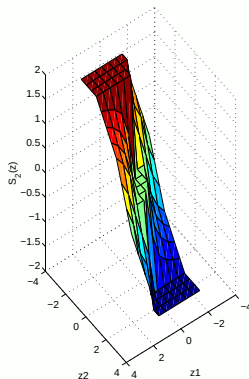
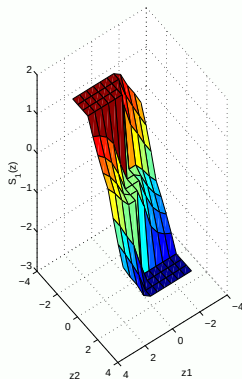
Résoudre par un algorithme
de type Newton

$$S(z) = x(2; x^0, z) - x^f = 0$$

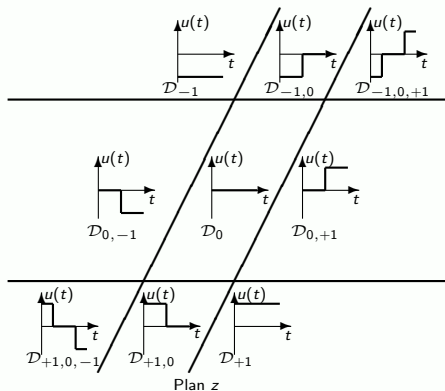
où $x(2; x^0, z)$ est la solution
du problème à valeur initiale

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ x(0) = x^0 \\ p(0) = z \end{array} \right.$$

Fonction de tir



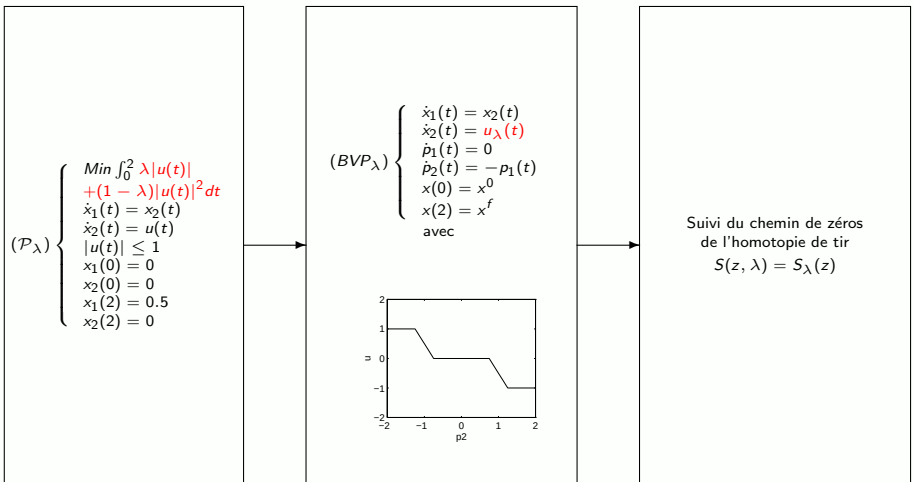
Structure du contrôle



- ▶ La fonction de tir est constante dans $\mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_0$ et dans $\mathcal{D}_{+1}$
- ▶ La fonction de tir n'est pas définie en $z = (0, -1)$ et $z = (0, 1)$
- ▶ La fonction de tir n'est pas dérivable sur la frontière de Ω

Conclusion : Si on ne part pas du bon domaine, on diverge

Principe général



Homotopie

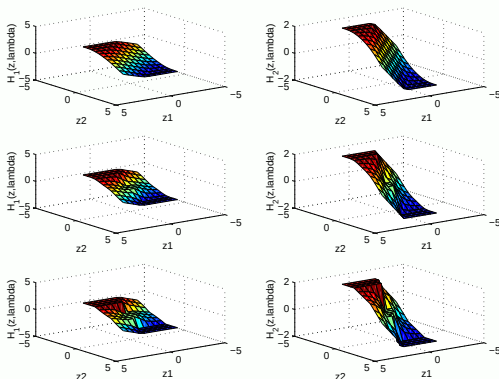
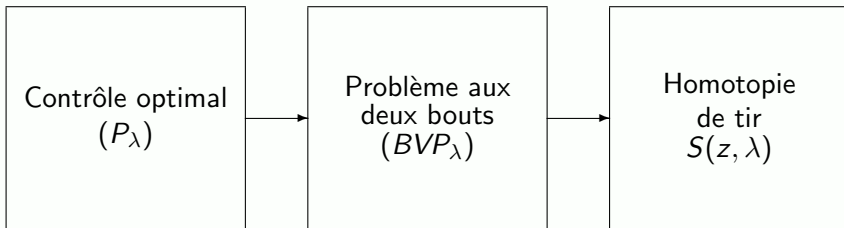


Figure: Homotopie $S(z, \lambda)$ pour $\lambda = 0, 0.5, 1$

Homotopie pour le transfert orbital

Coût $J_\lambda(u) = \int_0^{t^f} (1 - \lambda)|u|^2 + \lambda|u|dt$

- Problème facile à résoudre pour $\lambda = 0$
- Problème lisse pour $\lambda < 1$
- Problème de départ pour $\lambda = 1$



Convergence I

Proposition

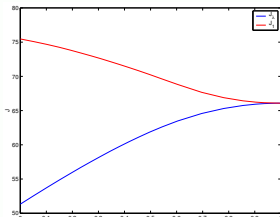
Si (H1),(H2) et (H3) sont vraies et si $0 \leq \lambda \leq \lambda' \leq 1$ alors

1.

$$J_{\lambda}(u_{\lambda}) \leq J_{\lambda'}(u_{\lambda'}) \leq J_1(u_1) \leq J_1(u_{\lambda})$$

2. $|J_1(u_{\lambda}) - J_{\lambda}(u_{\lambda})| \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow 1$

3. $J_{\lambda}(u_{\lambda}) \rightarrow J_1(u_1)$ et $J_1(u_{\lambda}) \rightarrow J_1(u_1)$ quand $\lambda \rightarrow 1$



Démonstration

1.

$$\begin{aligned}\lambda'|u| + (1 - \lambda')|u|^2 &= \lambda|u| + (1 - \lambda)|u|^2 + (\lambda' - \lambda)(|u| - |u|^2) \\ &\geq \lambda|u| + (1 - \lambda)|u|^2\end{aligned}$$

$$J_\lambda(u) \leq J_{\lambda'}(u)$$

$$J_\lambda(u_\lambda) \leq J_\lambda(u_{\lambda'}) \leq J_{\lambda'}(u_{\lambda'})$$

2. La fonction $I(u, \lambda) = \lambda|u| + (1 - \lambda)|u|^2$ est uniformément continue sur $B(0, 1) \times [0, 1]$.

Convergence II

Proposition

Si (H1) et (H2) sont vraies, si $(\lambda_k)_k$ est une suite de $[0, 1]$ qui converge vers 1 quand k tend vers $+\infty$ et si $(x_k, u_k)_k$ est pour tout k une paire optimale de $(P)_{\lambda_k}$, alors il existe une sous-suite, toujours notée $(x_k, u_k)_k$ qui converge vers une solution $(\bar{x}, \bar{u})$ de notre problème (P) dans le sens suivant:

1. $x_k \rightarrow \bar{x}$ uniformément sur $[0, t_f]$;
2. $u_k \rightarrow \bar{u}$ *-faiblement dans $L_m^\infty([0, t_f])$.

Démonstration

Théorème classique de Filippov car u_k est une suite minimisante de (P) . $\square$

Propriétés de l'homotopie de tir

On définit

$$\Omega_0 = \{(z, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times [0, 1[\mid x(t, z, \lambda) \in A \quad \forall t, \\ p_v(t, z, \lambda) \neq 0 \quad \forall t\},$$

$$\Omega_1 = \{(z, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times [0, 1] \mid x(t, z, \lambda) \in A \quad \forall t, \\ p_v(t, z, \lambda) \neq 0 \quad \forall t\},$$

$$\Omega'_0 = \{z \in \Omega_0 \mid (\psi(y(t, z, \lambda)) - (1 - \lambda))^2 + (p_r(t, z, \lambda) \mid p_v(t, z, \lambda))^2 \neq 0 \\ (\psi(y(t, z, \lambda)) + (1 - \lambda))^2 + (p_r(t, z, \lambda) \mid p_v(t, z, \lambda))^2 \neq 0 \\ |\psi(y(0, z, \lambda))| \neq 1 - \lambda \quad \text{and} \quad |\psi(y(t_f, z, \lambda))| \neq 1 - \lambda\}.$$

Propriétés de l'homotopie de tir

Proposition

1. $S(z, \lambda)$ est continue dans Ω_0 et semi-continue supérieurement dans Ω_1 .
2. L'homotopie $S(z, \lambda)$ est C^∞ dans Ω'_0 .

Démonstration

1. Pour $\lambda = 1$, $(IVP)_{(z, \lambda)}$ est une inclusion différentielle



Algorithmes homotopiques

Suivi du chemin de zéros de l'homotopie:

$$\begin{aligned}
 S : \mathbf{R}^n \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\
 (z, \lambda) &\longmapsto S(z, \lambda)
 \end{aligned}$$

Algorithme de "Newton global"

Initialisation z^0 solution de $S(z^0, 0) = 0$

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$

Pour $i = 1, \dots, n$ **faire**

Résoudre $S(z, \lambda_i) = 0$ par un algorithme de type Newton avec
comme point de départ z^{i-1}

Comment choisir la suite $(\lambda_i)_i$?

⇒ **Méthodes homotopiques (Allgower and Georg)**

- ▶ Méthodes "Predictor-Corrector"
- ▶ Méthodes simpliciales ou "Piecewise Linear"

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
○○○ ○ ○ ○○○	○○○ ○○○○○○○○ ○●○○○○○○	○○ ○○ ○○○	○ ○		○ ○

Algorithmes homotopiques

Méthodes PC

Théorème

Si $c(s) = (z(s), \lambda(s))$ ($s =$ abscisse curviligne) est une courbe lisse telle que

1. $c(0) = (z^0, 0)$
2. $S(c(s)) = 0$
3. $\text{rang}(S'(c(s))) = n$
4. $\dot{c}(s) \neq 0$

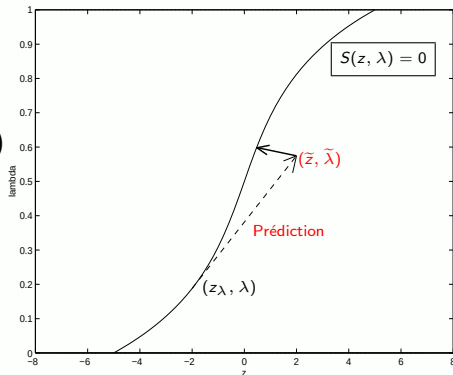
alors $\dot{c}(s) = t(S'(c(s)))$ est déterminé par

1. $S'(c(s))\dot{c}(s) = 0$
2. $|\dot{c}(s)| = 1$
3. $\det \begin{pmatrix} S'(c(s)) \\ t\dot{c}(s) \end{pmatrix}$

Méthodes PC II

► **Prédiction:** schéma d'Euler

$$(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = (z_{\lambda}, \lambda) + ht(S'(z_{\lambda}, \lambda))$$



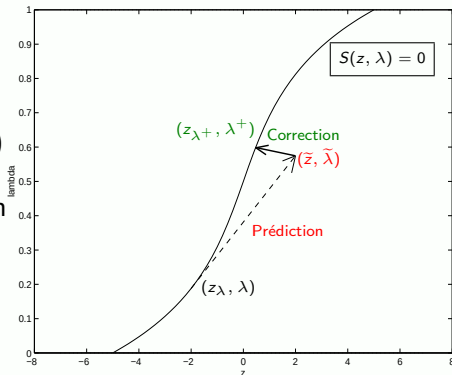
Méthodes PC II

- **Prédiction**: schéma d'Euler

$$(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = (z_{\lambda}, \lambda) + ht(S'(z_{\lambda}, \lambda))$$

- **Correction**: retour sur le chemin de zéros $(z_{\lambda+}, \lambda^+)$

$$= \begin{cases} \operatorname{argmin}\{|(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) - w|\} \\ S(w) = 0 \end{cases}$$



Méthodes PC II

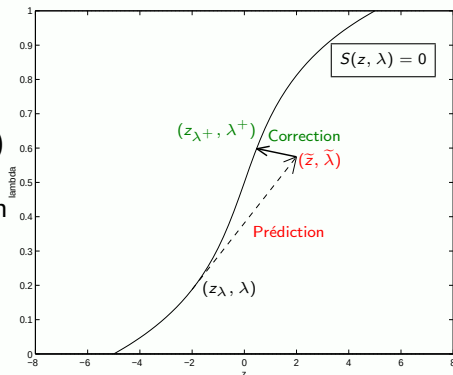
- **Prédiction**: schéma d'Euler

$$(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = (z_{\lambda}, \lambda) + ht(S'(z_{\lambda}, \lambda))$$

- **Correction**: retour sur le chemin de zéros $(z_{\lambda+}, \lambda^+)$

$$= \begin{cases} \operatorname{argmin}\{|(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) - w|\} \\ S(w) = 0 \end{cases}$$

- jusqu'à $\lambda = 1$.



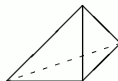
Méthodes simpliciales I

Définition ($n + 1$ -Simplexe)

$\sigma = [v^0, \dots, v^{n+1}]$ = enveloppe convexe de $n + 2$ points affinement indépendants



triangle dans $\mathbf{R}^2$



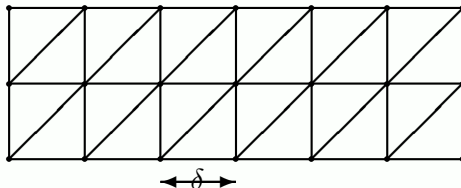
tétraèdre dans $\mathbf{R}^3$

Triangulation

Définition (Triangulation of $\mathbf{R}^{n+1}$)

$\mathcal{T}$ = subdivision de $\mathbf{R}^{n+1}$ en $(n+1)$ -simplexes tels que

1. l'intersection de deux simplexes est vide ou est une k -face
2. la triangulation est localement finie: tout compact de $\mathbf{R}^{n+1}$ intercepte un nombre fini de $(n+1)$ -simplexes



Méthodes simpliciales III

Définition (Approximation linéaire par morceaux $S_{\mathcal{T}}$ de H)

1. $S_{\mathcal{T}}(v) = S(v)$ sur tout simplexe de $\mathcal{T}$
2. pour tout $(n+1)$ -simplexe σ la restriction $S_{\mathcal{T}/\sigma}$ est affine

$\Rightarrow S_{\mathcal{T}}^{-1}(0)$ contient un chemin affine par morceaux $c_{\mathcal{T}}$ qui approxime la courbe c .

Le passage d'un simplexe à un simplexe adjacent pour calculer $c_{\mathcal{T}}$ se fait via un algorithme du type simplexe en programmation linéaire.

Illustration

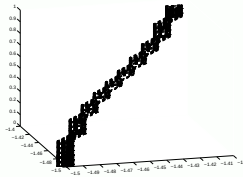
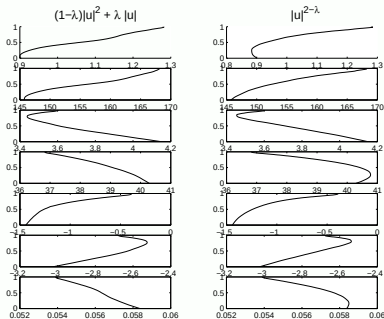


Figure: PL-algorithme pour notre problème simple

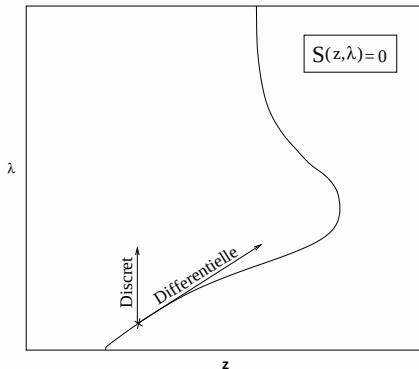
Remarques

- ▶ Pour les méthodes PC l'homotopie doit-être C^2
- ▶ Pour les méthodes PL, l'homotopie doit-être continue (et semicontinue supérieurement pour les applications multivaluées)
- ▶ Méthode PC: Mfmax (T. Haberkorn) utilise HOMPAC90 (Watson et al.)
 - ▶ On calcule $H(c(s))$ par intégration numérique (rkf45)
 - ▶ On calcule $H'(c(s))$ par différences finies !
- ▶ Méthode PL: Simplicial package (P. Martinon)

Suivi du chemin



Chemin lisse



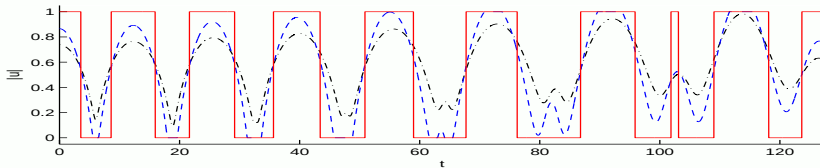
Avantage des méthodes PC

Convergence

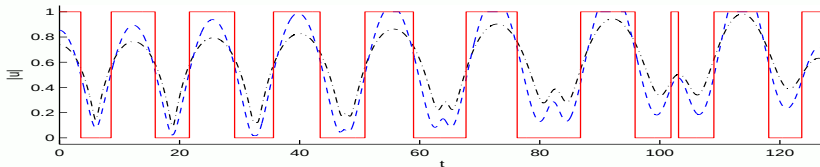
Contrôle en λ

$$T_{\max} = 10N$$

Critère convexe $\lambda = 0, 0.5$ et 1



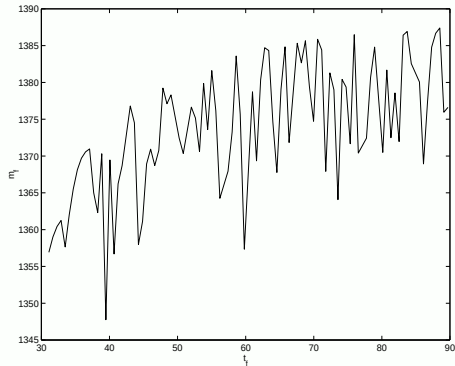
Critère puissance $\lambda = 0, 0.5$ et 1



Minima locaux

t^f fixe et L^f libre: minima locaux

- Beaucoup de minima locaux



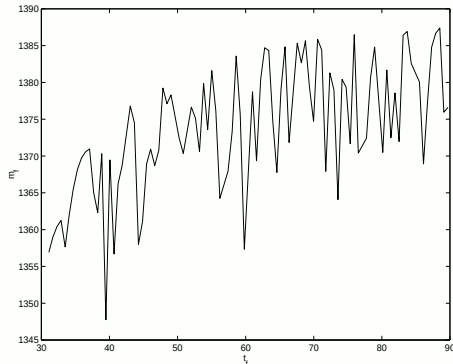
t^f fixe et L^f libre: minima locaux

- ▶ Beaucoup de minima locaux

- ▶ → On fixe L^f :

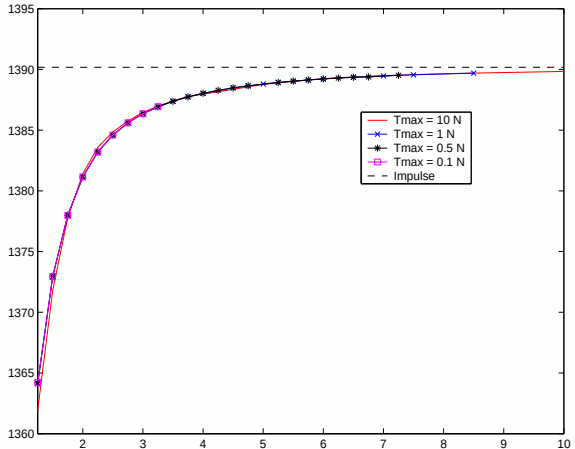
$$L^f = c_{L^f}(L_{\min}^f - L^0) + L^0$$

t^f libre



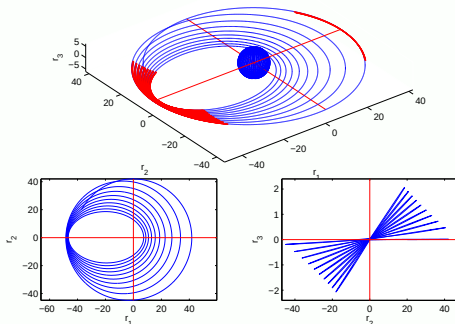
m^f vs c_{L^f}

- ▶ $t \longrightarrow L$
 - ▶ m^f ne dépend pas de $T_{\max}$ (pour c_{L^f} fixé)
- $$L^f = c_{L^f}(L_{\min}^f - L^0) + L^0$$
- ▶ Masse limite = masse dans le cas impulsionnel



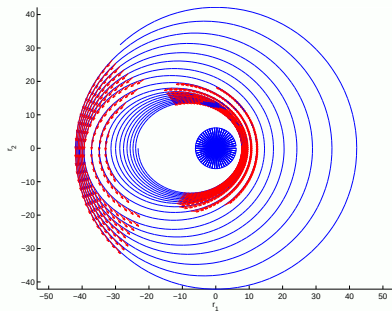
Trajectoire pour $T_{\max} = 10$ N et $c_{Lf} = 2$

- Poussée à tous les apogées.
- Poussée aux derniers périgées.

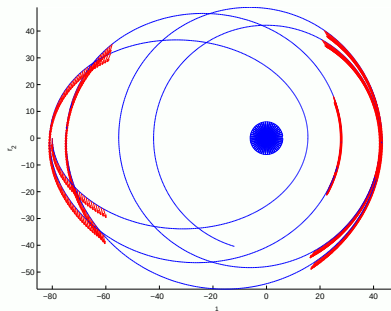


D'autres orbites initiales

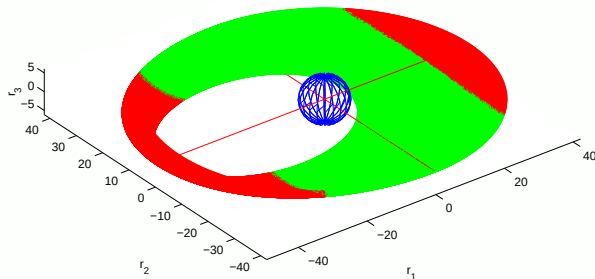
$$(P^0, e^0) = (11.625, 0.5)$$



$$(P^0, e^0) = (20, 0.75)$$



Trajectoire pour $T_{\max} = 0.1$ N



- ▶ Plus de 750 révolutions
- ▶ Plus de 1500 commutations

○○○
○
○
○○○○

○○○
○○○○○○○○
○○○○○○○○

○○
○○
○○○

○
○

Min t^f

B. Bonnard, J.B. Caillaud

On considère le cas générique suivant

$$(P) \begin{cases} \text{Min } t^f \\ \dot{x} = f(x, u) \\ x(0) = x^0 \\ x(t^f) = x^f \\ u \in U \end{cases}$$

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
	ooo oo o o oooo	ooo oooooooo oooooooo	oo oo ooo		o o

Points conjugués

On suppose que U est ouvert et que $\partial^2 H / \partial u^2$ est définie positive le long de l'extrémale. On définit

- ▶ $\mathcal{H}(y) = \mathcal{H}(x, p) = H(x, p, u(x, p))$ le vrai Hamiltonien
- ▶ $\dot{y} = \vec{\mathcal{H}}(y) = (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(y), -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(y))$

Définition

Soit y une extrémale, on appelle champ de Jacobi toute solution non triviale de

$$\delta \dot{y} = d\vec{\mathcal{H}}(y(t))\delta y$$

Ce champ est dit vertical à l'instant t si $\delta x(t) = 0$.

Définition

Le temps t_c et le point $x(t_c)$ sont conjugués à 0 et $x(0)$ s'il existe un champ de Jacobi vertical à $t = 0$ et à t_c .

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
ooo	ooo	ooo	oo	o	
o	o	oooooooo	oo	o	
o	o	oooooooo	ooo		
oooo					

Condition du deuxième ordre

Théorème

Sous de bonnes hypothèses la trajectoire x est C^0 optimale jusqu'à t_{1c} (premier temps conjugué) et n'est pas L^∞ optimale après (sur l'espace des contrôles).

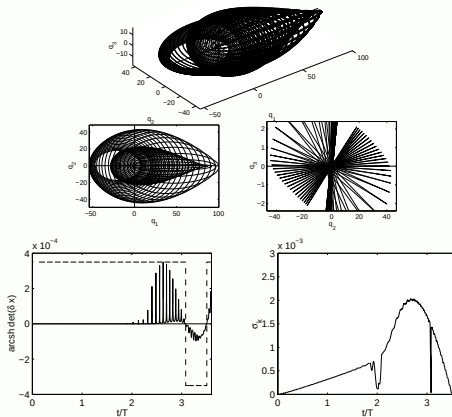
Théorème

Soit $P = \{p_0 \in \mathbf{R}^n | \mathcal{H}(x_0, p_0) = -1\}$. L'instant t_c est conjugué si et seulement si $\text{rang}\{\delta x_1(t_c), \dots, \delta x_{n-1}(t_c)\} < n - 1$

$$\Leftrightarrow \det(\delta x_1(t_c), \dots, \delta x_{n-1}(t_c), \dot{x}(t_c)) = 0$$

où $(\delta x_i, \delta p_i)$ est le champ de Jacobi : $\delta \dot{y} = d\vec{\mathcal{H}}(y(t))\delta y$ associé à la condition initiale $(\delta x_i(0), \delta p_i(0)) = (0, \delta p_i(0))$, les $\delta p_1(0), \dots, \delta p_{n-1}(0)$ formant une base de $T_{p_0}P$.

Résultats numériques



Conclusion et développements

- ▶ Conclusion:

On a complètement résolu le problème de départ sans aucune connaissance *a priori*
- ▶ Développements
 - ▶ Transfert orbital
 - ▶ Transfert interplanétaire? (problème à n corps)
 - ▶ Contraintes sur l'état?
 - ▶ Algorithmiques
 - ▶ Intégrateurs symplectiques pour le calcul de la fonction de tir et de sa dérivée (cas lisse et discontinu)
 - ▶ Méthodes directes et schéma symplectique (A.L. Dontchev, W.W. Hager et V.M. Veliov, J.F. Bonnans et J. Laurent-Varin)
 - ▶ Suivi de chemin pour le contrôle optimal

Transfert orbital	Contrôle optimal	Méthodes homotopiques	Résultats numériques	Condition du deuxième ordre	Conclusion
○○○ ○ ○ ○○○	○○○ ○○○○○○○○ ○○○○○○○○	○○ ○○ ○○○	○ ●		

Bibliography

Bibliography

- ▶ J. Gergaud et T. Haberkorn. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem. *Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. 12(2)294:310, April 2006
- ▶ P. Martinon et J. Gergaud. An application of PL continuation methods to singular arcs problems, *Recent Advances in Optimization (Proceedings of the 12th French-German-Spanish Conference on Optimization)* Edited by A. Seeger, *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 563, pp.163-186, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- ▶ P. Martinon. Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale, *PhD ENSEEIHT-IRIT*, www.enseeiht.fr/~martinon, novembre 2005
- ▶ J. Gergaud, T. Haberkorn and P. Martinon. Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27(6)1046:1060, Nov. 2004
- ▶ T. Haberkorn. Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation: résolution par homotopie différentielle, *PhD ENSEEIHT-IRIT*, www.enseeiht.fr/~haberkorn, octobre 2004