

Phase de non-unicité dans la percolation

Jih-Huang LI

Sous la direction de Vincent BEFFARA

13 septembre 2013

Stage effectué à l'UMPA (ENS de Lyon)

M2 de Probabilités et Statistiques à l'Université d'Orsay Paris-Sud

Table des matières

1	Percolation sur les graphes transitifs	6
1.1	Définition du modèle	6
1.2	Couplage	8
1.3	Percolations par sites et par arêtes	9
1.4	Ergodicité de la percolation de Bernoulli	11
1.5	Tolérance par insertion et suppression	12
1.6	Inégalité FKG	14
1.7	Constante isopérimétrique et rayon spectral	15
1.8	Rayons et bouts dans un graphe infini	20
2	Percolation sur les groupes	22
2.1	Graphes de Cayley	22
2.2	Moyennabilité	23
2.3	Propriétés invariantes par changement de système de générateurs	25
2.4	Transport de masse	29
2.5	Graphes unimodulaires	33
3	Etudes de $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$	38
3.1	Bornes sur p_c	38
3.2	Combinatoire des $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$	40
3.3	Borne sur p_u : méthode probabiliste	41
3.4	Borne sur p_u : méthode combinatoire	44
3.5	Amélioration de la borne supérieure de p_c : matrice de transition	47
	Bibliographie	54
A	Rayon spectral du produit	56
B	Inégalités entre la constante isopérimétrique et le rayon spectral	58
C	Théorème de Menger	64
D	Formule de cocroissance	68

Remerciements

Fruit d'un travail de recherche d'une année, ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide précieuse des nombreuses personnes ayant participé à son élaboration.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de mémoire, Vincent BEFFARA, pour le sujet captivant qui m'a proposé et pour son soutien inconditionnel durant toute l'année. J'ai eu notamment l'occasion de mener des discussions éclairantes avec lui, sur la percolation et bien d'autres branches des probabilités.

Je remercie également Sébastien MARTINEAU, qui m'a présenté l'univers de la percolation et de la géométrie des groupes. Ses conseils pertinents lors de sa relecture attentive ont rendu ce rapport plus lisible.

Merci à Vincent TASSION, auteur de plusieurs discussions inspirantes sur le sujet de la percolation. Enfin, j'adresse ma plus grande gratitude à l'UMPA, ses secrétaires, ses doctorants et ses chercheurs, qui m'y ont accompagné pendant mon stage.

Introduction

La percolation est un modèle issu de la physique statistique. Sa description est très simple, contrairement aux méthodes utilisées et aux résultats obtenus, qui ont demandé des décennies à être prouvés de manière rigoureuse. Certains résultats validés par les calculs numériques ou conformes à l'intuition, souvent utilisés par les physiciens, restent toujours sans preuve mathématique.

Considérons une roche poreuse que l'on fait tremper dans l'eau. Les molécules d'eau y pénètrent en suivant le réseau cristallin de la roche. Tout ceci se déroule aléatoirement puisque l'on peut imaginer que les molécules qui constituent le réseau se déplacent localement, ce qui contraint le mouvement des molécules d'eau. Pour modéliser ce phénomène, on pourrait supposer que le réseau de la roche est un graphe assez régulier, périodique (donc infini) par exemple. On pourrait également considérer des réseaux de dimensions différentes, en particulier le cas planaire, dont les études sont relativement plus faciles. Les arbres sont pareillement de bons graphes à voir, puisque l'on peut avoir un maximum d'indépendance. Les graphes pour lesquels les comportements sont mieux compris sont les arbres réguliers \mathbb{T}_k , les réseaux euclidiens \mathbb{Z}^d , le réseau triangulaire planaire et le réseau hexagonal planaire.

La roche étant modélisée par un réseau, on mettra des aléas sur les arêtes ou les sommets, pour simuler le mouvement des molécules du réseau cristallin. En effet, chaque arête ou sommet peut avoir deux états : passant (ouvert) ou bloquant (fermé), le premier avec la probabilité p et le deuxième avec la probabilité $1 - p$, où p dépend des paramètres du système, tels que le type de molécule, la température, etc. Une configuration est alors un sous-graphe du graphe de départ, n'étant constitué que des arêtes ou des sommets ouverts. La configuration aléatoire décrite précédemment est notre *modèle de percolation* (dit de Bernoulli).

Une fois que le modèle est établi, à quoi pourra-t-on s'intéresser ? On pourra se demander si un point particulier, disons l'origine, est connecté à l'infini. Etre connecté à l'infini veut dire qu'il existe un chemin ouvert aussi long que l'on veut. Dans la percolation de Bernoulli, il existe un paramètre critique, noté p_c , au-dessous duquel cette probabilité de connexion est nulle et au-dessus duquel elle est strictement positive. Ce paramètre critique s'appelle la *valeur critique* de percolation, et les deux comportements sont les *phases* séparées par ce point critique. Le régime au-dessous de p_c est dit sous-critique et celui au-dessus de p_c est dit sur-critique. Lorsque le paramètre p évolue, un phénomène dit *transition de phases* est présent en p_c .

On appelle le cluster d'un point x du graphe la composante connexe de x . Par ce qui précède, on sait que le cluster (de l'origine par exemple) est infini avec probabilité strictement positive si l'on est sur-critique et fini si l'on est sous-critique. Dans le régime sous-critique, on pourrait s'intéresser à la taille du cluster.

Afin d'étudier la percolation, de nombreuses méthodes probabilistes ont été développées, et beaucoup de propriétés, comme le couplage, l'ergodicité, la tolérance par insertion et suppression, les inégalités FKG et BK ont été découvertes. La théorie des graphes joue un rôle important aussi : constante isopérimétrique, rayon spectral, cycle simple, rayon, bout, etc. La plupart de ces notions seront introduites dans le chapitre 1 et le reste au fur et à mesure dans ce rapport. On verra de plus comment elles interagissent avec la percolation.

Dans le chapitre 2, on étudiera la percolation sur les groupes de type fini. Plus précisément, à une partie génératrice on associera un graphe, dit *de Cayley*, sur lequel on fera la percolation habituelle. Les différents graphes de Cayley associés au même groupe peuvent présenter des phénomènes similaires. Leurs énoncés précis seront donnés dans le paragraphe 2.3.

Une technique utile appelée « transport de masse » sera introduite dans le paragraphe 2.4. Elle permettra de démontrer de nombreux résultats sur les graphes de Cayley. Elle se généralise ultérieurement sur les graphes unimodulaires, que l'on introduira dans le paragraphe 2.5.

Un résultat assez surprenant a été démontré par Burton et Keane (voir théorème 1.48) : la percolation de Bernoulli sur les graphes connexes, localement finis, transitifs et moyennables ne possède que deux phases : une phase où aucun cluster infini n'est présent et une phase où le cluster infini est unique. La réciproque a été conjecturée par Benjamini et Schramm dans [BS96] : si le graphe n'est pas moyennable, alors il existe une phase intermédiaire, où un nombre infini de clusters infinis co-existent.

Ils l'ont prouvée dans [BS01] lorsque le graphe non-moyennable peut se plonger dans le plan hyperbolique. A part ceci, on n'a eu que des réponses partielles. En particulier, le chapitre 3 de ce rapport sera consacré à l'étude des graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ (produit euclidien), et le meilleur résultat que l'on puisse obtenir à ce jour dit que la conjecture est vraie pour $k \geq 4$ (voir corollaire 3.21 et tableau 3.7).

Chapitre 1

Percolation sur les graphes transitifs

1.1 Définition du modèle

Définition 1.1. On désigne par $G = (V, E)$ un graphe, où V est l'ensemble des sommets et $E \subset V \times V$ l'ensemble des arêtes. On ne considère ici que des graphes non orientés, c'est-à-dire tels que $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$, ces deux arêtes sont alors notées par $\{x, y\}$. On écrira parfois « $x \sim y$ » au lieu de « x et y sont voisins ».

Dans la suite, on ne considère que des graphes non-orientés.

Définition 1.2. Pour $x \in V$, on note $V(x)$ l'ensemble des sommets voisins de x , *i.e.*

$$V(x) = \{y \in V, (x, y) \in E\}$$

et $\deg x$ le cardinal de $V(x)$.

Définition 1.3. Un graphe $G = (V, E)$ est dit

- *fini* si V est fini ;
- *dénombrable* si V est dénombrable ;
- *de degré borné* si $\sup_{x \in V} \deg x < \infty$;
- *localement fini* si pour tout $x \in V$, l'ensemble $V(x)$ est fini ;
- *sans boucle* si pour tout $x \in V$, $x \not\sim x$;
- *simple* si deux sommets quelconques sont reliés par au plus une arête ;
- *connexe* si, étant donnés deux sommets $x, y \in V$, il existe un chemin les reliant, *i.e.*, il existe $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n+1} = y$ tels que $x_i \sim x_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n$.

Définition 1.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une application $\phi : V \rightarrow V$ est un *automorphisme* du graphe G si elle préserve la relation de voisinage, *i.e.* si

$$\forall x, y \in V, x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) \sim \phi(y).$$

On note $\text{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G .

Définition 1.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Son groupe des automorphismes $\text{Aut}(G)$ agit sur V . On dit que le graphe est

- *transitif* si $\text{Aut}(G)\backslash V$ est réduit à un seul élément.
- *quasi-transitif* si $\text{Aut}(G)\backslash V$ est fini.

Remarque 1.6. La transitivité ou la quasi-transitivité sera très importante dans l'étude de la percolation invariante (en particulier, celle de Bernoulli) qu'on étudiera par la suite. En effet, comme chaque sommet joue le même rôle dans le cas transitif, on pourra toujours se ramener à l'étude autour d'un point fixé, disons l'origine. Et dans le cas quasi-transitif, il suffira d'étudier un nombre fini de points, ce qui ne change que peu de choses par rapport au cas transitif.

Définition 1.7 (représentation transitive). Soit G un graphe connexe, localement fini et quasi-transitif. On note Γ son groupe des automorphismes $\text{Aut}(G)$. Soit $o \in V$. Soit r tel que tout sommet $x \in V$ est à distance au plus r d'un certain sommet dans l'orbite Γo . Maintenant, on définit un nouveau graphe G' comme suit :

$$\begin{aligned} V(G') &= \Gamma o, \\ E(G') &= \{\{x, y\}, x, y \in \Gamma o, d_G(x, y) \leq 2r + 1\}. \end{aligned}$$

Ce nouveau graphe G' obtenu est une *représentation transitive* de G .

Remarque 1.8. Le graphe G' est encore connexe, et la restriction de $\gamma \in \Gamma$ sur G' induit un sous-groupe $\Gamma' = \text{Aut}(G')$ qui agit transitivement sur G' . En utilisant une représentation transitive, on peut montrer des résultats analogues sur des graphes quasi-transitifs à partir des résultats sur les graphes transitifs.

Dans ce rapport, on prend $G = (V, E)$ un graphe simple, quasi-transitif, localement fini et connexe.

Définition 1.9 (percolation de Bernoulli par arêtes). Soit $0 \leq p \leq 1$. A chaque arête $e \in E$ on associe une variable aléatoire X_e qui suit la loi Bernoulli de paramètre p , la famille $(X_e)_{e \in E}$ étant indépendante. On peut identifier la famille $(X_e)_{e \in E}$ à $\omega_p \in \Omega$ où $\Omega := \{0, 1\}^E = 2^E$, dite configuration de percolation de Bernoulli de paramètre p . Enfin, on définit la probabilité produit \mathbb{P}_p sur Ω .

Remarque 1.10. Une configuration de percolation peut être vue comme un sous-graphe du graphe original, en ouvrant (gardant) les arêtes pour lesquelles $X_e = 1$ et en fermant (supprimant) les arêtes pour lesquelles $X_e = 0$.

Remarque 1.11. De même, on peut définir la percolation de Bernoulli de paramètre p par sites en remplaçant dans la définition les arêtes par les sites. Pour distinguer, on notera $\mathbb{P}_p^{\text{sites}}$ et $\mathbb{P}_p^{\text{arêtes}}$.

On peut définir une percolation invariante, dont la percolation de Bernoulli est un cas particulier.

Définition 1.12 (percolation invariante). Soit Γ un sous-groupe du groupe des automorphismes de G . On dit qu'une mesure de probabilité \mathbb{P} sur $\Omega = \{0, 1\}^E$ est une percolation Γ -invariante si

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall A \text{ mesurable}, \mathbb{P}(\gamma \cdot A) = \mathbb{P}(A).$$

Dans une percolation de Bernoulli, lorsque le paramètre p est très petit, le sous-graphe est découpé en beaucoup de petits morceaux (des points lorsque $p = 0$), contrairement au cas où p est proche de 1, où le sous-graphe recouvre quasiment tout le graphe. On aimerait bien étudier ce comportement plus en détail.

Une composante connexe dans une percolation sera parfois appelée un *cluster*. On pourra s'intéresser aux clusters infinis dans une configuration de la percolation (*i.e.* le sous-graphe associé). Pour ce faire, on a besoin encore de quelques définitions.

Définition 1.13. On définit la *probabilité de connexion* comme suit :

$$\theta^v(p) = \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow \infty).$$

C'est la probabilité que l'on puisse atteindre à l'infini en partant de v , tout en ne prenant que des arêtes ouvertes (ou des sites ouverts).

Puis on définit N_p en tant que le *nombre de composantes connexes infinies* dans la percolation. Parfois, le paramètre p est omis.

Remarque 1.14. Si on a une percolation invariante sur un graphe transitif, alors la quantité $\theta^v(p)$ ne dépend pas de site v , on pourra noter $\theta(p)$. Si le graphe est seulement quasi-transitif, on pourra noter $\theta(p) = \inf_{v \in V} \theta^v(p) = \min_{v \in V} \theta^v(p)$ par abus de notation.

Remarque 1.15. Grâce à la quasi-transitivité, $\theta(p) > 0$ est équivalent à $\mathbb{P}(N_p \geq 1) > 0$.

1.2 Couplage

Intuitivement, dans une percolation de Bernoulli, il est plus probable d'avoir un cluster infini lorsque le paramètre p augmente, puisque les arêtes s'ouvrent de plus en plus. Afin de démontrer sa véracité de manière rigoureuse, on utilise la méthode dite « couplage », qui pourra être adaptée dans des cas plus compliqués par la suite. Par exemple, on pourra comparer la percolation entre deux graphes distincts.

Pour coupler nos percolation de Bernoulli de différents paramètres, on associe à chaque arête $e \in E$ une variable aléatoire uniforme U_e sur $[0, 1]$, la famille $(U_e)_{e \in E}$ étant *i.i.d.* Ensuite, la percolation de Bernoulli de paramètre p est tout simplement donnée par $X_e^{(p)} = \mathbb{1}_{U(e) \leq p}$. Quand $p_1 \leq p_2$, on a $X_e^{(p_1)} \leq X_e^{(p_2)}$ pour tout $e \in E$, et donc $\omega_{p_1} \subseteq \omega_{p_2}$. De cette manière, s'il existe un cluster infini dans ω_{p_1} , alors il en est de même dans ω_{p_2} . Ainsi découle la proposition suivante :

Proposition 1.16. *Dans une percolation de Bernoulli, la fonction $p \mapsto \theta(p)$ est croissante.*

On peut ainsi définir la quantité suivante, la *probabilité critique* entre « n'avoir aucun cluster infini » et « avoir au moins un cluster infini » :

Définition 1.17.

$$\begin{aligned} p_c &= \sup \{p \in [0, 1], \theta(p) = 0\} \\ &= \inf \{p \in [0, 1], \theta(p) > 0\}. \end{aligned}$$

Ce serait bien de pouvoir calculer la valeur p_c d'un graphe quasi-transitif, mais ce n'est pas toujours facile. On peut alors se demander si la percolation n'est pas dégénérée, *i.e.* $0 < p_c < 1$. En fait, il est facile de donner une borne inférieure simple de p_c sous la condition d'avoir le degré maximal borné.

Proposition 1.18. *Si le degré maximal du graphe G est majoré par $d < \infty$, alors*

$$p_c(G) \geq \frac{1}{d-1}.$$

Démonstration. On note V_n l'ensemble des sites qui sont de distance n de l'origine et Γ_n l'ensemble des chemins de longueur n partant de l'origine.

$$\mathbb{P}(o \leftrightarrow \infty) \leq \mathbb{P}(o \leftrightarrow V_n) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{P}(\gamma \text{ est ouvert}) = |\Gamma_n| p^n.$$

Les chemins dans Γ ne reviennent pas en arrière, *i.e.* aucune arête n'est suivie de la même arête parcourue dans le sens opposé. Ce cardinal est donc majoré par $d(d-1)^{n-1}$. La probabilité ci-dessus tend donc vers 0 si $p < 1/(d-1)$. ◀

Cependant, il n'existe pas de condition simple pour obtenir une borne supérieure. Par exemple, si on considère l'arbre \mathbb{T}_k^n , obtenu de l'arbre k -valent \mathbb{T}_k en remplaçant chaque arête par n arêtes en série, alors la probabilité critique vaut $p_c = \sqrt[n]{1/(k-1)}$, qui peut être arbitrairement proche de 1 si n tend vers l'infini.

1.3 Percolations par sites et par arêtes

Le but de ce paragraphe est de comparer les percolations par sites et par arêtes sur le même graphe en utilisant la technique de couplage. Le couplage qui sera considéré dans la suite n'est pas tout à fait identique à celui utilisé dans le paragraphe précédent. Partant d'une configuration de la percolation par sites, on peut en construire une pour la percolation par arêtes et inversement. Il faut remarquer que les paramètres ne sont pas forcément les mêmes.

Définition 1.19. Un événement A est dit croissant si

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in 2^E \text{ (ou } 2^V), \omega_1 \leq \omega_2, \omega_1 \in A \Rightarrow \omega_2 \in A,$$

et une fonction f est dite croissante si

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in 2^E \text{ (ou } 2^V), \omega_1 \leq \omega_2, f(\omega_1) \leq f(\omega_2).$$

Définition 1.20 (domination stochastique). Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. On considère deux mesures de probabilité μ et ν sur cet espace. On dit que μ domine ν stochastiquement, noté $\mu \succcurlyeq \nu$ si pour toute fonction croissante f sur Ω , on a

$$\int f d\mu \geq \int f d\nu.$$

Proposition 1.21 ([Ham61]). Pour tout graphe G , si $p \in (0, 1)$ et $v \in G$, on a alors $\theta_v^{\text{sites}}(p) \leq \theta_v^{\text{arêtes}}(p)$, et donc $p_c^{\text{sites}}(G) \geq p_c^{\text{arêtes}}(G)$.

Démonstration. Etant donnée $\xi \in 2^V$, on va construire $\omega \in 2^E$ telle que

- Si $\xi \sim \mathbb{P}_p^{\text{sites}}$, alors $\omega \sim \mathbb{P}_p^{\text{arêtes}}$ et
- si $K_\xi(v)$ est infini, alors $K_\omega(v)$ aussi.

On ordonne les éléments de V en $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ avec $x_1 = 0$. On prend une famille de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre p $(Y_e)_{e \in E}$, indépendante de ξ . On va construire une sous-suite (finie ou infinie) de sommets (x_{n_j}) par récurrence.

- Si $\xi(v) = 0$, la procédure se termine.
- Sinon, $V_1 := \{v\}$, $W_1 := \emptyset$ et $n_1 := 1$.

Si V_k et W_k sont construits, on pose

$$n_{k+1} := \min\{n, x_n \in V \setminus (V_k \cup W_k), x_n \sim V_k\}.$$

On choisit $x'_{k+1} \in V_k$ le sommet d'indice minimal qui est voisin de $x_{n_{k+1}}$ et on pose $\omega([x'_{k+1}, x_{n_{k+1}}]) := \xi(x_{n_{k+1}})$. Puis,

- Si $\xi(x_{n_{k+1}}) = 1$, alors $V_{k+1} := V_k \cup \{x_{n_{k+1}}\}$ et $W_{k+1} := W_k$.
- Si $\xi(x_{n_{k+1}}) = 0$, alors $V_{k+1} := V_k$ et $W_{k+1} := W_k \cup \{x_{n_{k+1}}\}$.

Quand n_{k+1} n'est pas défini, la procédure se termine, $|K_\xi(v)| < \infty$ et on pose $\omega(e) := Y_e$ pour les arêtes pour lesquelles aucune valeur n'est désignée jusque-là. Si la procédure ne se termine jamais, alors $K_\xi(v)$ et $K_\omega(v)$ sont tous les deux infinis. On désigne les valeurs Y_e aux arêtes qu'il reste. Et ceci donne une percolation (par arêtes) de Bernoulli de paramètre p . \blacktriangleleft

Proposition 1.22 ([GS98]). Pour tout graphe G de degré borné, on note d le degré maximal. Si $p \in (0, 1)$ et $v \in G$ de degré d_v , on a alors

$$\theta_v^{\text{sites}}(1 - (1 - p)^{d-1}) \geq \frac{1 - (1 - p)^{d-1}}{1 - (1 - p)^{d_v}} \theta_v^{\text{arêtes}}(p).$$

Par conséquent,

$$p_c^{\text{sites}}(G) \leq 1 - (1 - p_c^{\text{arêtes}}(G))^{d-1}.$$

Démonstration. Etant donnée $\omega \in 2^E$, on va construire $\xi \in 2^V$ telle que

- Si $\omega \sim \mathbb{P}_p^{\text{arêtes}}$, alors $(\xi \mid \xi(v) = 1) \preccurlyeq (\mathbb{P}_q^{\text{sites}} \mid v \text{ ouvert})$ où $1 - q = (1 - p)^{d-1}$ et
- si $|K_\omega(v)| = \infty$, alors $|K_\xi(v)| = \infty$ aussi.

La construction est assez similaire à celle donnée dans la proposition précédente, on ne donne que l'idée. La seule chose qui change dans l'algorithme est qu'un sommet x est déclaré ouvert s'il existe une arête ouverte sortant de x et entrant dans le monde inexploré. Le sommet v , à partir duquel la construction démarre, est déclaré ouvert avec probabilité $1 - (1 - p)^{d_v}$. Puis, pour un sommet $x \neq v$, voisin au cluster déjà découvert, on voit comment le paramètre q intervient :

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{l} \text{il existe une arête ouverte} \\ \text{sortant de } x \text{ et entrant} \\ \text{dans le monde inexploré} \end{array} \right) = 1 - (1 - p)^{\text{degré de } x \text{ dans le monde inexploré}}$$

$$\leq 1 - (1 - p)^{d-1} = q.$$

◀

Corollaire 1.23. *Pour tout graphe G de degré borné, la non-trivialité de p_c est la même pour la percolation de Bernoulli par sites et celle par arêtes, i.e.,*

$$0 < p_c^{\text{sites}}(G) < 1 \Leftrightarrow 0 < p_c^{\text{arêtes}}(G) < 1.$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe des propositions 1.21 et 1.22. ◀

1.4 Ergodicité de la percolation de Bernoulli

Définition 1.24. Soit $\Gamma \subset \text{Aut}(G)$ un sous-groupe du groupe des automorphismes de G . On dit qu'une probabilité \mathbb{P} sur 2^E est Γ -ergodique si

$$\forall A \in \mathcal{F}_\Gamma, \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1,$$

où \mathcal{F}_Γ est la tribu des mesurables invariants par l'action de Γ , i.e.,

$$\mathcal{F}_\Gamma = \{A \text{ mesurable}, A = \gamma A, \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Théorème 1.25 (ergodicité de la percolation de Bernoulli). *Soit $\Gamma \subset \text{Aut}(G)$ un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$. On considère l'action de Γ sur V . Si pour tout $x \in V$, $|\Gamma \cdot x| = \infty$, alors \mathbb{P}_p est Γ -ergodique.*

Démonstration. Ici, on démontre l'ergodicité de la percolation par arêtes, et la preuve pour la percolation par sites est exactement la même.

Soit $A \in \mathcal{F}_\Gamma$. Soit $\epsilon > 0$. Comme A mesurable, il existe B un événement cylindrique qui dépend de $F \subset E$ fini, tel que $\mathbb{P}_p(A \Delta B) < \epsilon$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\mathbb{P}_p((\gamma A) \Delta (\gamma B)) = \mathbb{P}_p(\gamma(A \Delta B)) < \epsilon.$$

L'orbite de chaque sommet étant infinie, il existe γ tel que $F \cap \gamma F = \emptyset$. L'événement γB ne dépend que de l'état des arêtes dans γF , donc γB est indépendant de B .

Pour tous C_1, C_2, D mesurables quelconques,

$$|\mathbb{P}_p(C_1 \cap D) - \mathbb{P}_p(C_2 \cap D)| \leq \mathbb{P}_p[(C_1 \cap D) \Delta (C_2 \cap D)] \leq \mathbb{P}_p(C_1 \Delta C_2).$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(A)^2| &= |\mathbb{P}_p(A \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq |\mathbb{P}_p(A \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(B \cap \gamma A)| + |\mathbb{P}_p(B \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(B \cap \gamma B)| \\ &\quad + |\mathbb{P}_p(B \cap \gamma B) - \mathbb{P}_p(B)^2| + |\mathbb{P}_p(B)^2 - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq \mathbb{P}(A \Delta B) + \mathbb{P}_p(\gamma A \Delta \gamma B) + |\mathbb{P}_p(B)^2 - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon \end{aligned}$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, on obtient donc $\mathbb{P}_p(A) \in \{0, 1\}$. \blacktriangleleft

Corollaire 1.26. *Si G est infini et transitif, alors dans la percolation de Bernoulli de paramètre p , il existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $N = k$ p.s.*

Démonstration. On prend $\Gamma = \text{Aut}(G)$. D'après le théorème 1.25 d'ergodicité, \mathbb{P}_p est Γ -ergodique car $\Gamma \cdot x = V$ pour tout $x \in V$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\{N = k\}$ est un événement dans \mathcal{F}_Γ , donc il est de probabilité soit 0 soit 1. Comme la somme des probabilités sur $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ doit être 1, il existe un unique k tel que $\mathbb{P}_p(N = k) = 1$. \blacktriangleleft

1.5 Tolérance par insertion et suppression

Définition 1.27. On définit les notations suivantes :

- pour $\omega \in 2^E$ et $e \in E$, $\Pi^e \omega := \omega \cup \{e\}$,
- pour $A \subset 2^E$ mesurable et $e \in E$, $\Pi^e A := \{\Pi^e \omega, \omega \in A\}$,
- pour $\omega \in 2^E$ et $F \subset E$, $\Pi^F \omega := \omega \cup F$,
- pour $A \subset 2^E$ mesurable et $F \subset E$, $\Pi^F A := \{\Pi^F \omega, \omega \in A\}$.

De même, on peut définir $\Pi_e \omega := \omega \setminus \{e\}$ pour la suppression d'une arête. Puis $\Pi_e A$, $\Pi_F \omega$ et $\Pi_F A$. On a les mêmes définitions pour les sommets également.

Définition 1.28. Une percolation \mathbb{P} par arêtes sur G est dite *tolérante à l'insertion* si

$$\forall e \in E, \forall A \subset 2^E \text{ mesurable, } \mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\Pi^e A) > 0.$$

Elle est dite *tolérante à la suppression* si

$$\forall e \in E, \forall A \subset 2^E \text{ mesurable, } \mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\Pi_e A) > 0.$$

Les définitions pour une percolation par sites sont similaires.

Proposition 1.29. *La percolation de Bernoulli (par sites et par arêtes) de paramètre $p \in]0, 1[$ est tolérante à insertion et suppression.*

Démonstration. On traite le cas de la percolation de Bernoulli par arêtes. Soient $A \subset 2^E$ mesurable et $e \in E$. On découpe A en deux

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega \in A, e \in \omega\} \\ A_2 &= \{\omega \in A, e \notin \omega\}. \end{aligned}$$

Alors, $A = A_1 \cup A_2$ et A_1, A_2 sont tous les deux mesurables. On a de plus,

$$\mathbb{P}(\Pi^e A_1) = \mathbb{P}(A_1) \text{ et } \mathbb{P}(\Pi^e A_2) = \frac{p}{1-p} \mathbb{P}(A_2).$$

Donc,

$$\mathbb{P}(\Pi^e A) = \mathbb{P}(A_1) + \frac{p}{1-p} \mathbb{P}(A_2) \geq p \mathbb{P}(A).$$

La preuve pour la tolérance par suppression est similaire. \blacktriangleleft

Dans beaucoup de preuves, il est important de combiner la tolérance par insertion et suppression avec l'ergodicité. La première nous permet de créer des événements qui sont encore de probabilité strictement positive à partir d'un événement de probabilité strictement positive, et la deuxième nous dit que ces événements sont de probabilité 1 si certaines conditions d'ergodicité sont vérifiées. De nombreux jolis résultats peuvent en découler. Voici un exemple ci-dessous sur le nombre de clusters infinis :

Proposition 1.30. *Si G est infini et transitif, alors dans la percolation de Bernoulli de paramètre p , il existe un $k \in \{0, 1, \infty\}$ tel que $N = k$ p.s.*

Démonstration. Par le corollaire 1.26, il existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $N = k$ p.s. Il suffit de montrer que ce n'est pas possible d'avoir k fini et $k \geq 2$.

Si k est fini et $k \geq 2$, alors il existe $x, y \in V$ tels que $\mathbb{P}_p(A) > 0$ où

$$A = \{x \text{ et } y \text{ sont dans deux clusters distincts}\}.$$

On note F l'ensemble des arêtes d'un chemin quelconque de x à y et $B = \Pi^F A$. Alors par la tolérance par insertion, $\mathbb{P}_p(B) > 0$. Pourtant, sur l'événement mesurable B , N est strictement plus petit que k , ce qui contredit la valeur p.s. constante de N . \blacktriangleleft

Par monotonie de θ , on sait seulement que la phase $N = 0$ p.s. arrive avant $N = 1$ p.s. et $N = \infty$ p.s. Comment N varie-t-il avec p quand $p \geq p_c$? Est-il monotone? Bascule-t-il entre les deux phases $N = 1$ p.s. et $N = \infty$ p.s.? Dans le cas général, ce comportement est imprévisible, alors que pour les graphes transitifs, l'évolution de N est connue. En fait, lorsque p est trop petit, on n'a aucun cluster infini. Quand on augmente petit à petit la valeur de p , soudainement, une infinité de clusters infinis se créent dans le graphe, dont chacun occupe une proportion nulle dans le graphe entier. Et enfin, tous ces clusters infinis se relient entre eux quand p est encore plus grand.

Le théorème suivant, dû à Schonmann ([Sch99b]) et Häggström, Peres et Schonmann ([HPS99]), montre qu'une fois que l'unicité de cluster infini est établie, on aura l'unicité pour tous les paramètre p supérieurs. Le même résultat pour les graphes de Cayley est plus facile à traiter, une démonstration sera donnée dans la proposition 2.32.

Théorème 1.31. Soit $0 \leq p \leq 1$. Si $N_p = 1$ p.s., alors pour tout $p' > p$, on a aussi $N_{p'} = 1$ p.s.

Grâce au théorème (1.31), on peut définir une autre valeur critique de percolation :

Définition 1.32. On définit la *probabilité critique d'unicité* par

$$p_u = \inf\{p, N_p = 1 \text{ p.s.}\}.$$

Il est possible que la phase $N = \infty$ p.s. ne soit pas présente dans la percolation. On s'intéressera donc à savoir si $p_c = p_u$ ou $p_c < p_u$ et à étudier ce qui se passe lorsque $p = p_u$. (Regarder plus loin, théorème 1.48 et conjecture 1.51.)

1.6 Inégalité FKG

L'inégalité FKG estime la probabilité que deux événements croissants se produisent en même temps.

Lemme 1.33. Soient μ_1, \dots, μ_d des mesures de probabilité sur \mathbb{R} et $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_d$. On considère $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$ croissantes. Alors,

$$\int fg d\mu \geq \left(\int f d\mu \right) \left(\int g d\mu \right).$$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence. Si $d = 1$, alors

$$0 \leq \int \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) d\mu(x) d\mu(y) = 2 \int fg d\mu - 2 \int f d\mu \int g d\mu.$$

Supposons que cette inégalité est vraie pour k entier, montrons-la pour $k + 1$. On définit

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &:= \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \dots, x_{k+1}) d\mu_2(x_2) \cdots d\mu_{k+1}(x_{k+1}), \\ g_1(x_1) &:= \int_{\mathbb{R}^k} g(x_1, \dots, x_{k+1}) d\mu_2(x_2) \cdots d\mu_{k+1}(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont croissantes, donc

$$\int f_1 g_1 d\mu_1 \geq \int f_1 d\mu_1 \int g_1 d\mu_1 = \int f d\mu \int g d\mu.$$

Et par l'hypothèse de récurrence,

$$f_1(x_1) g_1(x_1) \leq \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \dots, x_{k+1}) g(x_1, \dots, x_{k+1}) d\mu_2(x_2) \cdots d\mu_{k+1}(x_{k+1}),$$

et, en conséquence,

$$\int f_1 g_1 d\mu_1 \leq \int fg d\mu.$$

◀

Proposition 1.34 (inégalité FKG). *Voici un énoncé en terme d'événements et un énoncé en terme de variables aléatoires :*

1. *si A et B sont deux événements croissants, alors $\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B)$;*
2. *si X et Y sont deux variables aléatoires croissantes qui admettent un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{E}_p[XY] \geq \mathbb{E}_p[X]\mathbb{E}_p[Y]$.*

Remarque 1.35. Le point 1 se réécrit comme $\mathbb{P}_p(A | B) \geq \mathbb{P}_p(A)$, ce qui dit que la probabilité conditionnelle de A sachant B est plus grande que celle de A . Sachant un événement croissant B est réalisé veut dire que certains sites ou arêtes sont déjà ouverts, ce qui aide à réaliser A .

Démonstration. Le premier point est un cas particulier du deuxième en prenant $X = \mathbb{1}_A$ et $Y = \mathbb{1}_B$. Il suffit de montrer le deuxième.

On note $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ l'ensemble des arêtes desquelles dépendent X et Y . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$\begin{aligned} X_n &= \mathbb{E}[X | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)] \\ Y_n &= \mathbb{E}[Y | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)] \end{aligned}$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n sont croissantes dépendant d'un nombre fini de paramètres, on peut alors appliquer le lemme 1.33 précédent. Donc $\mathbb{E}_p[X_n Y_n] \geq \mathbb{E}_p[X_n]\mathbb{E}_p[Y_n]$. D'après la théorie de martingales, $X_n \rightarrow X$ et $Y_n \rightarrow Y$ dans L^2 , donc $X_n Y_n \rightarrow XY$ dans L^1 . D'où le résultat. \blacktriangleleft

1.7 Constante isopérimétrique et rayon spectral

Ici on considère un graphe $G = (V, E)$ simple, non orienté, localement fini, connexe et transitif.

Définition 1.36 (constante isopérimétrique). On définit la *constante isopérimétrique par arêtes* du graphe G par

$$\Phi_E(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E A|}{|A|}, A \subset V \text{ fini}, A \neq \emptyset \right\},$$

où $\partial_E A$ désigne l'ensemble des arêtes adjacentes à A , *i.e.*

$$\partial_E A = \{(x, y) \in A \times A^c \text{ ou } A^c \times A\}.$$

Et la *constante isopérimétrique par sites* par

$$\Phi_V(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_V K|}{|K|}, K \subset V \text{ fini}, K \neq \emptyset \right\},$$

où $\partial_V K$ désigne l'ensemble des sites voisins de K , *i.e.*

$$\partial_V K = \{x \notin K, \exists y \in K, x \sim y\}.$$

Remarque 1.37. On a toujours $\Phi_V \leq \Phi_E$. De plus, si le degré de G est majoré par d , alors $\Phi_E \leq d\Phi_V$.

Exemple 1.38. On peut calculer aisément les constantes isopérimétriques suivantes :

1. Pour tout $d \geq 1$, $\Phi_E(\mathbb{Z}^d) = \Phi_V(\mathbb{Z}^d) = 0$.
2. Pour tout $k \geq 2$, $\Phi_E(\mathbb{T}_k) = \Phi_V(\mathbb{T}_k) = k - 2$.

La proposition suivante donne une borne supérieure pour p_c . Ce résultat a été prouvé par Benjamini et Schramm dans [BS96].

Proposition 1.39. *Si on fait une percolation de Bernoulli par sites ou par arêtes sur G , alors*

$$p_c^{\text{sites}}(G) \leq \frac{1}{\Phi_V(G) + 1} \quad \text{et} \quad p_c^{\text{arêtes}}(G) \leq \frac{1}{\Phi_E(G) + 1}$$

Démonstration. On traite le cas de la percolation par sites, celui de la percolation par arêtes étant similaire. Soit $v \in V$. On utilise un algorithme pour construire le cluster de v .

On va définir deux suites (C_n) et (W_n) par récurrence, qui sont des suites auxiliaires exploitant respectivement la composante de v et la frontière entre (C_n) et les sites fermés.

- On pose $C_1 = \{v\}$ et $W_1 = \emptyset$. Pour $n \geq 2$,
- Si $\partial C_{n-1} \subset W_{n-1}$, on pose $C_n = C_{n-1}$ et $W_n = W_{n-1}$.
 - Sinon, on choisit $w_n \in V(G)$ qui n'est pas dans $C_{n-1} \cup W_{n-1}$ et voisin à un $z_n \in C_{n-1}$. On a deux cas :
 - Si w_n est ouvert, alors $C_n = C_{n-1} \cup \{w_n\}$ et $W_n = W_{n-1}$.
 - Si w_n est fermé, alors $C_n = C_{n-1}$ et $W_n = W_{n-1} \cup \{w_n\}$.

On remarque que l'état de w_n est indépendant des états de w_1, \dots, w_{n-1} .

On pose $C(v) := \bigcup_n C_n$, qui est le cluster de percolation de v si celui-ci est fini, et qui est un sous-ensemble infini du cluster de percolation contenant v si celui-ci est infini.

Si $C(v)$ est fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\partial C_n = W_n$. Par la définition de la constante isopérimétrique, $|W_n| = |\partial C_n| \geq \Phi_V(G)|C_n|$. Ceci veut dire que si l'on tire n fois pile (site ouvert, avec probabilité p) ou face (site fermé, avec probabilité $1 - p$) indépendamment, on obtient $|W_n| \geq \frac{\Phi_V(G)}{\Phi_V(G) + 1}n$ faces. En effet, dans notre algorithme, l'état de w_n est indépendant de C_{n-1} et W_{n-1} , on peut alors tirer la variable aléatoire w_n au moment où elle intervient.

Cependant, pour $p > 1 - \frac{\Phi(G)}{\Phi(G) + 1} = \frac{1}{\Phi(G) + 1}$, avec probabilité positive, il n'existe pas de n tel que dans une suite de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p , on ait plus de $\frac{\Phi(G)}{\Phi(G) + 1}n$ zéros (lemme 1.40). On peut en déduire que, avec probabilité positive, la suite C_n ne stationne pas, ce qui veut dire que le cluster est infini. Et donc

$$p_c(G) \leq \frac{1}{\Phi(G) + 1}.$$

◀

Lemme 1.40. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p . On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\forall n, \frac{S_n}{n} \leq p + \epsilon\right) > 0.$$

Démonstration. Ceci découle de la loi des grands nombres forte. En effet, elle dit que

$$\mathbb{P}\left(\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, \left|\frac{S_n}{n}(\omega) - p\right| \leq \epsilon\right) = 1.$$

Ceci implique que la probabilité vaut 1 pour toute valeur de ϵ car l'événement décroît quand ϵ décroît. On fixe $\epsilon > 0$. On peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\forall n \geq k, \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \epsilon\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\forall n, \frac{S_n}{n} \leq p + \epsilon\right) &\geq \mathbb{P}\left(\forall n \geq k, \frac{S_n}{n} \leq p + \epsilon \text{ et } \forall n < k, X_n = 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\forall n \geq k, \frac{S_n}{n} \leq p + \epsilon \mid \forall n < k, X_n = 0\right) \mathbb{P}(\forall n < k, X_n = 0) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\forall n \geq k, \frac{S_n}{n} \leq p + \epsilon\right) \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} > 0. \end{aligned}$$

◀

Définition 1.41 (rayon spectral). Soit $o \in V$. On définit une marche aléatoire simple partant de o , notée X_n . Le rayon spectral du graphe est défini à partir de la probabilité de retour de cette marche, plus précisément,

$$\rho(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = o)^{1/n}.$$

Lemme 1.42 (lemme sous-additif). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n,$$

alors,

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow \inf \left\{ \frac{a_k}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Démonstration. Fixons d'abord un $k \in \mathbb{N}^*$. Si $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n = qk + r$ sa division euclidienne avec $0 \leq r < k$. Par la sous-additivité,

$$a_n \leq qa_k + a_r \leq qa_k + \sup_{0 \leq r < k} a_r.$$

On divise par n et prend la \limsup sur n ,

$$\limsup \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}.$$

On prend la borne inférieure sur k ,

$$\limsup \frac{a_n}{n} \leq \inf \frac{a_k}{k} \leq \liminf \frac{a_k}{k}.$$

On a donc l'égalité entre ces trois termes. La limite existe bien et est égale à la borne inférieure. ◀

Proposition 1.43. *Soit X_n une marche aléatoire simple partant de o . On a*

$$\rho(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_o(X_{2n} = o)^{1/2n}$$

et

$$\mathbb{P}_o(X_n = o) \leq \rho(G)^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Si on pose $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, alors, par l'indépendance et la propriété de Markov, $a_{2n+2m} \geq a_{2n}a_{2m}$. Comme on peut toujours faire des allers-retours entre les sites voisins, la sous-suite $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive, donc la suite $(-\log a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le lemme sous-additif 1.42. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \leq l^{2n} \text{ où } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log a_{2n}}{2n}.$$

Or,

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \geq \mathbb{P}(X_n = 0)^2,$$

donc $\mathbb{P}(X_n = 0) \leq l^n$. Et donc,

$$\rho(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = o)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_o(X_{2n} = o)^{1/2n}.$$

◀

Remarque 1.44. Si le graphe n'est pas biparti, alors $\rho(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_o(X_n = o)^{1/n}$ car $(-\log a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le lemme sous-additif (tous les a_n sont strictement positifs pour n grand).

Proposition 1.45 (rayon spectral du produit). *Soient G_1, G_2 deux graphes transitifs de degré d_1, d_2 respectivement. On note $G_1 \times G_2$ le graphe produit muni de la structure cartésienne, i.e.*

$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2, \\ x \sim y \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \stackrel{G_2}{\sim} y_2) \text{ ou } (x_1 \stackrel{G_1}{\sim} y_1 \text{ et } x_2 = y_2). \end{aligned}$$

On a

$$\rho(G_1 \times G_2) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \rho(G_1) + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \rho(G_2).$$

Démonstration. La preuve se trouve dans l'annexe A. ◀

Remarque 1.46. $\rho(\mathbb{Z}) = 1$ et par la proposition (1.45), $\rho(\mathbb{Z}^d) = 1$ pour tout $d \geq 1$.

Définition 1.47. Un graphe transitif est dit *moyennable par arêtes* si $\Phi_E(G) = 0$ et *moyennable par sites* si $\Phi_V(G) = 0$. Par la remarque 1.37, si le degré du graphe est borné, la moyennabilité par arêtes est équivalente à la moyennabilité par sites. Si le graphe est moyennable, une suite (F_n) telle que $\frac{|\partial F_n|}{|F_n|} \rightarrow 0$ est appelée *suite de Følner*.

Théorème 1.48. *Si le graphe G est moyennable par arêtes, alors dans la percolation par arêtes de Bernoulli sur G , la phase de non-unicité ne peut pas exister. En particulier, $p_c(G) = p_u(G)$.*

Démonstration. Par la proposition 1.30, il suffit d'éliminer le cas $N = \infty$ p.s. Soit p un paramètre tel que $N = \infty$ p.s.

On dit que x est un point de branchement pour une configuration ω si $|C(x)| = +\infty$ et fermer toutes les arêtes adjacentes à x crée au moins 3 clusters. On note $\Lambda = \Lambda(\omega)$ l'ensemble aléatoire des branchements. On va montrer que $c = \mathbb{P}_p(o \in \Lambda) > 0$, qui ne dépend pas de o grâce à la transitivité du graphe.

$\mathbb{P}_p(N = \infty) = 1$, donc il existe $R > 0$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, où

$$B = \{B(0, R) \text{ intersecte au moins 3 clusters}\}.$$

La tolérance par suppression dit que $\mathbb{P}(\Pi_{E_R(0)} B) > 0$, où $E_R(0)$ désigne l'ensemble des arêtes se trouvant dans la boule centrée en 0 de rayon R . On peut ensuite choisir x, y, z à distance R de o tel que l'événement suivant ait une probabilité positive :

$$A = \{x, y, z \text{ sont dans des clusters différents et les arêtes de } E_R(o) \text{ sont fermées}\}.$$

On choisit $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z$ les chemins joignant o à x, y et z tels que $T = \mathcal{P}_x \cup \mathcal{P}_y \cup \mathcal{P}_z$ ne contienne aucun cycle. Il existe alors $u \in T$ tel que $T \setminus \{u\}$ laisse x, y, z dans 3 composantes distinctes. Par tolérance par insertion, $\mathbb{P}(\Pi^{E(T)} A) > 0$. De plus, u est un point de branchement sur $A' = \Pi^{E(T)} A$. Donc,

$$c = \mathbb{P}_p(o \in \Lambda) = \mathbb{P}_p(u \in \Lambda) \geq \mathbb{P}_p(A') > 0.$$

Ensuite, on montre que pour tout $K \subset V$ fini, $|\partial_E K| \geq c|K|$. Pour cela, on prend T un arbre couvrant d'un cluster infini η de ω . On désigne par $T(\eta)$ l'arbre obtenu de η en enlevant par itération tous les sites de degré 1 (on enlève toutes les branches finies). Alors

$$|(\partial_E K) \cap T(\eta)| = |\partial_{E(T(\eta))}(K \cap T(\eta))| \geq |K \cap T(\eta) \cap \Lambda| = |K \cap \eta \cap \Lambda|$$

par le lemme 1.49. Puis on somme sur tous les η pour avoir

$$|\partial_E K| \geq |K \cap \Lambda|$$

et donc

$$|\partial_E K| \geq \mathbb{E}|K \cap \Lambda| = c|K|.$$

La dernière inégalité est vraie pour tout $K \subset V$ fini, donc $\Phi_E(G) \geq c > 0$, le graphe n'est pas moyennable. \blacktriangleleft

Lemme 1.49. Soit T un arbre dont aucun sommet n'est de degré 1. On note B l'ensemble des sommets de degré au moins 3. Alors pour tout $K \subset V(T)$ non vide,

$$|\partial_E K| \geq |K \cap B| + 2.$$

Démonstration. Par récurrence. ◀

Remarque 1.50. On peut montrer le même énoncé pour la percolation par sites : si G est moyennable par sites, alors $p_c^{\text{sites}}(G) = p_u^{\text{sites}}(G)$.

Que se passe-t-il lorsque le graphe n'est pas moyennable ? Par exemple, si le graphe considéré est \mathbb{T}_k avec $k \geq 3$, alors par les résultats sur le processus de Galton-Watson, on sait que $p_c = 1/(k-1)$ et $p_u = 1$. Il existe dans ce cas-là une phase où un nombre infini de clusters co-existent.

Intuitivement, si notre graphe croît « suffisamment vite », on peut placer beaucoup de clusters infinis dans le graphe, sans pour autant qu'ils se connectent entre eux. Plus précisément, Benjamini et Schramm ont conjecturé la réciproque du théorème d'unicité 1.48 dans [BS96].

Conjecture 1.51. Pour tout graphe transitif et non moyennable, alors $p_c < p_u$.

Pour l'instant, on ne sait que très peu de chose dans ce genre de percolation. On a une réponse partielle donnée par Pak et Smirnova-Nagnibeda dans [PSN00] sur les graphes de Cayley (proposition 2.25). Dans l'article de Thom [Tho13] publié en 2013, le résultat a été amélioré. Il s'avère aussi que la technique de transport de masse est très utile dans les graphes transitifs, non moyennables et unimodulaires (paragraphe 2.5).

1.8 Rayons et bouts dans un graphe infini

Dans ce paragraphe, on considère G un graphe infini.

Définition 1.52. Un *rayon* est un chemin simple semi-infini. Deux rayons r_1 et r_2 sont dits *équivalents* s'il existe un autre rayon r_{12} qui contient une infinité de sommets dans r_1 et dans r_2 . Ceci est une relation d'équivalence. Et les classes d'équivalence induites par cette relation sont appelées les *bouts*.

Démonstration. On montre que la relation susmentionnée est bien une relation d'équivalence. La réflexivité et la symétrie étant claires, il suffit de montrer la transitivité de cette relation.

Soient r_1, r_2 et r_3 trois rayons infinis. On suppose que r_1 est équivalent à r_2 et que r_2 est équivalent à r_3 et on veut montrer que r_1 est équivalent à r_3 . L'idée globale est la suivante : s'il existe un rayon qui intersecte une infinité de fois r_1 et r_2 , et un rayon qui intersecte une infinité de fois r_2 et r_3 , en se servant de ces deux rayons et de r_2 en tant que « pont », on pourra arriver à construire un rayon qui intersecte une infinité de fois r_1 et r_3 . ◀

Exemple 1.53. Voici quelques exemples du nombre de bouts.

1. La droite des entiers \mathbb{Z} a 2 bouts, alors que \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$ a seulement 1 bout.
2. L'arbre k -valent pour $k \geq 3$ a une infinité de bouts.

Remarque 1.54. On a une autre définition équivalente de cette relation d'équivalence. On dit que r_1 et r_2 sont équivalents s'il n'existe pas de sous-ensemble $A \subset V$ fini qui sépare une infinité de sommets de r_1 d'une infinité de sommets de r_2 . Ainsi, le nombre de bouts est donné par

$$\sup\{\text{nombre de composantes connexes infinies dans } G \setminus K, K \text{ fini}\}.$$

Démonstration. Soient r_1 et r_2 deux rayons. S'il existe un rayon r_{12} qui contient une infinité de sommets dans r_1 et dans r_2 , alors tout sous-ensemble de sommets qui sépare une infinité de sommets de r_1 d'une infinité de sommets de r_2 contient forcément une infinité de sommets de r_{12} . S'il n'existe pas de rayon qui contient une infinité de sommets dans r_1 et dans r_2 , alors on choisit un chemin simple qui fait autant d'allers-retours que possible entre r_1 et r_2 comme ensemble séparateur. ◀

Proposition 1.55. *Le nombre de bouts d'un graphe infini, simple, transitif, localement fini et connexe est soit 1, soit 2, soit une infinité.*

Démonstration. Le graphe est infini, donc il a au moins un bout. Si le graphe a k bouts avec $k \geq 3$ fini, on veut montrer qu'il en a une infinité. On choisit K un sous-ensemble de sommets fini tel que $G \setminus K$ ait k composantes connexes infinies, notées C_1, \dots, C_k . Par transitivité, il existe un automorphisme ϕ tel que K soit disjoint de $\phi(K)$, donc $\phi(K)$ doit être dans l'un des k composantes connexes infinies, disons C_1 . Comme la structure de graphe est préservée par automorphisme, $G \setminus \phi(K)$ a aussi k composantes connexes infinies, dont l'une contient toutes les C_2, \dots, C_k et dont les autres sont contenues dans C_1 . Si l'on prend un sous-ensemble de sommets fini K' contenant K et $\phi(K)$, alors $G \setminus K'$ a au moins $2(k-1) > k$ composantes connexes infinies, ce qui contredit la maximalité. ◀

On verra dans le paragraphe 3.4 l'utilisation des notions de rayon et de bout dans la percolation de Bernoulli.

Chapitre 2

Percolation sur les groupes

Dans ce chapitre, on s'intéresse à définir des percolations sur des groupes. Pour ce faire, on ne travaille qu'avec les groupes de type fini, c'est-à-dire ceux qui sont engendrés par un nombre fini d'éléments, puisque dans ce cas-là, on peut définir des graphes de Cayley, qui sont des graphes bien sympatiques, sur lesquels on a déjà défini des percolations.

On prend donc toujours Γ un groupe de type fini à partir de maintenant.

2.1 Graphes de Cayley

Définition 2.1. On prend S une partie génératrice de Γ . On définit le *graphe de Cayley* associé à (Γ, S) comme suit :

- un sommet est un élément de Γ ;
- l'ensemble des arêtes est $\{\{g, gs\}, \{g, gs^{-1}\}, g \in \Gamma, s \in S\}$.

Remarque 2.2. Il est important de préciser la partie génératrice, puisque le graphe de Cayley en dépend comme l'illustre l'exemple ci-après.

Exemple 2.3. Voici les graphes de Cayley donnés par $(\mathbb{Z}, \{1\})$ et $(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$:

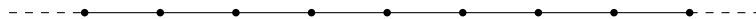


FIGURE 2.1 – Le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, \{1\})$.

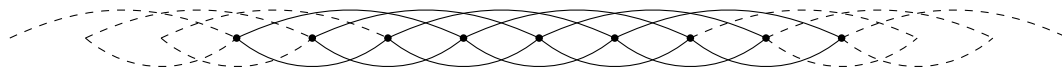


FIGURE 2.2 – Le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$.

Remarque 2.4. Tous les graphes de Cayley sont simples, de degré borné et connexes. De plus, l'action par multiplication à gauche fournit un sous-groupe d'automorphismes du graphe qui agit transitivement. On est bien dans le cadre établi au premier chapitre.

Définition 2.5 (quasi-isométrie). Soient (M_1, d_1) et (M_2, d_2) deux espaces métriques. Une application $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ est une *quasi-isométrie* de (M_1, d_1) à (M_2, d_2) s'il existe $A \geq 1, B, C \geq 0$ telles que

1. Pour tous $x, y \in M_1$, $\frac{1}{A}d_1(x, y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Ad_1(x, y) + B$.
2. Pour tout $x \in M_2$, il existe $z \in M_1$ tel que $d_2(x, f(z)) \leq C$.

Si une telle application existe, on dit que (M_1, d_1) et (M_2, d_2) sont *quasi-isométriques*.

Proposition 2.6. « *Etre quasi-isométriques* » est une relation d'équivalence.

Exemple 2.7. Pour tout entier d , les espaces \mathbb{Z}^d , muni de la distance du graphe, et \mathbb{R}^d , muni de la norme euclidienne, sont quasi-isométriques.

Exemple 2.8. Deux graphes de Cayley associés à un même groupe sont quasi-isométriques, via l'application identité.

Cet exemple dit que si l'on prend deux parties génératrices distinctes, alors les graphes de Cayley obtenus restent quand même assez « similaires ». C'est pour cela que certaines propriétés de groupe peuvent être traduites en langage des graphes, que l'on verra dans les paragraphes suivants.

2.2 Moyennabilité

Définition 2.9 (groupe moyennable). Un groupe Γ de type fini est dit *moyennable* s'il existe S une partie génératrice finie telle que (Γ, S) soit un graphe moyennable.

Exemple 2.10. Tout groupe abélien de type fini est moyennable.

On fournit ci-dessous la définition de moyennabilité dans la théorie des groupes et montre que ces deux définitions sont en fait équivalentes.

Définition 2.11. On désigne par $\ell^\infty(\Gamma)$ l'espace Banach muni de $\|\cdot\|_\infty$:

$$\ell^\infty(\Gamma) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornées} \}.$$

Une application linéaire μ sur $\ell^\infty(\Gamma)$ est appelée une *moyenne* si $\mu(\mathbb{1}) = 1$ et pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ positive, $\mu(f) \geq 0$. Si $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$, on écrit $(L_\gamma f)(\gamma) := f(s^{-1}\gamma)$. On dit qu'une moyenne μ est invariante si $\mu(L_\gamma f) = \mu(f)$ pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ et tout $\gamma \in \Gamma$. Enfin, on dit que Γ est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante sur $\ell^\infty(\Gamma)$.

Proposition 2.12. Si Γ est moyennable au sens de la constante isopérimétrique, alors il est moyennable au sens de l'existence d'une moyenne.

Démonstration. Soit (F_n) une suite de sous-ensembles telle que

$$\frac{|\partial_V F_n|}{|F_n|} \rightarrow 0.$$

On définit une suite de moyennes

$$\mu_n(f) := \frac{1}{|F_n|} \sum_{x \in F_n} f(x).$$

Pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ et pour tout $s \in S$, $|\mu_n(f) - \mu_n(L_s f)| \rightarrow 0$. Une limite faible de la suite (μ_n) est une moyenne invariante. ◀

La réciproque étant plus délicate, on renvoie les lecteurs intéressés au livre de Patterson. [Pat00]

Proposition 2.13. *Si Γ est moyennable, alors pour toute S partie génératrice finie de G , (Γ, S) est moyennable.*

Démonstration. On utilise l'existence d'une moyenne invariante décrite ci-dessus, qui est intrinsèque au groupe, donc ne dépend pas de la partie génératrice. ◀

Définition 2.14. Soit G un graphe localement fini et quasi-transitif. Il est dit de croissance exponentielle si le cardinal de $B(o, n)$ croît exponentiellement en n . Ceci ne dépend pas du choix de $o \in G$ par la quasi-transitivité.

Proposition 2.15. *Si Γ est un groupe qui n'est pas moyennable par sites, alors sa croissance est exponentielle.*

Démonstration. Soit S une partie génératrice de Γ . On note α la constante isopérimétrique (par sites) de (Γ, S) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n = B(o, n)$ la boule centrée en o de rayon n , et on sait que $B_{n+1} = \partial_V B_n \sqcup B_n$. Par la non-moyennabilité,

$$\frac{|\partial_V B_n|}{|B_n|} \geq \alpha.$$

Donc,

$$\frac{|B_{n+1}|}{|B_n|} \geq 1 + \alpha.$$

Par conséquent, $|B_n| \geq (1 + \alpha)^n$, la croissance est exponentielle. ◀

On remarque que la réciproque est fautive par l'exemple suivant :

Exemple 2.16. Le groupe d'allumeur de réverbères défini comme suit est moyennable. Sa croissance est pourtant exponentielle.

Tout d'abord, on donne une idée de ce à quoi ressemble ce groupe d'allumeur de réverbères. Sur chaque site de \mathbb{Z} se trouve un réverbère éteint à l'instant initial. Un allumeur part de l'origine et se promène sur l'axe \mathbb{Z} , et il est autorisé à allumer ou éteindre le réverbère correspondant à sa position. On appelle le groupe d'allumeur de réverbères celui engendré par ces opérations. Voici la définition formelle :

Définition 2.17 (groupe d'allumeur de réverbères). Le groupe d'allumeur de réverbères, noté G , est le produit semi-direct de \mathbb{Z} et la somme directe des copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ indexée par \mathbb{Z} :

$$G = \mathbb{Z} \ltimes \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ce groupe est engendré par $(1, 0)$ et $(0, \mathbb{1}_{\{0\}})$, qui correspondent respectivement au déplacement de l'allumeur sur \mathbb{Z} et changement d'état du réverbère à la position de l'allumeur. Un élément du groupe peut aussi être vu comme un état du système (position de l'allumeur + états des réverbères), ainsi, le groupe peut agir sur cet espace d'états par composition, dont la loi est donnée par

$$(m, \eta)(m', \eta') := (m + m', \eta \oplus S^{-m}\eta'),$$

où S est le shift vers la gauche de $\bigoplus_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$: $S(\eta)(j) := \eta(j + 1)$.

Démonstration. On commence par montrer que la croissance est exponentielle. On considère $S = \{(1, 0), (0, \mathbb{1}_{\{0\}})\}$ une partie génératrice et G le graphe de Cayley associé. On note T_n l'ensemble engendré par les puissances positives de $(1, 0)$ et $(0, \mathbb{1}_{\{0\}})$, dont chaque élément est de distance n de l'élément neutre :

$$T_n = \left\{ (1, 0)^{i_0} (0, \mathbb{1}_{\{0\}}) (1, 0)^{i_1} \cdots (0, \mathbb{1}_{\{0\}}) (1, 0)^{i_k}, k \in \mathbb{N}, i_0, i_k \geq 0, i_1, \dots, i_{k-1} \geq 1 \right\}.$$

L'ensemble T_n est l'union disjointe des ensembles $(1, 0)T_{n-1}$ et $(0, \mathbb{1}_{\{0\}})(1, 0)T_{n-2}$, et donc $|T_n| = |T_{n-1}| + |T_{n-2}|$. La croissance du groupe est au moins celle de la suite de Fibonacci.

Pour montrer que le groupe d'allumeur de réverbères est moyennable, on considère les ensembles indexés par n suivants :

$$F_n = \left\{ (m, \eta), m \in [-n, n], \eta^{-1}(\{1\}) \subseteq [-n, n] \right\}.$$

Alors, $|F_n| = (2n + 1)2^{2n+1}$ et $|\partial_E F_n| = 2^{2n+2}$. ◀

Voici un diagramme qui explique la relation entre différentes classes de graphes.

2.3 Propriétés invariantes par changement de système de générateurs

Etant donné un groupe, s'il possède une partie génératrice telle que le graphe de Cayley associé soit moyennable, il en va de même pour toute partie génératrice. (Proposition 2.13) La percolation de Bernoulli sur les graphes moyennables est bien étudiée : on sait, d'après le théorème 1.48, que la phase de non-unicité ne peut pas exister. Puis, la conjecture sur la non-unicité de clusters infinis dans les groupes non moyennables (conjecture 1.51) se formule comme suit dans le langage des groupes :

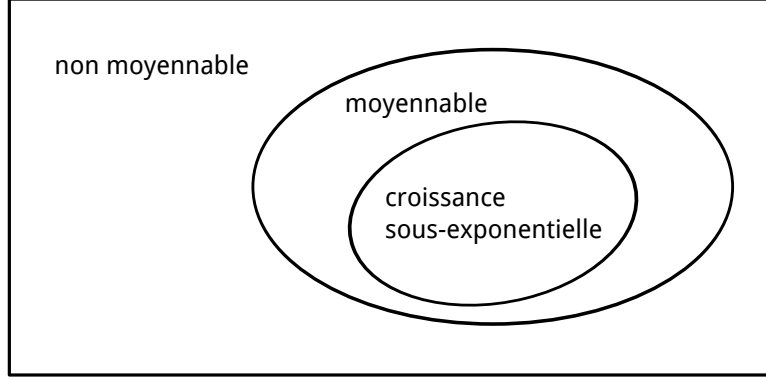


FIGURE 2.3 – Relation entre différentes classes de graphes.

Conjecture 2.18. Soit Γ un groupe de type fini. Si Γ n'est pas moyennable, alors pour toute S partie génératrice finie, la percolation de Bernoulli dans (Γ, S) admet 3 phases : $N = 0$, $N = \infty$ puis $N = 1$ p.s.

Un résultat très joli, et utilisant seulement la technique de couplage, sera démontré dans ce paragraphe : la propriété « $p_c < 1$ » ne dépend pas de la partie génératrice. On a besoin d'un lemme avant de démontrer ce résultat.

Lemme 2.19. Soit $0 < p < 1$. Soient A, B deux ensembles. Soit \mathbb{P}_p^A la mesure produit de Bernoulli sur 2^A . On prend $D \subseteq A \times B$ et on écrit,

$$\begin{aligned} D_a &:= (\{a\} \times B) \cap D, \forall a \in A, \\ D^b &:= (A \times \{b\}) \cap D, \forall b \in B. \end{aligned}$$

On suppose que $m := \sup_{a \in A} |D_a| < \infty$ et $n := \sup_{b \in B} |D^b| < \infty$. On pose $q := (1 - (1-p)^{1/m})^n$.

Etant donnée une configuration $\omega \in 2^A$, on définit $\omega' \in 2^B$ par

$$\omega'(b) := \begin{cases} \min\{\omega(a), (a, b) \in D^b\} & \text{si } D^b \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } D^b = \emptyset \end{cases}$$

On désigne par \mathbb{P} la loi de ω' lorsque ω suit la loi de \mathbb{P}_p^A . Alors $\mathbb{P} \succcurlyeq \mathbb{P}_q^B$.

Démonstration. Soit $\eta \sim \mathcal{L}(\mathbb{P}_{q^{1/n}}^{A \times B})$. On définit

$$\zeta(a) := \begin{cases} \max \eta_{|D_a} & \text{si } D_a \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } D_a = \emptyset \end{cases} \quad \text{et} \quad \zeta'(b) := \begin{cases} \min \eta_{|D^b} & \text{si } D^b \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } D^b = \emptyset \end{cases}$$

Les $\zeta(a)$ sont indépendantes et, pour tout $a \in A$,

$$\mathbb{P}_{q^{1/n}}^{A \times B}(\zeta(a) = 0) = (1 - q^{1/n})^{|D_a|} = (1 - p)^{|D_a|/m} \geq 1 - p,$$

donc $\mathbb{P}_p^A \succcurlyeq \zeta$. De même, $\zeta' \succcurlyeq \mathbb{P}_q^B$ car les $\zeta'(b)$ sont indépendantes et pour tout $b \in B$,

$$\mathbb{P}_{q^{1/n}}^{A \times B}(\zeta'(b) = 1) = (q^{1/n})^{|D^b|} \geq q.$$

Ainsi, si $\omega \sim \mathbb{P}_p^A$, on peut coupler ω et ζ de sorte que $\omega \geq \zeta$. Comme $\zeta(a) \geq \eta(a, b)$ pour tout $b \in B$,

$$\omega'(b) = \min\{\omega(a), (a, b) \in D^b\} \geq \min \eta_{|D^b} = \eta'(b), \text{ si } D^b \neq \emptyset,$$

et $\omega'(b) = 1 = \zeta'(b)$ si $D^b = \emptyset$. Par conséquent, $\mathbb{P} \succcurlyeq \zeta' \succcurlyeq \mathbb{P}_q^B$. \blacktriangleleft

Proposition 2.20. *Si S_1 et S_2 sont deux différentes parties génératrices du groupe Γ , et si l'on note $G_1 = (\Gamma, S_1)$ et $G_2 = (\Gamma, S_2)$, alors*

$$p_c(G_1) < 1 \iff p_c(G_2) < 1.$$

Démonstration. Pour tout $s \in S_2$, on écrit $\phi(s)$ un mot minimal composé des lettres dans S_1 . L'application ϕ est définie de sorte que, si $s^{-1} \in S_2$, alors $\phi(s^{-1}) = \phi(s)^{-1}$.

Soit $\omega_1 \sim \mathbb{P}_p$ sur $E(G_1)$. On définit ω_2 sur $E(G_2)$ en notant, pour $s \in S_2$, $[x, xs] \in \omega_2$ si et seulement si le chemin $x \rightarrow xs$ déterminé par $\phi(s)$ est dans ω_1 . Puis on applique le lemme 2.19 en prenant

$$\begin{aligned} A &= \{\text{arêtes de } G_1\}, \\ B &= \{\text{arêtes de } G_2\}, \\ D &= \left\{ \begin{array}{l} (e, e'), e \text{ est utilisée dans un chemin entre les deux extrémités} \\ \text{de } e' \text{ représenté par } \phi(s) \text{ (dans } G_1) \text{ avec } s \in S_2, e' = \{g, gs\} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

On a $n = \max\{|\phi(s)|, s \in S_2\}$ et $m \leq |S_2| < \infty$ donc $\omega_2 \succcurlyeq \mathbb{P}_q^{G_2}$. Par la façon dont ω_2 est construite, si $K(o)$ est infini dans ω_2 , alors $K(o)$ est infini dans ω_1 . Puis par la domination stochastique $\omega_2 \succcurlyeq \mathbb{P}_q^{G_2}$, si $q > p_c(G_2)$, alors $p \geq p_c(G_1)$. Par conséquent, $p_c(G_2) < 1$ implique que $p_c(G_1) < 1$. \blacktriangleleft

Maintenant on revient à l'étude de la non-unicité de clusters infinis dans les graphes transitifs non moyennables, en particulier, on donne une réponse partielle à la conjecture 1.51. Ceci est dû à Pak et Smirnova-Nagnibeda [PSN00] : si l'on regarde un groupe non moyennable, on peut trouver une partie génératrice avec multiplicité pour laquelle on a $p_c < p_u$ dans le graphe de Cayley associé. Ce sera démontré dans la proposition 2.25. Ce qui est encore mieux, Thom a prouvé, en 2013, le même résultat sans multiplicité. Les lecteurs intéressés sont invités à lire son article [Tho13].

Avant de se lancer dans la démonstration de ceci, on a besoin de quelques propriétés portant sur la constante isopérimétrique et le rayon spectral.

Théorème 2.21. *Si G est un graphe régulier de degré d , alors*

$$\rho(G)^2 + \left(\frac{\Phi_E(G)}{d} \right)^2 \leq 1 \tag{2.1}$$

et

$$\rho(G) + \frac{\Phi_E(G)}{d} \geq 1. \quad (2.2)$$

Démonstration. La preuve se trouve dans l'annexe B. ◀

Dans le lemme suivant, on donne des critères importants qui permettent de savoir si p_c est strictement plus petit que p_u pour les percolations par arêtes ou par sites.

Lemme 2.22. *Soit G un graphe transitif de degré d . Alors*

$$\rho(G)d \leq \Phi_E(G) \implies p_c^{\text{arêtes}}(G) < p_u^{\text{arêtes}}(G), \quad (2.3)$$

$$\rho(G)d \leq \Phi_V(G) \implies p_c^{\text{sites}}(G) < p_u^{\text{sites}}(G). \quad (2.4)$$

Démonstration. Par la proposition 1.39, pour la percolation par arêtes,

$$p_c^{\text{arêtes}}(G) \leq \frac{1}{1 + \Phi_E(G)} < \frac{1}{\Phi_E(G)} \leq \frac{1}{\rho(G)d} \leq \frac{1}{\gamma(G)} \leq p_u^{\text{arêtes}}(G)$$

et pour la percolation par sites,

$$p_c^{\text{sites}}(G) \leq \frac{1}{1 + \Phi_V(G)} < \frac{1}{\Phi_V(G)} \leq \frac{1}{\rho(G)d} \leq \frac{1}{\gamma(G)} \leq p_u^{\text{sites}}(G),$$

où $\gamma(G)$ est défini et les propriétés données dans le paragraphe 3.4. ◀

Corollaire 2.23. *Soit G un graphe transitif de degré d .*

1. Si $\frac{\Phi_E(G)}{d} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $p_c^{\text{arêtes}}(G) < p_u^{\text{arêtes}}(G)$.
2. Si $\frac{\Phi_V(G)}{d} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $p_c^{\text{sites}}(G) < p_u^{\text{sites}}(G)$.
3. Si $\rho(G) \leq \frac{1}{2}$, alors $p_c^{\text{arêtes}}(G) < p_u^{\text{arêtes}}(G)$.

Démonstration. On utilise le lemme 2.22.

Pour le point 1, si $\frac{\Phi_E(G)}{d} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\rho(G) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ par l'inégalité (2.1). Donc $\rho(G) \leq \frac{\Phi_E(G)}{d}$, on applique le critère (2.3).

De même pour le point 2, on applique l'inégalité (2.1) avec $\Phi_E(G) \geq \Phi_V(G)$ et le critère (2.4).

Le point 3 découle de l'inégalité (2.2) et le critère (2.1) car $\rho(G) \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\Phi_E(G)}{d}$. ◀

Définition 2.24. Si G est un graphe et $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. On définit le graphe des chemins de longueur k de manière suivante :

$$\begin{aligned} V(G^{[k]}) &= V(G), \\ E(G^{[k]}) &= \{\{x, y\}, \text{il existe un chemin de longueur } k \text{ dans } G \text{ d'extrémités } x \text{ et } y\}. \end{aligned}$$

Si G n'est pas biparti, le graphe obtenu est connexe quelle que soit la valeur de k ; si G est biparti, le graphe obtenu n'est connexe que si k est impair.

Si G est un graphe de Cayley (Γ, S) , alors S^k reste une partie génératrice si k est impair, donc, de manière générale, on n'a le droit d'écrire $G^{[k]} = (\Gamma, S^k)$ que pour k impair. Si G n'est pas biparti, cette écriture est valable pour tout k .

Proposition 2.25. *Si G est un graphe transitif non moyennable, alors*

$$p_c^{\text{arêtes}}(G^{[k]}) < p_u^{\text{arêtes}}(G^{[k]}) \text{ pour tout } k \geq -\frac{\log 2}{\log \rho(G)} \text{ impair.}$$

En particulier, si un groupe est non moyennable, alors il possède une partie génératrice avec redondance pour laquelle son graphe de Cayley admet deux transitions de phases : $p_c^{\text{arêtes}} < p_u^{\text{arêtes}}$.

Démonstration. Si $k \geq -\frac{\log 2}{\log \rho(G)}$, alors $\rho(G)^k \leq \frac{1}{2}$. Si la marche aléatoire simple sur G a pour loi $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors la marche aléatoire simple sur $G^{[k]}$ a pour loi $(\mu_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$, et donc $\rho(G^{[k]}) = \rho(G)^k$. Et on conclut par le point 3 du corollaire 2.23 ◀

2.4 Transport de masse

Ici on introduit une technique assez puissante qui nous servira à étudier la percolation sur les graphes de Cayley, et plus loin sur les graphes unimodulaires. Ce paragraphe est basé sur [BLPS99].

On considère, dans ce paragraphe, une percolation invariante sur un groupe Γ infini de type fini (voir la définition 1.12). Soit $F : \Gamma \times \Gamma \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$ une fonction. On suppose que F est invariante sous l'action diagonale de Γ , *i.e.*,

$$F(\gamma x, \gamma y; \gamma \omega) = F(x, y; \omega), \forall x, y \in \Gamma, \forall \gamma \in \Gamma, \forall \omega \in \Omega.$$

A chaque point $x \in \Gamma$ on donne une masse initiale, qui peut éventuellement dépendre de ω , puis on redistribue ces masses de sorte que $F(x, y; \omega)$ soit la masse envoyée de x à y . Ici, comme on a un groupe (ou un graphe de Cayley), la masse est préservée dans le sens où l'espérance de la masse avant le transport est égale à celle après le transport, ce qui revient à dire que « après le transport, la masse reçue par un site est exactement la masse envoyée depuis ce même site », *i.e.*,

$$\sum_y \mathbb{E}[F(x, y; \omega)] = \sum_y \mathbb{E}[F(xy^{-1}x, x; \omega)] = \sum_y \mathbb{E}[F(y, x; \omega)].$$

Pour simplifier les notations, on note $f(x, y) = \mathbb{E}[F(x, y; \omega)]$ et donc, par invariance de la percolation considérée, $f(x, y) = f(\gamma x, \gamma y)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Et ici on donne l'énoncé du transport de masse :

Proposition 2.26 (transport de masse). *Sous les hypothèses ci-dessus et en gardant les même notations, on a*

$$\sum_{x \in \Gamma} f(o, x) = \sum_{x \in \Gamma} f(x, o). \quad (2.5)$$

Avant de voir à « quel point est puissante » la technique de transport de masse, on commence par quelques échauffements.

Remarque 2.27. La configuration ω peut-elle être un sommet p.s. ? *i.e.* est-il possible de choisir un sommet de manière aléatoire et invariante ? La réponse est négative par la σ -additivité d'une probabilité et du fait que notre groupe est infini et dénombrable.

Remarque 2.28. ω peut-elle être un sous-ensemble de sommets fini non-vide p.s. ? La réponse est négative car sinon, on pourrait choisir uniformément un sommet parmi ceux du sous-ensemble pour construire une probabilité invariante qui est p.s. un singleton.

Remarque 2.29. Le nombre de clusters finis est 0 ou ∞ p.s. Si la probabilité que le nombre de clusters finis soit fini non nul était strictement positif, on pourrait conditionner à cet événement mesurable pour obtenir une probabilité invariante qui est p.s. un sous-ensemble de sommets fini non vide.

On rappelle qu'un point de branchement est un point dont l'enlèvement crée au moins 3 clusters infinis.

Remarque 2.30. Le nombre de branchements est 0 ou ∞ p.s. En fait, l'ensemble de points de branchement est invariant sur 2^V .

Maintenant, voici le premier exemple utilisant le transport de masse :

Proposition 2.31. *Chaque cluster contient 0 ou ∞ points de branchement p.s.*

Démonstration. Pour tous $x \in V$ et ω une configuration, on note $N(x; \omega)$ le nombre de branchements dans $K(x) = K(x; \omega)$. On définit ensuite

$$F(x, y; \omega) = \begin{cases} 1/N(x; \omega) & \text{si } 0 < N(x; \omega) < \infty \text{ et } y \in K(x) \text{ un point de branchement} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction F est invariante par l'action diagonale, on peut alors appliquer le principe de transport de masse à $f(x, y) = \mathbb{E}[F(x, y, \omega)]$. Comme $\sum_x F(o, x, \omega) \leq 1$ par la construction, on a $\sum_x f(o, x) \leq 1$.

S'il existe un cluster $K(x, \omega)$ tel que $0 < N(x, \omega) < \infty$, les points de branchement reçoivent une masse infinie. Donc si

$$\mathbb{P}(\text{il existe } x \text{ tel que } 0 < N(x; \omega) < \infty) > 0,$$

alors

$$\mathbb{P}(0 < N(o; \omega) < \infty \text{ et } o \text{ est un point de branchement}) > 0,$$

ainsi, $\sum_x f(x, o) = \infty$. Absurde. ◀

Proposition 2.32. *Dans le couplage standard de la percolation de Bernoulli sur un graphe de Cayley G , pour tous $p_c(G) < p_1 < p_2$, p.s. chaque p_2 -cluster infini contient un p_1 -cluster infini.*

Démonstration. On note ω_1 et ω_2 les configurations des percolations de Bernoulli de paramètres p_1 et p_2 par le couplage standard donné dans le paragraphe 1.2. On a $\omega_1 \subseteq \omega_2$ et on sait que (ω_1, ω_2) est invariant par $\Gamma = \text{Aut}(G)$. On note η la réunion de tous les clusters infinis de ω_1 . Puis on définit

$$F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in K_2(x) \cap \eta \text{ l'unique point le plus proche de } x \text{ dans } \omega_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction F est invariante par l'action diagonale, et $\sum_y F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) \leq 1$. On suppose que

$$\mathbb{P}(\text{il existe un } p_2\text{-cluster infini disjoint de } \eta) > 0.$$

On pose l'événement

$$A(z, y; e_1, \dots, e_n) = \left\{ \begin{array}{l} |K_2(z)| = \infty, K_2(z) \cap \eta = \emptyset, y \in \eta, \\ e_1, \dots, e_n \text{ un chemin reliant } z \text{ à } y \\ \text{restant en dehors de } K_2(z) \cup \eta \end{array} \right\}.$$

Il existe z, y, e_1, \dots, e_n tels que $\mathbb{P}(A(z, y, e_1, \dots, e_n)) > 0$. Prenons $h : [0, 1] \rightarrow [p_1, p_2]$ affine et bijective puis notons

$$B = \{\omega \in A(z, y, e_1, \dots, e_n), \mathcal{U}(e_k) \text{ sont remplacées par } h(\mathcal{U}(e_k))\}.$$

Alors $\mathbb{P}(B) > 0$ par le lemme 2.33 ci-après.

Sur B , pour tout $x \in K_2(z)$, $F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = 1$, par conséquent

$$\sum_x \mathbb{E}F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = \infty.$$

On obtient une contradiction. ◀

Lemme 2.33. *Soit X un ensemble dénombrable. On note \mathcal{L}_X la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^X$. Soit A un événement dans $[0, 1]^X$. Etant donné $Y \subset X$ fini et $\phi : [0, 1]^Y \rightarrow [0, 1]^Y$ une application injective dont le déterminant de la jacobienne est p.s. non nul, on pose*

$$A' := \{\omega \in [0, 1]^X, \exists \eta \in A, \omega_{X \setminus Y} = \eta_{X \setminus Y}, \omega_Y = \phi(\eta_Y)\}.$$

Alors $\mathcal{L}_X(A') > 0$ si $\mathcal{L}_X(A) > 0$.

Démonstration. On écrit $[0, 1]^X = [0, 1]^Y \times [0, 1]^{X \setminus Y}$ pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de traiter le cas où $X = Y$ fini. Or,

$$\mathcal{L}_X(A') = \int_A |J| d\mathcal{L}_X,$$

où J est le déterminant de la jacobienne de ϕ . D'où l'énoncé. ◀

Définition 2.34. Si G est un graphe et K un sous-graphe fini, on définit

$$\alpha_K := \frac{1}{|K|} \sum_{x \in K} \deg_K(x),$$

où $\deg_K(x)$ désigne le degré de x dans le graphe K . Puis, on pose

$$\alpha(G) := \sup\{\alpha_K, K \subset G \text{ fini}\}.$$

Si G est un graphe régulier de degré d , alors $\alpha(G) + \Phi_E(G) = d$ par définition.

Ici, on considère une percolation Γ -invariante sur un graphe de Cayley G de degré d . On note $\deg_\omega x$ le degré aléatoire dans la configuration de percolation, qui est identiquement distribué, et on note $K(x)$ la composante connexe aléatoire de x . Le théorème suivant est une jolie application du transport de masse.

Théorème 2.35 (point critique dans une percolation par arêtes). *Soit Γ un groupe non moyennable. Si G est un graphe de Cayley de Γ sur lequel on considère une percolation Γ -invariante par arêtes \mathbb{P} avec $\mathbb{E}[D] \geq \alpha(G)$, alors il existe un cluster infini avec probabilité positive. De plus, avec probabilité positive, $p_c(\omega) \leq \frac{\alpha(D)}{\mathbb{E}[D]}$, où ω désigne le sous-graphe de la percolation invariante considérée.*

Démonstration. Sur chaque site $x \in V$ se trouve une masse $\deg_\omega x$ initialement. Les masses dans les composantes infinies sont laissées en tant que telles et celles dans les composantes finies sont redistribuées uniformément dans la composante. Après le transport, les sommets dans une composante finie K ont masse α_K . Si l'on note $f(x, y)$ l'espérance de masse transportée de x à y , alors $f(x, y) = f(\gamma x, \gamma y)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ puisque l'on a une percolation Γ -invariante. L'espérance de la masse en o avant le transport est

$$\mathbb{E}[\deg_\omega o] = \sum_{x \in X} f(o, x).$$

D'autre part, l'espérance de la masse en o après le transport est

$$\mathbb{E}[\deg_\omega o \mathbb{1}_{|K(o)|=\infty} + \alpha_{K(o)} \mathbb{1}_{|K(o)|<\infty}] = \sum_{y \in X} f(y, o).$$

Par Γ -invariance, ces deux quantités sont égales. En notant

$$p_\infty := \mathbb{P}[|K(o)| = \infty],$$

on obtient,

$$\mathbb{E}[\deg_\omega o] < \mathbb{E}[d \mathbb{1}_{|K(o)|=\infty} + \alpha(G) \mathbb{1}_{|K(o)|<\infty}] = (d - \alpha(G))p_\infty + \alpha(G).$$

(L'inégalité stricte échoue dans le cas trivial où $K(o) = G$ p.s.) Ainsi,

$$p_\infty > \frac{\mathbb{E} \deg_\omega o - \alpha(G)}{d - \alpha(G)}.$$

◀

2.5 Graphes unimodulaires

On aimerait bien généraliser le principe de transport de masse à des graphes transitifs plus généraux. Malheureusement, ceci n'est pas automatique. En fait, on peut construire des graphes transitifs pour lesquels le principe de transport de masse n'est pas vérifié. Pour contourner cette difficulté, on peut modifier la formule (2.5) pour obtenir une formule plus générale de transport de masse.

Exemple 2.36. On note \mathbb{T}_3 l'arbre trivalent et on y fixe un rayon ξ . On crée le graphe G à partir de \mathbb{T}_3 en ajoutant à chaque sommet x de \mathbb{T}_3 une arête reliant x et son ξ -grand-père (les ancêtres sont dirigés par ξ vers l'infini). La représentation graphique d'un sous-graphe fini est dans la figure 2.4 ci-après. Puis, on note

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ est le } \xi\text{-grand-père de } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est bien invariante par automorphismes grâce à la structure des grands-parents. Or, sur le graphe G , on a

$$\sum_{x \in V(G)} f(o, x) = 1, \text{ et pourtant } \sum_{x \in V(G)} f(x, o) = 4.$$

Le transport de masse est faux, le graphe n'est donc pas de Cayley.

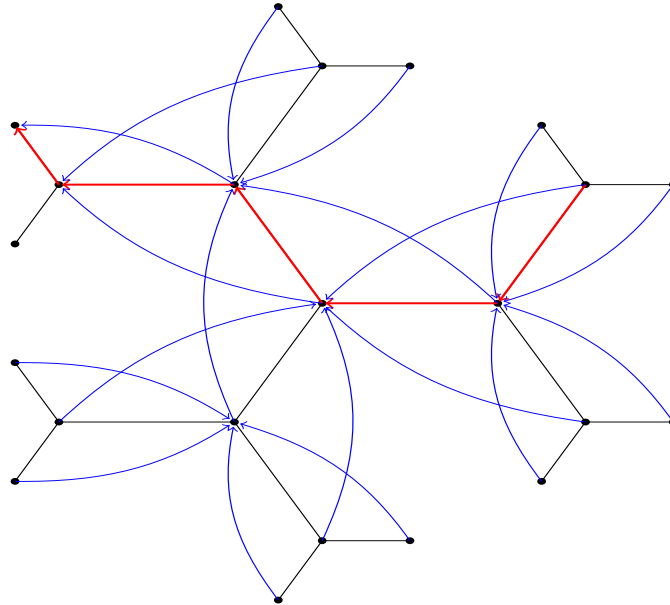


FIGURE 2.4 – L'arbre \mathbb{T}_3 est en noir. Le rayon infini est coloré en rouge. Les arêtes bleues sont rajoutées pour former le graphe voulu. Le graphe n'est pas orienté, les flèches rouges ont pour but d'indiquer la direction du rayon infini et les flèches bleues les grands-parents.

Remarque 2.37. Si le transport de masse n'est pas vérifié, le graphe n'est pas de Cayley. Attention, la réciproque n'est pas vraie. (cf. figure 2.5)

Définition 2.38 (mesure de Haar). Sur un groupe localement compact Γ , il existe une mesure positive μ invariante par translations à gauche. Elle est unique à un facteur multiplicatif près et est appelée *mesure de Haar*.

Par abus de langage, on dit souvent *la* mesure de Haar. En effet, si le groupe est compact, on peut renormaliser la mesure pour que $\mu(G) = 1$.

Etant donné un groupe localement compact Γ et sa mesure de Haar, on peut regarder la mesure $B \mapsto \mu(Bg)$, qui est encore invariante à gauche. Cette mesure est proportionnelle à μ , il existe alors une constante $m(g)$ (qui ne dépend pas de la mesure de Haar initiale μ) telle que $\mu(Bg) = m(g)\mu(B)$. L'homomorphisme $g \mapsto m(g)$ est appelé la *fonction modulaire*.

Définition 2.39 (groupe unimodulaire et graphe unimodulaire). Un groupe localement compact Γ est dit *unimodulaire* si sa mesure de Haar est aussi invariante à droite, *i.e.* sa fonction modulaire m vaut 1. Un graphe localement compact G est dit *unimodulaire* si son groupe des automorphismes $\text{Aut}(G)$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, l'est.

Exemple 2.40. Un groupe dénombrable est unimodulaire car la mesure de Haar associée est la mesure de comptage.

Définition 2.41. On considère Γ un groupe d'automorphismes du graphe $G = (V, E)$. Pour tout $x \in V$, on définit son *stabilisateur* par

$$S(x) = \{\gamma \in \Gamma, \gamma x = x\}.$$

On remarque que si G est localement fini, alors $S(x)$ l'est également pour tout x .

Proposition 2.42. Soit G un graphe localement fini et $\Gamma = \text{Aut}(G)$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle. Soit μ la mesure de Haar sur Γ . Alors, pour tous $x, y \in V$,

$$\frac{|S(x) \cdot y|}{|S(y) \cdot x|} = \frac{\mu(S(x))}{\mu(S(y))}.$$

Démonstration. Soient $x, y \in V$. On considère l'action de groupe suivante

$$\begin{aligned} \phi : S(x) &\rightarrow V \\ \gamma &\mapsto \gamma y \end{aligned}.$$

Son stabilisateur est $S(x) \cap S(y)$ et son orbite $S(x) \cdot y$. On obtient ainsi

$$|S(x) \cdot y| = [S(x) : S(x) \cap S(y)].$$

Par conséquent,

$$\frac{|S(x) \cdot y|}{|S(y) \cdot x|} = \frac{[S(x) : S(x) \cap S(y)]}{[S(y) : S(x) \cap S(y)]} = \frac{\mu(S(x))}{\mu(S(y))}.$$

◀

Remarque 2.43. Si $y = gx$, alors $S(y) = gS(x)g^{-1}$ et

$$\mu(S(y)) = \mu(S(x)g^{-1}) = m(g)^{-1}\mu(S(x)).$$

Donc Γ est unimodulaire si et seulement si pour tous x, y dans la même orbite, on a $\mu(S(x)) = \mu(S(y))$.

Maintenant, on va généraliser la formule de transport de masse fournie dans la proposition 2.26.

Théorème 2.44. *Supposons Γ un groupe d'automorphismes de $G = (V, E)$ et $f : V \times V \rightarrow [0, \infty]$ une fonction invariante sous l'action diagonale de Γ . Soit $u, w \in V$. Alors,*

$$\sum_{z \in \Gamma w} f(u, z) = \sum_{y \in \Gamma u} f(y, w) \frac{|S(y)w|}{|S(w)y|}. \quad (2.6)$$

Démonstration. Tout d'abord, pour $x, y \in V$, on pose

$$\Gamma_{x,y} = \{\gamma \in \Gamma, \gamma x = y\}.$$

Et pour tout $\gamma \in \Gamma_{x,y}$, on a

$$\Gamma_{x,y} = \gamma S(x) = S(y)\gamma.$$

Pour tous x_1, y_1, x_2 et $\gamma \in \Gamma_{x_1, y_1}$,

$$|\Gamma_{x_1, y_1} x_2| = |\gamma S(x_1) x_2| = |S(x_1) x_2|. \quad (2.7)$$

Si l'on écrit $y_2 = \gamma x_2$, alors

$$|\Gamma_{x_1, y_1} x_2| = |S(y_1)\gamma x_2| = |S(y_1)y_2|. \quad (2.8)$$

Démontrons maintenant la formule (2.6). Soient $u, w \in V$. Soient $z \in \Gamma \cdot w$ et $\gamma \in \Gamma_{z,w}$. Si $y = \gamma u$, alors $f(u, z) = f(\gamma u, \gamma z) = f(y, w)$. Ceci dit, on a $f(u, z) = f(y, w)$ dès que $y \in \Gamma_{z,w}u$. Faisons le calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \Gamma w} f(u, z) &= \sum_{z \in \Gamma w} \sum_{y \in \Gamma_{z,w}u} \frac{f(y, w)}{|\Gamma_{z,w}u|} \\ &= \sum_{y \in \Gamma u} \sum_{z \in \Gamma_{y,w}w} \frac{f(y, w)}{|\Gamma_{z,w}u|} \\ &= \sum_{y \in \Gamma u} f(y, w) \frac{|\Gamma_{y,w}w|}{|\Gamma_{z,w}u|}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de l'égalité ensembliste suivante :

$$\begin{aligned} \{(z, y), z \in \Gamma w, y \in \Gamma_{z,w}u\} &= \{(z, y), \exists \gamma \in \Gamma, y = \gamma u, w = \gamma z\} \\ &= \{(z, y), \exists \gamma \in \Gamma, u = \gamma^{-1}y, z = \gamma^{-1}w\} \\ &= \{(z, y), y \in \Gamma u, z \in \Gamma_{y,w}w\}. \end{aligned}$$

On utilise les formules 2.7 et 2.8 pour simplifier le dernier terme :

$$\sum_{z \in \Gamma w} f(u, z) = \sum_{y \in \Gamma u} f(y, w) \frac{|\Gamma_{y, u} w|}{|\Gamma_{z, w} u|} = \sum_{y \in \Gamma u} f(y, w) \frac{|S(y)w|}{|S(w)y|}.$$

◀

Remarque 2.45. Ici on retrouve la formule (2.5) si le graphe est unimodulaire et transitif, en utilisant la remarque 2.43.

Proposition 2.46. *Si G est un graphe moyennable, alors tout groupe transitif d'automorphismes de G est unimodulaire.*

Démonstration. Soit (F_n) une suite d'ensembles finis de G telle que $|\overline{F_n}|/|F_n| \rightarrow 1$ lorsque n tend vers ∞ . On fixe $x \sim y$ deux sommets voisins. On compte le nombre de couples (z, w) tels que $z \in F_n$ et $w \in \Gamma_{x, z} y$ (ou de manière équivalente, $z \in \Gamma_{y, w} x$) de deux façons :

$$|F_n| |S(x)y| = \sum_{z \in F_n} \sum_{w \in \Gamma_{x, z} y} 1 \leq \sum_{w \in \overline{F_n}} \sum_{z \in \Gamma_{y, w} x} 1 = |\overline{F_n}| |S(y)x|.$$

En prenant la limite, on obtient $|S(x)y| \leq |S(y)x|$. Par symétrie, on a l'égalité. Puis par transitivité, cette égalité est vérifiée pour tout couple $(x, y) \in V^2$. ◀

Voyons un exemple de graphe qui est unimodulaire et transitif sans être de Cayley.

Exemple 2.47. Le graphe de Petersen est unimodulaire et transitif mais n'est pas de Cayley.

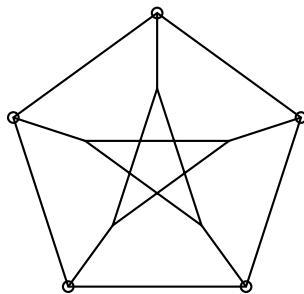


FIGURE 2.5 – Le graphe de Petersen

Corollaire 2.48. *Si G est un graphe unimodulaire, quasi-transitif et non moyennable, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute \mathbb{P} une mesure de percolation par arêtes qui est invariante par $\text{Aut}(G)$ et où tous les clusters sont finis p.s., on peut trouver un certain $x \in V$,*

$$\mathbb{E}[\deg_\omega x] \leq \deg_G x - \epsilon.$$

Démonstration. Soit G' une représentation transitive de G (voir définition 1.7). On note \mathbb{P}' la percolation induite sur G' , en prenant l'arête $\{x, y\}$ (dans G') ouverte s'il existe un chemin ouvert de longueur inférieure ou égale à $2r + 1$ reliant x et y dans G .

Si $\mathbb{E}[\deg_\omega x]$ est proche de $\deg_G x$ pour tout x , alors $\mathbb{E}'[\deg_{\omega'} x]$ sera proche de $\deg_{G'} x$ pour tout x également. On obtient alors une absurdité d'après le théorème 2.35. ◀

Chapitre 3

Etudes de $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$

Dans le chapitre 1, on a vu, dans le théorème 1.48, que dans un graphe transitif moyennable, on a seulement deux phases de percolation, *i.e.* $p_c = p_u$. Dans les graphes non moyennables, la conjecture dit que $p_c < p_u$. Les arbres k -valents avec $k \geq 3$ sont évidemment non moyennables, et leur phase d'unicité est réduite à un point $p = 1$, ce qui n'est pas très intéressant. On cherche des graphes pour lesquels on sait montrer qu'il y a trois phases non dégénérées de percolation. C'est pour cette raison que l'on regarde les graphes donnés par le produit cartésien entre l'arbre k -valent et \mathbb{Z} : $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$.

3.1 Bornes sur p_c

Proposition 3.1. *Pour $k \geq 3$, $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{k-1}$.*

Démonstration. C'est une borne supérieure naïve : $\mathbb{T}_k \subseteq \mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$, donc $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq p_c(\mathbb{T}_k) = 1/(k-1)$. Une autre alternative, on utilise la proposition 1.39 et $\Phi_E(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) = \Phi_V(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) = k-2$. ◀

Proposition 3.2. *Pour une percolation par arêtes de Bernoulli, on a une meilleure borne supérieure pour p_c ,*

$$p_c^{\text{arêtes}}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2} \left[k - \sqrt{k^2 - 4} \right]. \quad (3.1)$$

Démonstration. On utilise la technique de couplage. Etant donnée une configuration ω_p de percolation, on va définir une configuration $\eta_{p'}$ de percolation de Bernoulli de paramètre p' dans \mathbb{T}_k . L'idée est la suivante, on prend ω_p et découvre le cluster contenant O « positivement dirigé », *i.e.* la coordonnée en \mathbb{Z} est croissante quand on s'éloigne de l'origine, puis on projette pour avoir une percolation de Bernoulli sur \mathbb{T}_k . Plus précisément, on fait la construction suivante :

Dans l'arbre \mathbb{T}_k , on note $x \rightarrow y$ pour $x, y \in \mathbb{T}_k$ si $d(O, y) = d(O, x) + 1$ et $x \sim y$, où O désigne l'origine de l'arbre et \sim est la relation d'« être voisins ».

On définit, pour $x = (x', x'') \in \mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{T}_k$, $x' \rightarrow y$,

$$T_{x,y} = \inf\{n \geq x'', (x', x'') \rightarrow \cdots (x', n) \rightarrow (y, n) \text{ est un chemin ouvert}\}.$$

C'est le niveau auquel le site x peut passer à son descendant (au sens de \mathbb{T}_k) tout en longeant l'axe \mathbb{Z} vers le haut, puis prenant l'arête dont la projection sur \mathbb{T}_k est (x', y) .

Les variables aléatoires de la famille $(T_{x',y})$ sont de la même loi. T_{x_1,y_1} et T_{x_2,y_2} sont indépendantes si et seulement si les premières coordonnées de x sont distinctes : $x'_1 \neq x'_2$. On sait en plus que

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^n p^{k+1} (1-p)^k = \frac{p}{1-p(1-p)}.$$

On notera dans la suite $p' = f(p) = \frac{p}{1-p(1-p)}$.

Pour chaque $x \in \mathbb{T}_k$, on écrit $x_0 = O \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = x$ l'unique chemin dans \mathbb{T}_k joignant O à x . On définit, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$T_{x_i} = \begin{cases} T_{(x_{i-1}, T_{x_{i-1}}), x_i} & \text{si } T_{i-1} < \infty \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T_0 = 0$. Puis on définit $\eta_{p'}$ comme suit : pour $x \rightarrow y$ dans \mathbb{T}_k , on dit que l'arête (x, y) est

- ouverte si $T_x, T_y < \infty$,
- fermée si $T_x < \infty$ et $T_y = \infty$,
- une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p' indépendante de tout le reste.

On vérifie que $\eta_{p'}$ définie ainsi est bien une percolation de Bernoulli de paramètre p' .

Par la construction décrite ci-dessous, on sait que

$$\mathbb{P}(\eta_{p'} \text{ contient un cluster infini}) \leq \mathbb{P}(\omega_p \text{ contient un cluster infini}).$$

Le terme de gauche est positif dès que $p' > 1/(k-1)$ (car c'est un processus Galton-Watson de moyenne $p'(k-1)$), donc le terme de droite est positif dès que $f(p) > 1/(k-1)$. On résout cette équation du second ordre et on obtient l'énoncé. \blacktriangleleft

Remarque 3.3. Dans la démonstration ci-dessus, si l'on permet l'exploration dans les deux directions de \mathbb{Z} , la borne obtenue sera légèrement meilleure. En effet, le nouveau paramètre vaudra

$$g(p) = \frac{p - p^3 + p^4}{(1 - p(1 - p))^2} \geq f(p)$$

et donc $p_c \leq g^{-1}\left(\frac{1}{k-1}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{k-1}\right) = \frac{1}{2} [k - \sqrt{k^2 - 4}]$.

Avant d'aller plus loin pour chercher de meilleures bornes, on a besoin de faire un peu de combinatoire.

3.2 Combinatoire des $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$

Proposition 3.4. *Pour tout $k \geq 2$, $\rho(\mathbb{T}_k) = \frac{2\sqrt{k-1}}{k}$.*

Démonstration. Soit X_n une marche aléatoire simple sur \mathbb{T}_k . On remarque que $|X_k|$ est une marche aléatoire biaisée sur \mathbb{N} . Si $|X_k|$ n'est pas 0, alors elle a toujours les mêmes probabilités de transition :

$$\begin{aligned} p &:= \mathbb{P}(|X_{k+1}| = n+1 \mid X_k = n) = \frac{k-1}{k} \\ q &:= \mathbb{P}(|X_{k+1}| = n-1 \mid X_k = n) = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On note $\tau_0 = 0$ et on définit, pour tout $n \geq 1$,

$$\tau_n = \inf\{k > \tau_{n-1}, |X_k| = 0\}.$$

On remarque que la famille $(\tau_{n+1} - \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *i.i.d.*

Le rayon spectral se traduit par la rayon de convergence de la série entière suivante :

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X_n| = 0) z^n.$$

Or, $|X_n| = 0$ est équivalent à l'existence d'un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_k = n$. Si on pose $g(z) = \mathbb{E}[z^{\tau_1}]$, alors $\mathbb{E}[z^{\tau_k}] = g(z)^k$ par les accroissements indépendants de la famille (τ_k) . On peut alors réécrire $G(z)$,

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\tau_k = n) z^n \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tau_k = n) z^n \\ &= \sum_{k \geq 0} g(z)^k = \frac{1}{1 - g(z)}. \end{aligned}$$

On va calculer d'abord le rayon spectral de g . On note b_n le nombre de chemins de longueur $2n$ partant de 0, retournant en 0 et restant dans \mathbb{N} , et c_n le nombre de chemins de longueur $2n$ partant de 0, retournant en 0 et restant dans \mathbb{Z} .

$$b_n = c_{n-1} - \text{ceux comptés dans } c_{n-1} \text{ qui visitent } -1.$$

Par principe de réflexion (on réfléchit la marche à partir du premier instant où elle touche -1), les chemins comptés dans le dernier terme sont exactement ceux partant de 0 et arrivant en -2 , dont le nombre est de $\binom{2n-2}{n}$. Donc

$$b_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Les chemins comptés dans b_n ont probabilité $p^{n-1}q^n$ chacun, donc

$$\mathbb{P}(\tau_1 = 2n) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} q^n = -\frac{1}{2} (-4)^n \binom{1/2}{n} p^{n-1} q^n.$$

Donc pour $|z|$ assez petit,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^{\tau_1}] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_1 = 2n) z^{2n} = \frac{1}{2p} \left(1 - \sqrt{1 - 4pqz^2} \right).$$

g ne peut pas être analytique au voisinage de $1/2\sqrt{pq}$, donc le rayon de convergence de g est $1/2\sqrt{pq}$. Et G a le même rayon de convergence, ce qui veut dire que $\rho(\mathbb{T}_k) = 2\sqrt{pq}$. ◀

Corollaire 3.5. *Pour tout $k \geq 2$,*

$$\rho(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) = \frac{2\sqrt{k-1} + 2}{k+2}. \quad (3.2)$$

Démonstration. On applique la proposition 1.45 qui donne le rayon spectral d'un produit de graphes. ◀

3.3 Borne sur p_u : méthode probabiliste

Proposition 3.6. *Dans une percolation de Bernoulli, si $N = 1$ p.s., alors*

$$\inf_{x,y \in V} \mathbb{P}(x \leftrightarrow y) > 0.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité FKG. Pour tous $x, y \in V$, on a

$$\mathbb{P}(x \leftrightarrow y) \geq \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty \text{ et } y \leftrightarrow \infty) \geq \theta(p)^2,$$

ce qui donne une borne inférieure uniforme strictement positive sur $x, y \in V$. ◀

On a en fait l'équivalence. Pour cela, on montre la proposition suivante :

Proposition 3.7. *Dans une percolation de Bernoulli, si $N = \infty$ p.s., alors*

$$\inf_{x,y \in V} \mathbb{P}(x \leftrightarrow y) = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Prenons $k \in \mathbb{N}^*$. On sait qu'il existe n_0 grand, tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(A_{n,k}) \geq 1 - \epsilon$, où

$$A_{n,k} = \{(B(0, n) \text{ intersecte au moins } k \text{ clusters infinis})\}.$$

Soit $y_n \in S(0, n)$ quelconque. On calcule la probabilité de connexion entre 0 et y_n :

$$\mathbb{P}(0 \leftrightarrow y_n) = \mathbb{P}(0 \leftrightarrow y_n \mid A_{n,k}) \mathbb{P}(A_{n,k}) + \mathbb{P}(0 \leftrightarrow y_n \mid \bar{A}_{n,k}) \mathbb{P}(\bar{A}_{n,k}) \leq \frac{1}{k} + \epsilon.$$

Les constantes $\epsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ étant arbitraires, on obtien l'énoncé. ◀

On peut regrouper les résultats précédents dans le diagramme suivant :

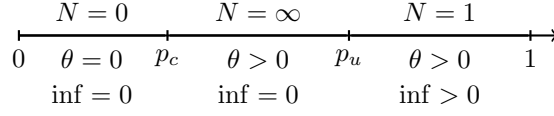


FIGURE 3.1 – Les propriétés des phases dans une percolation de Bernoulli.

Proposition 3.8. *Pour tout $k \geq 1$, $p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2}$.*

Démonstration. Soit $p > 1/2$. Soient $x, y \in \mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$. On sait qu'il existe un plan \mathbb{Z}^2 passant par x et y , noté $\mathbb{Z}_{x,y}$. (Par exemple, on projette x et y sur l'arbre et on choisit un rayon, infini dans les deux directions, isomorphe à \mathbb{Z} , passant par les projections de x et y , ensuite on fait le produit avec \mathbb{Z} pour obtenir un sous-graphe isomorphe au plan \mathbb{Z}^2 .) \mathbb{P}_p induit sur $\mathbb{Z}_{x,y}$ une percolation de Bernoulli de paramètre p dans \mathbb{Z}^2 , qui a pour $p_c = 1/2$. Donc

$$\mathbb{P}(x \leftrightarrow y \text{ dans } \mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \geq \mathbb{P}(x \leftrightarrow y \text{ dans } \mathbb{Z}_{x,y}) \geq \theta_{\mathbb{Z}^2}(p)^2.$$

On obtient une borne inférieure uniforme strictement positive, et donc $N = 1$ p.s. Par conséquent, $p_u \leq 1/2$. \blacktriangleleft

Théorème 3.9. *Soit G un graphe quasi-transitif de degré maximal k . Soit p un paramètre de percolation tel que $\theta^v(p) > 0$ pour certain (donc pour tout) v . Si $\rho(G)dp < 1$, alors \mathbb{P}_p – p.s. il y a une infinité de clusters infinis. En particulier, si $\rho(G)kp_c < 1$, alors $p_c < p_u$.*

Ce théorème a été démontré par Grimmett et Newman dans [GN90] en 1990. On va découper la preuve en plusieurs parties puis on verra comment le théorème s'applique à la percolation sur les graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$.

Définition 3.10. On définit le *processus de contact* discret de paramètre p issu de l'origine par suit :

- A l'instant $n = 0$, $\eta_0 = \{o\}$.
- Pour tout $x \in \eta_n$ et tout $y \in G$ un site voisin de x , on définit $\xi_{n,x,y}$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p . La famille $(\xi_{n,x,y})$ est indépendante. Puis on définit $\eta_{n,x}$ comme étant l'ensemble constitué des y tels que $\xi_{n,x,y} = 1$. Enfin, on définit

$$\eta_{n+1} = \bigcup_{x \in \eta_n} \eta_{n,x}.$$

La famille $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée le processus de contact de paramètre p issu de l'origine. Ce processus est dit

- **transient** si p.s. $\{n, o \in \eta_n\}$ est fini, i.e. $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{o \in \eta_n\}\right) = 0$,
- **récurrent** si $\mathbb{P}(\forall n, |\eta_n| > 0) > 0$,

– **récurrent positif** si $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{o \in \eta_n\}\right) > 0$.

Remarque 3.11. Les notions de transience, récurrence ou récurrence positive ne dépendent pas du point duquel le processus est issu grâce à la quasi-transitivité.

Proposition 3.12. *Le cluster contenant v est dominé par le support du processus de contact de même paramètre.*

Démonstration. La idée est la même que celle utilisée dans la proposition 1.39. ◀

Proposition 3.13. *Si le processus de contact de paramètre p est transient, alors*

$$\mathbb{P}_p(x_n \leftrightarrow y_n) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } d(x_n, y_n) \longrightarrow \infty.$$

Démonstration. Par l'absurde. Soit $\epsilon > 0$. On considère une suite $(x_n, y_n) \in V^2$ telle que $d(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$ et $\mathbb{P}_p(x_n \leftrightarrow y_n) \geq \epsilon$. Le graphe est quasi-transitif, quitte à extraire une sous-suite et appliquer des automorphismes du graphe, on peut supposer que les x_n sont tous les mêmes, *i.e.*

$$\mathbb{P}(x \leftrightarrow y_n) \geq \epsilon, d(x, y_n) \longrightarrow \infty.$$

Ceci implique que, avec probabilité uniformément minorée en n , $\eta_{d(x, y_n)} \neq \emptyset$, ce qui contredit la transience du processus de contact. ◀

Proposition 3.14. *Si $p > p_c$ et $\mathbb{P}_p(x_n \leftrightarrow y_n) \longrightarrow 0$ lorsque $d(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$, alors on a une infinité de clusters infinis dans la percolation de paramètre p .*

Démonstration. Ceci est exactement la proposition 3.6 ◀

Démonstration. (du théorème 3.9)

Il ne reste plus qu'à recoller les morceaux. Soit p tel que $\theta^v(p) > 0$ pour certain $v \in V$. Il suffit de montrer que $\rho pd < 1$ implique que le processus de contact de paramètre p est transient. Puis les propositions 3.13 et 3.14 nous disent que sous \mathbb{P}_p , $N = \infty$ p.s., ce qui conclut.

Le processus de contact de paramètre p est dominé par le processus de Galton-Watson de paramètre p . On note GW_n le processus de Galton-Watson associé et $GW_n(v)$ le nombre de particule en v au temps n . Alors par l'indépendance,

$$\mathbb{E}[GW_n(o)] \leq \mathbb{P}(X_n = o) p^n d^n,$$

où X_n est une marche aléatoire simple sur le graphe. Par la proposition 1.43,

$$\mathbb{E}[GW_n(o)] \leq (\rho(G)pd)^n,$$

donc si $\rho(G)pd < 1$, $\sum_n \mathbb{E}[GW_n(o)] < \infty$, ce qui veut dire que p.s. le nombre total (dans le temps) de particules en o est fini. Le processus de Galton-Watson est transient, et a fortiori le processus de contact. ◀

Corollaire 3.15 ([BS96]). *Pour k assez grand, on peut séparer les deux phases de percolation dans $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$: $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) < p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})$.*

Démonstration. $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq p_c(\mathbb{T}_k) = (k-1)^{-1}$ et $d = k+2$. Puis, $\rho(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$ par (3.2). Si on calcule les valeurs numériques, ceci est vrai pour $k \geq 9$. \blacktriangleleft

Afin d'obtenir un meilleur résultat, on pourrait essayer d'étudier le processus de contact directement, au lieu de le dominer par le processus de Galton-Watson. Ceci n'est pourtant pas évident car on n'a pas l'indépendance entre particules.

Mathématiquement, ceci s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \eta_n(x) &= \mathbb{1}\{\exists \text{ un chemin } \gamma : o \rightarrow x \text{ ouvert, } |\gamma| = n\} \\ &= 1 - \prod_{\substack{\gamma: o \rightarrow x \\ |\gamma|=n}} (1 - \mathbb{1}\{\gamma \text{ ouvert}\}) \end{aligned}$$

Si on majore le dernier terme par la somme de $\mathbb{1}\{\gamma \text{ ouvert}\}$, on obtient un processus de Galton-Watson. Pour améliorer ce résultat, on pourrait développer directement ce produit ou trouver un meilleur majorant.

3.4 Borne sur p_u : méthode combinatoire

On change de point de vue dans ce paragraphe. Par la méthode combinatoire qui sera présentée dans la suite, l'unicité de cluster infini pourra être traduite par l'espérance infinie du nombre de cycles simples. Ceci donne en fait une minoration plus fine sur p_u .

Définition 3.16. Dans un graphe G transitif, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(G) = |\{\text{cycles simples de longueur } n \text{ contenant } O\}|.$$

Puis,

$$\gamma(G) = \limsup a_n(G)^{1/n}.$$

Théorème 3.17. *Pour une percolation par sites dans un graphe G transitif, on a $p_u(G) \geq 1/\gamma(G)$.*

Démonstration. On montre pour la percolation par sites. On note par $(\omega_p, 0 \leq p \leq 1)$ le couplage standard associé à la famille de variables aléatoires $(U(x), x \in V)$ i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. Afin de montrer que $p_u(G) \geq 1/\gamma(G)$, on va montrer pour tout $p > p_u(G)$, $\sum_n a_n(G)p^n = \infty$. Soit $p > p_u(G)$.

1. ω_p contient p.s. un seul cluster infini, noté K . K a **seulement un bout**, car sinon, fermer un nombre fini de sites ouverts créerait deux clusters infinis, et la tolérance par suppression dit que cet événement aurait pour probabilité strictement positive.

2. On montre que $\mathbb{P}(\exists \mathbf{2 \text{ rayons disjoints dans } K}) > 0$. Supposons le contraire. D'après le théorème de Menger (Appendice C), pour tout $x \in K$, p.s. il existe une infinité de x_n , dont la suppression de chacun isole x dans un cluster fini.

Si $y \in \omega_p$, $\mathcal{L}(U(y) \mid \omega_p) = \mathcal{L}(\mathcal{U}[0, p])$. K est indépendant de $U(y)$ sachant ω_p , donc $\mathcal{L}(U(y) \mid \omega_p, y \in K) = \mathcal{L}(\mathcal{U}[0, p])$. On a la même chose pour les x_n car ils sont donnés par x et K .

Choisissons un $p' \in]p_u, p[$, alors $\mathbb{P}(\exists n, U(x_n) > p' \mid x \in K) = 1$. Ceci implique que le cluster de x dans $\omega_{p'}$ est fini p.s. En plus, ceci est vrai pour tout $x \in K$, ce qui contredit $p' > p_u$.

3. Par conséquent,

$\mathbb{P}(\text{il existe 2 rayons disjoints infinis dans } \omega_p \text{ partant de } \mathbf{0}) > 0$.

Comme K n'a qu'un bout, les deux rayons peuvent être connectés par un chemin dans ω_p qui reste en dehors d'une boule arbitrairement grande. En particulier, il y a une infinité de cycles simples dans ω_p , donc $\mathbb{E}[\text{nombre de cycles simples}] = \infty$, ce qui est équivalent à $\sum_n a_n p^n = \infty$.

◀

Lemme 3.18. *Si le degré maximal de G est d , on a $\gamma(G) \leq \rho(G)d$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_o(X_n = o) \geq \frac{a_n(G)}{d^n},$$

donc on obtient $\rho(G) \geq \gamma/d$ en prenant la racine n -ième.

◀

On a une autre borne moins grossière qui majore γ (donc minore p_u). On a considéré des cycles simples contenant o , maintenant on considère des cycles plus généraux, ceux sans back-tracking.

Définition 3.19. Un chemin est dit *sans back-tracking* si aucune arête n'est suivie par la même arête parcourue dans le sens opposé.

Proposition 3.20 (formule de cocroissance). *Si G est un graphe connexe d -valent, alors*

$$\text{cogr}(G) > \sqrt{d-1} \Leftrightarrow \rho(G) > \frac{2\sqrt{d-1}}{d}, \quad (3.3)$$

et dans ce cas-là,

$$d\rho(G) = \frac{d-1}{\text{cogr}(G)} + \text{cogr}(G). \quad (3.4)$$

Si (3.3) n'est pas vraie, alors

$$\rho(G) = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}, \text{cogr}(G) \leq \sqrt{d-1}.$$

Démonstration. On revoie les lecteurs intéressés à l'appendice **D**. ◀

Corollaire 3.21. *Pour $k \geq 5$, on peut séparer les deux phases de percolation dans $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$: $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) < p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Un cycle simple est un cycle sans back-tracking, donc $\gamma(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \text{cogr}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})$, et $p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \geq \text{cogr}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})^{-1}$. Dans le premier temps, on va calculer $\text{cogr}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})$ à l'aide de (3.3) et (3.4).

On note $d = k + 2$ le degré de $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$. Par (3.2),

$$\rho(G) = \frac{2\sqrt{d-3} + 2}{d} > \frac{2\sqrt{d-1}}{d},$$

on a alors $\text{cogr}(G) > \sqrt{d-1}$. Par (3.4),

$$\begin{aligned} \text{cogr}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) &= \frac{1}{2} \left[d\rho + d\rho \sqrt{1 - \frac{4(d-1)}{d^2\rho^2}} \right] \\ &= \frac{d\rho}{2} + \sqrt{\frac{d^2\rho^2}{4} - (d-1)} \\ &= (\sqrt{d-3} + 1) + \sqrt{2\sqrt{d-3} - 1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \geq \frac{1}{\text{cogr}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})} = \frac{1}{(\sqrt{k-1} + 1) + \sqrt{2\sqrt{k-1} - 1}}. \quad (3.5)$$

Or, par (3.1),

$$p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2} \left[k - \sqrt{k^2 - 4} \right].$$

On fait l'application numérique et on trouve que ces deux valeurs sont séparées dès que $k \geq 5$. ◀

Afin d'améliorer le résultat jusqu'à avoir $k \geq 3$, on pourrait essayer d'estimer γ au lieu de majorer par cogr . On pourrait également essayer d'améliorer la borne supérieure de p_c .

3.5 Amélioration de la borne supérieure de p_c : matrice de transition

L'idée générale qui permet de majorer p_c pour la percolation sur $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ est de trouver un autre graphe, disons G , dont on connaît déjà la valeur critique p_c , ou une majoration. Puis, on essaie de construire une percolation sur ce dernier graphe G à partir de celle donnée sur $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$, de sorte que l'existence d'un cluster infini dans G implique l'existence d'un cluster infini dans $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$. Cette méthode est assez commune et a été utilisée plusieurs fois dans ce rapport (voir les paragraphes 2.3 et 3.1).

Ici, on va changer le point de vue, ce qui donnera un meilleur résultat à la fin de ce paragraphe.

On considère maintenant $B_{\mathbb{T}_k}(O, n)$ la boule de rayon n centrée à l'origine dans \mathbb{T}_k . On impose que $n \geq 1$. La sphère $S_{\mathbb{T}_k}(O, n)$ est constituée des ses feuilles, dont on en dénombre $d(d-1)^{n-1}$. Maintenant on regarde le graphe produit $B_{\mathbb{T}_k}(O, n) \times \mathbb{Z}$, qui est un sous-graphe de $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$. Et on dit que deux sites sont dans la même *branche* s'ils ont la même coordonnée dans \mathbb{T}_k .

On fait une percolation sur ce sous-graphe et on se place à l'origine. Et on s'intéresse aux sites sur $S_{\mathbb{T}_k}(O, n) \times \mathbb{Z}$ qui sont atteignables depuis O en passant par des arêtes ouvertes. Ensuite, on choisit un site atteignable sur chaque branche (disons, le plus proche de l'horizon, *i.e.* $\mathbb{T}_k \times \{0\}$), à partir duquel on répète ce processus *vers l'extérieur*. Ainsi, on obtien un processus Galton-Watson sur un arbre ayant $d(d-1)^{n-1}$ fils à la première génération et $(d-1)^n$ fils aux générations suivantes.

A chaque feuille x dans $S_{\mathbb{T}_k}(O, n)$, on associe une variable aléatoire ξ_x , qui vaut 1 si un point dans $\{x\} \times \mathbb{Z}$ est connecté à O et 0 sinon. Son espérance est exactement la probabilité de connexion entre O et $\{x\} \times \mathbb{Z}$.

Par la théorie des processus de Galton-Watson, on sait que si $\mathbb{E}_p[\xi_x] > \frac{1}{(d-1)^n}$, le processus survit avec probabilité strictement positive. On peut alors trouver une suite de successeurs allant vers l'infini, ce qui montre que la percolation est aussi sur-critique.

Pour rendre le calcul plus faisable, on va en fait se restreindre sur $\{0, \dots, n\} \times \mathbb{Z}$ et estimer la probabilité de connexion entre O et $\{n\} \times \mathbb{Z}$, qui est a fortiori inférieure à $\mathbb{E}_p[\xi_x]$. En l'occurrence, il suffit que cette probabilité soit plus grande que $\frac{1}{(d-1)^n}$ pour que la percolation de Bernoulli sur $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ soit sur-critique.

Pourquoi adapte-t-on cette méthode ? Celle-ci permet-elle d'améliorer le résultat ? En effet, si $n = 1$, on retrouve le même argument donné dans la remarque 3.3, qui découle de la proposition 3.1. Lorsque $n = 2$, on réussit à attraper plus de chemins que le cas où $n = 1$. Voyons les exemples suivants, où les arêtes fermées sont représentées en pointillé et les arêtes ouvertes en plein. Les arêtes ne figurant pas sur les configurations peuvent aussi bien être ouvertes que fermées. Cela étant, on obtiendra sûrement une meilleure borne.

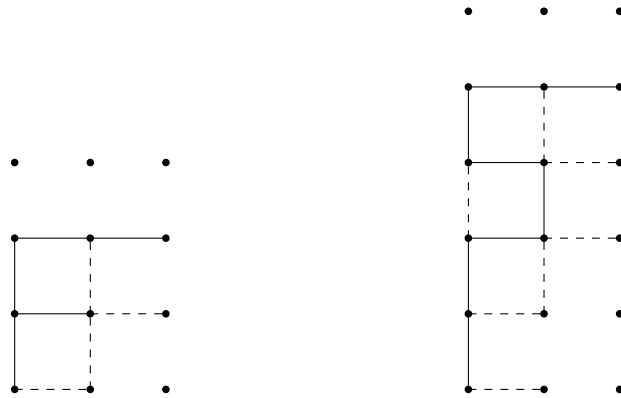


FIGURE 3.2 – L’abscisse désigne des sommets de l’arbre \mathbb{T}_k et l’ordonnée désigne \mathbb{Z} . L’origine se trouve en bas à gauche. Ce sont deux configurations de connexion qui ne sont pas tenues compte lorsque $n = 1$ et le sont lorsque $n = 2$: celle de gauche utilise la deuxième arête permettant de passer à la génération 1, car la première meurt à la génération 2; celle de droite fait une marche arrière, ce qui n’est pas autorisé quand $n = 1$ (exploration vers l’extérieur).

On présente ici une méthode astucieuse qui permet d’estimer la probabilité de connexion entre l’origine et $\{n\} \times \mathbb{Z}$. Ceci fait appel à l’utilisation de la matrice de transfert, de la mesure stationnaire, et du fait que la percolation de Bernoulli est invariante par translation selon \mathbb{Z} .

Tout d’abord, on se restreint au demi-espace supérieur, *i.e.* $\{0, \dots, n\} \times \mathbb{N}$ et on va découvrir les états des arêtes niveau par niveau le long de \mathbb{N} . Plus précisément, à chaque niveau l , on a des connexions différentes, et ceci évolue en fonction des états des arêtes horizontales (niveau h_l) et verticales (niveau v_l) qui s’y trouvent. Ce changement de connexion est décrit par deux matrices de transition, l’une pour les arêtes horizontales et l’autre pour les arêtes verticales.

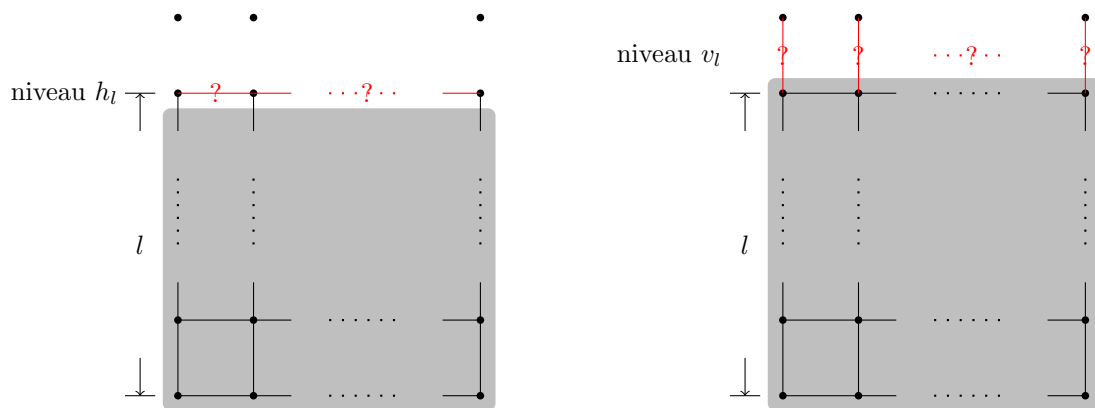


FIGURE 3.3 – Les arêtes dans le domaine gris sont déjà révélées et celles en rouge sont en train d’être examinées. Dans l’image de gauche, on découvre les états des arêtes se trouvant au niveau h_l tandis que dans l’image de droite, on découvre les états des arêtes se trouvant au niveau v_l .

Regardons ce qui se passe pour $n = 1$: on a deux états de connexion, soit 0 est connecté à 1, soit 0 n'est pas connecté à 1. On les note $\{\{0\}, \{1\}\}$ et $\{\{0, 1\}\}$, ou par simplification, \emptyset et (01), respectivement.

e_1	\emptyset	$\{\{0\}, \{1\}\}$	\emptyset
e_2	$0 \leftrightarrow 1$	$\{\{0, 1\}\}$	(01)

TABLE 3.1 – Liste des états de connexion pour $n = 1$.

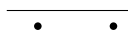
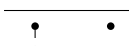
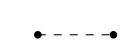



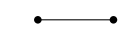

	\emptyset	(01)		\emptyset	(01)
	\emptyset	(01)		\emptyset	\emptyset
	(01)	(01)		\emptyset	(01)
					

TABLE 3.2 – Tableaux de transition pour les arêtes horizontales (gauche) et pour les arêtes verticales (droite) quand $n = 1$.

En sommant sur toutes les possibilités de transition, on obtient les matrices de transition suivantes :

$$M_h = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}, M_v = \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Pour $n = 2$, la procédure est similaire. Il faut juste bien traiter tous les cas. Les états de connexion sont :

e_1	\emptyset	$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$	\emptyset
e_2	$0 \leftrightarrow 1$	$\{\{2\}, \{0, 1\}\}$	(01)
e_3	$0 \leftrightarrow 2$	$\{\{1\}, \{0, 2\}\}$	(02)
e_4	$1 \leftrightarrow 2$	$\{\{0\}, \{1, 2\}\}$	(12)
e_5	$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$	$\{\{0, 1, 2\}\}$	(012)

TABLE 3.3 – Liste des états de connexion pour $n = 2$.

	\emptyset	(01)	(02)	(12)	(012)
	\emptyset	(01)	(02)	(12)	(012)
	\emptyset	(01)	(02)	(12)	(012)
	(12)	(012)	(012)	(12)	(012)
	(01)	(01)	(012)	(012)	(012)
	(012)	(012)	(012)	(012)	(012)

TABLE 3.4 – Tableau de transition pour les arêtes horizontales et $n = 2$.

	\emptyset	(01)	(02)	(12)	(012)
	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
	\emptyset	\emptyset	\emptyset	(12)	(12)
	\emptyset	\emptyset	(02)	\emptyset	(02)
	\emptyset	(01)	(02)	(12)	(012)

TABLE 3.5 – Tableau de transition pour les arêtes verticales et $n = 2$.

Et de même, on calcule les matrices de transition cette fois plus compliquées :

$$M_h = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)^2 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 & 1-p & 0 \\ p^2 & p & 2p(1-p) & p & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_v = \begin{pmatrix} 1 & 1-p^2 & 1-p & 1-p & (1-p)^2 \\ 0 & p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & p(1-p) \\ 0 & 0 & 0 & p & p(1-p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

On part de l'horizon, où aucune arête n'est révélée, l'état de connexion est déterministe, *i.e.* avec probabilité 1 il est représenté par \emptyset . La loi initiale est alors la matrice colonne $q_{initial}$, dont la première coordonnée est 1 et le reste 0.

Puis on découvre les états des arêtes au niveau h_0, v_0, h_1 , ainsi de suite. Explorer un niveau h revient à multiplier notre matrice colonne par M_h et explorer un niveau v revient à multiplier notre matrice colonne par M_v . Si l'on s'arrête au niveau h_l , la matrice colonne finale obtenue représentera la loi de connexion au niveau l , en utilisant les arêtes se trouvant dans $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, l\}$. Si l'on s'arrête au niveau v_l , la matrice colonne obtenue représentera la loi de connexion au niveau v_l , en utilisant les arêtes se trouvant dans $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, l\}$ et celles reliant le niveau l au niveau $l+1$ (voir la figure 3.4).

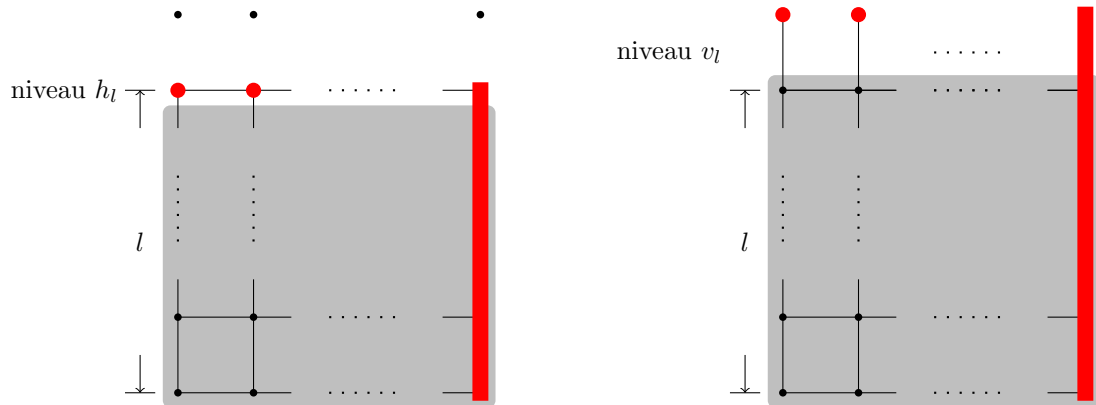


FIGURE 3.4 – Lorsque l'on s'arrête à un niveau h (gauche) ou à un niveau l (droite), on obtient les probabilités de connexion au sein du niveau l (gauche) ou du niveau $l+1$ (droite), tracés en rouge, et de la demi-droite.

Ici, on s'intéresse au cas qui se trouve dans la partie droite de la figure 3.4. Lorsque l'on arrive au niveau v_l , la loi de l'état de connexion est donnée par la matrice colonne

$q_l = (M_v M_h)^l q_{initial}$. On obtient alors une chaîne de Markov, dont la loi initiale est $q_{initial}$ et la matrice de transition $T = M_v M_h$.

On remarque que les matrices M_h et M_v sont triangulaires, et leurs diagonales ne sont pas identiquement 0 ou 1, ce qui fait que la chaîne de Markov déterminée par la matrice de transition T est irréductible et apériodique. On sait par conséquent que la loi de q_l converge vers la loi stationnaire quand l tend vers l'infini. Et cette loi stationnaire se calcule facilement, car elle est le vecteur unitaire de coordonnées positives qui génère l'espace propre associé à la valeur propre 1 ! Ce vecteur unitaire sera noté s .

Le calcul pour $n = 1$ est simple, celui pour $n = 2$ n'est pas évident pour autant et a été fait par Maple. On donne seulement le résultat pour $n = 1$:

$$T = M_v M_h = \begin{pmatrix} 1 - p^2 & 1 - p \\ p^2 & p \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} \frac{1 - p}{1 - p + p^2} \\ \frac{p^2}{1 - p + p^2} \end{pmatrix}$$

Ceci étant calculé, il ne reste plus qu'à étendre le résultat à tout l'espace $\{0, \dots, n\} \times \mathbb{Z}$. En effet, le calcul précédent nous permet maintenant de couper l'espace en trois parties indépendantes, puis on pourra multiplier les probabilités sans aucun souci.

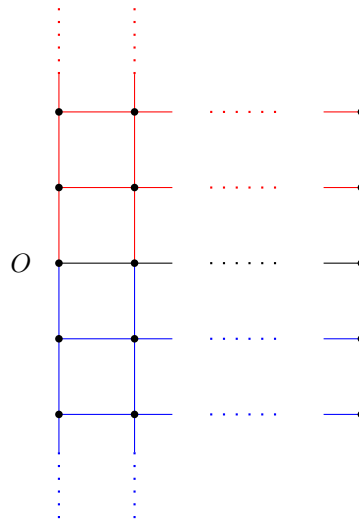


FIGURE 3.5 – On découpe l'espace en trois parties, une en rouge, une en bleu, et le reste en noir.

Dans la figure 3.5 ci-dessus, ce qui se passe dans les domaines rouge et bleu ont déjà été traité (en faisant une symétrie horizontale). Les arêtes en noir sont en nombre fini, elles sont facile à gérer. Il suffit alors d'exhauster tous les états de connexion dans les trois domaines qui permettent la connexion entre l'origine et la droite $\{n\} \times \mathbb{Z}$.

Pour donner une idée, on va traiter, en fonction de l'état de l'arête noire, le cas où $n = 1$ ici :

•——•	∅	(01)	•.....•	∅	(01)
∅	☹	☹	∅	☹	☹
(01)	☹	☹	(01)	☹	☹

TABLE 3.6 – Les cases avec un smiley signifient que l’origine est connectée à la droite $\{1\} \times \mathbb{Z}$.

Et on somme sur toutes les possibilités pour avoir la probabilités de connexion :

$$g(p) = p + (1 - p)(2s_2 - s_2^2) = \frac{p - p^3 + p^4}{(1 - p(1 - p))^2},$$

ce qui est conforme avec la remarque 3.3.

En faisant ce même calcul pour $n = 2$, on réussit à améliorer la borne sur p_c . Les applications numériques se trouvent dans le tableau ci-dessous, où l’on voit que la méthode présentée précédemment permet effectivement d’aller plus loin : on peut montrer $p_c < p_u$ pour la percolation sur $\mathbb{T}_4 \times \mathbb{Z}$.

	$p_c \leq$		$\leq p_u$
	$n = 1$	$n = 2$	
$\mathbb{T}_3 \times \mathbb{Z}$	0.3276	0.3146	0.2655
$\mathbb{T}_4 \times \mathbb{Z}$	0.2343	0.2284	0.2325
$\mathbb{T}_5 \times \mathbb{Z}$	0.1854		0.2113
$\mathbb{T}_6 \times \mathbb{Z}$	0.1543		0.1961

TABLE 3.7 – Applications numériques de certaines bornes. Les bornes inférieures de p_u sont données par l’équation (3.5).

Bibliographie

- [BLPS99] Itai Benjamini, Russell Lyons, Yuval Peres, and Oded Schramm. Group-invariant percolation on graphs. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 9(1) :29–66, 1999.
- [BS96] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. In *Electr. Commun. Probab.* Citeseer, 1996.
- [BS01] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation in the hyperbolic plane. *Journal of the American Mathematical Society*, 14(2) :487–507, 2001.
- [GN90] GR Grimmett and CM Newman. Percolation in $\infty + 1$ dimensions. *Disorder in physical systems*, pages 167–190, 1990.
- [GS98] GR Grimmett and AM Stacey. Critical probabilities for site and bond percolation models. *The Annals of Probability*, 26(4) :1788–1812, 1998.
- [Ham61] JM Hammersley. Comparison of atom and bond percolation processes. *Journal of Mathematical Physics*, 2 :728, 1961.
- [HPS99] Olle Häggström, Yuval Peres, and Roberto H Schonmann. Percolation on transitive graphs as a coalescent process : Relentless merging followed by simultaneous uniqueness. In *Perplexing problems in probability*, pages 69–90. Springer, 1999.
- [LP05] Russell Lyons and Yuval Peres. Probability on trees and networks, 2005.
- [MS13] Neal Noah Madras and Gordon Slade. *The self-avoiding walk*. Birkhäuser, 2013.
- [Pat00] Alan LT Paterson. *Amenability.*, volume 29. AMS Bookstore, 2000.
- [PSN00] Igor Pak and Tatiana Smirnova-Nagnibeda. On non-uniqueness of percolation on nonamenable cayley graphs. *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences Series I Mathematics*, 330(6) :495–500, 2000.
- [Sch99a] Roberto H Schonmann. Percolation in $\infty + 1$ dimensions at the uniqueness threshold. In *Perplexing Problems in Probability*, pages 53–67. Springer, 1999.
- [Sch99b] Roberto H Schonmann. Stability of infinite clusters in supercritical percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 113(2) :287–300, 1999.
- [Sta96] AM Stacey. The existence of an intermediate phase for the contact process on trees. *The Annals of Probability*, pages 1711–1726, 1996.

[Tho13] Andreas Thom. A remark about the spectral radius. *arXiv preprint arXiv :1306.1767*, 2013.

Annexe A

Rayon spectral du produit

Proposition A.1 (rayon spectral du produit). *Soient G_1, G_2 deux graphes transitifs de degré d_1, d_2 respectivement. On a*

$$\rho(G_1 \times G_2) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \rho(G_1) + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \rho(G_2).$$

Démonstration. La borne supérieure utilise le lemme (1.43) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_o^{G_1 \times G_2}(X_n = o) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)^k \left(\frac{d_2}{d_1 + d_2}\right)^{n-k} \mathbb{P}_o^{G_1}(X_k = o) \mathbb{P}_o^{G_2}(X_{n-k} = o) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)^k \left(\frac{d_2}{d_1 + d_2}\right)^{n-k} \rho(G_1)^k \rho(G_2)^{n-k} \\ &= \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \rho(G_1) + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \rho(G_2) \right]^n. \end{aligned}$$

La borne inférieure est plus délicate. Soit $\epsilon > 0$. Soit $C > 0$ telle que pour tout k pair,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_o^{G_1}(X_k = o) &\geq C(\rho(G_1) - \epsilon)^k \\ \mathbb{P}_o^{G_2}(X_{2n-k} = o) &\geq C(\rho(G_2) - \epsilon)^{2n-k}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_o^{G_1 \times G_2}(X_{2n} = o) &\geq \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)^{2k} \left(\frac{d_2}{d_1 + d_2}\right)^{2n-2k} C^2 (\rho(G_2) - \epsilon)^{2k} (\rho(G_2) - \epsilon)^{2n-2k} \\ &\geq C^2 \left[\frac{d_1(\rho(G_1) - \epsilon) + d_2(\rho(G_2) - \epsilon)}{d_1 + d_2} \right]^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (p_\epsilon)^{2k} (1 - p_\epsilon)^{2n-2k} \end{aligned}$$

On applique le lemme (A.2) suivant pour

$$p = p_\epsilon = \frac{d_1(\rho(G_1) - \epsilon)}{d_1(\rho(G_1) - \epsilon) + d_2(\rho(G_2) - \epsilon)}$$

et on obtient la borne inférieure en faisant tendre ϵ vers 0. ◀

Lemme A.2. Si $0 < p < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} (1-p)^{2n-2k} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} (1-p)^{2n-2k}, \\ B_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2k+1} (1-p)^{2n-2k-1}. \end{aligned}$$

On pose également la fonction $f_n(x) = (p + (1-p)x)^n$. On a ainsi les égalités suivantes :

$$\begin{cases} A_n + B_n &= f(1) = 1 \\ A_n - B_n &= f(-1) = (2p-1)^{2n}. \end{cases}$$

Comme $0 < p < 1$, $A_n + B_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $A_n, B_n \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. ◀

Annexe B

Inégalités entre la constante isopérimétrique et le rayon spectral

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, localement fini et dénombrable. Sur chaque arête on met un poids, que l'on appelle conductance, notée $c(e) = c(x, y) = c(y, x)$. La résistance d'une arête est l'inverse de sa conductance : $r(x, y) = c(x, y)^{-1}$. On définit, pour chaque $x \in V$, $\pi(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$. Le triplet (G, c, π) est appelé un *réseau électrique*.

Soit (X_n) une marche aléatoire sur V , dont la probabilité de transition est proportionnelle à la conductance, *i.e.* $p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)}$. On sait que π est sa mesure stationnaire.

Pour les applications à la fin de l'annexe (les inégalités citées dans le texte), on n'aura besoin que du cas où la marche aléatoire est simple, *i.e.* $c \equiv 1$. Ici, on donne quand même les définitions et les propriétés dans le cadre plus général, afin de mieux comprendre ce qui se passe.

On généralise dans le premier temps la définition du rayon spectral et celle de la constante isopérimétrique :

Définition B.1. Si (G, c, π) est un réseau électrique, et (X_n) la marche aléatoire associée. On définit son rayon spectral par

$$\rho(G) = \limsup p_n(x, y)^{1/n}$$

qui est indépendant du choix de x et y .

Définition B.2. Si (G, c, π) est un réseau électrique et D une fonction de poids sur les sommets. Pour toute partie finie $K \subset V$, on note

$$|K|_D := \sum_{x \in K} D(x) \text{ et } |\partial_E K|_c := \sum_{e \in \partial_E K} c(e).$$

Et la constante isopérimétrique par arêtes est définie par :

$$\Phi_E(G) := \Phi_E(G, c, D) := \inf \left\{ \frac{|\partial_E K|_c}{|K|_D}, K \subset V \text{ fini non vide} \right\}.$$

Dans le cadre le plus commun, celui de notre texte, on considère $(c, D) = (1, 1)$.

Définition B.3. On définit l'espace des fonctions l^2 sur V par :

$$\ell^2(V, \pi) = \left\{ f : V \rightarrow \mathbb{R}, \sum_{x \in V} f(x)^2 < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(f, g)_\pi = \sum_{x \in V} \pi(x) f(x) g(x).$$

Définition B.4. On définit aussi l'espace des fonctions anti-symétriques sur les arêtes l'espace de Hilbert suivant :

$$\ell_-^2(E, r) := \left\{ \theta : E \rightarrow \mathbb{R}, \forall e, \theta(-e) = -\theta(e) \text{ et } \sum_{e \in E} \theta(e)^2 r(e) < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(\theta, \theta')_r := \sum_{e \in E_{1/2}} \theta(e) \theta'(e) r(e),$$

où $E_{1/2}$ est un ensemble d'arêtes contenant seulement une de chaque pair e et $-e$ à la fois.

Définition B.5. On définit ensuite deux opérateurs $d : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(E)$ et $d^* : \ell^2(E) \rightarrow \ell^2(V)$ par :

$$df(e) := f(e^-) - f(e^+) \text{ et } (d^*\theta)(x) := \sum_{e^- = x} \theta(e).$$

Ils sont linéaires et adjoints l'un de l'autre :

Proposition B.6. Les opérateurs d et d^* sont adjoints l'un de l'autre :

$$\forall f \in \ell^2(V), \forall \theta \in \ell_-^2(E), (\theta, df) = (d^*\theta, f).$$

Démonstration. Si $f \in \ell^2(V)$ et $\theta \in \ell_-^2(E)$, alors

$$\begin{aligned} (\theta, df) &= \sum_{(x,y) \in E_{1/2}} \theta(x,y) [f(x) - f(y)] \\ &= \sum_{(x,y) \in E} \theta(x,y) f(x) \\ &= (d^*\theta, f). \end{aligned}$$

◀

Définition B.7. On note $\mathbb{D}_{00} = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}, \text{supp}(f) \text{ borné}\}$ et P l'opérateur de transition de la marche :

$$(Pf)(x) := \mathbb{E}_x[f(X_1)] = \sum_{y \in V} p(x, y)f(y).$$

P est une application de $\ell^2(V, \pi)$ dans lui-même, de norme

$$\|P\|_\pi := \|P\|_{\ell^2(V, \pi)} := \sup \left\{ \frac{\|Pf\|_\pi}{\|f\|_\pi}, f \neq 0 \right\}.$$

Remarque B.8. \mathbb{D}_{00} est dense dans $\ell^2(V, \pi)$, on a alors

$$\|P\|_\pi = \sup \left\{ \frac{\|Pf\|_\pi}{\|f\|_\pi}, f \in \mathbb{D}_{00} \setminus \{0\} \right\}.$$

Proposition B.9. $\|P\|_\pi \leq 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|Pf\|_\pi^2 &= \sum_{x \in V} \pi(x) \left(\sum_{y \in V} p(x, y)f(y) \right)^2 \\ &\leq \sum_{x \in V} \pi(x) \sum_{y \in V} p(x, y)f(y)^2 \\ &= \sum_{y \in V} f(y)^2 \sum_{x \in V} c(x, y) \\ &= \sum_{y \in V} \pi(y)f(y)^2 = \|f\|_\pi^2. \end{aligned}$$

◀

Proposition B.10. P est un opérateur auto-adjoint sur $\ell^2(V, \pi)$.

Démonstration. On prend $f, g \in \mathbb{D}_{00}$, alors

$$\begin{aligned} (Pf, g)_\pi &= \sum_{x \in V} \pi(x)(Pf)(x)g(x) \\ &= \sum_{x \in V} \pi(x) \sum_{y \in V} p(x, y)f(y)g(x) \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} c(x, y)f(y)g(x) \\ &= (f, Pg)_\pi, \end{aligned}$$

puis, par la densité de \mathbb{D}_{00} dans $\ell^2(V, \pi)$.

◀

Proposition B.11. Le rayon spectral est défini par $\rho(G) = \limsup p_n(x, y)^{1/n}$, qui ne dépend pas de $(x, y) \in V^2$. On a $\|P\|_\pi = \rho(G)$.

Démonstration. Soient $x, y \in V$. Alors,

$$p_n(x, y) = \frac{(\mathbb{1}_{\{x\}}, P^n \mathbb{1}_{\{y\}})_\pi}{\pi(x)} \leq \sqrt{\frac{\pi(y)}{\pi(x)}} \|P\|_\pi^n.$$

On prend la racine n -ième pour avoir $\rho(G) \leq \|P\|_\pi$.

Pour l'autre égalité, on considère $f \in \mathbb{D}_{00} \setminus \{0\}$ positive. On a

$$\|P^{n+1}f\|_\pi^2 = (P^n f, P^{n+2}f)_\pi \leq \|P^n f\|_\pi \|P^{n+2}f\|_\pi.$$

Donc $\frac{\|P^{n+1}f\|_\pi}{\|P^n f\|_\pi}$ est croissante et bornée par $\|P\|_\pi$, la limite existe, que l'on note L . Par Césaro,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|P^n f\|_\pi}{\|f\|_\pi} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n f\|_\pi^{1/n}.$$

D'après la proposition 1.43, $\rho(G) = \limsup p_{2n}(x, x)^{1/2n}$. Alors,

$$\begin{aligned} \limsup \|P^n f\|_\pi^{1/n} &= \limsup (P^{2n} f, f)_\pi^{1/2n} \\ &= \limsup \left[\sum_{x, y \in V} \pi(x) f(x) f(y) p_{2n}(x, y) \right]^{1/2n} \\ &= \rho(G). \end{aligned}$$

Ainsi, $L = \rho(G)$ et en particulier, $\frac{\|Pf\|_\pi}{\|f\|_\pi} \leq \rho(G)$.

Puis, si $f \in \mathbb{D}_{00}$ n'est pas nécessairement positive, $\|Pf\|_\pi \leq \|P|f|\|_\pi$, on a toujours $\|Pf\|_\pi \leq \rho(G)\|f\|_\pi$. Donc $\|P\|_\pi \leq \rho(G)$. ◀

Définition B.12. Si f est une fonction sur V , on peut définir son gradient par :

$$\nabla f := cdf.$$

Si θ est une fonction anti-symétrique sur E , on peut définir sa divergence par :

$$\operatorname{div} \theta := \frac{1}{\pi} d^* \theta.$$

Proposition B.13. Si $f \in \mathbb{D}_{00}$, alors $\operatorname{div} \nabla f = (I - P)(f)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{D}_{00}$. Soit $x \in V$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla f(x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in V} c(x, y) df(x, y) \\ &= \sum_{y \in V} p(x, y) [f(x) - f(y)] \\ &= f(x) - \sum_{y \in V} p(x, y) f(y) \\ &= (I - P)(f)(x). \end{aligned}$$

◀

Proposition B.14. *Si (G, c, π) est un réseau électrique infini, alors $\rho(G) + \Phi_E(G) \geq 1$. En particulier, si $c \equiv 1$, on est dans le cadre habituel, et on obtient*

$$\rho(G) + \frac{\Phi_E(G)}{d} \geq 1.$$

Démonstration. Si $f \in \mathbb{D}_{00} \setminus \{0\}$,

$$(df, df)_c = (cdf, df) = (d^*(cdf), f) = (\pi(f - Pf), f) = (f, f)_\pi - (Pf, f)_\pi.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \rho(G) &= \sup \left\{ \frac{(Pf, f)_\pi}{(f, f)_\pi}, f \in \mathbb{D}_{00} \setminus \{0\} \right\} \\ &= 1 - \inf \left\{ \frac{(df, df)_c}{(f, f)_\pi}, f \in \mathbb{D}_{00} \setminus \{0\} \right\} \\ &\geq 1 - \inf \left\{ \frac{(df, df)_c}{(f, f)_\pi}, f = \mathbb{1}_K, K \text{ compact non vide} \right\} \\ &= 1 - \inf \left\{ \frac{|\partial_E K|_c}{|K|_\pi}, f = \mathbb{1}_K, K \text{ compact non vide} \right\} \\ &= 1 - \Phi_E(G). \end{aligned}$$

Si l'on choisit $c \equiv 1$, alors

$$(df, df)_c = |\partial_E K| \text{ et } (f, f)_\pi = d|K|.$$

Par conséquent,

$$\rho(G) \geq 1 - \frac{|\partial_E K|}{d|K|} \Rightarrow \rho(G) \geq 1 - \frac{\Phi_E(G)}{d}.$$

◀

Remarque B.15. Ici on voit que la différence entre la constante isopérimétrique et le rayon spectral est que le premier terme ne dépend que des fonctions indicatrices alors que le deuxième dépend de toutes les fonctions à support borné.

Lemme B.16. *Pour toute $f \in \mathbb{D}_{00}$ positive,*

$$\Phi_E(G) \sum_{x \in V} f(x) \pi(x) \leq \sum_{e \in E_{1/2}} |df(e)| |c(e)|.$$

Démonstration. Pour $t > 0$, on écrit $K_t := \{x, f(x) > t\}$.

$$\Phi_E(G) |K_t|_\pi \leq |\partial_E K|_c = \sum_{x, y \in V} c(x, y) \mathbb{1}_{f(x) > t \geq f(y)}.$$

On intègre entre $t = 0$ et $t = \infty$ aux deux côtés de l'égalité :

$$\int_0^\infty |K_t|_\pi dt = \sum_{x \in V} f(x) \pi(x)$$

et

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{f(x) > t \geq f(y)} dt = f(x) - f(y) = df(x, y)$$

si $f(x) \geq f(y)$.

◀

Proposition B.17. *Si (G, c, π) est un réseau électrique infini, alors $\rho(G)^2 + \Phi_E(G)^2 \leq 1$. En particulier, si $c \equiv 1$, on est dans le cadre habituel, et on obtient*

$$\rho(G)^2 + \frac{\Phi_E(G)^2}{d} \leq 1.$$

Démonstration. Si $f \in \mathbb{D}_{00}$, on applique le lemme B.16 précédent à f^2 :

$$\begin{aligned} (f, f)_\pi^2 &\leq \Phi_E(G)^{-2} \left(\sum_{(x,y) \in E_{1/2}} c(x,y) |f(x)^2 - f(y)^2| \right)^2 \\ &= \Phi_E(G)^{-2} \left(\sum_{(x,y) \in E_{1/2}} |df(x,y)| |f(x) - f(y)| \right)^2 \\ &\leq \Phi_E(G)^{-2} \left(\sum_{(x,y) \in E_{1/2}} c(x,y) df(x,y)^2 \right) \left(\sum_{(x,y) \in E_{1/2}} c(x,y) (f(x) + f(y))^2 \right). \end{aligned}$$

Le dernier facteur se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in E_{1/2}} c(x,y) (f(x) + f(y))^2 &= \sum_{x \in V} \pi(x) f(x)^2 + \sum_{(x,y) \in E} c(x,y) f(x) f(y) \\ &= (f, f)_\pi + (f, Pf)_\pi \\ &= 2(f, f)_\pi - (df, df)_c. \end{aligned}$$

Donc,

$$(f, f)_\pi^2 \leq \Phi_E(G)^{-2} (df, df)_c [2(f, f)_\pi - (df, df)_c]$$

et alors

$$1 - \Phi_E(G)^2 \geq 1 - \frac{[2(f, f)_\pi - (df, df)_c](df, df)_c}{(f, f)_\pi^2} = \left(1 - \frac{(df, df)_c}{(f, f)_\pi} \right)^2.$$

On prend la borne supérieure à droite, ce qui nous donne $\rho(G)^2 + \Phi_E(G)^2 \leq 1$. ◀

Annexe C

Théorème de Menger

Les graphes sont tous localement finis dans cette annexe.

Théorème C.1 (Menger). *Soit G un graphe. Considérons a et z deux sommets non voisins du graphe.*

1. *Le nombre maximal de chemins entre a et z qui sont deux à deux disjoints par sommets (sauf en a et z) est égal au cardinal minimal des sous-ensembles de sommets W , ne contenant ni a ni z , dont l'intersection avec tout chemin allant de a à z est non vide.*
2. *Si le graphe est infini, alors le nombre maximal de chemins entre a et ∞ qui sont deux à deux disjoints par sommets (sauf en a) est égal au cardinal minimal des sous-ensemble de sommets W , ne contenant a , dont l'intersection avec tout chemin allant de a à ∞ est non vide.*

Le théorème de Menger est une conséquence directe du théorème flot-max coupe-min. On démontrera donc cette version plus générale.

Dans le premier temps, on considère G un graphe orienté fini. Soient A et Z ses deux sous-ensembles disjoints de sommets. A est l'ensemble des sources et Z l'ensemble des puits : imaginez que l'eau circule dans le graphe en partant des sommets dans A et en arrivant à ceux dans Z . Puis, on appelle flot une fonction positive sur E vérifiant

$$\forall e \in E \setminus (A \cup Z), \sum_{e \in E} \phi(x, e) \theta(e) = 0,$$

où

$$\phi(x, e) := \mathbb{1}_{e^- = x} - \mathbb{1}_{e^+ = x}.$$

Le produit de $\theta(e)$ et $\phi(x, e)$ « antisymétrise » θ . De plus, on dit qu'un flot θ est admissible si pour toute arête $e \in E$, on a $\theta(e) \leq c(e)$.

On a légèrement changé les notations par rapport à celles utilisées dans l'annexe **B**, où les graphes étaient non orientés. Si G est un graphe non orienté, il suffit de remplacer chaque arête non orientée par une paire d'arêtes de l'orientation opposée l'une de l'autre et de même capacité. Un flot non orienté est ainsi transformé en un flot orienté qui

n'est non nul que sur une de chaque paire d'arêtes. On n'étudiera alors que des graphes orientés par la suite.

Définition C.2. La *valeur* d'un flot, notée $\text{Val}(\theta)$, est la quantité d'eau sortant des sources (donc aussi la quantité d'eau entrant aux puits). Elle est définie par

$$\text{Val}(\theta) := \sum_{x \in A} \sum_{e \in E} \phi(x, e)\theta(e) = - \sum_{x \in Z} \sum_{e \in E} \phi(x, e)\theta(e).$$

Définition C.3. Une *coupe* A - Z est un sous-ensemble d'arêtes W tel que tout chemin allant d'un point dans A et arrivant à un point dans Z intersecte toujours W .

Théorème C.4 (flot-max coupe-min). *La valeur maximale des flots admissibles entre A et Z est égale à la somme minimale des capacités de coupe A - Z . En d'autres termes, dans un graphe orienté,*

$$\begin{aligned} & \max \{ \text{Val}(\theta), \theta \text{ un flot de } A \text{ vers } Z \text{ tel que } \forall e, 0 \leq \theta(e) \leq c(e) \} \\ & = \min \left\{ \sum_{e \in \Pi} c(e), \Pi \text{ une coupe } A\text{-}Z \right\}, \end{aligned}$$

et dans un graphe non orienté,

$$\begin{aligned} & \max \{ \text{Val}(\theta), \theta \text{ un flot de } A \text{ vers } Z \text{ tel que } \forall e, |\theta(e)| \leq c(e) \} \\ & = \min \left\{ \sum_{e \in \Pi} c(e), \Pi \text{ une coupe } A\text{-}Z \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. On montre le théorème pour les graphes orientés. Comme $0 \leq \theta(e) \leq c(e)$ pour toute arête e dans un flot admissible, l'ensemble des flots admissibles de A vers Z est compact dans \mathbb{R}^E , le flot de valeur maximale existe donc. Soit θ un flot de valeur maximale. Soit Π une coupe A - Z quelconque. On note A' l'ensemble des sommets qui ne sont pas séparés de A par Π . Comme $A \subseteq A'$ et $A' \cap Z = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned} \text{Val}(\theta) &= \sum_{x \in A} \sum_{e \in E} \phi(x, e)\theta(e) \\ &= \sum_{x \in A'} \sum_{e \in E} \phi(x, e)\theta(e) \\ &= \sum_{e \in E} \theta(e) \sum_{x \in A'} \phi(x, e) \\ &\leq \sum_{e \in \Pi} \theta(e) \leq \sum_{e \in \Pi} c(e), \end{aligned}$$

car $\sum_{x \in A'} \phi(x, e)$ est nulle si les deux extrémités de e sont dans A' et vaut 1 si e sort de A' et -1 si e rentre dans A' .

Pour l'autre inégalité, on procède comme suit. Etant donné un flot admissible θ de valeur maximale, on appelle une suite de sommets x_0, \dots, x_k un *chemin augmentable*

si $x_0 \in A$ et pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe soit $e : x_{i-1} \rightarrow x_i$ avec $\theta(e) < c(e)$, soit $e' : x_i \rightarrow x_{i-1}$ avec $\theta(e') > 0$. On désigne par B l'ensemble des sommets x tels qu'il existe un chemin augmentable de A à x .

Par la maximalité de θ , $Z \subseteq B^c$. En effet, s'il $x \in Z \cap B$, alors pour ϵ assez petit et pour tout $1 \leq i \leq k$, on a soit $e_i : x_{i-1} \rightarrow x_i$ avec $\theta(e_i) + \epsilon \leq c(e_i)$, soit $e'_i : x_i \rightarrow x_{i-1}$ avec $\theta(e'_i) \geq \epsilon$. On définit ensuite θ' un nouveau flot, qui coïncide avec θ en dehors de ce chemin augmentable, et qui prend les valeurs $\theta'(e_i) = \theta(e_i) + \epsilon$ si $e_i : x_{i-1} \rightarrow x_i$ et $\theta'(e'_i) = \theta(e'_i) - \epsilon$ si $e'_i : x_i \rightarrow x_{i-1}$. Ainsi obtient-on un flot θ' de valeur $\text{Val}(\theta') = \text{Val}(\theta) + \epsilon$, qui est strictement supérieure à celle de θ . Absurde.

On note Π l'ensemble des arêtes reliant B et B^c , qui est alors une coupe A - Z . Pour toute arête $e \in \Pi$, on a nécessairement $\theta(e) = c(e)$, alors que pour toute e reliant B^c et B , on a $\theta(e) = 0$. Par conséquent,

$$\text{Val}(\theta) = \sum_{e \in E} \theta(e) \sum_{x \in B} \phi(x, e) = \sum_{e \in \Pi} \theta(e) = \sum_{e \in \Pi} c(e) \geq \min \left\{ \sum_{e \in \Pi} c(e), \Pi \text{ une coupe } A\text{-}Z \right\}.$$

◀

Proposition C.5. *On se place dans le même cadre que le théorème C.4 précédent. Si l'on impose de plus que les capacités sont toutes entières, alors il existe un flot admissible θ de valeur maximale tel que les $\theta(e)$ sont tous entiers.*

Démonstration. Il suffit de montrer

$$\begin{aligned} & \max \{ \text{Val}(\theta), \theta \text{ un flot de } A \text{ vers } Z \text{ tel que } \forall e, \theta(e) \in \mathbb{N}, 0 \leq \theta(e) \leq c(e) \} \\ & = \min \left\{ \sum_{e \in \Pi} c(e), \Pi \text{ une coupe } A\text{-}Z \right\}. \end{aligned}$$

On modifie la démonstration du théorème C.4 en se restreignant sur \mathbb{N} . La première inégalité reste vraie. Quant à l'inégalité inverse, la définition de chemin augmentable se réécrit comme ceci : on appelle une suite de sommets x_0, \dots, x_k un *chemin augmentable* si $x_0 \in A$ et pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe soit e de x_{i-1} à x_i avec $\theta(e) \leq c(e) - 1$, soit e' de x_i à x_{i-1} avec $\theta(e') \geq 1$. Et on peut prendre $\epsilon = 1$ pour la suite de la preuve. ◀

Maintenant, on va changer un peu le cadre. On redéfinit un flot admissible de manière suivante : les contraintes sur les arêtes sont remplacées par les contraintes sur les sommets. On se donne des capacités c sur les sommets. Un flot θ est dit *admissible* si

$$\forall x \in V, \sum_{e^+=x} \theta(e) \leq c(x).$$

Ainsi redéfinit-on également ce qu'est une coupe A - Z . Un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$ est appelé une coupe A - Z si tout chemin partant d'un sommet dans A et arrivant à un sommet dans Z passe forcément par un sommet dans W . On a alors le théorème flot-max coupe-min pour les sommets :

Proposition C.6. *La valeur de flot admissible maximal entre A et Z est égale à la somme minimale des capacités de coupe A - Z . En d'autres termes, dans un graphe orienté,*

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \text{Val}(\theta), \theta \text{ un flot de } A \text{ vers } Z \text{ tel que } \forall x, \sum_{e^+=x} \theta(e) \leq c(x) \right\} \\ & = \min \left\{ \sum_{e \in \Pi} c(e), \Pi \text{ une coupe } A\text{-}Z \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. On remplace chaque sommet x par une arête $x_1 \rightarrow x_2$ de capacité $c(x)$. Ainsi, toutes les arêtes incidentes à x sont incidentes à x_1 et toutes les arêtes sortant de x sortent de x_2 . Et on applique le théorème flot-max coupe-min à ce nouveau graphe pour conclure. ◀

Remarque C.7. Si l'on a un graphe infini et localement fini au lieu d'un graphe fini, les résultats sont modifiés de peu : les maxima restent inchangés car les flots admissibles constituent toujours un compact, alors que les minima deviennent infima dans le cas général, et restent minima lorsque les capacités prennent des valeurs entières.

Pour démontrer cela, l'idée est la suivante. Soit G un graphe infini. On considère une suite de graphes finis (G_n) qui tend vers G en croissant avec $A, Z \subseteq G_n$ pour tout n . On note \tilde{G}_n le graphe obtenu de G en identifiant les sommets du complémentaire de G_n en un seul sommet, noté z_n , et en supprimant les boucles (pour que \tilde{G}_n soit localement fini). On note a_n la valeur maximale de flot admissible et b_n le cardinal minimal de coupe A - Z dans \tilde{G}_n . Les deux suites sont égales et décroissantes et convergent vers les limites voulues.

Enfin, on donne la preuve du théorème de Menger :

Démonstration. (de C.1) On met les capacités $c \equiv 1$ sur les arêtes et prend $A = \{a\}$ et $Z = \{z\}$ pour la première assertion. Pour la deuxième, on prend la suite de graphes (\tilde{G}_n) définie ci-dessus. Un chemin ou un flot de a vers ∞ dans G se traduit par un chemin ou un flot de a vers z_n dans G_n . Et on conclut. ◀

Annexe D

Formule de cocroissance

Proposition D.1 (formule de cocroissance). *Si G est un graphe connexe d -valent, alors*

$$\text{cogr}(G) > \sqrt{d-1} \Leftrightarrow \rho(G) > \frac{2\sqrt{d-1}}{d}, \quad (\text{D.1})$$

et dans ce cas-là,

$$d\rho(G) = \frac{d-1}{\text{cogr}(G)} + \text{cogr}(G). \quad (\text{D.2})$$

Si (D.1) n'est pas vraie, alors

$$\rho(G) = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}, \text{cogr}(G) \leq \sqrt{d-1}.$$

Démonstration. Soit G un graphe d -valent. On note $b = d-1$ et A la matrice d'adjacence de G . On note $A_0 = I$ et $A_1 = A$. On définit A_n la matrice dont le coefficient (x, y) désigne le nombre de chemins sans back-tracking de x à y . On a la formule de récurrence suivante :

$$A_{k+1} = \begin{cases} AA_k - bA_{k-1} & \text{si } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ AA_1 - dI & \text{si } k = 1. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

On définit $F(z) = \sum_{k \geq 0} A_k z^k$. Lorsque la série converge, on a

$$\frac{F(z) - I}{z} = AF(z) - bzF(z) - zI. \quad (\text{D.4})$$

Comme $\|A\| \leq d$, donc $\|A_k\| \leq \|A\|^k \leq d^k$, les séries convergent lorsque $|z| < 1/d$. On résout l'équation (D.4) et on obtient

$$F(z) = (1 - z^2)[(1 + bz^2)I - zA]^{-1} \text{ pour } |z| < 1/d. \quad (\text{D.5})$$

Soit $O \in V(G)$. on note

$$\begin{aligned} c_n(G) &= \text{nombre de cycles de longueur } n \text{ passant par } O, \\ b_n(G) &= \text{nombre de cycles de longueur } n \text{ passant par } O \text{ sans back-tracking,} \end{aligned}$$

et $g(z)$, $h(z)$ les séries génératrices associées :

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n(G) z^n, h(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(G) z^n.$$

On développe l'équation (D.5) et identifie le coefficient en (O, O) :

$$\sum_{n \geq 0} b_n(G) z^n = \frac{1 - z^2}{1 + bz^2} \sum_{n \geq 0} c_n(G) \left(\frac{z}{1 + bz^2} \right)^n. \quad (\text{D.6})$$

Cette équation est valable pour $|z| < \frac{1}{d+1}$ car dans ce cas-là, $\left| \frac{z}{1 + bz^2} \right| < \frac{1}{d}$. Si on écrit

$$\psi(z) = \frac{z}{1 + bz^2}, \text{ alors (D.6) se réécrit } g(z) = \frac{1 - z}{1 + bz^2} h(\psi(z)).$$

Le rayon de convergence de $g(z)$ est $z_1 = 1/\text{cogr}(G) \leq 1$ et celui de $h(z)$ est $z_2 = 1/d\rho(G)$. L'équation (D.2) est équivalente à $\psi(z_1) = z_2$.

Les coefficients de g et h sont tous positifs, par le théorème de Pringsheim, g est analytique et continue sur $[0, z_1[$ mais pas sur $[0, z_1]$ et h est analytique et continue sur $[0, z_2[$ mais pas sur $[0, z_2]$.

On remarque que ψ est strictement croissante pour $0 < z < 1/\sqrt{b}$ et strictement décroissante pour $z > 1/\sqrt{b}$. g est analytique sur $[0, z_1[$, donc pareil pour $h(\psi(z))$ et donc $\psi(z_1) \leq z_2$. Pour montrer l'équivalence (D.1) et l'égalité (D.2), on a deux cas à discuter :

- On suppose que $\text{cogr}(G) > \sqrt{d-1}$, i.e. $z_1 < 1/\sqrt{b}$. z_1 est une singularité de g et ψ est strictement croissante sur $[0, z_1[$, $\psi(z_1)$ est alors une singularité de h , donc $\psi(z_1) \geq z_2$.
- Si $\rho(G) > 2\sqrt{d-1}/d$, i.e. $z_2 < \psi(1/\sqrt{b})$, alors le plus petit antécédent de z_2 par ψ est la première singularité de g , à savoir z_1 .

Dans les deux cas, on a $\psi(z_1) = z_2$, d'où la formule (D.2).

Pour terminer la preuve, \mathbb{T}_d est un revêtement de G , on peut coupler les marches aléatoires simples sur ces deux graphes.

$$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_d}^o(X_n = o) \leq \mathbb{P}_G^o(X_n = o),$$

$$\text{donc } \rho(G) \geq \rho(\mathbb{T}_d) = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}. \quad \blacktriangleleft$$