Processus stochastiques en temps discret

TD 2 - Martingales et temps d'arrêt

26 septembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

Exercice 2.1 (martingales dérivées d'une marche aléatoire simple).
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ sautant vers la droite avec probabilité p et vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$. Vérifier que les processus suivants sont des martingales : (quelles sont les filtrations associées ?)

1. $N_n = S_n - (p - q)n$
2. $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$

Exercice 2.2 (martingale dérivée d'un precessus de branchement).
Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus de branchement avec un nombre de descendants de moyenne μ. Vérifier que $(\mu^{-n}Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 2.3 (temps d'arrêt).

1. Si T est un temps d'arrêt et $k \in \mathbb{N}$, montrer que $T \wedge k$ est aussi un temps d'arrêt.
2. Si T et S sont deux temps d'arrêt, montrer que $T \vee S$, $T \wedge S$ et $T + S$ sont aussi des temps d'arrêt.

Exercice 2.4 (tribu des événements antérieurs).
Soit T un temps d'arrêt. On définit

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ est une tribu, appelée la *tribu des événements antérieurs* à T.
2. Montrer que T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
3. Montrer que si $T_1 \leq T_2$ sont deux temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

Exercice 2.5. Soit (X_n) une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$. Soit A un ensemble mesurable. Dire si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêt.

1. $T = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}$.
2. $T = \sup\{n \geq 0, X_n \in A\}$.

Exercice 2.6. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
4. Trouver un polynôme $P(x, y)$ de degré 4 en x et de degré 2 en y tel que $(P(S_n, n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale.
5. Montrer que si P est un polynôme de deux variables alors $(P(S_n, n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s + 1, n + 1) + P(s - 1, n + 1) = 2P(s, n).$$
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(\exp(\lambda S_n - \xi n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale.

Exercice 2.7 (fonction harmonique discrète).
Soit f une fonction sur $\mathbb{Z}^2$. On dit que f est une *fonction harmonique discrète* si pour tout $x \in \mathbb{Z}$,
$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{y\sim x} f(y),$$
autrement dit, la valeur en x est le moyenne des valeurs en sites voisins. On se donne une marche aléatoire simple symétrique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de $x \in \mathbb{Z}^2$, montrer que $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 2.8 (décomposition du produit de deux martingales).
On considère deux $(\mathcal{F}_n)$-martingales (X_n) et (Y_n) partant de 0. On suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$.

1. Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_nY_m] < \infty$.
2. Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_nY_{n+k}] = \mathbb{E}[X_nY_n]$.
3. En déduire que
$$\mathbb{E}[X_nY_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})].$$

Exercice 2.9 (une application directe du théorème d'arrêt).
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. On suppose qu'elle part de l'origine et qu'elle saute vers la droite avec probabilité p et vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$. Soient $a < 0 < b$. On note T le temps d'atteint en a ou b.

1. Vérifier que T est un temps d'arrêt. Est-il fini p.s. ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_T = a)$ et $\mathbb{P}(X_T = b)$.

Exercice 2.10 (une réciproque du théorème d'arrêt).
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus intégrable et adapté. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.