Processus stochastiques en temps discret

TD 9 - Chaînes de Markov

28 novembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

Exercice 9.1. Sur une étagère se trouvent 3 livres, numérotés de 1 à 3. Chaque matin un étudiant arrive et prend un des trois livres aléatoirement. La probabilité qu'il choisisse le livre i est p_i et le choix est fait de manière indépendante jours après jours. A la fin de la journée, une fois sa lecture terminée, il le remet à gauche de tous les autres, en laissant le reste intouché.

1. Quel est le comportement de la probabilité que le n-ième matin, l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre 1, 2, 3 en arrivant ?
2. Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère ? Et pour le livre le plus à droite ?

Exercice 9.2. On considère sur un espace de probabilité une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :
- $\mu = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$,
- $\text{pgcd}\{n \geq 1, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n, \exists k \geq 1, Y_1 + \cdots + Y_k = m\} - n.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1, Y_1 + \dots Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$

Exercice 9.3 (convergence au sens de la variation totale)**.**
Soient E un espace métrique et $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne. On se donne une suite μ_n et μ des mesures de probabilités sur l'espace $(E, \mathcal{E})$. On dit que μ_n tend vers μ au sens de la variation totale si $||\mu_n - \mu||_{TV} \to 0$, où

$$||\mu - \nu||_{TV} = \sup_{A\in\mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)|$$

pour μ, ν mesures de probabilités.

1. Pour μ, ν deux mesures de probabilités, montrer que

$$||\mu - \nu||_{TV} = \sup_{A\in\mathcal{E}} (\mu(A) - \nu(A)).$$

2. Montrer que si $\mu_n \to \mu$ au sens de la variation totale, alors $\mu_n \to \mu$ en loi.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que $E = \mathbb{R}^d$ est muni de la tribu borélienne et que μ_n et μ sont des mesures de probabilités à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu_n(\mathrm{d}x) = f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$. Montrer que μ_n converge en variation totale vers μ si et seulement si f_n converge vers f dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 9.4 (h-transformée d'une matrice stochastique)**.** Soient S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S, de fonction de transition $P = (P(i,j))_{(i,j)\in E^2}$. Soit $h : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que, pour tout $i \in S$, sous $\mathbb{P}_i$, $(h(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration canonique.

1. Montrer que l'on définit une fonction de transition sur $S_+ = \{k \in S, h(k) > 0\}$ par la formule
$$Q(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} P(i,j).$$
On dit que Q est la *h-transformée* de P.
2. On considère l'exemple de la marche aléatoire simple symétrique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0, S_n = i\}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Pour $N \geq 1$ et $1 \leq k \leq N$, on pose
$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\cdot \mid T_N < T_0).$$
   (a) Montrer que sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$) et donner sa fonction de transition.
   (b) Trouver une fonction $h : \{0, \ldots, N\} \to \mathbb{R}_+$ telle que la fonction de transition de $(S_{n\wedge T_N})_{n\in\mathbb{N}}$ sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$ est la h-transformée de la fonction de transition de $(S_{n\wedge T_0\wedge T_N})_{n\in\mathbb{N}}$ sous $\mathbb{P}_k$.