Processus stochastiques en temps discret

TD 6 - Applications des martingales

1er novembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

Exercice 6.1 (Récurrence de la MASS sur $\mathbb{Z}^2$)**.**
Le but de l'exercice est de montrer la récurrence de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$. On note Π la matrice de transition de la marche. Pour $R \in \mathbb{N}$, on note $\tau_R = \inf\{n, X_n \in \partial B_R(0)\}$. Soient $l, L \in \mathbb{N}$ et $x \in \{y, l < |y| < L\}$.

1. Montrer que $V(x) := \log |x|$ satisfait :

$$\Pi V(x) - V(x) \leq 0$$

pour $|x|$ grand.

2. Montrer que $\mathbb{P}_x(\tau_L < \infty) = 1$.
3. Montrer que

$$\mathbb{P}_x(\tau_L < \tau_l) \leq \frac{V(x)}{\inf_{|y|=L} V(y)}.$$

4. En déduire la récurrence de la marche, *i.e.* $\mathbb{P}_x(\tau_l < \infty) = 1$ pour tout x.

Exercice 6.2 (Formule de Feynman-Kac)**.** On s'intéresse au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (\Pi - I + V)f(x) &= g(x) \quad \text{pour } x \in A \\ f(x) &= h(x) \quad \text{pour } x \notin A \end{cases}$$

où $A \subset S$ borné, Π est une matrice stochastqiue correspondant à une chaîne de Markov irréductible, $V : A \to \mathbb{R}$ telle que

$$\max_{x \in A} (1 - V(x))^{-1} < 1,$$

et $h : A^c \to \mathbb{R}$ bornée. Le but de l'exercice est de construire la solution en utilisant une méthode probabiliste.

1. Montrer que, si $g \equiv 0$, alors la solution est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{E}_x \left[h(X_{\tau_{A^c}}) \prod_{i=1}^{\tau_{A^c}} \frac{1}{1 - V(X_{i-1})} \right] & \text{pour } x \in A \\ h(x) & \text{pour } x \notin A, \end{cases}$$

où (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition Π.

2. Montrer que la solution est unique lorsque $g \equiv 0$. (On peut voir que

$$f(X_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - V(X_{i-1})}$$

est une martingale si et seulement si f est solution.

3. Montrer que, si $h \equiv 0$, alors la solution est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{E}_x \left[- \sum_{i=0}^{\tau_{A^c}-1} g(X_i) \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{1 - V(X_{i-1})} \right] & \text{pour } x \in A \\ 0 & \text{pour } x \notin A, \end{cases}$$

où (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition Π.

4. Montrer que la solution est unique lorsque $h \equiv 0$. (On peut voir que

$$f(X_n) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - V(X_i)} - f(X_0) - \sum_{i=0}^{n-1} g(X_i) \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{1 - V(X_{j-1})}$$

est une martingale si et seulement si f est solution.

5. En déduire la solution dans le cas général.