Processus stochastiques en temps discret

TD 11 - Chaînes de Markov : couplage par le passé

12 décembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

Le couplage par le passé s'avère très pratique lorsqu'il s'agit d'un modèle partiellement ordonné. En particulier, vous l'avez vu appliqué au modèle d'Ising, dont l'ordre est donné en comparant les spins à chaque site. Dans cette série, on essaiera de faire des constructions similaires pour le modèle de dimères, ou pavage aléatoire.

On considère un hexagone régulier de côté n qu'on pave avec des dimères identiques orientées différemment (cf. figure ci-dessous). On veut tirer, de manière uniforme, une configuration de pavage parmi toutes les possibiles.

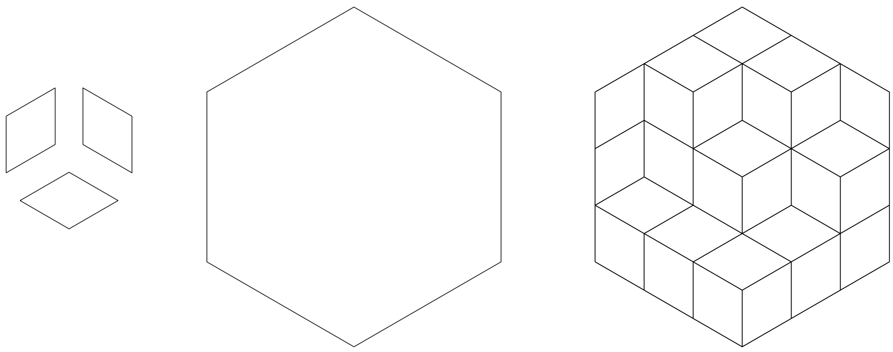

Figure 1 – gauche : unités de pavage, 3 losanges de différentes orientations ; milieu : hexagone de taille 3 à paver ; droite : une configuration de pavage.

Le premier but est de munir l'ensemble des configurations d'un ordre partiel. Pour cela, on va « visualiser en 3D ». Autrement dit, une configuration peut être vue comme des cubes posés sur un domaine carré de taille n. Et pour coder une configuration, on met un nombre sur chaque case du domaine carré, qui représente le nombre de cubes se trouvant au-dessus.

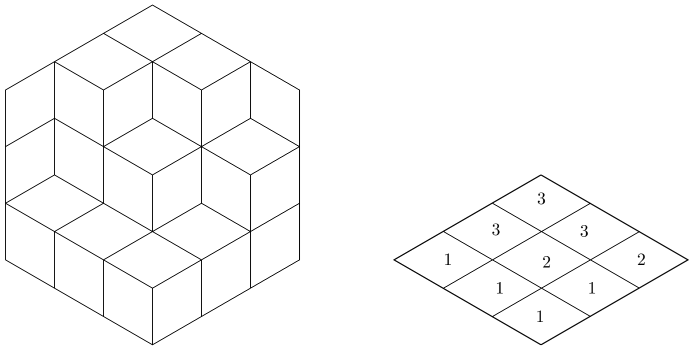

Figure 2 – gauche : une configuration de pavage ; droite : les hateurs associées à chaque case du domaine.

1. On note Λ_n le domaine carré de taille n. Trouver un sous-ensemble (simple à exprimer) de $\{1, \ldots, n\}^{\Lambda_n}$ qui soit en bijection avec l'ensemble des pavages possibles. Y mettre un ordre partiel naturel en comparant les hateurs à chaque case du domaine. Quels sont les éléments maximaux et minimaux ?

Maintenant, on va essayer de mettre une dynamique locale sur les pavages. Si, dans un pavage, un sommet est entouré de 3 losanges, elles sont forcément de différentes orientations et forment un hexagone unitaire. Or, un hexagone unitaire peut être pavé de deux façons différentes, ce qui permet de modifier la configuration autour d'un sommet sans bouger les dimères d'ailleurs.

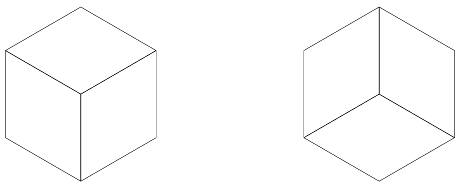

Figure 3 – changement local dans un pavage. On note la configuration de gauche G et celle de droite D.

En se servant de cette modification locale, on va construire une chaîne de Markov irréductible et apériodique qui admet comme loi stationnaire la loi uniforme. Pour faciliter la construction, on peut penser à une chaîne réversible.

A chaque instant t, on tire uniformément un sommet S_t dans l'hexagone de taille n et uniformément un nombre U_t dans $[0, 1]$, tout ceci étant indépendant. Si 3 losanges entourent le sommet S_t et que $U_t < 1/2$, on réarrange les dimères autour de S_t de sorte à avoir G si $U_t \in [0, 1/4[$ et D si $U_t \in [1/4, 1/2[$; sinon, on ne fait rien.

2. En interprétant la modification locale décrite ci-dessus à l'aide des cubes, vérifier que cette dynamique fournit une chaîne de Markov irréductible, apériodique et réversible. Montrer que l'ordre (défini dans 1) est préservé par cette dynamique.
3. Ecrire un pseudo-code de couplage par le passé qui tire uniformément une configuration de pavage.