Processus stochastiques en temps discret

TD 10 - Chaînes de Markov : couplage, variation totale et temps de mélange

5 décembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

Dans cette série, on considère E un ensemble dénombrable et P la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur E. On note π sa mesure stationnaire.

Exercice 10.1 (variation totale)**.** La distance en variation totale entre deux mesures de probabilité μ et ν sur E est définie par

$$||\mu - \nu||_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

1. Vérifier que c'est bien une distance.
2. Montrer que cette définition se réécrit :

$$||\mu - \nu||_{TV} = \frac{1}{2} \sup \left\{ \sum_{x \in E} f(x)(\mu(x) - \nu(x)), f : E \to \mathbb{R}, \sup_{x \in E} |f(x)| \leq 1 \right\}.$$

3. On dit que (X, Y) est un couplage de μ et ν si $X \sim \mu$ et $Y \sim \nu$. Montrer l'égalité

$$||\mu - \nu||_{TV} = \inf\{\mathbb{P}(X \neq Y), (X, Y) \text{ est un couplage de } \mu \text{ et } \nu\}.$$

Exercice 10.2. Soient μ et ν deux mesures de probabilité. Montrer que

$$||\mu P - \nu P||_{TV} \leq ||\mu - \nu||_{TV}.$$

En déduire qu'une chaîne de Markov se rapproche toujours de la loi stationnaire en avançant.

Exercice 10.3. On définit les deux quantités suivantes :

$$\begin{aligned} d(t) &:= \max_{x \in E} ||P^t(x, \cdot) - \pi||_{TV}, \\ \overline{d}(t) &:= \max_{x,y \in E} ||P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)||_{TV}. \end{aligned}$$

1. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E. Montrer que

$$\begin{aligned} d(t) &= \sup_{\mu \in \mathcal{P}} ||\mu P^t - \pi||_{TV} \\ \overline{d}(t) &= \sup_{\mu, \nu \in \mathcal{P}} ||\mu P^t - \nu P^t||_{TV} \end{aligned}$$

2. Montrer, pour tout $t \in \mathbb{N}$, que $d(t) \leq \overline{d}(t) \leq 2d(t)$.
3. Montrer que $\overline{d}$ est sous-multiplicative : $\overline{d}(s+t) \leq \overline{d}(s)\overline{d}(t)$.
4. Supposons que pour chaque couple d'états $(x,y) \in E^2$, il existe un couplage avec $X_0 = x$ et $Y_0 = y$. On note τ_c le premier instant où les deux chaînes se rencontrent (c pour couplage). Montrer que

$$d(t) \leq \max_{x,y \in E} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_c > t).$$

Indication : Pensez à utiliser l'exercice 10.1.

Exercice 10.4 (temps de mélange)**.** On introduit le temps de mélange, le temps nécessaire pour que la différence entre la chaîne de Markov et la mesure stationnaire soit petite. On définit d'abord

$$t_{mix}(\epsilon) := \min\{t, d(t) \leq \epsilon\},$$

puis

$$t_{mix} := t_{mix}(1/4)$$

Montrer que

$$t_{mix}(\epsilon) \leq \lceil \log_2(1/\epsilon) \rceil t_{mix}.$$

Exercice 10.5 (temps de mélange pour une marche paresseuse sur le cercle)**.**
On s'intéresse à la marche paresseuse qui reste immobile avec probabilité $1/2$ et se déplace à droite (ou à gauche) avec probabilités $1/4$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui est représenté par un cercle. Ici, on veut montrer que son temps de mélange est majoré par n^2.

Pour cela, on considère deux marches paresseuses $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $X_0 = x$ et $Y_0 = y$. On note D_t la distance de X_t à Y_t en suivant le sens des aguilles d'une montre sur le cercle. On couple ces deux chaînes de la manière suivante : on tire à pile ou face deux pièces de monnaies parfaites indépendamment. Si la première donne pile (ou face), alors X (ou Y) reste immobile et Y (ou X) choisit sa direction en fonction du résultat de la seconde pièce. On impose aussi que X se coalesce avec Y quand elles se rencontrent. On note τ_c ce temps. Calculer $\mathbb{E}_{x,y}(\tau_c)$ et montrer que

$$d(t) \leq \frac{n^2}{4t}.$$

En déduire que $t_{mix} \leq n^2$.