# Processus stochastiques en temps discret

## TD 3 - Applications du théorème d'arrêt de Doob

3 octobre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

**Rappel** (technique pour montrer qu'un temps d'arrêt est intégrable)**.**
Soit $T$ un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(T \leq n + N \mid \mathcal{F}_n) > \epsilon, \text{p.s.}$$

Alors $T$ est intégrable.

**Exercice 3.1** (le singe tapant Molière, tiré d'un TD de la FIMFA)**.** Un singe est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois indépendamment une lettre choisie au hasard uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet. On se demande au bout de combien de temps (en espérance) le singe aura tapé le mot « ABRACADABRA ». Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup beaucoup de pièces de 1 franc et aime faire des jeux stupides. On joue alors au jeu suivant : just *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$, un joueur arrive derrière le singe et parie 1 franc avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n \text{ ième lettre tapée par le singe est un « A »}\}.$$

S'il perd, il part, et le singe met 1 franc dans son sac. S'il gagne, il reçoit 26 francs du singe qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } (n+1) \text{ ième lettre tapée par le singe est un « B »}\}.$$

S"il perd, il part. S'il gagne, il reçoit $26^2$ francs qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } (n+2) \text{ ième lettre tapée par le singe est un « R »}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que « ABRACADABRA » sorte de la machine. On notera $T$ ce temps d'arrêt.

1. L'argent dépensé par le singe jusqu'au temps $n$ est noté par $M_n$. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
2. En déduire $\mathbb{E}[T]$.
3. Si le mot cherché était « ABCDEFGHIJK », que vaudrait $\mathbb{E}[T]$ ?
4. Si les lettres ne sont pas choisies uniformément, mais avec probabilités $p_a, p_b, p_c, \cdots$ toutes positives non nulles et de somme 1. Comment modifier la mise en fonction de la lettre espérée ? Refaire l'exercice pour calculer $\mathbb{E}[T]$.

**Exercice 3.2** (une autre version du théorème d'arrêt)**.**
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $T$ un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1, \mathbb{E}(|X_T|) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(|X_T|\mathbf{1}_{\{T>n\}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

**Exercice 3.3** (une application directe du théorème d'arrêt)**.**
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. On suppose qu'elle part de l'origine et qu'elle saute vers la droite avec probabilité $p$ et vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$. Soient $a < 0 < b$. On note $T$ le temps d'atteint en $a$ ou $b$.

1. Vérifier que $T$ est un temps d'arrêt. Est-il fini p.s. ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_T = a)$ et $\mathbb{P}(X_T = b)$.

**Exercice 3.4.** Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la position d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ partant de 0. On note $T$ le temps de premier passage en 1. Le but de l'exercice est de calculer la loi de $T$. Soit $\theta > 0$.

1. Montrer que $M_n^\theta = \dfrac{e^{\theta S_n}}{(\cosh\theta)^n}$ est une martingale.
2. Calculer $M_T^\theta := \lim_{n\to\infty} M_{T\wedge n}^\theta$ (si $T = 0$, on définit $M_\infty^\theta = 0$.) et donner son espérance.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\right)^T\right]$ et en déduire la loi de $T$.
4. Montrer que $T$ est fini p.s.