Processus stochastiques en temps discret

TD 1 - Rappels des notions des convergences et propriétés des espérances conditionnelles

19 septembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : `jhihhuang.li@gmail.com`

Rappel. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On a les convergences suivantes :

1. Convergence monotone : si $X_n \geq 0$ et $X_n \uparrow X$, alors $\mathbb{E}[X_n] \uparrow \mathbb{E}[X]$.
2. Lemme de Fatou : si $X_n \geq 0$, alors $\mathbb{E}[\liminf X_n] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n]$.
3. Convergence dominée : s'il existe Z une variable aléatoire avec $\mathbb{E}[Z] < \infty$, $|X_n| \leq |Z|$ et $X_n \to X$p.s., alors $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Rappel. Soient X et Y deux variables aléatoires.

1. Inégalité de Jensen : si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors
$$\mathbb{E}[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}[X]).$$
2. Inégalité de Hölder : si $p, q \in [1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 1.1. On étudie les différentes notions des convergences.

1. Définir la convergence presque sûre, la convergence en probabilité, la convergence dans $\mathbb{L}^p$ pour $p \geq 1$ et la convergence en loi.
2. Vrai ou faux ? Si l'assertion est vraie, démontrez-la ; si elle est fausse, trouvez un contre-exemple. Ici, les X_n et X sont des variables aléatoires et $p > 1$.
   (a) Si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, alors $X_n \xrightarrow{(\text{P})} X$.
   (b) Si $X_n \xrightarrow{(\text{P})} X$, alors $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.
   (c) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$, alors $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.
   (d) Si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$.
   (e) Si $X_n \xrightarrow{(\text{P})} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$.
   (f) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$, alors $X_n \xrightarrow{(\text{P})} X$.
   (g) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$.
   (h) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$.

(i) Si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\text{(loi)}} X$.

(j) Si $X_n \xrightarrow{\text{(P)}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\text{(loi)}} X$.

(k) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$, alors $X_n \xrightarrow{\text{(loi)}} X$.

3. Faire un schéma récapitulatif pour mieux visualiser les implications entre les convergences.

Exercice 1.2. (X_n) est une suite de variables aléatoires. On supppose qu'il existe une variable aléatoire X telle que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty.$$

Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.

Exercice 1.3. (X_n) est une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une constante c. Montrer qu'elle converge en probabilité.

Exercice 1.4 (propriétés des espérances conditionnelles)**.**
Soient $\mathcal{F}$ une tribu et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F})$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Espérance : $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ p.s.
2. Linéarité : si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2 \mid \mathcal{G}] = a_1\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] + a_2\mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}]$ p.s.
3. Positivité : si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \geq 0$ p.s.
4. Convergence monotone : si $X_n \geq 0$ et $X_n \uparrow X$, alors $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ p.s.
5. Lemme de Fatou : si $X_n \geq 0$, alors $\mathbb{E}[\liminf X_n \mid \mathcal{G}] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$ p.s.
6. Convergence dominée : si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et qu'il existe $Z \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F})$ telle que pour tout n, $|X_n| \leq Z$ p.s., alors $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.
7. Inégalité de Jensen : si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et $\phi(X) \in \mathbb{L}^1$, alors
$$\mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \text{ p.s.}$$
En particulier, $||\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]||_p \leq ||X||_p$ pour $p \geq 1$.
8. Restriction : si $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$ p.s.
9. Si Z est $\mathcal{G}$-mesurable bornée, alors $\mathbb{E}[ZX \mid \mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ p.s. Cela est encore vrai si
   - $p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $X \in \mathbb{L}^p(\mathcal{F}), Z \in \mathbb{L}^q(\mathcal{G})$ ou
   - $X \geq 0, Z \geq 0, \mathbb{E}[X] < \infty, \mathbb{E}[ZX] < \infty$.
10. $\mathcal{H}$ est une tribu indépendante de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$, alors $\mathbb{E}[X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ p.s. En particulier, si X est indépendante de $\mathcal{H}$, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$ p.s.