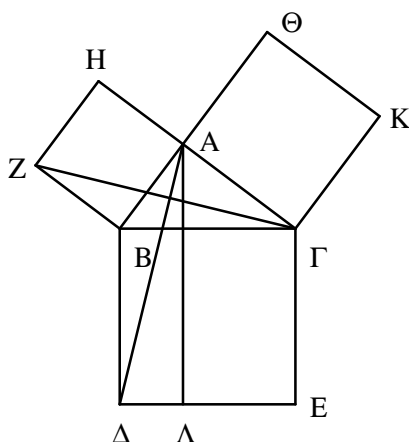


Γεωμετρία

“au fil de l’histoire”



Διδασκαλος: Γεραρδος Υαννερος
Μαθηται: Πετρος-Αλαινος Χεριξος
Αντιε Κεσσλερα
Υολφγανγος Πιτσχ
Στεφανος Κιριλλις
Αντονος Μυτισελλις

᾿Ακαδημία Γενναυας
Τέχνη μαθηματική
Ἑρμοῦ δόμος σμ'
Γενναυα

᾿έτει 'Bδ'/'Bε'

Table des matières

I	Géométrie classique	1
I.1	Thalès et Pythagore	2
I.2	Les Éléments d'Euclide	12
I.3	Période alexandrine — les coniques	27
I.4	Trigonométrie	39
II	Géométrie analytique	58
II.1	La Géométrie de Descartes	58
II.2	Constructibilium omnium, et inconstructibilium	72
II.3	Géométrie de l'espace et calcul vectoriel	81
II.4	Matrices et applications linéaires	92
III	Géométrie non euclidienne	107
III.1	Géométrie projective	107
III.2	Géométrie hyperbolique	122

J'ai observé que les Géomètres modernes ont la plupart négligé la synthèse des anciens ...

(Cette phrase ne date pas des années 1980, ni des années 1960, il s'agit des premiers mots du *Methodus* de Newton, écrit 1671 !..)

“Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur”.

(Clairaut, *Elémens de Geometrie*, 1741)

Pendant plus de 2 millénaires la géométrie a fait partie fondamentale de l'enseignement des mathématiques ; soudainement, dans les années '60 du 20e siècle, elle a été noyée dans la vague des “maths modernes”. 20 à 30 années supplémentaires ont été nécessaires pour redécouvrir la beauté et l'importance de la géométrie.

Votre διδασκαλος remercie ses nombreux collègues pour leur aide et leurs remarques utiles, en particulier P.-A. Cherix, St. Cirilli, M. Cuenod¹, R. Curtiss, W. Pitsch, E. Hairer, J.-Cl. Hausmann, A. Kessler. Grand merci à D. Savoy, Prof. de grec, pour la traduction d'expressions comme “boîte postale” en grec classique.

1. auteur, avec C. Duverney, d'un livre à paraître *Matériaux d'histoire et de philosophie des sciences*.

Chapitre I

Géométrie classique

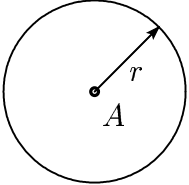
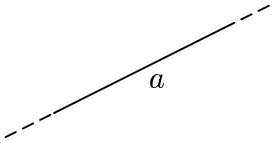
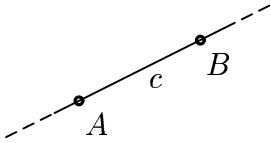
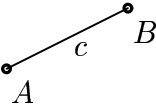
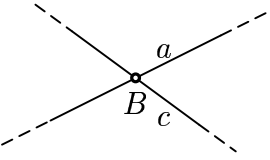
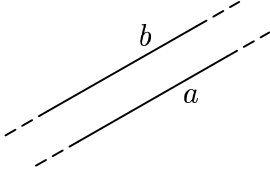
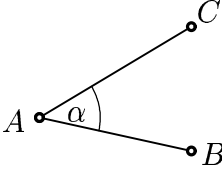
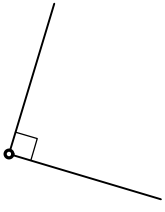
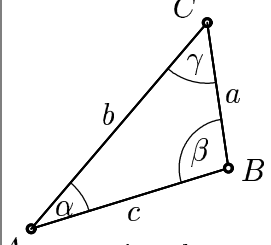
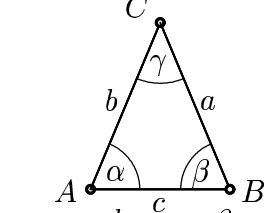
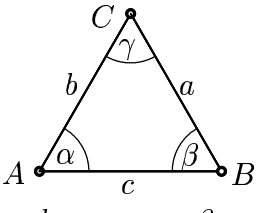
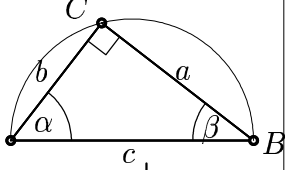
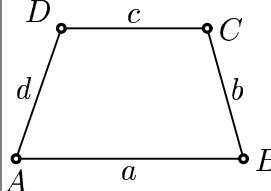
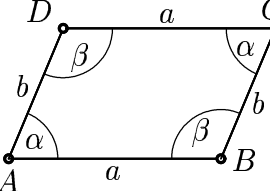
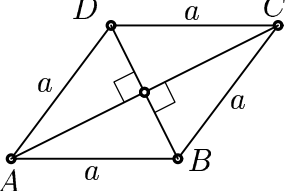
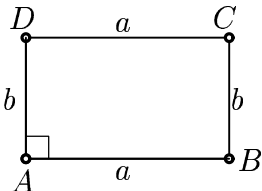
 <p>point A cercle de rayon r</p>	 <p>droite</p>	 <p>droite (AB) passant par A et B</p>	 <p>segment $[AB]$ de longueur $c = AB$</p>
 <p>point d'intersection de 2 droites</p>	 <p>droites parallèles $a \parallel b$</p>	 <p>$\alpha = \text{angle } \widehat{BAC}$</p>	 <p>angle droit $\perp = 90^\circ$</p>
 <p>triangle</p>	 <p>$a = b$, $\alpha = \beta$ triangle isocèle</p>	 <p>$a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma$ triangle équilatéral</p>	 <p>$\gamma = \perp$ triangle rectangle</p>
 <p>trapèze</p>	 <p>parallélogramme</p>	 <p>losange</p>	 <p>rectangle</p>

FIG. 0.1 – Vocabulaire de la géométrie

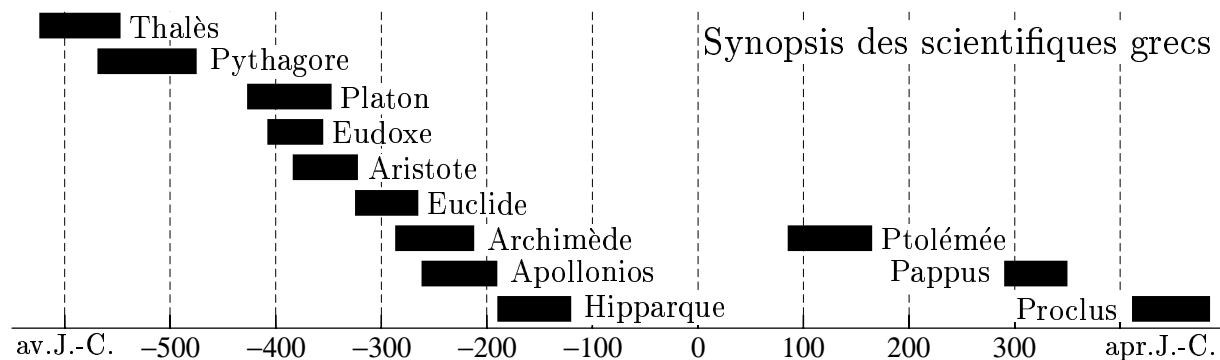
I.1 Thalès et Pythagore

“Γῆ, la Terre, *personnif. comme divinité* ...”

“μετρεῖω, mesurer c. à d. prendre la mesure de ...”

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950)

En Babylonie, en Égypte et en Grèce, la “géométrie” permet à ses débuts de *mesurer la terre*, de construire des temples, de retrouver les champs après les inondations du Nil et de mesurer le mouvement des étoiles. Quelques-unes des plus belles découvertes de cette époque concernent les *longueurs* (Théorème de Thalès), les *angles* (Théorème de l’angle au centre) et les *aires* (Théorème de Pythagore) ; elles vont nous intéresser dans ce paragraphe.



Un document babylonien extraordinaire.

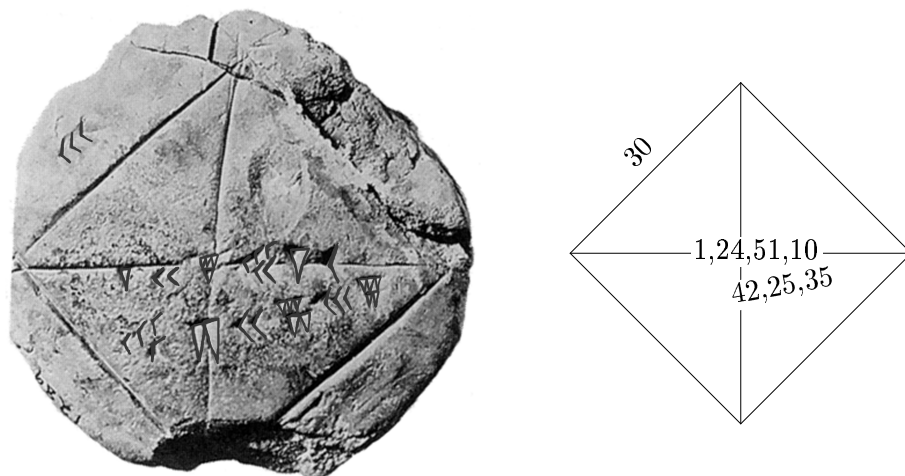


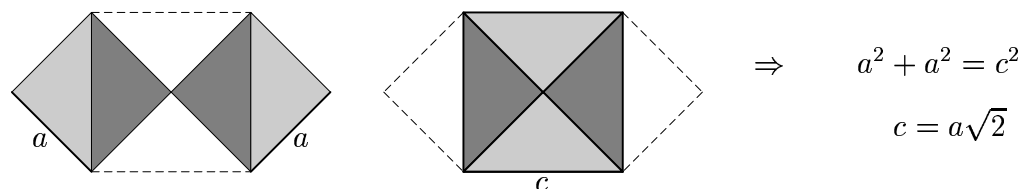
FIG. 1.1 – Tablette YBC7289 de 1900 av.J.-C. (image retouchée par St. Cirilli)

Regardons en figure 1.1 une tablette babylonienne datant de 1900 av.J.-C., un bon siècle antérieur à Abraham, Isaac et Jacob. Cette tablette représente un carré de côté 30 dont la diagonale porte les chiffres 1, 24 51 10 et 42, 25 35. Comment l’interpréter ?

Eh bien, en base 60, nous avons les valeurs exactes

$$\sqrt{2} = 1, 24 51 10 7 46 6 4 \dots \quad 30 \cdot \sqrt{2} = 42, 25 35 3 53 3 2 \dots$$

et, nous voyons en déplaçant les deux triangles gris clair, que



pour un triangle rectangle et isocèle.

Ainsi, la tablette témoigne de la connaissance du Théorème de Pythagore (pour le cas $a = b$), des règles des proportions et d'une formidable maîtrise du calcul. Aujourd'hui encore toutes les décimales restent parfaitement correctes. Sans doute, **les mathématiques sont la science la plus ancienne et la plus rigoureuse de l'humanité.**

Le Théorème de Thalès.

“... la théorie des lignes proportionnelles et la proposition de Pythagore, qui sont les bases de la Géométrie ...”

(Poncelet 1822, p. xxix)

On sait de Thalès qu'il est né à Milet (Asie Mineure), voyage en Babylonie et en Égypte, calcule les hauteurs de pyramides, l'éloignement des bateaux et prédit une éclipse de soleil en 585 av.J.-C.

Tout porte à croire que le théorème suivant est effectivement de lui :

Théorème. Soit BC parallèle à $B'C'$, alors les longueurs satisfont (voir figure 1.2 à gauche)

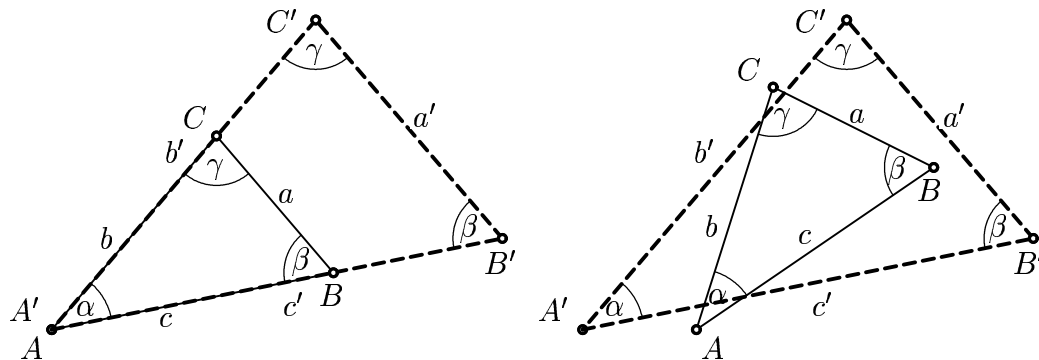


FIG. 1.2 – Théorème de Thalès

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \text{ou bien} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}, \quad \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

Ces rapports sont aussi préservés quand un des triangles est déplacé en conservant les angles (voir figure 1.2 à droite). Les deux triangles s'appellent alors *triangles semblables*.

Démonstration. Si on part d'un triangle ABC et si on le déplace parallèlement aux points B et C , il est évident que le théorème s'applique pour les rapports $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2$ (voir figure 1.3 en haut). Si l'on répète plusieurs fois ces déplacements, à partir d'un triangle $AB''C''$, on voit la validité pour, par exemple, le rapport $\frac{8}{5}$ et puis pour *chaque rapport rationnel* (voir figure 1.3 en bas, et la stèle néolithique motivant cette preuve 2000 ans plus tôt ; elle nous permet d'appeler cette preuve *la preuve valaisanne*). QED.

Mesurer des longueurs rationnelles. Supposons une droite avec deux points 0 et 1. Déclarons cette distance *unité*. À l'aide d'un compas, rapportons les points 2, 3 etc.

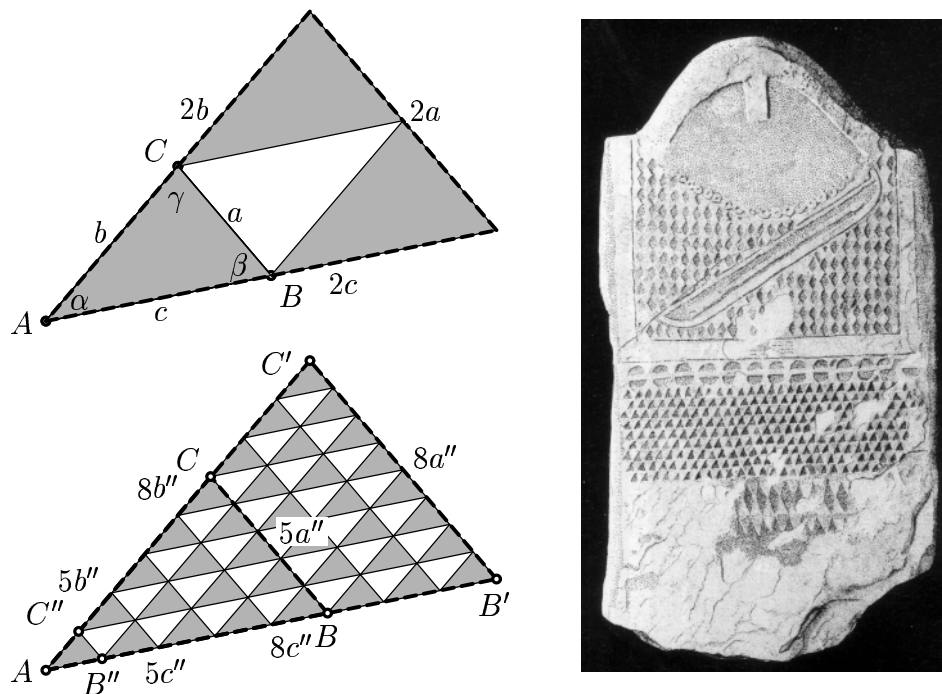


FIG. 1.3 – Preuve du Théorème de Thalès ; à droite: stèle néolithique, Sion 2500 av.J.-C. (rens. Prof. Gallay)

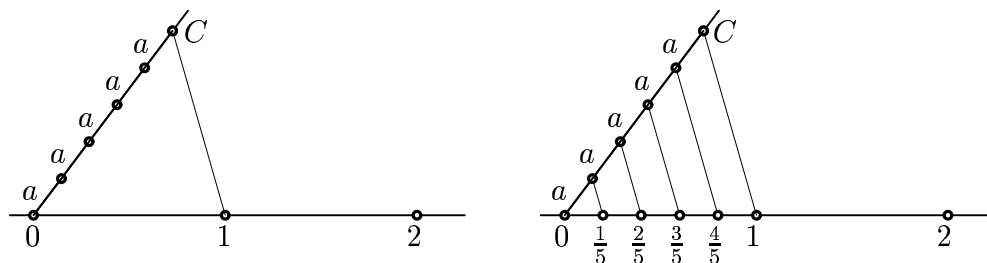


FIG. 1.4 – Mesurer les longueurs rationnelles

Mais comment construire des valeurs rationnelles? Traçons une droite arbitraire par le point 0 et rapportons plusieurs longueurs égales a (disons 5 fois) pour arriver à un point C (voir figure 1.4 à gauche). Tirons alors des parallèles à la droite $C1$ (voir figure 1.4 à droite) et obtenons ainsi, par Thalès, les points $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ etc.

Propriétés d'angles.

Quelques propriétés (angles opposés, angles parallèles, angles orthogonaux), “triviales” pour l’instant, sont représentées en figure 1.5.

Emil Artin (1898-1962) fut célèbre pour ses cours extrêmement clairs, superbement bien présentés, toujours donnés sans recours aux moindres notes. Un jour, tout à coup, en pleine démonstration, il bégaye et dit: “cette conclusion est triviale”. Après quelques secondes il répète: “c’est trivial, mais je ne sais plus pourquoi”. Il réfléchit une minute et ajoute: “je *sais* que c’est trivial, mais je ne comprends plus”. Il réfléchit encore quelques instants, et dit finalement: “excusez-moi, mais je dois aller chercher mes notes”. Il quitte la salle et revient dix minutes plus tard en disant: “c’est *vraiment* trivial”.

(Témoignage du Prof. Josef Schmid, Fribourg)

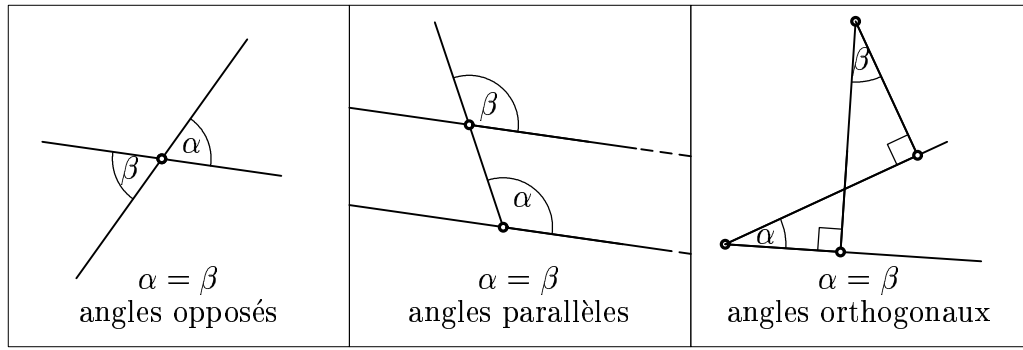


FIG. 1.5 – Angles opposés, angles parallèles, angles orthogonaux

Angles dans un triangle.

Théorème. La somme des angles d'un triangle quelconque ABC fait deux angles droits

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\perp = 180^\circ . \quad (1.1)$$

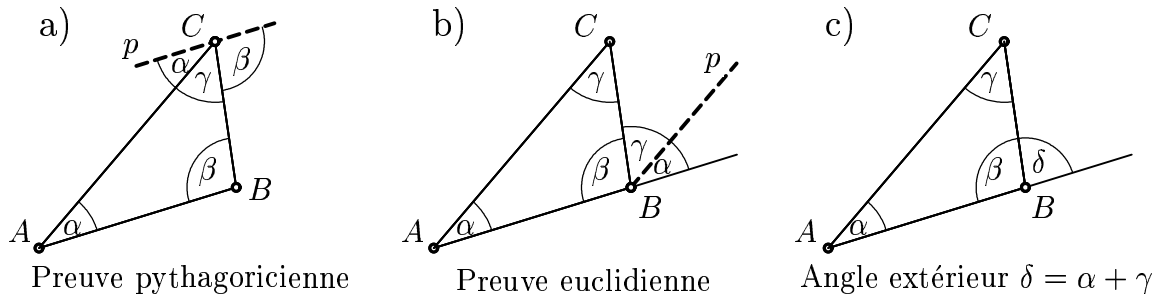


FIG. 1.6 – Angles dans un triangle

Pour la *preuve*, les pythagoriciens tirent une droite p parallèle au côté opposé par C (voir figure 1.6 a)). Euclide (voir Eucl. I.32) rallonge AB , fait passer une parallèle à AC par B (figure 1.6 b)) et rapporte les angles parallèles α et γ . De ce fait, il obtient le

Corollaire. Un angle extérieur est la somme des angles intérieurs opposés (figure 1.6 c))

$$\delta = \alpha + \gamma . \quad (1.2)$$

Angles dans un cercle. Dans un cercle de centre O et de diamètre AB , rapportons un angle vers un point C et relions C à A (voir figure 1.7 a)). Le triangle AOC étant isocèle, l'angle β en A est le même qu'en C . Donc, par (1.2), l'angle BOC est le double de l'angle BAC .

Cercle de Thalès. Si nous appliquons la même idée à l'angle δ en B (voir figure 1.7 b)), nous voyons que $2\beta + 2\delta = 2\perp$, $\Rightarrow \beta + \delta = \perp$, i.e., l'angle en C est droit. Le cercle, pour lequel tous les points forment un angle droit avec A et B est appelé *Cercle de Thalès* (voir figure 0.1).

Théorème de l'angle au centre. Appliquons encore la même idée à l'angle γ vers un point D (figure 1.7 c)), et effaçons le diamètre AB (figure 1.7 d)). Nous avons alors une relation intéressante pour $\alpha = \beta + \gamma$:

$$\alpha = \text{angle périphérique} \Leftrightarrow 2\alpha = \text{angle au centre.} \quad (\text{Euclide III.20}) \quad (1.3)$$

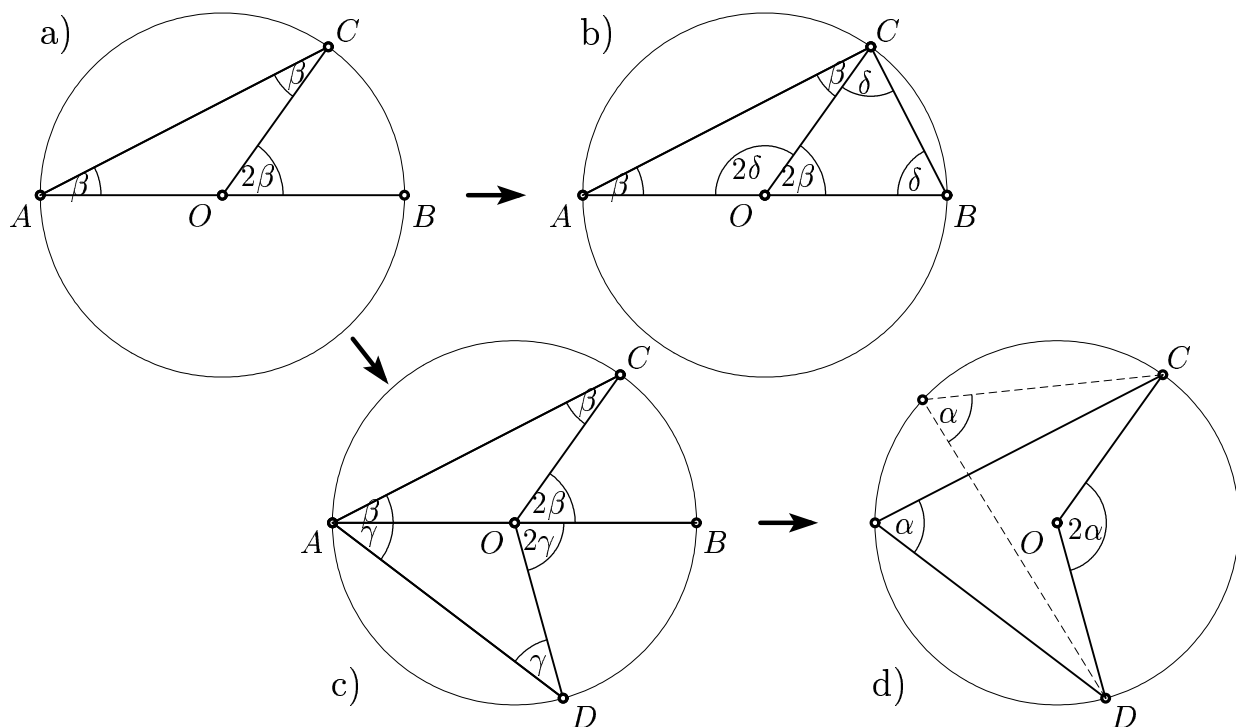


FIG. 1.7 – Angle au centre — angle périphérique

Le pentagone régulier.

Les figures régulières ont fasciné les géomètres depuis la nuit des temps. Pour les Grecs, la figure culte par excellence est bien le pentagone régulier, dont nous aimerions déterminer la diagonale Φ (voir figure 1.8 a)).

Solution. Tirons encore les autres diagonales (voir figure 1.8 b)). Nous avons alors une étoile qui orne maintenant de nombreux drapeaux, des hôtels de luxe et même des mouvements révolutionnaires. Comme les angles au centre des arcs AB , BC , etc. sont de 72° , tous les angles périphériques visibles sont de $\alpha = 36^\circ$ (Eucl. III.20). Étudions le triangle ACD (voir figure 1.8 c)) : il contient le petit triangle CDF qui lui est semblable. Donc



Знак командира РККА

$$\left. \begin{array}{l} \text{Thalès: } s = \frac{1}{\Phi} \\ \text{isocèle: } \Phi = 1 + s \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \quad (1.4)$$

ou

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339...$$

Ce nombre s'appelle *le nombre d'or*; il joue un rôle primordial dans la géométrie et dans l'architecture grecque (voir le "Parthénon" sur l'Acropole¹, construit 447-432 av.J.-C.). Il est noté Φ en honneur de $\Phi\epsilon\iota\delta\acute{\iota}\alpha\varsigma$, l'architecte de l' Ἀκρόπολις .



1. image copié de <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html>

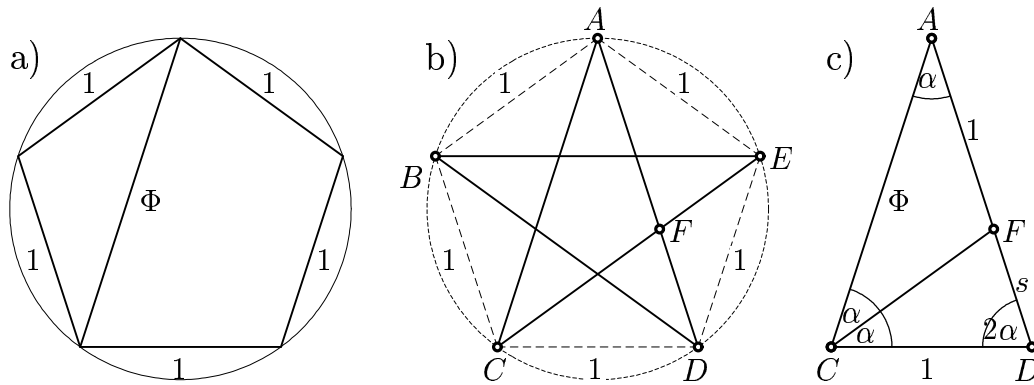


FIG. 1.8 – Le pentagone régulier

La découverte des nombres irrationnels. *Tout est nombre* affirmait Pythagore, ne pensant évidemment qu'aux nombres rationnels. Alors éclate un terrible scandale : Hippiasus de Metapontum découvre que $\sqrt{2}$ et Φ ne sont pas rationnels :

Quel nombre rationnel $\Phi = \frac{m}{n}$ pourrait satisfaire la formule (1.4) ? Supposons cette fraction simplifiée, i.e., aucun nombre premier p ne divise m et n à la fois. Alors, par (1.4), on aurait

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}.$$

Un nombre premier p , qui diviserait $m+n$ et m , doit diviser n aussi ; ainsi, la dernière fraction se voit simplifiée elle aussi. Comme les deux fractions ne peuvent pas être les mêmes, *il est donc exclu que Φ soit un nombre rationnel!*...

Le fait que la figure la plus sacrée ait une diagonale non mesurable a été un choc : la découverte devait absolument rester secrète — et, la manière la plus sûre, on jeta Hippiasus à la mer.

Pire encore pour la théorie : la preuve du Théorème de Thalès ci-dessus n'est pas valable pour des rapports irrationnels ! Ce fait va compliquer beaucoup l'édifice des *Éléments* d'Euclide (voir section I.2).

Calcul d'aires.

A study for the Department of Education ... found nearly one in three adults (29%) in England could not calculate the floor area of a room in feet or metres – with or without calculators or paper and pens. (BBC News Online [Education], Sunday, May 5, 2002.)

Le calcul d'aires va nous conduire au Théorème de Pythagore, notre deuxième grand but de cette section. Commençons par *l'aire d'un rectangle* qui est $a \cdot b$ (voir figure 1.9 à gauche); il s'agit du nombre de salades (= 28) qu'on peut planter dans un champ de 7 salades de long et de 4 salades de large.

L'aire d'un parallélogramme est $a \cdot h$ (la hauteur); il y a deux façons de le voir: 1.- on découpe un triangle à gauche et on le rajoute à droite pour en faire un rectangle (preuve d'Euclide) ; 2.- on découpe le parallélogramme en un grand nombre de rectangles très minces (“Méthode d'exhaustion” d'Eudoxe et Archimède, sous cette forme dans les commentaires de Legendre 1796; voir figure 1.9 au milieu).

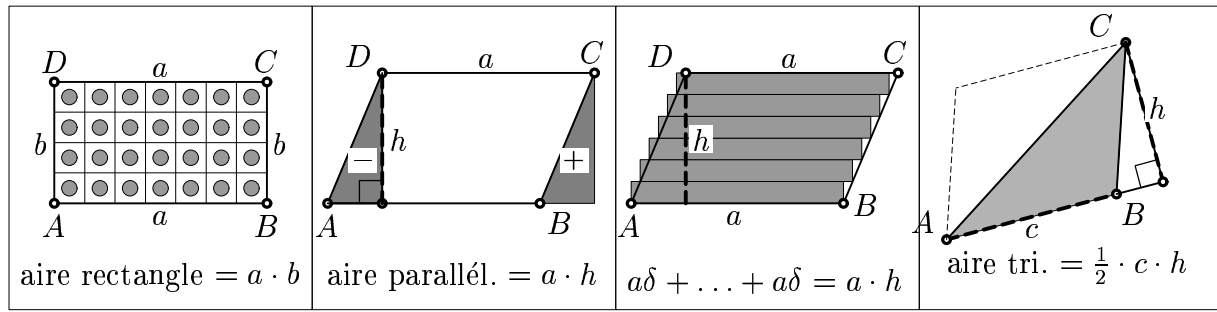


FIG. 1.9 – Aires de rectangle, parallélogramme et triangle

Finalement, l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme,

$$\text{Aire de triangle} = \text{base} \times \text{hauteur divisé par 2} = \frac{c \cdot h}{2} \quad (1.5)$$

(voir figure 1.9 à droite).

Aires de triangles semblables. Prenons le triangle ABC de la figure 1.3 (preuve du théorème de Thalès) ayant des côtés 5 fois plus longs que ceux du triangle $AB''C''$. Il est composé de

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \quad (1.6)$$

(cette dernière preuve a été un des arguments favoris de Pythagore) copies du petit triangle. Similairement, le triangle $AB'C'$ contient 8^2 copies. Ainsi, l'aire de $AB'C'$ est $\frac{8^2}{5^2}$ fois plus grande que celle de ABC . Nous voyons donc :²

$$\text{triangle semblable à côtés } q \text{ fois plus longs} \Rightarrow \text{aire } q^2 \text{ fois plus grande.} \quad (1.7)$$

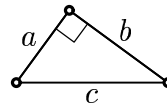
Le Théorème de Pythagore.

This great theorem is universally associated with the name of Pythagoras. Proclus says 'If we listen to those who wish to recount ancient history, we find some of them referring this theorem to Pythagoras and saying that he sacrificed an ox in celebration of his discovery.'

(Heath, *Euclid in Greek*, 1920, p. 219)

Ce théorème est considéré comme le “premier grand théorème” de l'humanité. Des millions d'élèves dans le monde apprennent la formule

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$(1.8)$$

2. Une deuxième façon de voir ce résultat réside dans la formule (1.5).

pour les trois côtés d'un triangle rectangle ; bien moins nombreux sont ceux qui connaissent sa signification ou encore sa démonstration.

La légende veut que Pythagore ait découvert son théorème en observant le carrelage du palais de Polycrate, tyran de Samos. Mais comment était ce carrelage ? Face à une question d'une telle importance pour l'histoire de la pensée humaine, votre $\delta\iota\delta\alpha\sigma\kappa\alpha\lambda\omicron\varsigma$ a demandé au Rectorat la somme de 30 millions de dollars en vue d'organiser une petite expédition sur l'île de Samos pour chercher les ruines de ce palais, et vérifier éventuellement cette légende. Cependant, suite au refus de cette modeste requête, nous sommes contraints à des hypothèses (voir figure 1.10).

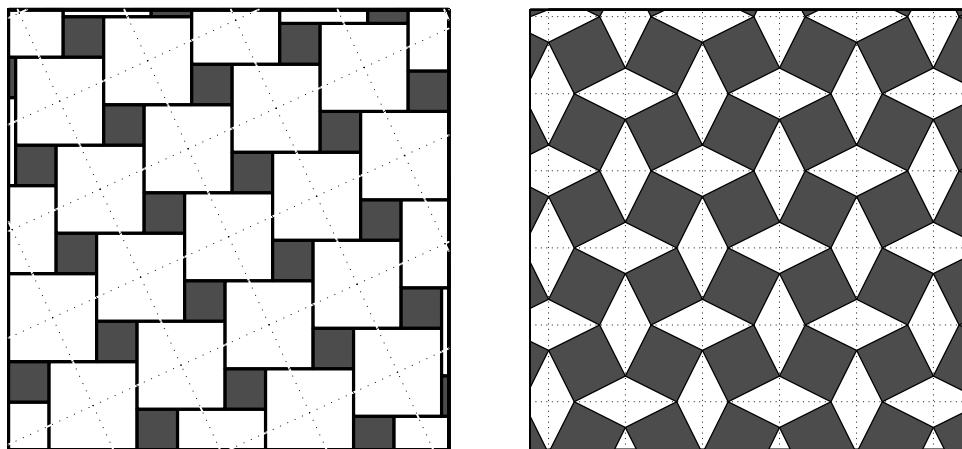


FIG. 1.10 – Carrelages de Polycrate ; à gauche hypothèse wannerienne, à droite hypothèse kesslerienne.

Les preuves classiques. La figure 1.11 englobe trois civilisations : chinoise, indienne et

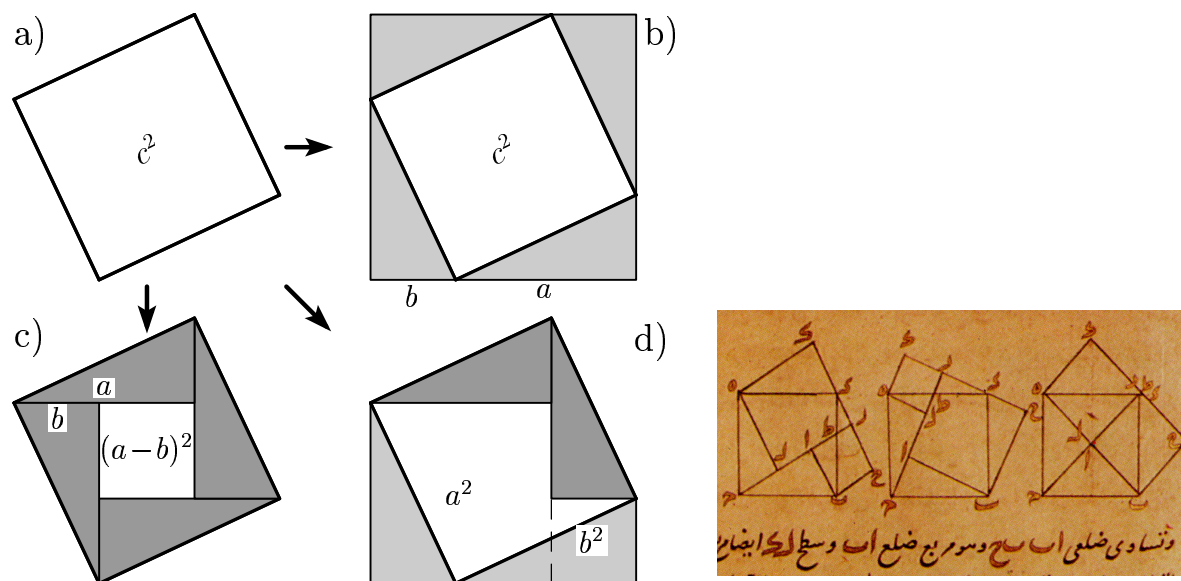


FIG. 1.11 – Les trois preuves classiques (*Chou-pei Suan-ching* (b), *Bhāskara* (c), *Thābit Ibn Qurra* (d)); à droite: *manuscript de Nasir al-Din al-Tusi 1201-1274*

arabe. Nous partons d'un carré c^2 (légèrement en pente; figure 1.11 a)). Nous lui adjoignons 4 triangles rectangles a, b (figure 1.11 b)). Cela donne un grand carré $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Comme les quatre triangles rajoutés ont une aire de $2ab$, le carré c^2 a une aire de $a^2 + b^2$.

C'est la preuve de Chou-peï Suan-ching (Chine, 250 av.J.-C.). Bhāskara (né en 1114 apr.J.-C., en Inde) *enlève* les 4 triangles pour arriver à $(a - b)^2$ et conclut par un simple "Regarde!" (figure 1.11 c)). Mais pourquoi ne pas enlever *deux* triangles et en rajouter deux autres (figure 1.11 d)) ? Ainsi l'aire c^2 se transforme sans autres calculs en deux carrés $a^2 + b^2$. Cette preuve, attribuée à Thābit Ibn Qurra (826-901), nous paraît la plus belle des trois, n'est-ce pas, cher Pâris ?

La preuve d'Euclide. La preuve d'Euclide, géniale, admirée par Proclus (voir *Heath*,

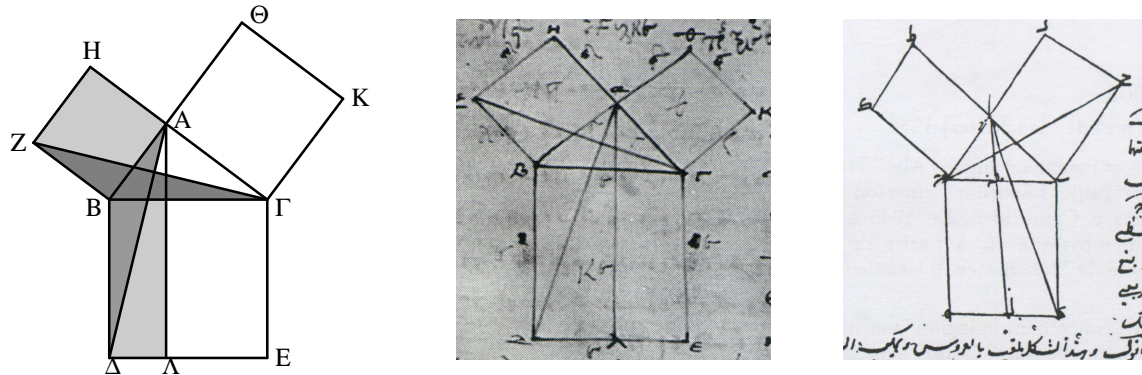


FIG. 1.12 – La preuve d'Euclide ; au milieu : *manuscript grec* ; à droite : *manuscript arabe* (*al-Qurra, Bagdad 870*)

vol. I, p. 349), rajoute les trois carrés a^2 , b^2 et c^2 au triangle rectangle $AB\Gamma$ (voir figure 1.12) : les deux triangles grisés $BA\Delta$ et $BZ\Gamma$ sont identiques, car tournés de 90° . Un triangle a même base et hauteur que le carré $BAHZ$; l'autre a même base et hauteur que le rectangle $B\Delta\Lambda$. Ces deux quadrilatères ont donc la même aire. La conclusion analogue s'applique aux quadrilatères à droite : le théorème de Pythagore en découle si on additionne les deux résultats.

La preuve par le théorème de Thalès. Tirons la hauteur par C , ce qui reproduit

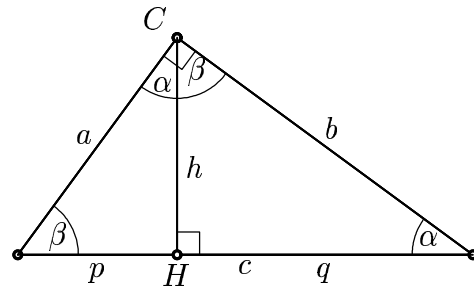


FIG. 1.13 – *Pythagore par Thalès*

deux angles orthogonaux pour α et β (voir figure 1.13). Nous obtenons trois triangles semblables et nous avons par le théorème de Thalès

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{p} = \frac{c}{a} \implies a^2 = pc \\ \frac{b}{q} = \frac{c}{b} \implies b^2 = qc \end{array} \right\} \implies a^2 + b^2 = (p + q)c = c^2. \quad (1.9)$$

Nous avons encore

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q} \implies h^2 = pq \quad (\text{Théorème de la Hauteur}). \quad (1.10)$$

La preuve de Naber (Haarlem 1908; voir *B.L. van der Waerden*, Springer 1983, p. 30) : sans conteste la plus élégante de toutes. Les trois triangles de la figure 1.14 sont semblables

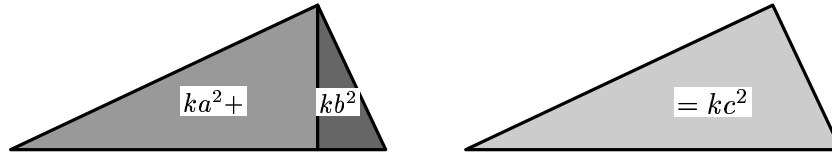







FIG. 1.14 – La preuve de Naber

et proportionnels à a , b et c respectivement. Les aires sont donc proportionnelles à a^2 , b^2 et c^2 ; évidemment, la troisième est la somme des deux autres.

Nous pensons avoir compris maintenant... Sinon, allons consulter un article de E.S. Loomis (1940), énumérant 370 démonstrations!...

Application aux polygones réguliers.

TAB. 1.1 – Apothèmes et cercles circonscrits de polygones réguliers de côté 1

n		h, ℓ	R	ρ
3		$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$
4		—	$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\rho = \frac{1}{2}$
5		$\ell = \sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{4}} = \frac{\sqrt{3 - \Phi}}{2}$	$R = \frac{1}{\sqrt{3 - \Phi}} = \frac{\sqrt{2 + \Phi}}{\sqrt{5}}$	$\rho = \frac{\sqrt{3 + 4\Phi}}{2\sqrt{5}}$
6		—	$R = 1$	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$
10		—	$R = \Phi$	$\rho = \frac{\sqrt{3 + 4\Phi}}{2}$

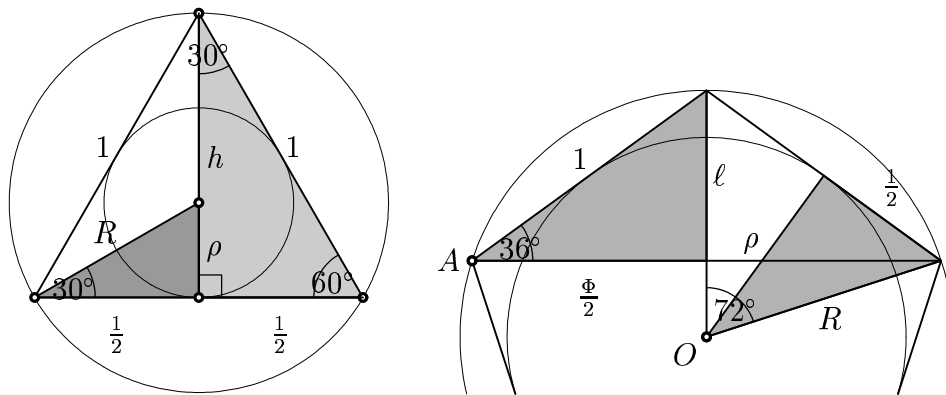


FIG. 1.15 – Triangle équilatéral et pentagone

Preuves : Pour $n = 3$ et 5 , les grandeurs h et ℓ se calculent par Pythagore ; ℓ se simplifie par $\Phi^2 = \Phi + 1$; les valeurs pour R sont ensuite obtenues par Thalès sur les triangles grisés en figure 1.15. Il y a toujours $\rho = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$ par Pythagore (voir figure 1.15 à droite). Pour $n = 10$ voir figure 1.8 (c). QED.

I.2 Les Éléments d'Euclide

“La Géométrie d'Euclide a certainement de très-grands avantages, elle accoutume l'esprit à la rigueur, à l'élégance des démonstrations et à l'enchaînement méthodique des idées ...”

(Poncelet 1822, p. xxv)

“Pemberton ... avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes et d'autres Algébristes avant d'avoir étudié et médité les Éléments d'Euclide.”

(Préface de *Œuvres d'Euclide* par F. Peyrard, 1819)

“There never has been, and till we see it we never shall believe that there can be, a system of geometry worthy of the name, which has any material departures ... from the plan laid down by Euclid.”

(De Morgan 1848; copied from the *Preface* of Heath.)

“Ptolémée Lagus ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de manière plus facile que la sienne pour apprendre la géométrie ; Euclide lui répondit qu'il n'y avait pas de chemin royal pour arriver à cette science.”

(Préface de *Œuvres d'Euclide* par F. Peyrard, 1819)

Les *Éléments* d'Euclide, gigantesque ouvrage d'environ 500 pages, organisés en 13 “livres”, écrits vers 300 av.J.-C., sont l'oeuvre mathématique la plus célèbre de tous les temps. Ils réunissent toutes les connaissances de l'époque en un système d'une architecture et d'une rigueur inégalées pendant des milliers d'années. Newton, 2000 ans plus tard, en est un fervant admirateur (voir citation).

Pendant cette période, les Éléments ont été sans cesse copiés, recopiés, modifiés, commentés, égarés ; seule la fastidieuse comparaison de toutes les sources a permis de reconstituer la version originale (Heiberg 1888), traduite depuis dans toutes les langues scientifiques. La traduction la plus richement commentée est due à *Sir Thomas L. Heath* (1908). La source la plus importante (M.S. 190) fut découverte après l'invasion de Rome en 1809 par les troupes de Napoléon, qui se rendent aussitôt — devinez ! — aux trésors du Vatican. Cette version a été traduite en français par F. Peyrard (1819).

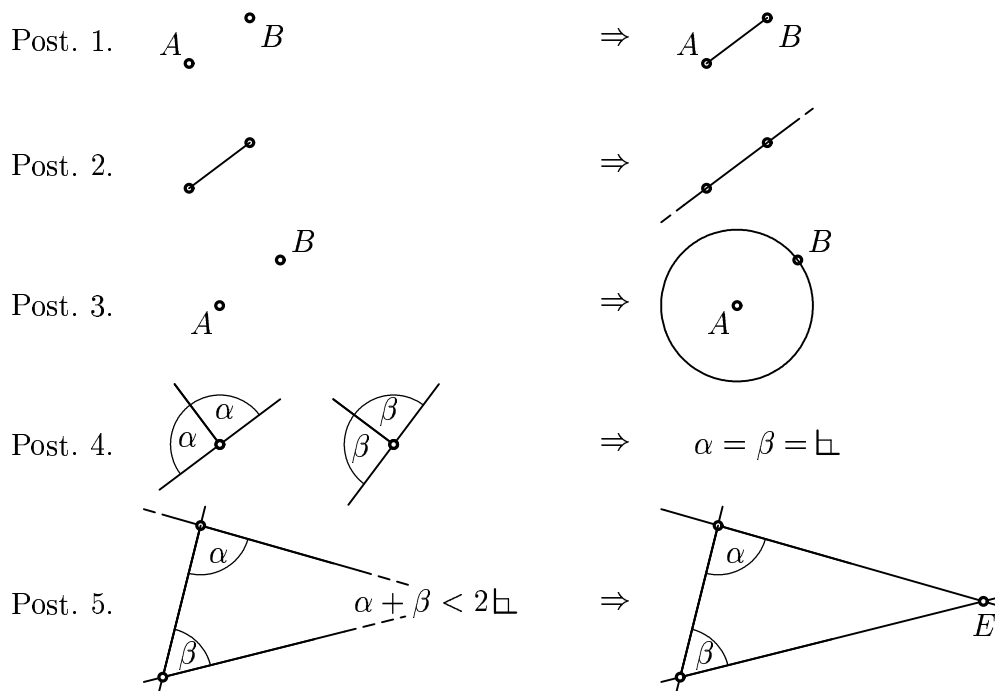
Les *Éléments* sont **LA BIBLE** des mathématiques ; ils vont nous intéresser dans ce paragraphe.

Les Éléments commencent par une longue liste de “Définitions”, qui rassemble à peu près le contenu de notre vocabulaire de la figure 0.1, tout en mots et sans dessins ; elle est suivie d'une liste d'“Axiomes” rassemblant grosso modo les règles de calcul avec égalités et inégalités. Puis vient la célèbre liste des cinq “Postulats” :

Postulats (dans le français de Peyrard 1819) :

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un centre quelconque, et par un point quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petit que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles

sont plus petits que deux droits.

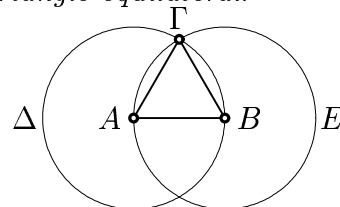


Remarques. Les trois premiers postulats établissent les constructions par *règle* (1 et 2) et *compas* (le 3); le postulat 4 définit l'angle droit comme mesure universelle pour angles; et le postulat 5 est le célèbre *postulat des parallèles*, qui a fait couler plus d'encre que tout le reste pendant des siècles.

Les Propositions. Alors commence la valse des “Propositions” qui, à partir de ces 5 postulats, développe toute la géométrie, des résultats les plus simples aux plus difficiles. Entre autres, les “trivialités” du paragraphe I.1 deviendront de respectables propositions.

Prop. I.1. Sur une droite AB donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

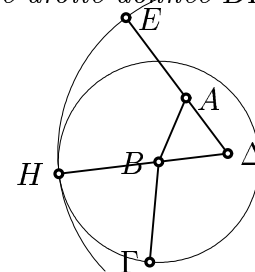
La *construction* se fait par un cercle Δ centré en A passant par B (Post. 3) et un cercle E centré en B passant par A (Post. 3). Le point d'intersection Γ est ensuite relié à A et à B (Post. 1). Ainsi, la distance $A\Gamma$ et celle de $B\Gamma$ est celle de AB et le triangle est équilatéral. Ce qu'il fallait faire.



Remarque. On a beaucoup critiqué (Zenon, Proclus ...) le fait que l'existence du point Γ d'intersection des deux cercles n'est pas du tout assurée!! et qu'un “Postulat de continuité” du style du *Théorème des valeurs intermédiaires* manque chez Euclide. Ce problème a dû attendre la théorie des nombres irrationnels du XIXe siècle (Bolzano, Dedekind, Weierstrass, Cantor; voir [HW97], p. 206) pour être clarifié.

Prop. I.2. À un point A donné, placer une droite AE égale à une droite donnée $B\Gamma$.

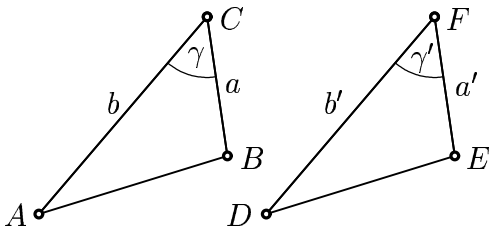
Pour la *construction*, on érige un triangle équilatéral $AB\Delta$ sur AB (Prop. I.1), prolonge les droites ΔB et ΔA (Post. 2), écrit le cercle en B passant par Γ (Post. 3) pour trouver le point H sur la droite ΔB prolongée. Puis on écrit le cercle en Δ passant par H (Post. 3). L'intersection E de ce cercle avec la droite ΔA prolongée est le point recherché, car la distance $B\Gamma$



est la distance BH , puis la distance ΔH est la distance ΔE . Ainsi, la distance AE est la distance BH , car la distance ΔB est égale à ΔA . Pour finir en beauté, relient A à E (Post. 1).

Remarque. Le but de cette proposition est de démontrer qu'on peut lever la pointe du compas et la placer à un autre point en gardant le même rayon : pour cela, on n'a pas besoin d'un autre postulat. Rien d'étonnant que cette preuve, elle aussi, a été critiquée par Proclus : suivant la position des points A , B et Γ , de nombreux cas doivent être distingués avec chaque fois une argumentation légèrement différente. Mais le génie d'Euclide pour lequel, une fois *un* cas compris, les autres cas deviennent triviaux, servira de modèle à nous aussi. Ces preuves sont déjà assez pénibles!...

Prop. I.4.³

$$\begin{array}{ll} a = a', & \\ b = b', & \Rightarrow \text{tous les côtés} \\ \gamma = \gamma', & \text{et tous les angles} \\ & \text{sont égaux} \end{array} \quad (2.1)$$


Pour la preuve de ce résultat, véritable pierre angulaire de tout ce qui suit, Euclide parle vaguement d'“appliquer” le triangle ACB sur le triangle DFE , de “poser” le point C sur le point F , et de “poser” la ligne a sur la ligne a' etc. Le tout fut, bien sûr, vivement critiqué par la suite. Dans la géométrie de D. Hilbert (1903), par exemple, cette “proposition” est un “axiome”.

Prop. I.5 (communément appelée *Pons Asinorum* (Pont aux ânes)).

Si dans un triangle $a = b$, alors $\alpha = \beta$.

Une des “trivialités” de la figure 0.1 devient alors un véritable théorème. Voyons comment Euclide l'a démontré (voir figure 2.1, image 1) : on prolonge CA et CB (Post. 2) vers des

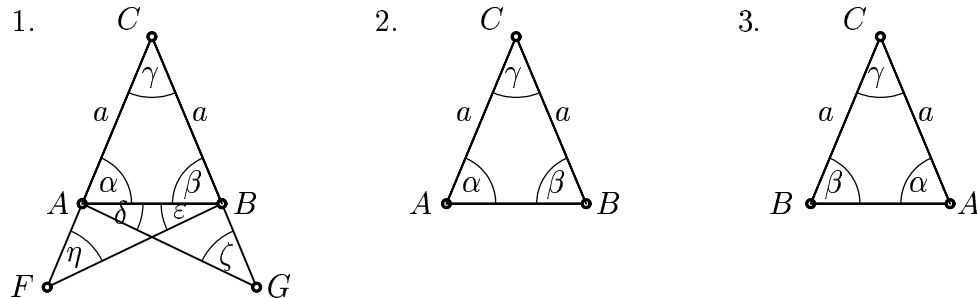


FIG. 2.1 – Angles dans triangle isocèle

points F et G avec $AF = BG$ (Prop. I.2). Relier FB et AG (Post. 1). Ainsi les deux triangles FCB et GCA sont égaux par Prop. I.4, i.e., $\alpha + \delta = \beta + \varepsilon$, $\eta = \zeta$ et $FB = GA$. Maintenant, par Prop. I.4, les triangles AFB et BGA sont égaux, $\Rightarrow \delta = \varepsilon$. Avec l'égalité

3. À partir de maintenant nous utilisons, contrairement à l'original grec, des lettres minuscules pour les côtés (alphabet latin) et les angles (alphabet grec). Cette “doctrine de Descartes” (voir Chap. II) rendra les énoncés et les calculs beaucoup plus clairs. Pour les points, maintenant en lettres latines majuscules, leur ordre alphabétique indique l'ordre dans lequel ils ont été construits.

de deux lignes plus haut, on a $\alpha = \beta$. Apparemment génial, mais superflu aussi : Pappus a remarqué, 600 ans plus tard, qu'il suffirait d'appliquer la Prop. I.4 aux triangles ACB et BCA ; l'un renversé et placé sur l'autre (figure 2.1, images 2 et 3).

Cette proposition est immédiatement suivie par la Prop. I.6, prouvant la réciproque : $\alpha = \beta \Rightarrow a = b$.

Les propositions suivantes concernent l'unique détermination d'un triangle par les longueurs de ses trois côtés.

Prop. I.7. *Si deux triangles sont érigés sur la même base AB et du même côté de celle-là avec $a = a'$ et $b = b'$, alors $C = D$.*

Preuve d'Euclide : supposons $C \neq D$ (voir figure 2.2, image 1). Car DAC est isocèle par

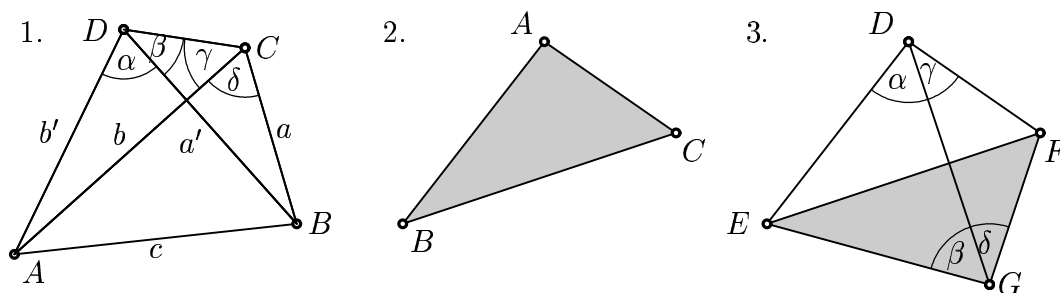


FIG. 2.2 – Triangles à côtés égaux

hypothèse, $\alpha + \beta = \gamma$ (Prop. I.5). Car DBC est isocèle, $\beta = \gamma + \delta$ (Prop. I.5). Donc une fois $\gamma > \beta$, et une fois $\gamma < \beta$, ce qui est impossible.

Remarque. Voilà notre première preuve “par l'absurde”. Bien entendu, ce genre de raisonnement n'est pas resté sans critiques : “on ne peut pas prouver quelque chose de vrai à l'aide de quelque chose de faux” (L.E.J. Brouwer 1881-1966) !...

Prop. I.8. *Si deux triangles ABC et DEF ont les mêmes côtés, ils ont aussi les mêmes angles.*

La preuve de Philo de Byzantium est plus élégante que celle d'Euclide : nous appliquons le triangle ABC (voir figure 2.2, image 2) au triangle DEF , en posant la ligne BC sur EF et en mettant le point $A \mapsto G$ de l'autre côté de D (voir figure 2.2, image 3). Par hypothèse, DEG est isocèle, donc $\alpha = \beta$ (Prop. I.5). De la même façon, DFG est isocèle, donc $\gamma = \delta$ (Prop. I.5). Ainsi l'angle en A ($= \beta + \delta$) est égal à l'angle en D ($= \alpha + \gamma$). Pour les autres angles, on répète la preuve avec les coins permutés.

Propositions I.9-I.12. Ces propositions traitent la bissection d'un angle BAC (voir fi-

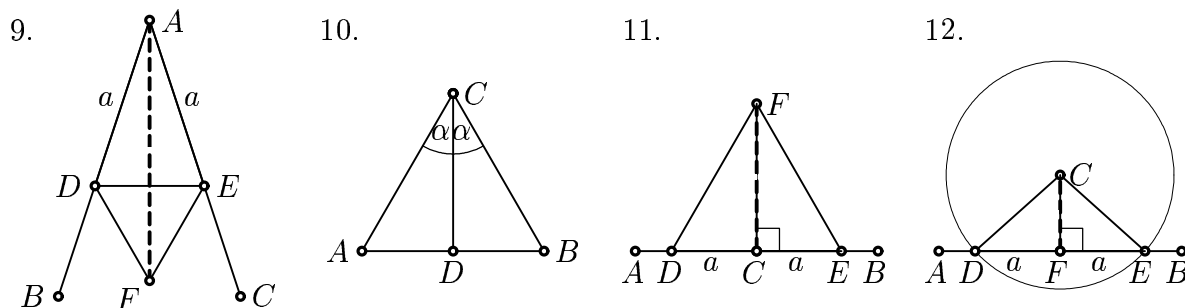


FIG. 2.3 – Propositions 9-12

gure 2.3, image 9), la bissection d'une droite AB (la médiatrice, voir figure 2.3, image 10) et l'élévation de la perpendiculaire à AB en un point C (voir figure 2.3, image 11). L'instrument universel pour résoudre ces trois questions est le triangle équilatéral (Prop. I.1). Puis, l'abaissement d'une perpendiculaire à AB depuis un point C (voir figure 2.3, image 12) est effectuée à l'aide d'un cercle (Post. 3) et de la médiatrice de DE (Prop. I.10).

Entrée du Postulat 4. Le Postulat 4 définit l'angle droit comme unité universelle. Nous dénotons cet angle (90°) par le symbole \perp .

Proposition I.13.

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A line segment } DC \text{ with point } B \text{ between } D \text{ and } C. \text{ A ray } BA \text{ is drawn from } B. \text{ Angle } \beta \text{ is marked between } DB \text{ and } BA, \text{ and angle } \alpha \text{ is marked between } BA \text{ and } BC. \end{array} \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \cdot \perp. \quad \text{Preuve :} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Same as Diagram 1, but with a ray } BE \text{ drawn from } B \text{ perpendicular to } DC. \text{ Angle } \eta \text{ is marked between } BE \text{ and } BA. \end{array} \quad (2.2)$$

Tirons la perpendiculaire BE qui coupe l'angle β en $\perp + \eta$. Ainsi

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \perp + \eta \\ \alpha + \eta = \perp \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta + \eta = 2 \cdot \perp + \eta \quad \text{QED.}$$

Proposition I.14.

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: Same as Diagram 1 in (2.2).} \end{array} \alpha + \beta = 2 \cdot \perp. \Rightarrow DBC \text{ alignés.} \quad \text{Preuve :} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Same as Diagram 1, but with a ray } BA' \text{ drawn from } B \text{ such that } \angle A'BC = \alpha. \text{ Angle } \gamma \text{ is marked between } BA' \text{ and } BE. \end{array} \quad (2.3)$$

Soient DBE alignés, i.e., par Prop. I.13, $\beta + \gamma = 2\perp$. Par hypothèse $\beta + \alpha = 2\perp$. Par le Postulat 4, ces deux angles sont égaux, donc $\gamma = \alpha$. QED.

Prop. I.15.

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two intersecting lines forming vertical angles } \alpha \text{ and } \beta. \end{array} \Rightarrow \alpha = \beta. \quad \text{Preuve :} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Same as Diagram 1, but with a ray } BA \text{ drawn from the vertex of } \alpha \text{ such that } \angle ABE = \gamma. \end{array} \quad (2.4)$$

Par Prop. I.13, $\alpha + \gamma = 2 \cdot \perp$ et aussi $\gamma + \beta = 2 \cdot \perp$. Par Post. 4, ces deux angles sont donc égaux. Si l'on soustrait γ des deux côtés, on obtient le résultat. Et voilà la première "trivialité" de la figure 1.5 véritablement démontrée!...

Prop. I.16. Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur δ satisfait

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A triangle } ABC \text{ with interior angles } \alpha \text{ at } A, \beta \text{ at } B, \text{ and } \gamma \text{ at } C. \text{ The side } BC \text{ is extended to } D, \text{ forming an exterior angle } \delta \text{ at } C. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta > \alpha \\ \text{et } \delta > \beta. \end{array} \quad \text{Preuve :} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2: The same triangle } ABC \text{ as in Diagram 1, but with a ray } CE \text{ drawn from } C \text{ such that } \angle ACE = \alpha. \text{ The ray } CE \text{ intersects the extension of } AB \text{ at } F. \end{array} \quad (2.5)$$

Soit E la bissection de AC (Prop. I.10), on prolonge BE (Post. 2), et on y coupe la distance BE pour trouver F (Post. 3). Les angles grisés en E sont égaux (Prop. I.15), ainsi les deux triangles grisés sont identiques (Prop. I.4). Donc l'angle gris en C est α , clairement plus petit que δ . Pour la deuxième inégalité, on procède similairement avec l'angle δ déplacé de l'autre côté de C (Prop. I.15).

Propositions I.17-I.26. Divers théorèmes de congruence d'Euclide (voir figure 2.4; le dernier cas ambigu n'est pas mentionné), autres inégalités sur les angles et côtés d'un

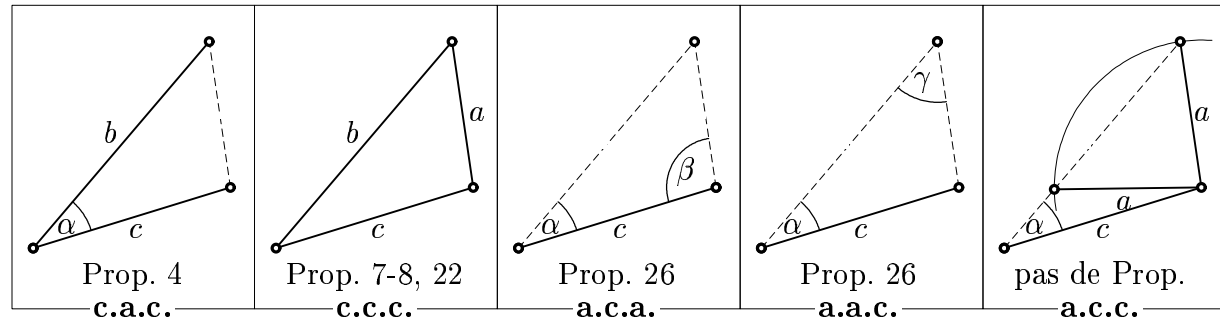


FIG. 2.4 – Théorèmes de congruence pour triangles

triangle. Le numéro I.20 donne les célèbres *inégalités du triangle*

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b. \quad (2.6)$$

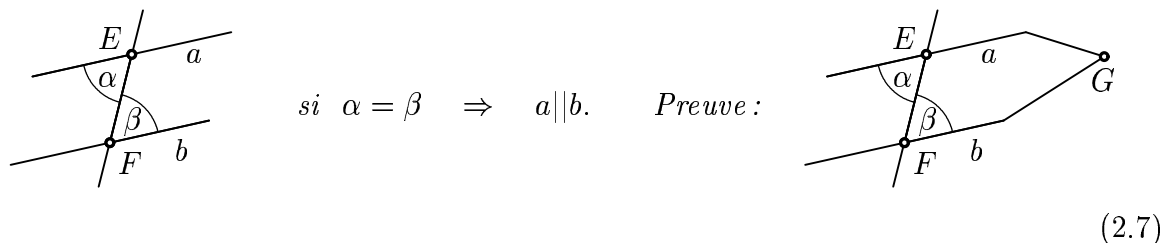
La preuve de ce résultat a été ridiculisée par la suite : même un âne le comprendrait ; car si on le place sur un coin d'un triangle, et du foin sur un autre coin, l'âne traversera le côté qui les rejoint et ne fera pas le détour par le troisième coin (*digni ipsi, qui cum Asino foenum essent*, Heath I, p. 287). Proclus a donné une longue réponse logico-philosophique; il aurait pu dire brièvement : “Les Éléments n'ont pas été écrits pour les ânes”.

Les Parallèles (Postulat 5).

“Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre”.

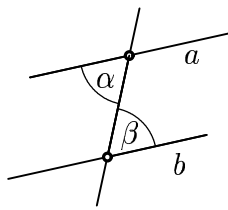
(Définition 23 d'Euclide, trad. de Peyrard 1819).

Prop. I.27. Si une droite coupe deux droites a et b avec angles α et β , alors

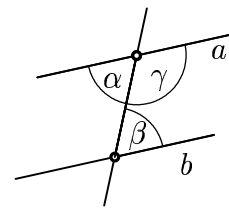


(2.7)

Si a et b ne sont pas parallèles, elles doivent se couper, d'un ou de l'autre côté en un point G . Alors EGF sera un triangle possédant α comme angle extérieur. Celui-ci devrait être plus grand que β (Prop. I.16).

Prop. I.29.

Si $a \parallel b \Rightarrow \alpha = \beta$. Preuve :



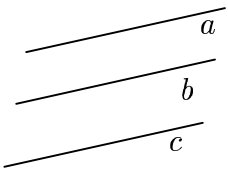
(2.8)

Supposons $\alpha > \beta$. Par Prop. I.13, $\alpha + \gamma = 2 \cdot \perp$. Donc $\beta + \gamma < 2 \cdot \perp$. Par le Post. 5, ces droites doivent se couper : une contradiction. Raisonnement similaire pour $\alpha < \beta$.

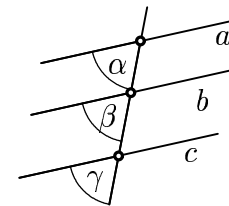
Remarque 1. Combinées avec la Prop. I.15, les Propositions I.27 et I.29 se transforment en d'autres variantes, dont l'une est la "trivialité des angles parallèles" de la figure 1.5 (Prop. I.28).

Remarque 2. Il est étonnant que la réciproque de la Prop. I.27 soit tellement plus difficile à démontrer. Pendant plus de 2000 ans, les géomètres n'ont pas cru à la nécessité de ce Postulat 5 et de nombreuses tentatives se sont multipliées durant des siècles pour le prouver. Gauss, en 1799, a été le premier à penser que c'était impossible. La *géométrie non-euclidienne*, qui débute avec J. Bolyai et N.I. Lobatchevski dans les années 1820, en est la preuve vivante.

Prop. I.30. Si pour trois droites a, b, c



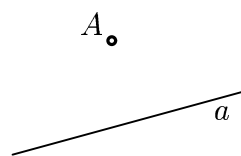
$a \parallel b$ et $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$. Preuve :



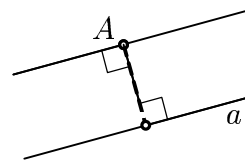
(2.9)

Par Prop. I.27 et Prop. I.29, les droites sont parallèles si et seulement si les angles sont égaux.

Prop. I.31. Par un point A donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite a donnée.



Preuve :



(2.10)

La preuve d'Euclide utilise une Prop. I.23, qui elle repose sur une Prop. I.22. Cependant, on peut aussi faire deux orthogonales (Prop. I.12 suivie de Prop. I.11).

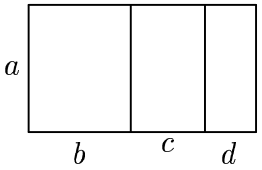
Remarque. Proclus a trouvé : "Par un point A donné, existe une **unique** parallèle à une droite a donnée", ce qui peut remplacer le Postulat 5. Sous cette forme, on l'appelle "Playfair's Axiom" (1795) : c'est la forme habituellement connue.

La **Prop. I.32** est la formule $\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdot \perp$ pour les angles d'un triangle quelconque (voir (1.1) et la preuve en figure 1.6). Il s'agit d'un théorème très ancien, certainement déjà connu de Thalès. Il vient relativement tard dans la liste d'Euclide, car il nécessite le Post. 5.

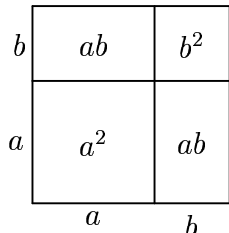
La suite du Livre I. Les Propositions I.33-I.34 concernent des parallélogrammes ; les Propositions I.35-I.41 les aires de parallélogrammes et triangles ; les Propositions I.42-I.45

la construction de parallélogrammes avec une aire donnée ; et le I.46 traite la construction d'un carré. Le couronnement du Livre I est le théorème de Pythagore (Prop. I.47, voir preuve de la figure 1.12) et sa réciproque: *si $a^2 + b^2 = c^2$, alors le triangle est rectangle.*

LIVRE II. Contient l'*algèbre* par preuves géométriques, comme par exemple les formules



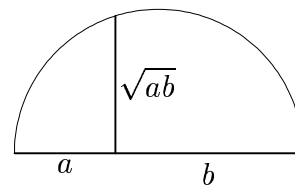
$\Leftrightarrow a(b + c + d) = ab + ac + ad$



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow$

(2.11)

La **Prop. II.14** traite le calcul d'une racine \sqrt{ab} ("Quadrature d'un rectangle"), à l'aide du théorème de la hauteur (1.10).



LIVRE III. Propriétés de cercles et angles.

Par exemple, la Prop. III.20 est le "Théorème de l'angle au centre" (1.3) (voir Figure 1.7).

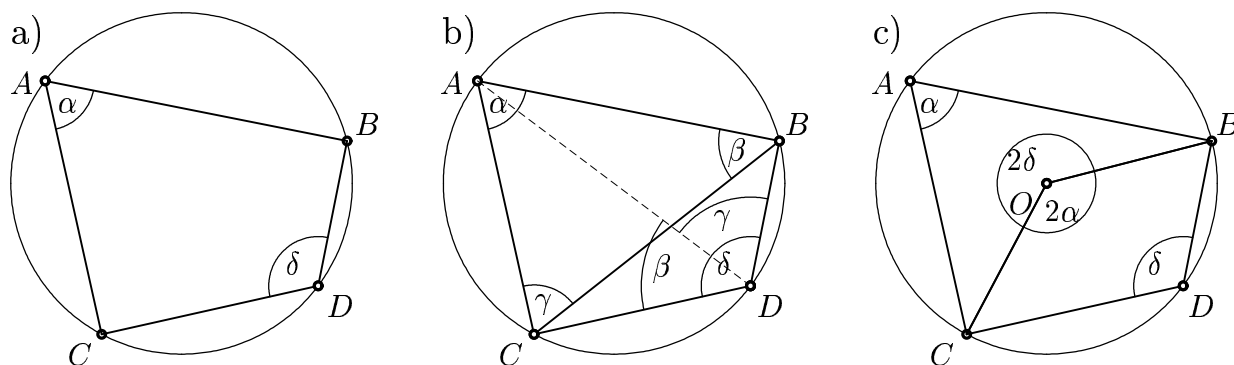


FIG. 2.5 – Angles d'un quadrilatère inscrit dans un cercle

Prop. III.22. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle (voir figure 2.5 a)), alors la somme de deux angles opposés vaut deux angles droits

$$\alpha + \delta = 2\text{r} . \quad (2.12)$$

Preuve d'Euclide : On regarde le triangle ABC (voir figure 2.5 b)). Par Eucl. III.20, on transporte les deux angles β et γ au point D et on voit que $\delta = \beta + \gamma$. Ainsi le résultat est une conséquence d'Eucl. I.32. QED.

Autre preuve : On voit en figure 2.5 c) que les angles au centre remplissent tout le tour de O , i.e., en appliquant Eucl. III.20, que $2\alpha + 2\delta = 4\text{r}$. QED.

Prop. III.35. Soient A, B, C et D quatre points situés sur un cercle avec E , l'intersection des segments $[AB]$ et $[CD]$, située à l'intérieur du cercle. Alors (voir figure 2.6 a))

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED . \quad (2.13)$$

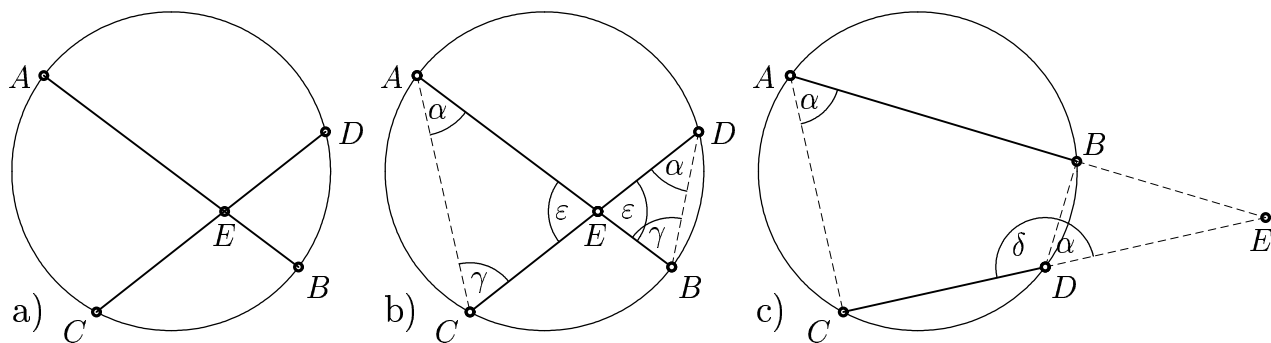
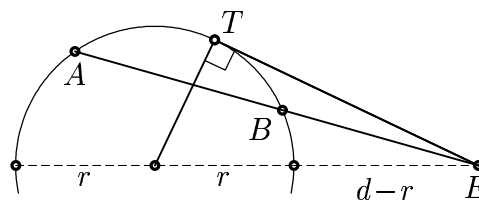


FIG. 2.6 – Puissance d'un point par rapport d'un cercle

Preuve. Poussé par des soucis de rigueur, Euclide refuse ici obstinément de “connaître” le Théorème de Thalès (voir plus bas, Livre VI) et démontre ce résultat par de longs calculs utilisant le Théorème de Pythagore I.47. Moins scrupuleux, nous voyons, à l'aide d'Eucl. III.20, que les triangles AEC et DEB sont semblables (voir figure 2.6 b)). Ainsi, la formule (2.13) vient du Théorème de Thalès. QED.

Prop. III.36. *Pour un cercle de rayon r et un point E de distance d du centre, et T le point tangent, on a toujours*

$$\begin{aligned} AE \cdot BE &= TE^2 = \\ &= (d + r)(d - r) = d^2 - r^2 . \end{aligned}$$



Cette valeur invariante $d^2 - r^2$ s'appelle *puissance du point E par rapport au cercle*.

La *Preuve d'Euclide* est longue et utilise le Théorème de Pythagore. Pour nous, il est plus facile de considérer ce résultat comme *cas limite* du corollaire suivant :

Corollaire (de Clavius 1574). *Soient A, B, C et D quatre points situés sur un cercle avec E , l'intersection des droites (AB) et (CD) , située à l'extérieur du cercle. Alors*

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE . \quad (2.14)$$

Preuve. Par Eucl. III.22, l'angle BDE est égal à l'angle CAE (voir figure 2.6 c)) et, une fois de plus, les triangles AEC et DEB sont semblables. À nouveau, la formule (2.14) provient du Théorème de Thalès. QED.

Remarque : La similitude de Eucl. III.35 avec le Corollaire de Clavius n'est pas le fruit du hasard. Plus tard, Poncelet (voir Chap. III) appellera ce genre de ressemblance le “Principe de la continuité”.

LIVRE IV. Cercles inscrits et circonscrits de triangles, carrés, pentagone régulier (Prop. IV.11), hexagone (Prop. IV.15) et le 15-gone régulier (Prop. IV.16). Sans l'utilisation du Théorème de Thalès, le traitement du pentagone est encore désagréable. La preuve élégante, vue en Section I.1, sera présentée bien plus tard (Prop. XIII.9).

LIVRE V. Théorie des *proportions*, très admirée, apparemment due à Eudoxe, concernant les rapports de grandeurs irrationnelles et leurs propriétés. On travaille constamment

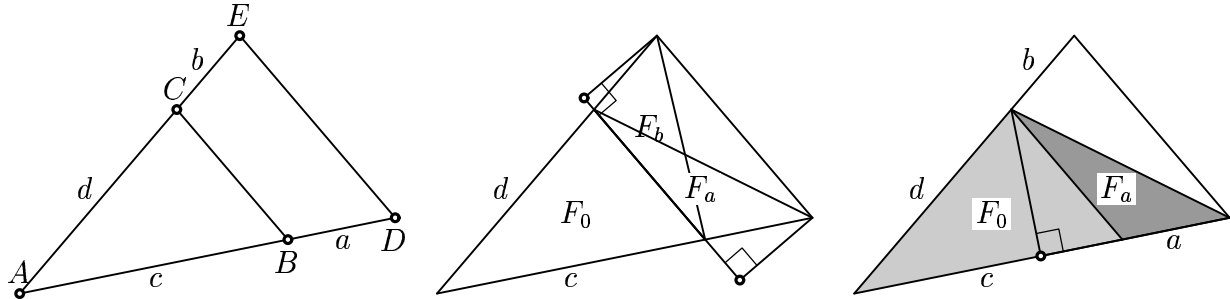
avec des inégalités multipliées par des nombres entiers. On “coince” donc une grandeur irrationnelle entre des grandeurs rationnelles, un peu dans le style des *coupures de Dedekind*, 2200 ans plus tard.

“There is nothing in the whole body of the elements of a more subtle invention, nothing more solidly established, and more accurately handled than the doctrine of proportionals”

(I. Barrow; voir *Heath II*, p. 186)

LIVRE VI. Une fois le problème des proportions réglé, on peut finalement s'attaquer aux divers théorèmes de Thalès. Prenons, comme exemple, les preuves d'Euclide suivantes :

Prop. VI.2. Soit BC parallèle à DE , alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (voir dessin).

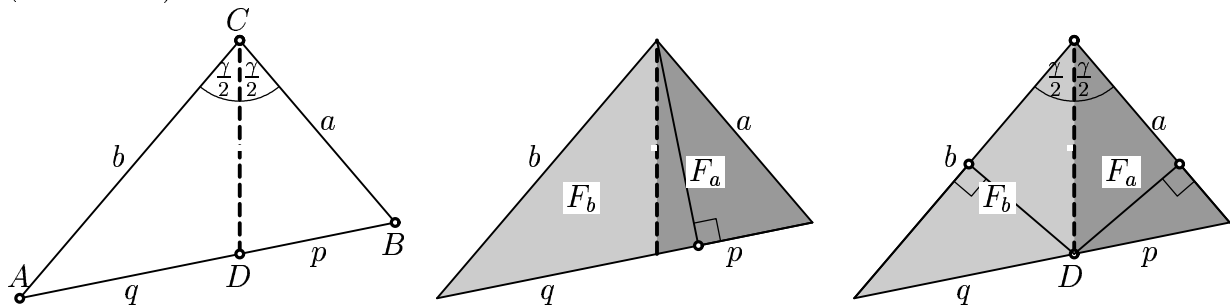


Preuve. On relie BE et DC . Cela crée deux triangles qui ont mêmes aires F_a et F_b , (même base et mêmes hauteurs; voir deuxième dessin). Ainsi

$$F_a = F_b \Rightarrow \frac{F_a}{F_0} = \frac{F_b}{F_0} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

car $\frac{F_a}{F_0} = \frac{a}{c}$ (voir troisième dessin); ces triangles ont la même hauteur sur AD . Similairement pour l'autre. QED.

Prop. VI.3. (Théorème de la bissectrice). Soit CD la bissectrice de l'angle γ , alors $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ (voir dessin).



Preuve. Soit F_a et F_b les aires des triangles DBC et ADC . Ces triangles ont la même hauteur sur AB (voir deuxième dessin) et (il s'agit de la bissectrice) la même hauteur sur AC resp. BC (voir troisième dessin). Ainsi

$$\text{une fois } \frac{F_a}{F_b} = \frac{p}{q}, \quad \text{et une fois } \frac{F_a}{F_b} = \frac{a}{b}. \quad \text{QED.}$$

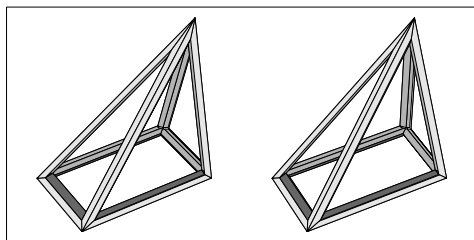
Les autres propositions sont des variantes de Thalès et des réciproques; la Prop.VI.9 explique la mesure des longueurs rationnelles (voir figure 1.4); la Prop.VI.19 démontre le

résultat (1.7) sur les aires de triangles semblables. C'est seulement maintenant qu'Euclide serait prêt pour la preuve de Naber du Théorème de Pythagore (voir figure 1.14).

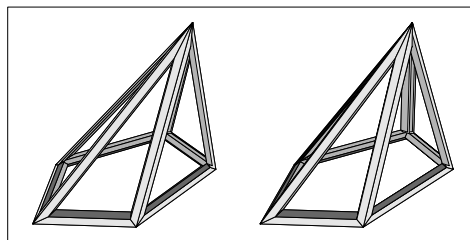
LIVRES VII-IX. La théorie des nombres entiers (nombres premiers, algorithme d'Euclide etc.) toujours traitée géométriquement.

LIVRE X. Classification des nombres irrationnels. La Prop. X.9 montre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. sont irrationnels. Livre très long; au total 115 propositions.

LIVRE XI. Géométrie tridimensionnelle, corps solides ($\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\varsigma$). Définition d'une *pyramide* ($\pi\upsilon\rho\alpha\mu\acute{\iota}\varsigma$, un corps formé par un polygone, un sommet et des triangles),



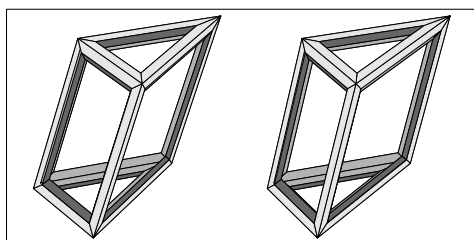
pyramide



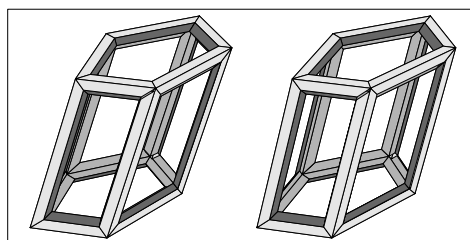
autre pyramide

(2.15)

d'un *prisme* ($\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha$, un corps formé par un polygone, un autre identique parallèle et des parallélogrammes),



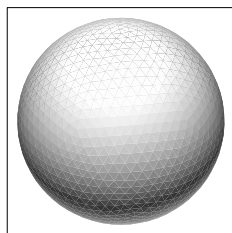
prisme



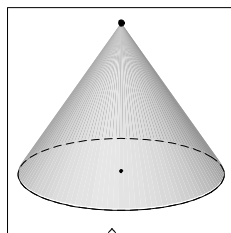
autre prisme

(2.16)

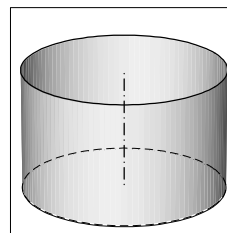
d'une *sphère* ($\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha$, corps formé par la rotation d'un demi-cercle autour d'un diamètre), d'un *cône* ($\kappa\acute{\omega}\nu\acute{o}\varsigma$, corps formé par la rotation d'un triangle rectangle autour d'une cathète), d'un *cylindre* ($\kappa\acute{\upsilon}\lambda\iota\nu\delta\rho\acute{o}\varsigma$, rotation d'un rectangle autour d'un côté),



sphère



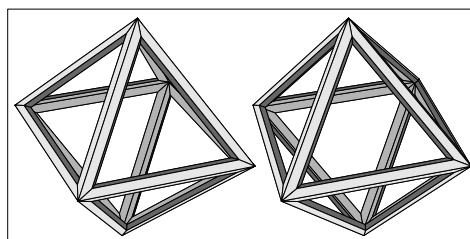
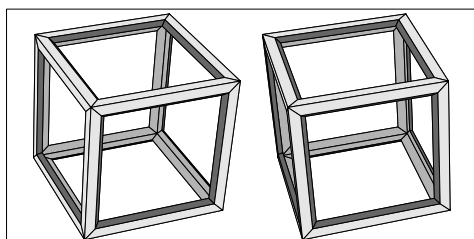
cône



cylindre

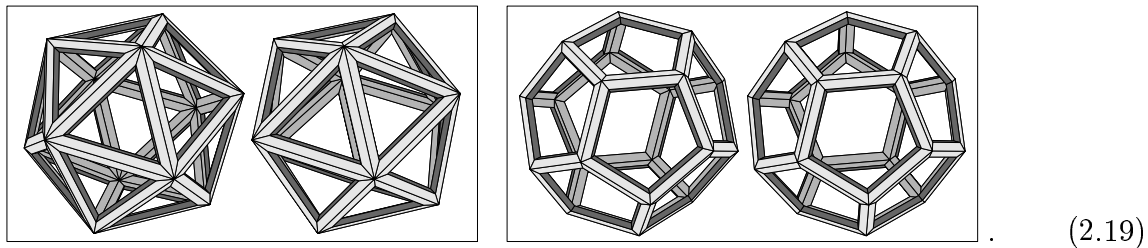
(2.17)

d'un *cube* ($\kappa\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$), d'un *octaèdre* ($\omicron\kappa\tau\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\omicron\varsigma = 8$ faces)



(2.18)

d'un *icosaèdre* ($\varepsilon^{\rho}\iota\kappa\omicron\sigma\acute{\alpha}\varepsilon\delta\rho\omicron\varsigma = 20$ faces), et d'un *dodécaèdre* ($\delta\omega\delta\varepsilon\kappa\acute{\alpha}\varepsilon\delta\rho\omicron\varsigma = 12$ faces).



Ces derniers corps (avec le *tétraèdre* ($\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\varepsilon\delta\rho\omicron\nu = 4$ faces) qu'Euclide ne définit pas), formés par des polygones réguliers identiques, sont les *corps platoniciens*; Platon les décrit dans son *Timæus* et les associe aux 5 éléments (cube \leftrightarrow terre, icosaèdre \leftrightarrow eau, octaèdre \leftrightarrow air, tétraèdre \leftrightarrow feu, dodécaèdre \leftrightarrow éther). Kepler s'est passionné pour ces corps : il cherche à les utiliser pour expliquer les “harmonies” du monde (voir figure 2.7).

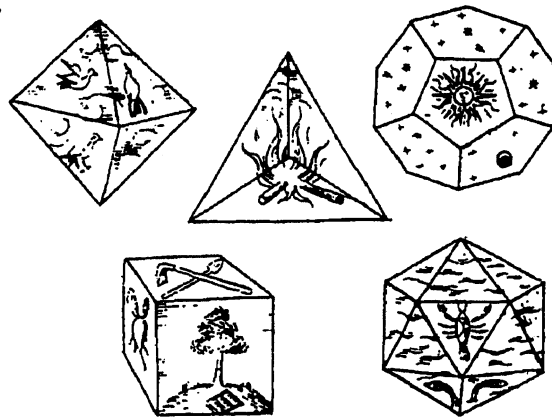
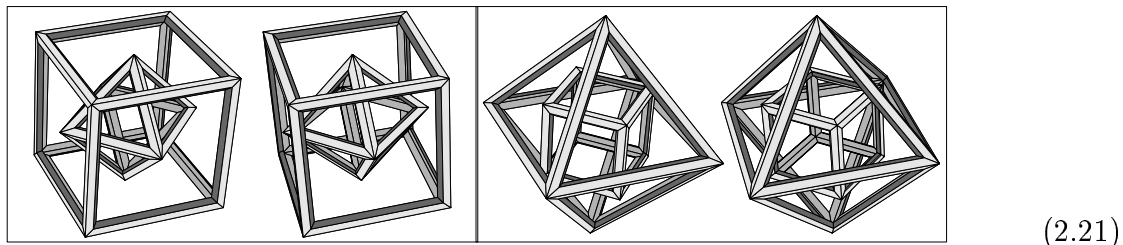
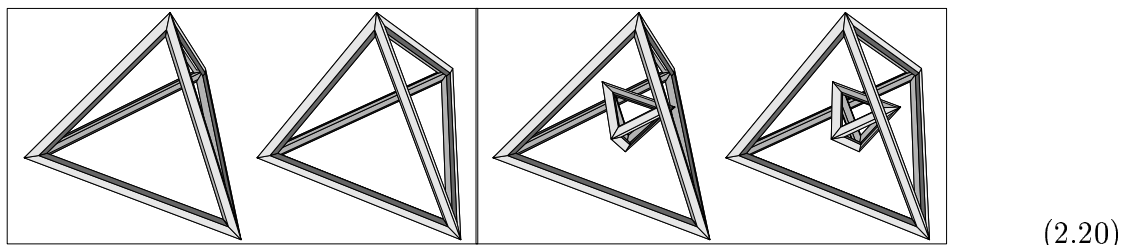
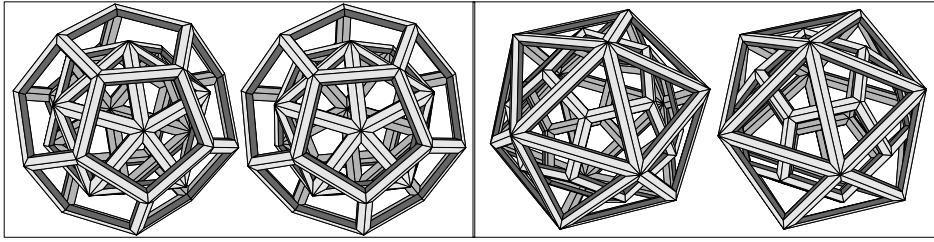


FIG. 2.7 – Corps platoniciens (dessins de Kepler, *Harmonices mundi* 1619)

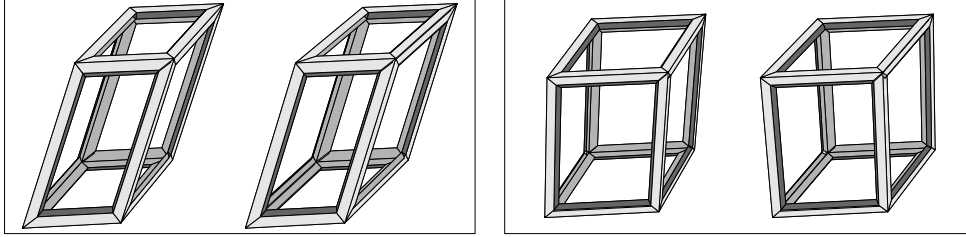
Notons encore le fait intéressant que tétraèdre \leftrightarrow tétraèdre, octaèdre \leftrightarrow cube, et dodécaèdre \leftrightarrow icosaèdre sont en dualité, si on relie les *centres* des polygones réguliers formant les faces :





(2.22)

Euclide omet la définition d'un *parallélépipède* ($\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omicron\varsigma$, prisme basé sur un parallélogramme) et du *parallélépipède rectangle* (tous les angles sont droits) :



parallélépipède

parallélépipède rectangle

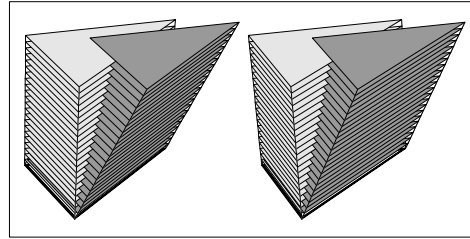
(2.23)

Propositions XI.1 – XI.26 : Propriétés de plans, droites et angles dans $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ méthodes analytiques, algèbre linéaire.

Propositions XI.27 ff : Volumes de prismes et de parallélépipèdes :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A} \cdot h \quad \text{où } \mathcal{A} = \text{aire de base; } h = \text{hauteur.} \quad (2.24)$$

Les preuves sont dans le style de la deuxième figure de fig. 1.9 (découper un morceau et le rajouter de l'autre côté). Comme Archimède, nous préférons les preuves par tranches fines ("méthode d'exhaustion" \rightarrow calcul intégral ; voir dessin).

prisme oblique \rightarrow prisme droit

(2.25)

LIVRE XII. Aires et volumes de cercles, pyramides, cônes et sphères.

Prop. XII.2. Les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 de deux cercles C_1 et C_2 de rayons r_1 et r_2 satisfont

$$\frac{r_2}{r_1} = q \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = q^2. \quad (2.26)$$

La preuve se base sur la Prop. VI.19 (voir (1.7)) en remplissant les cercles par des triangles. La rigueur de cette preuve est impressionnante : supposons

$$\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} > q^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_2 > \mathcal{S} = q^2 \mathcal{A}_1. \quad (2.27)$$

C_1

C_2

Il existe maintenant un polygone P dans C_2 avec aire

$$\mathcal{A}_2 > \mathcal{P} > \mathcal{S} \quad (2.28)$$

(pour ce dernier passage, on montre qu'en doublant les points de P , la différence des aires diminue au moins par facteur $\frac{1}{2}$; on applique ensuite une "Prop. X.1" disant, en notation moderne, que $\lim(\frac{1}{2})^n = 0$). Cela, divisé par q^2 , donne

$$\frac{\mathcal{P}}{q^2} > \frac{\mathcal{S}}{q^2} = \mathcal{A}_1 .$$

Finalement on divise le polygone P par q et on le place dans C_1 . Ainsi, par Prop. VI.19,

$$\frac{\mathcal{P}}{q^2} < \mathcal{A}_1 ,$$

une contradiction. Pour le cas $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} > q^2$ on inverse les rôles de C_1 et C_2 . Le seul cas possible est donc $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = q^2$. QED.

Plus tard, dans un travail *celebrissimo* (*De la mesure du cercle*, Oeuvres I, p. 127), avec des majorations et minorations dignes d'un virtuose, Archimède a trouvé que

$$\mathcal{A} = r^2 \pi \quad \text{où } \pi \text{ est un nombre avec } 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7} . \quad (2.29)$$

Propositions XII.3 – XII.9. Volumes de pyramides. Le résultat est

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A} \cdot h}{3} \quad \text{où } \mathcal{A} = \text{aire de base, } h = \text{hauteur.} \quad (2.30)$$

Nous préférons de nouveau les preuves par tranches fines (voir figure 2.8): pour se

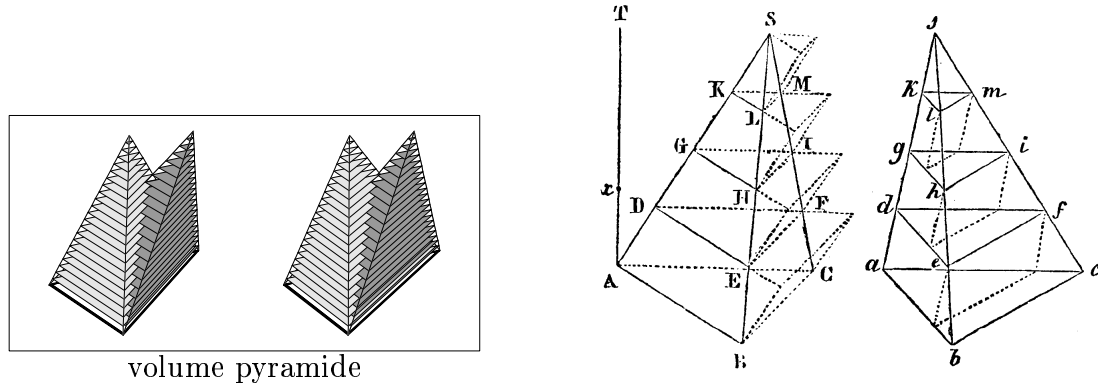
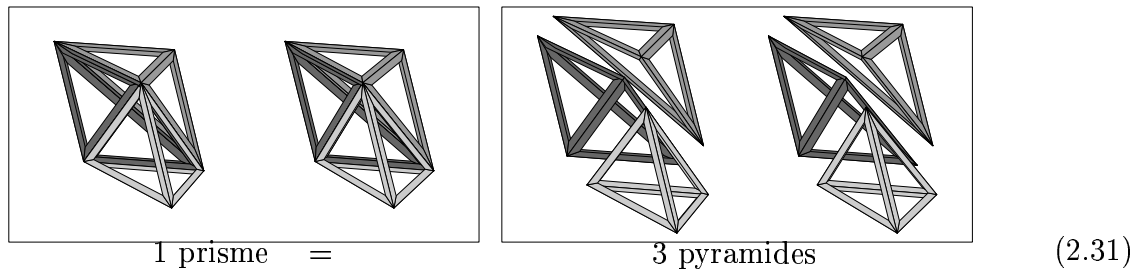


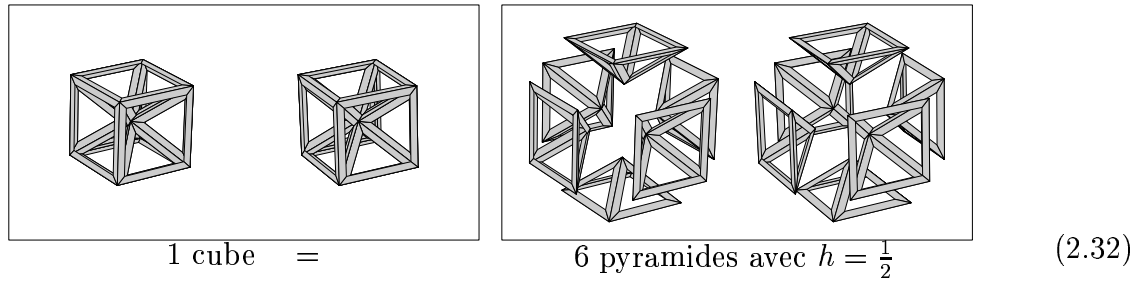
FIG. 2.8 – Volume d'une pyramide; à droite: dessin de Legendre (*Éléments de Géométrie*, 1^{re} éd. 1794; 43^e éd. 1926, p. 203).

convaincre du facteur $1/3$, Euclide décompose un prisme triangulaire en *trois* pyramides qui ont – deux à deux – même base et même hauteur: les trois ont donc le même volume:



$$(2.31)$$

Plus facilement (Clairaut 1741), on découpe un cube en *six* pyramides de hauteur $\frac{h}{2}$:



En calcul intégral, cela correspond à la formule $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Propositions XII.10 – XII.15. Volumes de cylindres et cônes.

$$\mathcal{V} = r^2 \pi h, \quad \mathcal{V} = \frac{r^2 \pi h}{3}. \quad (2.33)$$

Prop. XII.17. Les volumes \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 de deux sphères de rayons r_1 et r_2 satisfont

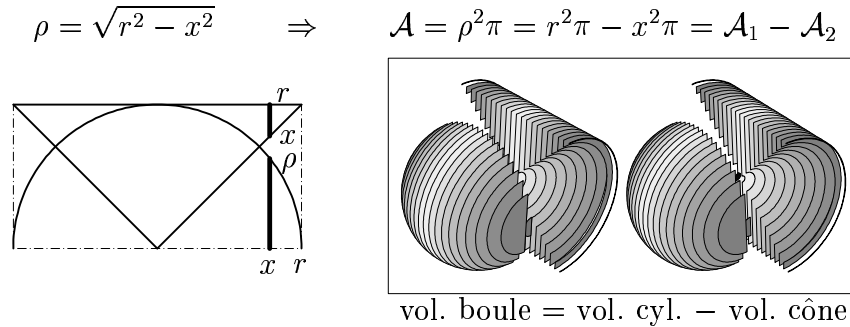
$$\frac{r_1}{r_2} = q \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = q^3. \quad (2.34)$$

La preuve est similaire à celle de XII.2, mais plus compliquée.

Plus tard, Archimède (voir *Des conoïdes et des sphéroïdes*, Prop. XXVII) a trouvé

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{et la belle formule} \quad \boxed{\mathcal{V}_{\text{cône}} : \mathcal{V}_{\text{boule}} : \mathcal{V}_{\text{cyl.}} = 1 : 2 : 3}. \quad (2.35)$$

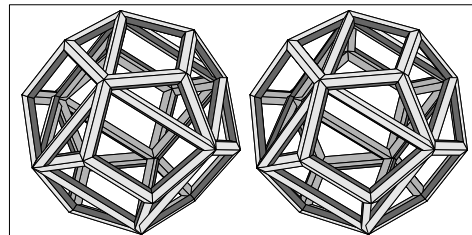
La *preuve* d'Archimède “par tranches fines” peut être simplifiée en observant que les aires, tranche par tranche, de la boule d'un côté et du cylindre moins deux cônes de l'autre côté, sont les mêmes :



LIVRE XIII. Constructions et propriétés des corps platoniciens.

Propositions XIII.1 – XIII.12 concernent la section d'or, le pentagone régulier et le triangle isocèle (voir section I.1).

Propositions XIII.13 – XIII.18. Tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre, dodécaèdre. Euclide construit le dodécaèdre à partir du cube en y rajoutant des “toits de chalets valaisans” sur chaque face (voir figure).



(2.36)

I.3 Période alexandrine — les coniques

Alexandre le Grand (nommé ainsi par les historiens, non par ses victimes) pénètre en Égypte où il fonde la ville d'Alexandrie en 331 av.J.-C. Pendant des siècles, une incroyable richesse culturelle s'y développe.

Alexandrie sombre sous les coups des envahisseurs romains (47 av.J.-C.), chrétiens (392 apr.J.-C.) et musulmans (640). Des centaines de milliers de parchemins servent de combustibles aux thermes. Comme dit le calife Omar : au cas où ils contiendraient la même chose que le Coran, on n'a pas besoin de les lire ; s' ils renferment autre chose que le Coran, on n'a pas le droit de les lire !...

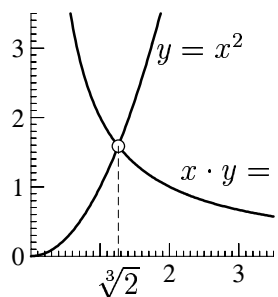
Les coniques.

“The cream of the classical period's contributions are Euclid's *Elements* and Apollonius' *Conic Sections*.”

(M. Kline, *Mathematical Thought...*, 1972, p. 27)

On doit à Apollonios la plupart des belles propriétés des coniques ; bon nombre de ses preuves sont devenues plus faciles grâce aux méthodes analytiques (voir Chapitre II). Même *l'idée géométrique* la plus élégante, les *boules de Dandelin*, a dû attendre 2000 ans (1822 apr.J.-C.) pour être enfin découverte par un ingénieur militaire belge (G.P. Dandelin 1794–1847). Cette découverte a complètement bouleversé la théorie des coniques ; les derniers résultats d'Apollonios et de Pappus sont aujourd'hui les premiers et vice-versa.

Origine des coniques. Deux terribles épidémies de peste sévissent à Athènes en 430 et 428 av.J.-C. Une délégation de la ville cherche alors conseil auprès de l'*Oracle de Delphes*. Elle reçoit l'ordre : *doublez le cube de mon autel*. On cherche alors fièvreusement à calculer $\sqrt[3]{2}$, indispensable à la construction d'un tel autel. “Mais non”, dit alors Platon : “l'oracle a une signification symbolique ; ce n'est pas le volume doublé qui va guérir les gens, mais bien l'avancement des mathématiques nécessaires à son calcul”. Hippocrates de Chios résoud ainsi le problème :

$$x \cdot \underbrace{x \cdot x}_y = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x \cdot y &= 2 \\ y &= x^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$


Menaechmus, élève d'Eudoxe et de Platon, découvre que ces courbes représentent l'intersection d'un plan et d'un cône. Ainsi est née la théorie des coniques qui lui a conduit à l'oeuvre fondamentale d'Apollonios.

La peste a finalement été vaincue grâce à l'avancement des sciences, qui elle débute précisément avec les ellipses de Kepler. Le hasard fait parfois bien les choses !

La parabole.

$\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$, comparaison, rapprochement, ressemblance, discours allégorique ...

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 1458)

Déf. d'une parabole (Pappus, *Collect. math.*, Livre VII, Prop. 238). Soit d une droite nommée *directrice* et F un point nommé *foyer* à distance p de la directrice ; alors on appelle *parabole* le lieu géométrique des points P qui ont la même distance ℓ de F et de d (voir premier dessin de la figure 3.1).

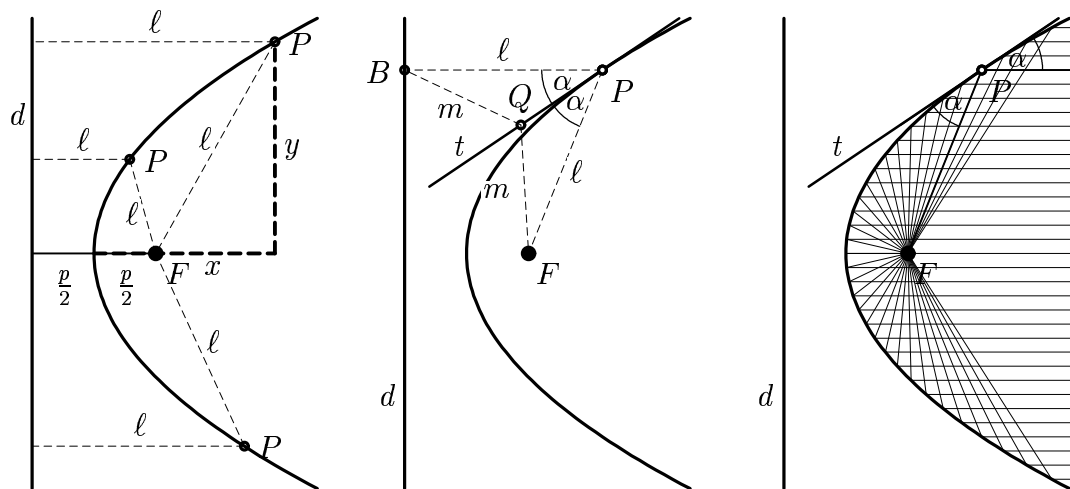


FIG. 3.1 – Définition et tangente de la parabole

Théorème (Apoll. Livre I, Prop. XI). Si un cône est coupé par un plan π , qui a la même inclinaison que les génératrices, alors l'intersection est une parabole.

Preuve (Dandelin 1822). Nous tirons profit du fait que les tangentes depuis un point P à une boule sont toutes de même longueur ; elles forment un cône et touchent la boule sur un cercle (voir le petit dessin de la figure 3.2).

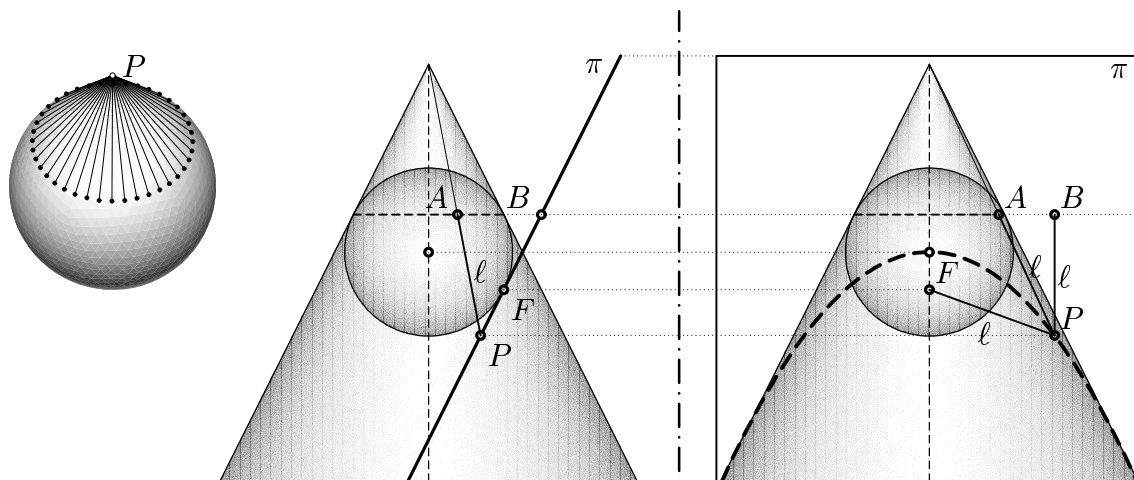


FIG. 3.2 – Parabole comme intersection d'un cône et d'un plan

L'idée cruciale est de placer une boule ("...de Dandelin") qui touche en même temps le cône (dans un cercle AA...) et le plan π dans un point F (qui sera le foyer ; voir les deux dessins de la figure 3.2). Soit maintenant P un point quelconque de l'intersection et A le point sur la même génératrice que P . Soit B le point dans π au-dessus de P dans la ligne (directrice!) à la même hauteur que le cercle AA... .

Ainsi $PF = PA$, car il s'agit de deux tangentes à une boule. Ensuite, le plan ayant la même inclinaison que le cône, $PA = PB$. QED.

Tangente à une parabole. Soit P un point sur la parabole, et t la droite bissectrice de l'angle BPF (voir deuxième dessin de la figure 3.1). Pour chaque autre point Q sur t , nous avons $BQ = QF$, car il s'agit toujours de triangles isocèles. Mais QF est *plus grande* que la distance de Q à la directrice d , cette droite n'étant pas orthogonale à d . Ainsi *tous les autres points Q de la droite t sont en dehors de la parabole et t est la tangente en P .*

Une des conséquences (utiliser Eucl.I.15, si vous voulez) est que tout rayon parallèle à l'axe est réfléchi par un miroir parabolique dans le foyer de la parabole (voir troisième dessin de la figure 3.1). Tous les miroirs paraboliques sur nos balcons, dans les stations PTT, dans les télescopes astronomiques, dans les phares, sont basés sur ce principe.

Équation. Si nous dénotons par x et y les coordonnées du point P à partir du sommet de la parabole (voir premier dessin de la figure 3.1), nous avons par Pythagore

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2xp, \quad (3.2)$$

i.e., l'aire d'un carré $y \cdot y$ est égale à l'aire d'un rectangle $x \cdot 2p$. Cette “comparaison, ressemblance...” est à l'origine du nom “parabole” (par Apollonios, voir citation).

L'ellipse.

² $\varepsilon\lambda\lambda\iota\pi\acute{\eta}\varsigma$, qui reste en arrière, incomplet, insuffisant, qui manque de ... (A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 649)

Supposons maintenant que le plan π d'intersection soit *moins raide* que les génératrices du cône (voir figure 3.3). Par conséquent, PB deviendra *plus grand* que PA par un facteur

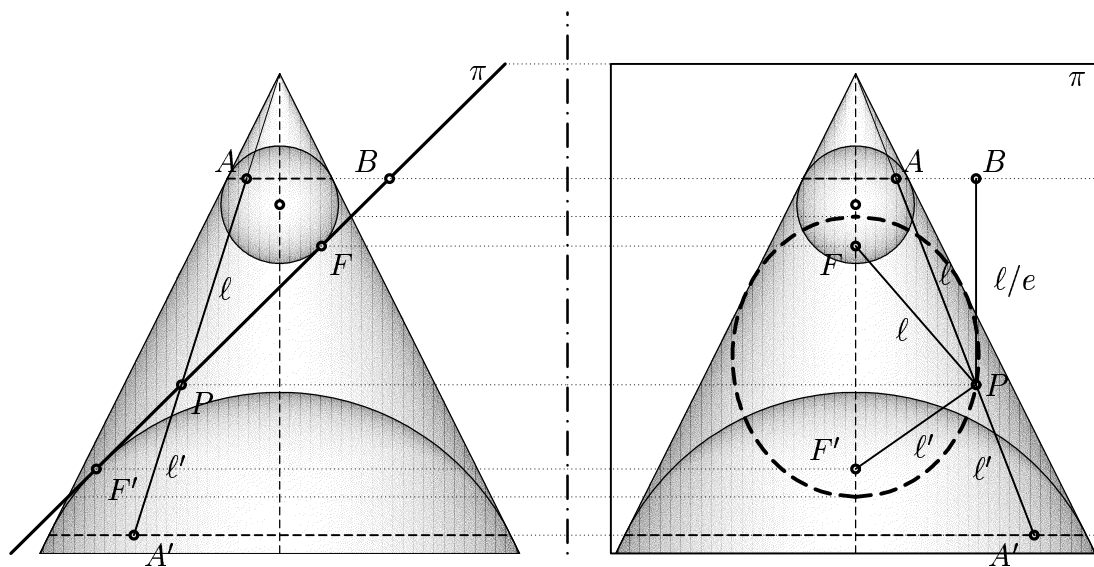


FIG. 3.3 – Ellipse comme intersection d'un cône et d'un plan

(Thalès!) que nous dénotons $\frac{1}{e}$ où e est un nombre $0 \leq e < 1$; il sera appelé l'*excentricité*.

Première Déf. d'une ellipse (Pappus). Soit un foyer F à distance p/e d'une directrice d (avec $0 \leq e < 1$) donné; alors on appelle *ellipse* le lieu géométrique des points P , dont le rapport des distances à F et à la droite d est la constante e (voir premier dessin de la figure 3.4).

Deuxième Déf. d'une ellipse. Plaçons maintenant une *deuxième* boule de Dandelin de l'autre côté du plan π (voir figure 3.3), qui touche le plan π en un deuxième foyer F' . Les

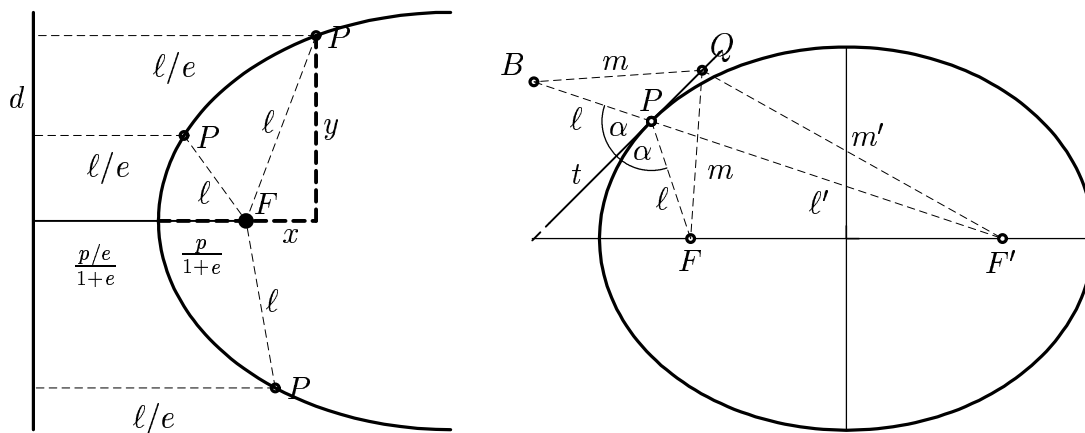


FIG. 3.4 – Définition d'une ellipse et construction de la tangente

deux boules touchent le cône en deux cercles parallèles. Par conséquent, la *somme* des deux distances de P à A et à A' est une constante. Par le même raisonnement qu'auparavant : la *somme des distances de P à F et à F' est constante* (Apoll. Livre III, Prop. LII, voir dessins en figure 3.5) :

$$\ell + \ell' = 2a \quad (3.3)$$

(si on place le point P sur l'un ou l'autre sommet, on voit que $\ell + \ell'$ est égale à la distance des deux sommets, donc égale à $2a$, où a est le demi-grand axe).

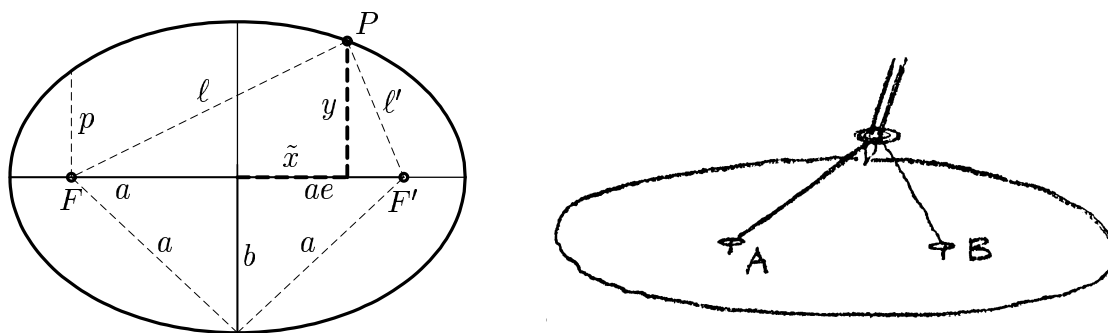
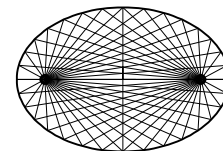


FIG. 3.5 – Une ellipse et ses foyers; à droite: dessin de R. Feynman (conférence sur la loi de la gravité de Newton, 1965)

Tangente à une ellipse (Apoll. Livre III, Prop. XLVIII). Soit P un point sur l'ellipse (voir deuxième dessin de la figure 3.4), et le point B sur la prolongation de $F'P$ à distance ℓ de P (i.e., à distance $2a$ de F'). Tirons alors la droite t comme bissectrice de l'angle BPF . Par conséquent, pour chaque autre point Q sur t , nous avons $BQ = QF = m$, car il s'agit toujours de triangles isocèles. Mais $QF + QF'$ est *plus grande* que $2a$, le polygone BQF' n'étant pas une droite (Eucl.I.20). Ainsi, *tous les autres points Q de la droite t sont en dehors de l'ellipse et t est la **tangente** en P .*

Comme conséquence, les rayons émis d'un foyer sont réfléchis, cette fois-ci, dans l'*autre* foyer par un miroir elliptique.

Équations de l'ellipse. Similairement aux calculs faits pour la parabole, Pythagore nous donne dans ce cas (voir premier dessin



de la figure 3.4)

$$\left(x - \frac{p}{1+e}\right)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{p/e}{1+e}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2xp - (1-e^2)x^2, \quad (3.4)$$

i.e., l'aire du carré $y \cdot y$ est *plus petite* que l'aire du rectangle $x \cdot 2p$. Ce “manque”, cette “insuffisance”, a conduit Apollonios (Livre I, Prop. XIII) à appeler cette courbe une “ellipse” (voir citation).

Deuxième équation de l'ellipse. Simplifions l'équation (3.4) en posant

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad p = \frac{b^2}{a} \quad (3.5)$$

et nous obtenons

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{1}{a^2}(x^2 - 2ax) = -\frac{1}{a^2}(x^2 - 2ax + a^2 - a^2).$$

Ici, nous avons fabriqué un carré complet $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$. Avec $\tilde{x} = x - a$, notre équation devient

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.6)$$

formule remarquable par sa symétrie et sa simplicité. Les constantes a et b (les “demi-axes”) sont celles de la figure 3.5, car pour $x = \pm a$ ou $y = \pm b$ on a $y = 0$ et $x = 0$ respectivement. Nous voyons aussi que l'excentricité exprime dans quelle mesure les foyers ne sont pas au centre.

Aire de l'ellipse. Si nous posons $\tilde{y} = \frac{a}{b} \cdot y$ dans (3.6), cette équation devient

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{a^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = a^2,$$

l'équation d'un cercle de rayon a (d'après Pythagore). Ainsi, chaque “tranche fine” de l'ellipse est par un facteur $\frac{b}{a}$ plus courte que celle du cercle. Cette propriété a été utilisée par Archimède dans un des premiers théorèmes dans *Des conoïdes et des sphéroïdes*, pour conclure que (voir dessins en figure 3.6)

$$\mathcal{A}_{\text{ellipse}} = \frac{b}{a} \cdot \mathcal{A}_{\text{cercle}} = \frac{b}{a} \cdot a^2 \pi = ab\pi. \quad (3.7)$$

Construction d'une ellipse par Proclus. Nous pouvons effectuer l'homothétie des coordonnées y à l'aide du théorème de Thalès: l'ellipse est alors engendrée par deux cercles, de rayon a et b respectivement.

On fait tourner un rayon OBA et on obtient P par projection horizontale de B et verticale de A (voir figure 3.7 (a)).

Diamètres conjugués. Deux diamètres dans la construction de Proclus, provenant de deux rayons OA et OA' *orthogonaux*, (voir figure 3.7 (a)), sont appelés *diamètres conjugués*. Chaque diamètre conjugué est parallèle aux tangentes de l'autre, et coupe au milieu les droites parallèles à l'autre diamètre (Apoll. Livre II, Prop. VI; voir figure 3.7 (b)). Ces propriétés découlent, encore et toujours par Thalès, des propriétés analogues des diamètres orthogonaux d'un cercle.

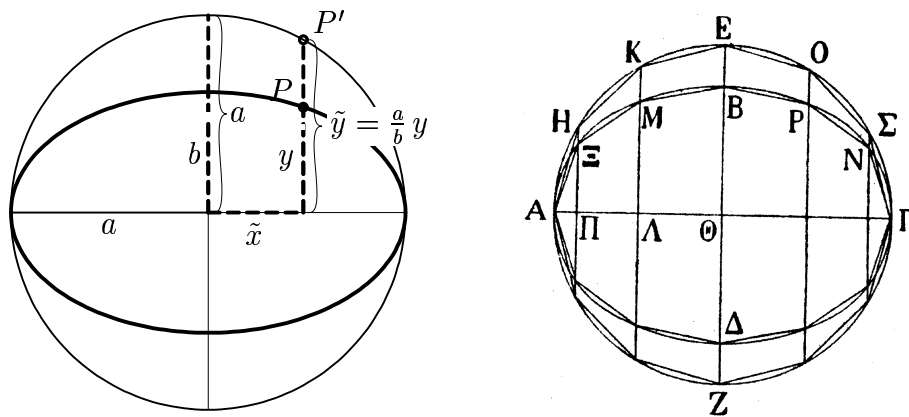


FIG. 3.6 – Construction de l'ellipse depuis un cercle par homothétie de y ; à droite : dessin d'Archimède (*Des conoïdes et des sphéroïdes*)

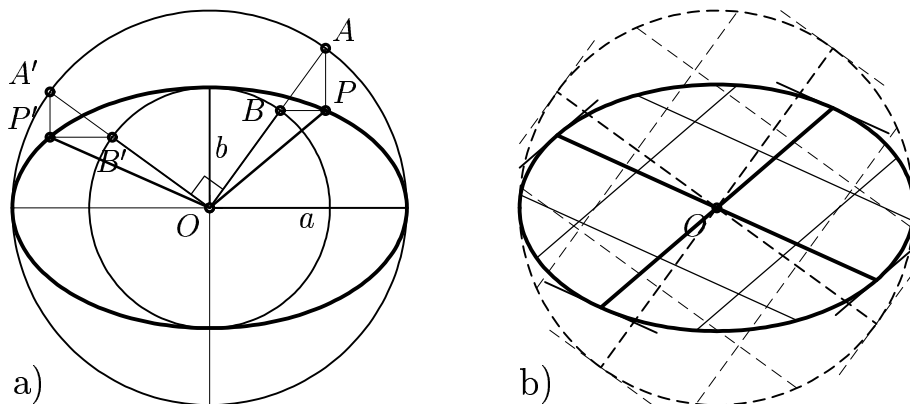


FIG. 3.7 – Construction de l'ellipse par Proclus (a) et diamètres conjugués (b)

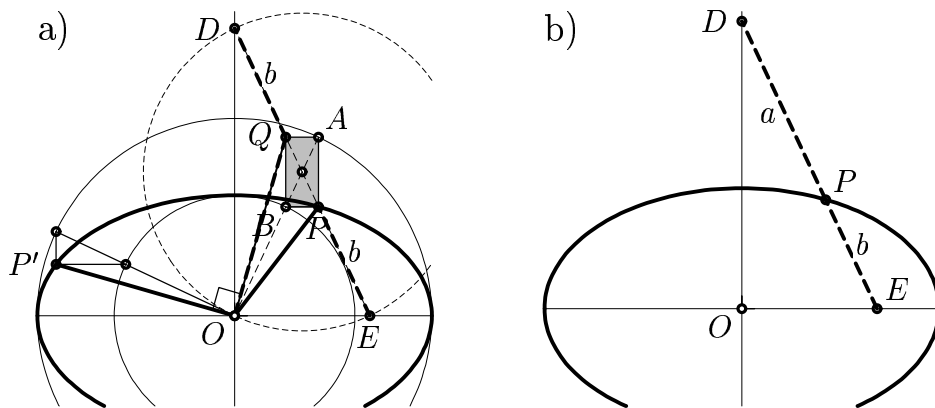


FIG. 3.8 – Construction de l'ellipse à partir de deux diamètres conjugués (a) ; construction par un bâtonnet glissant (b)

Construction de l'ellipse à partir de deux diamètres conjugués. Si seulement deux diamètres conjugués d'une ellipse sont connus, comment trouver l'ellipse? Une première construction pour répondre à cette question est due à Pappus. Euler (*Solutio problematis geometrici* 1753, voir *Opera* Vol. 26, p. 60-70) en donne quatre autres. La construction qui suit est inspirée par le dessin en figure 3.7 (a) :

Idée : tourner de 90° un des deux diamètres OP' , avec son “triangle porteur”, pour

qu'il devienne le segment OQ (voir figure 3.8 (a)). Ainsi, le triangle va se joindre au triangle porteur de P pour former un rectangle parallèle aux axes. Car les distances $AO = QE = PD = a$ et $BO = PE = QD = b$, le milieu M entre P et Q a même distance $\frac{a+b}{2}$ de O , de E et de D . Cela nous conduit à la construction suivante :

Construction de Rytz: Soient deux diamètres conjugués OP et OP' donnés. Tourner un des deux diamètres OP' de 90° pour qu'il devienne le segment OQ . Soit M le milieu entre P et Q . Tracer le cercle centré en M passant par O . Ce cercle va couper des points D et E sur la droite (PQ) . Ainsi, les droites (OE) et (OD) indiquent les directions des axes ; les distances $DP = a$ et $PE = b$ sont les demi-axes de l'ellipse.

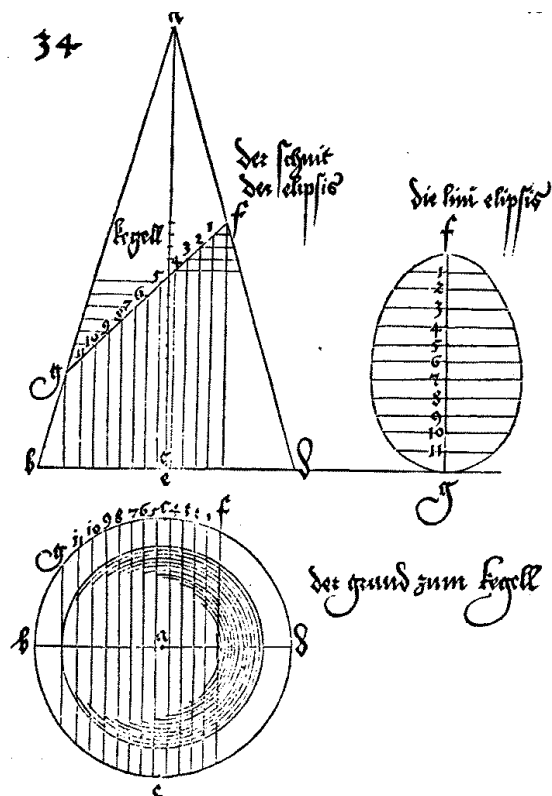


FIG. 3.9 – Gravures sur bois d'A. Dürer ; la roue de la Fortune, 1526 (à gauche) ; Underweysung der messung, 1525 (à droite)

Construction de l'ellipse par un bâtonnet (Proclus). La figure 3.8 (a) nous indique la construction suivante d'une ellipse : imaginons qu'un "bâtonnet" DE de longueur $a + b$ glisse avec ses extrémités sur les axes (voir figure 3.8 (b)) ; alors le point P , situé sur ce bâtonnet à distance a de D et à distance b de E , va décrire l'arc de l'ellipse de demi-axes a et b .

Remarque. Comme les ellipses sont quasi omniprésentes sur les images, la théorie des ellipses a particulièrement intéressé les artistes de la Renaissance (voir figure 3.9 ; il est intéressant de comparer l'ellipse de Dürer à celles complètement erronées de la figure 4.1).

L'hyperbole.

$\varsigma\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\acute{\eta}$, action de lancer par-dessus ou au-delà, action de dépasser la mesure, excès, surabondance ...

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 2002)

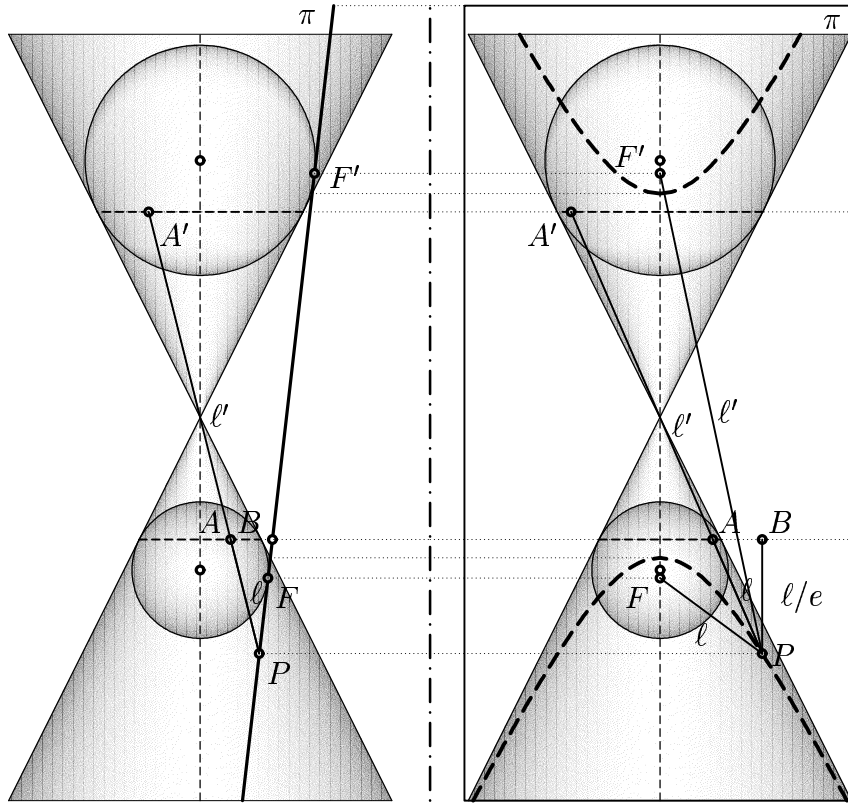


FIG. 3.10 – *Hyperbole comme intersection d'un cône et d'un plan*

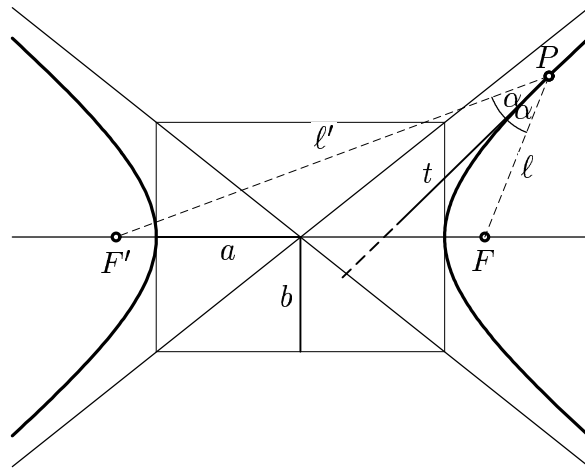


FIG. 3.11 – *L'hyperbole et sa tangente*

Cette fois-ci, prenons le plan π *plus raide* que les génératrices du cône (voir figure 3.10), i.e., l'excentricité $e > 1$. Ainsi, l'équation (3.4) devient

$$y^2 = 2xp + (e^2 - 1)x^2, \quad (3.8)$$

et nous avons bien excès, surabondance, dans l'aire du carré. Comme la signification du préfixe “hyper” ne fait pas de doute de nos jours : hyperthermie, hypertension — pour cela vous êtes trop jeunes — alors : hypermarché, hyperactif, hypercool ... nous comprenons bien pourquoi cette courbe s'appelle *hyperbole* (Apoll. Livre I, Prop. XII).

Le reste de la théorie est très similaire à celle de l'ellipse ; nous avons (voir figure 3.10)

$$\ell - \ell' = \pm 2a \quad (3.9)$$

à la place de (3.3), et

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.10)$$

pour les coordonnées basées dans le centre, à la place de (3.6). La tangente est la bissectrice de l'angle FPF' (voir figure 3.11).

Asymptotes de l'hyperbole.

$\sigma\delta\mu\pi\tau\omega\sigma\iota\varsigma$, II. rencontre (de fleuves...) conflit, attaque ...

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 1831)

Nous rencontrons avec l'hyperbole un nouveau phénomène : celui d'une asymptote (“symptosis” signifie “rencontre” (voir citation), le préfixe “a-” est la négation (atome, atypique, asocial, anormal, apesanteur, aphone ...) ; une *asymptote* est donc une droite qui, même en s'approchant de la courbe, ne la *rencontre pas* (Apoll. Livre II, Prop. I). Écrivons (3.10) sous la forme

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1. \quad (3.11)$$

Si les valeurs x et y deviennent grandes, le 1 devient négligeable ; cette équation se décompose alors en

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x, \quad (3.12)$$

qui sont deux droites vers lesquelles l'hyperbole se rapproche quand x et y tendent vers l'infini. On voit aussi que l'équation de l'hyperbole devient très simple en prenant les asymptotes pour axes de coordonnées. Ainsi, la première courbe de (3.1) est une hyperbole.

Aire de la parabole.

“Qui Archimedes et Apollonius intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur.”

(Leibniz ; copié des *Oeuvres d'Apollonius*, Ver Eecke 1922)

Un autre célèbre résultat d'Archimède concerne l'aire de la parabole :

$$\mathcal{P} = \frac{4}{3} \cdot \mathcal{T} \quad \text{où : } \mathcal{P} = \text{aire de la parabole, } \mathcal{T} = \text{aire du triangle inscrit.} \quad (3.13)$$

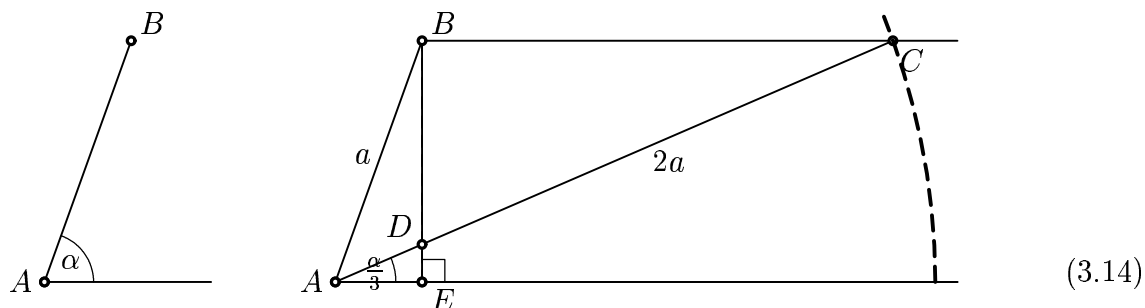
Preuve. On remplit la parabole par le triangle gris clair \mathcal{T} , puis par 2 triangles gris moyen d'aire $\frac{\mathcal{T}}{8}$ chacun (même aire que le triangle en pointillé ; utiliser (3.2) et Eucl.I.41), puis

On peut aussi prendre b négatif et obtenir d'autres courbes, parfois avec des rebroussements ou des boucles.

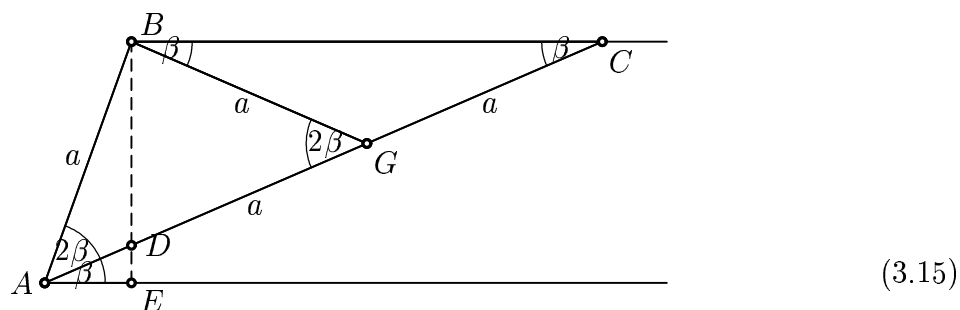
La trisection d'un angle. L'immense oeuvre d'Euclide a laissé des problèmes ouverts, parmi lesquels la *trisection d'un angle donné*.

Problème. Donné un angle α en A (figure (3.14) à gauche), trouver un angle $\beta = \frac{\alpha}{3}$.

Solution de Nicomède. Abaisser la verticale BE et tirer par B la parallèle à AE (voir figure (3.14) à droite). Couper sur cette parallèle le point C de façon à ce que la longueur DC soit égale à $2a$, où a est la longueur AB . En d'autres mots, C est l'intersection de cette parallèle avec la conchoïde de A , la droite EB et la distance $b = 2a$. L'angle EAD est alors l'angle recherché.



Preuve. Appelons β l'angle EAD (voir figure (3.15)) et soit G la bissection de DC , avec $DG = a$ et $GC = a$. Car G est à mi-hauteur entre D et B , le triangle DGB est isocèle et $GB = a$. Ainsi les triangles BGC et GBA sont aussi isocèles. Par conséquent, nous avons β en C (angle parallèle), puis β en B (isocèle), puis 2β en G (angle extérieur), finalement $2\beta + \beta = 3\beta$ en A (isocèle). QED.



Êtes-vous totalement satisfaits? Évidemment non, car il ne s'agit pas d'une construction par règle et compas (Post. 1-3). 2000 ans plus tard (voir Section II.2 en bas), on prouve qu'une telle construction est impossible!....

La spirale d'Archimède. Si une demi-droite tourne à vitesse angulaire constante autour d'un point, et si un point P avance à vitesse constante sur la droite, alors ce dernier décrit une courbe qu'on appelle *spirale d'Archimède* (voir premier dessin de la figure 3.13). Cette courbe est une trisectrice évidente d'un angle (et même une n -sectrice; voir dessin du milieu). Archimède (dans *Des spirales*, Oeuvres I, p. 239-299) s'intéresse surtout à déterminer de manière ingénieuse ses tangentes et son aire :

Prop. XX. La tangente à un point Δ coupe la droite orthogonale à $A\Delta$ dans un point Z tel que $AZ = \text{arc } \Delta K$.

Idée de la Preuve. Le triangle ΔAZ est semblable au "triangle infinitésimal" (bonjour Leibniz 1676!...) $\Delta\Phi E$ (voir figure 3.13 c)). Donc par Thalès $AZ = A\Delta \cdot \frac{r d\varphi}{dr}$. Ici on insère $r = a\varphi$ (où a représente le rapport des vitesses) et on obtient $AZ = r\varphi$. QED.

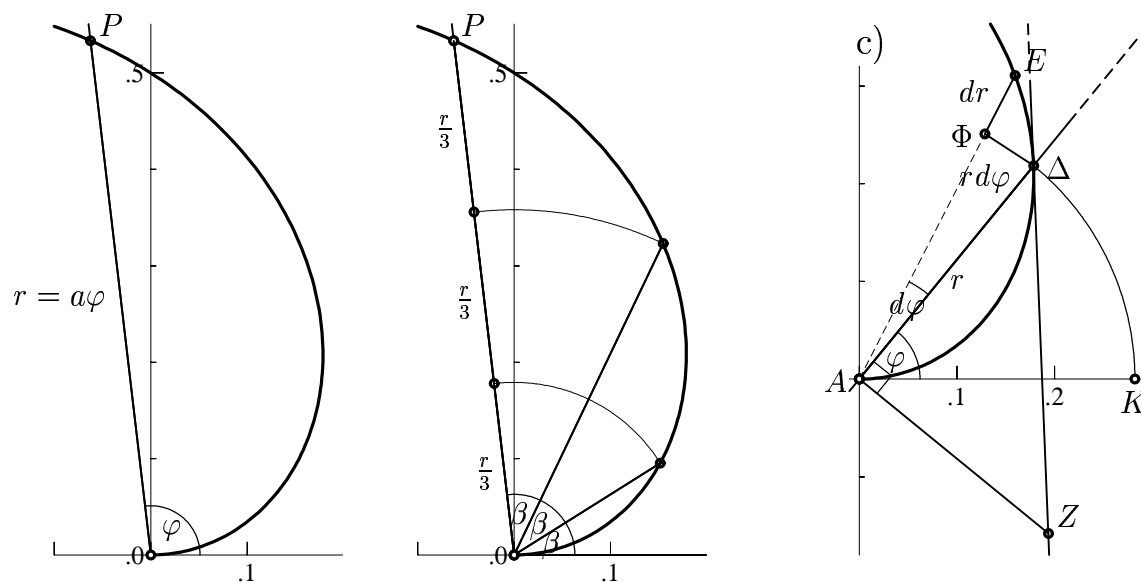


FIG. 3.13 – La spirale d’Archimède pour la trisection d’un angle (au milieu), et sa tangente (à droite)

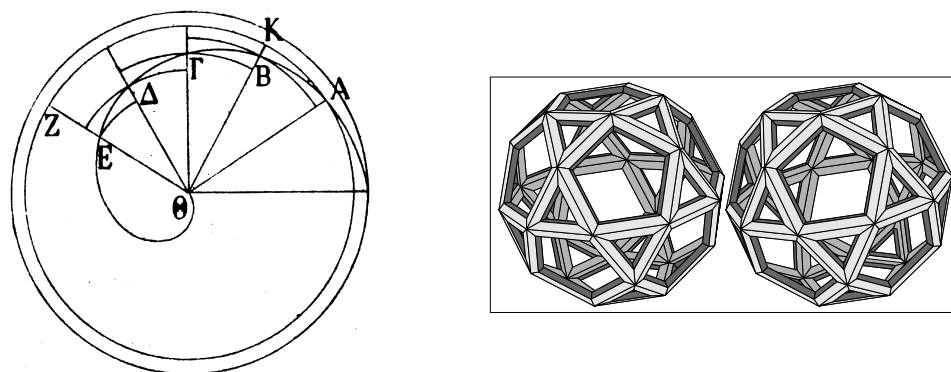


FIG. 3.14 – Dessin d’Archimède pour l’aire de la spirale (à gauche); icosidodécaèdre en stéréographie (A. Abdulle-G. Wanner, *Elemente der Math.* 57 (2002), à droite)

Prop. XXIV. L’aire entre la spirale et un rayon $A\Delta$ (voir figure 3.13 c)) est égale à un tiers de l’aire du secteur circulaire $A\Delta K$.

Idée de la Preuve. Par “tranches fines” (voir figure 3.14, à gauche). Le facteur $\frac{1}{3}$ est lié à l’aire de la parabole (voir la Remarque 2) ou au volume de la pyramide. QED.

Les corps archimédiens. Une fois notre admiration des corps platoniciens satisfaite, on voudrait savoir s’il existe d’autres corps, dont les faces sont des polygones réguliers, *mais de types différents*. Et, effectivement, Pappus affirme qu’Archimède en aurait découvert 13. Cette oeuvre d’Archimède étant perdue, la redécouverte de ces corps a nécessité de longs efforts (Leonardo da Vinci, A. Dürer); finalement Kepler retrouve en 1619 la collection entière (voir J.V. Field, *Arch. History Exact Sc.*, 50 (1996)). Voir en figure 3.15 ces treize corps de la production keplerienne; et en figure 3.14 (à droite) un de ces corps, nommé *icosidodécaèdre*, de la production didaskalosienne. Celui qui a le courage de programmer les 12 autres recevra une plaque de chocolat.

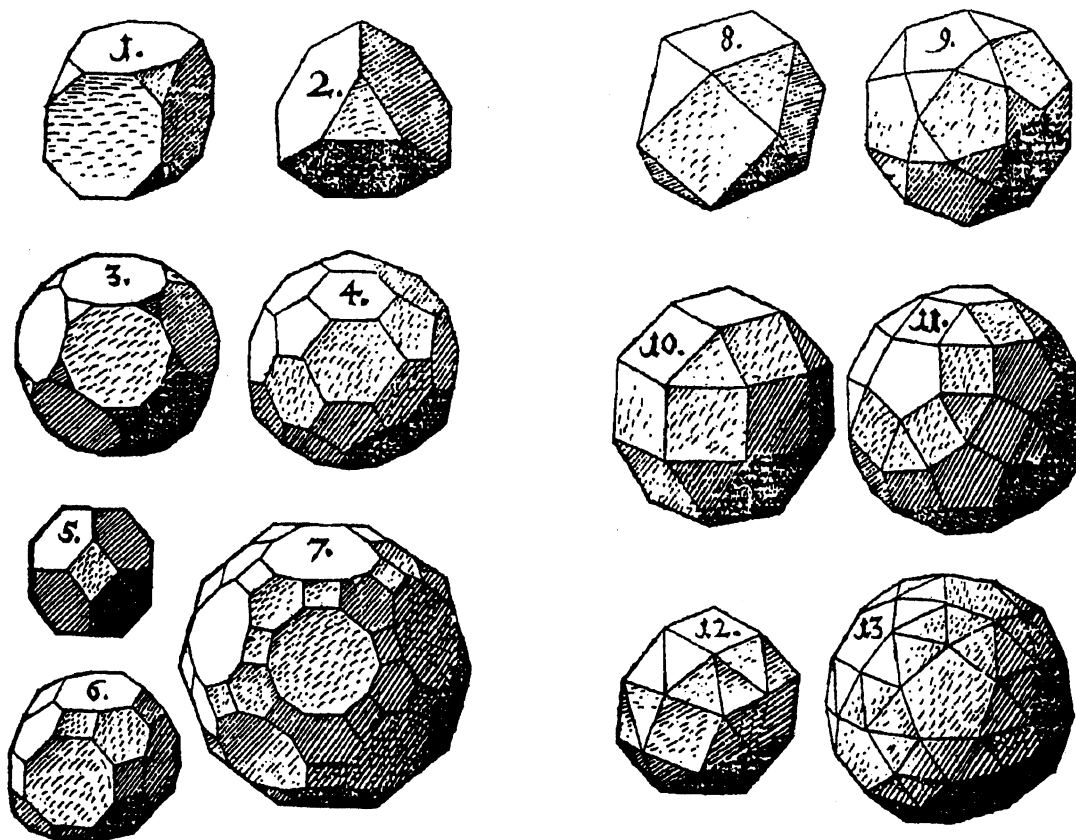


FIG. 3.15 – Corps archimédiens (dessins de Kepler, *Harmonices mundi* 1619)

I.4 Trigonométrie

τρεῖς, τρεῖς, τρία, trois ...

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 1954)

γωνία, angle, coin ...

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 423)

L'objectif de la trigonométrie, développée au cours des deux derniers siècles avant notre ère (Hipparque), est de mesurer les angles *avec grande précision* et de les utiliser dans diverses applications, notamment en astronomie.

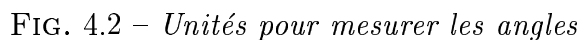
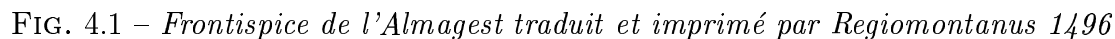
L'oeuvre d'Hipparque a été perdue ; la trigonométrie nous est parvenue grâce au livre *μεγάλη σύνταξις*⁴ de Ptolémée (écrit vers 150 apr.J.-C.), où la trigonométrie sert de base à sa théorie de l'Univers. Les astronomes arabes lui donnèrent le titre arabo grec “*Al-megīstā*”, et ce livre est devenu l'*Almagest*, traduit en latin par Regiomontanus (imprimé en 1496 ; deuxième livre scientifique imprimé de l'Histoire⁵).

Quelles unités choisir pour les angles ?

- Les *Babyloniens* divisent le cercle en 360° , vraisemblablement parce que ce nombre représente approximativement le nombre de jours dans une année. La moitié du cercle est alors de 180° , l'angle droit de 90° , et les angles du triangle équilatéral

4. Mégabyte, mégaflops, mégawatt, mégalithe, mégalomanie ... ; un livre qui commence par “méga” n'est certainement pas une mince affaire...

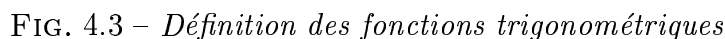
5. Qui devine le premier ?



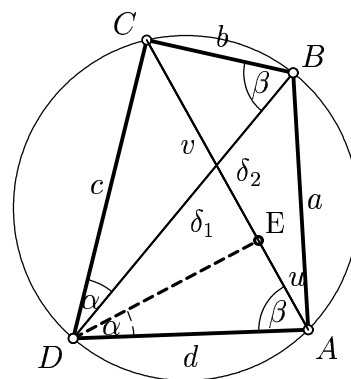
mesurent 60° (voir figure 4.2 à gauche). Ptolémée affine la mesure des angles, en faisant intervenir les “décimales” suivantes en base 60, alors en usage : *partes minutae primae* (premières petites subdivisions), *partes minutae secundae* (deuxièmes petites subdivisions). Cela a conduit à nos “minutes” et à nos “secondes” ;

- Le meilleur choix pour l’analyse, les séries et le calcul différentiel est *la longueur d’arc* (depuis Euler 1748), car ce choix satisfait $\sin x \approx x$ pour x petit. Le demi-cercle correspond donc à $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots$ le cercle entier à 2π , l’angle droit à $\frac{\pi}{2}$ (voir figure 4.2 à droite) ;
- Pour Euclide, l’unité est l’angle droit (Post. 4). Si les valeurs sont multipliées par 100, on obtient les “grades”, en usage dans certaines applications techniques.

Fonctions trigonométriques. Dans l'Antiquité grecque, on calcule “cord α ” (voir figure 4.3 à gauche), ce qui représente la distance des deux pointes d'un compas enfermant un angle α . Plus tard (Brahmagupta env. 630 apr. J.-C., Regiomontanus 1464), on préfère \sin et \cos , mieux adaptés au calcul des triangles. Le sinus est lié à cord par $\sin \alpha = (1/2)\text{cord}(2\alpha)$.



The diagram shows a right triangle with hypotenuse 1 and angle α at the origin. A perpendicular is dropped from the top vertex to the horizontal axis, creating a smaller right triangle with angle β and a shaded region. The diagram labels various trigonometric components: $\sin \beta \cos \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \beta \sin \alpha$, $\cos \beta \sin \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \beta \cos \alpha$, and the angles α and β .



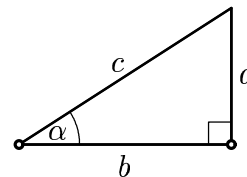
Définition. Placer un triangle rectangle dans un cercle de rayon 1, situé comme dans la figure 4.3. Alors, la longueur du côté opposé à l'angle α est $\sin \alpha$, celle de l'autre côté est

$\cos \alpha$. On a

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{et} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (4.1)$$

Ces définitions s'appliquent immédiatement à un triangle rectangle de grandeur arbitraire :

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin \alpha, & b &= c \cdot \cos \alpha, & a &= b \cdot \tan \alpha, \\ \sin \alpha &= \frac{a}{c}, & \cos \alpha &= \frac{b}{c}, & \tan \alpha &= \frac{a}{b}. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Théorème d'addition.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Preuve. Voir figure 4.5 pour la preuve classique. Plus tard, on acceptera aussi les angles négatifs et on obtiendra les deuxièmes formules à l'aide des premières et de $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. QED.

Remarque. La preuve originale de Ptolémée passe par le célèbre *Lemme de Ptolémée* :

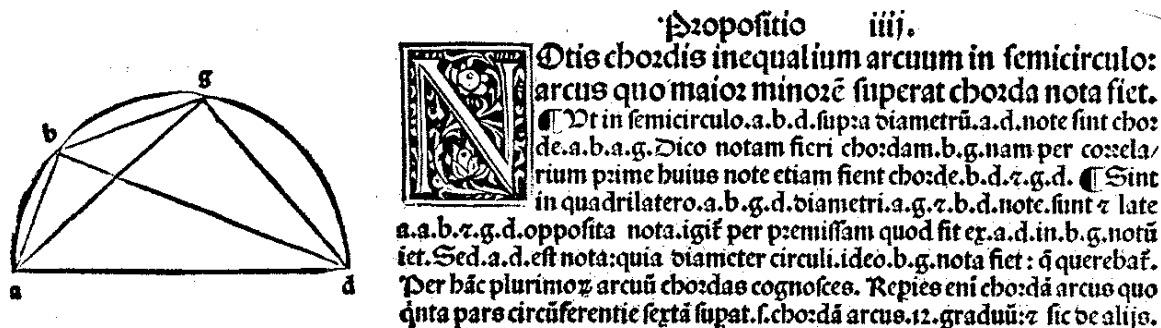


FIG. 4.6 – Lemme de Ptolémée et preuve du théorème d'addition dans l'*Almagest*, 1496

Lemme de Ptolémée. Pour un quadrilatère inscrit dans un cercle, les côtés et les diagonales satisfont

$$ac + bd = \delta_1 \delta_2.$$

Preuve. Tracer une droite DE telle que l'angle EDA soit égal à l'angle CDB (voir figure 4.5 à droite). Ainsi, les triangles suivants sont semblables (les β sont des angles périphériques)

$$\text{EDA} \cong \text{CDB} \implies \frac{b}{\delta_1} = \frac{u}{d} \quad \text{DCE} \cong \text{DBA} \implies \frac{a}{\delta_1} = \frac{v}{c}$$

donc $bd + ac = (u + v)\delta_1 = \delta_1 \delta_2$. QED.

Double et demi-angles. En posant $\alpha = \beta$ dans (4.3), nous avons

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

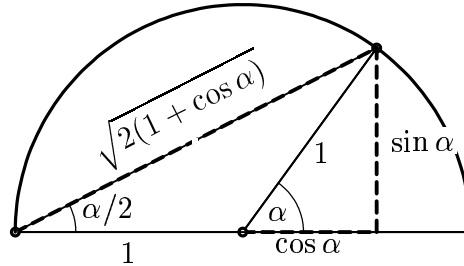
$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

TAB. 4.1 – Valeurs de \sin , \cos et \tan issues des polygones réguliers

α	radians	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°	0	0	1	0
15°	$\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\pi/10$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\pi/5$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}}$
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	∞

Ensuite, on remplace α par $\alpha/2$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.\end{aligned}\tag{4.4}$$



Quelques valeurs pour \sin et \cos . Les proportions du triangle équilatéral, du carré, du pentagone et du décagone livrent \sin et \cos pour les angles de 18° , 30° , 36° , 45° et 60° . Une fois un sinus connu, on trouve le \cos par Pythagore (4.1). Puis, en prenant les demi-angles on arrive à 15° , et à l'aide des différences à 3° . Ensuite, par les formules d'addition, on peut calculer \sin et \cos pour tous les angles $\alpha = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ \dots$. La liste complète des expressions analytiques a été calculée par Lambert (1770).

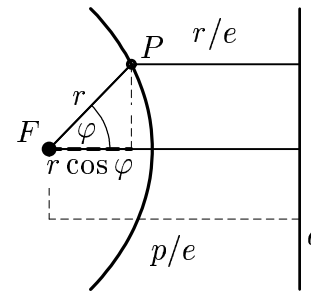
Il est plus difficile de trouver $\sin 1^\circ$, problème lié à la trisection d'un angle (voir détails en [HW97, p. 49] et en Section II.2 en bas).

Voici une liste des valeurs obtenues dans le tableau 4.1.

Applications à la géométrie.

Équation polaire des coniques. Pour obtenir l'équation des coniques en coordonnées polaires (r, φ) , centrées dans un foyer, nous utilisons la première définition (voir premier

dessin de la figure 3.4). On voit immédiatement

$$\begin{aligned}
 r \cdot \cos \varphi + \frac{r}{e} &= \frac{p}{e} \\
 \Rightarrow r(e \cos \varphi + 1) &= p \\
 \Rightarrow r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.
 \end{aligned}$$

(4.5)

C'est grâce à cette formule (et à quelques valeurs du cos connues par coeur ; voir J.L.E. Dreyer, *Hist. Astr.*, p. 391) que Kepler a fait la grande découverte suivante :

Équation de Kepler.

On l'a dit, et c'est vrai : sans Kepler, le progrès de l'astronomie eût été retardé d'un siècle ; sans Kepler, il n'y aurait pas eu Newton.

(Encyclopædia Universalis, Vol. 10, p. 824)

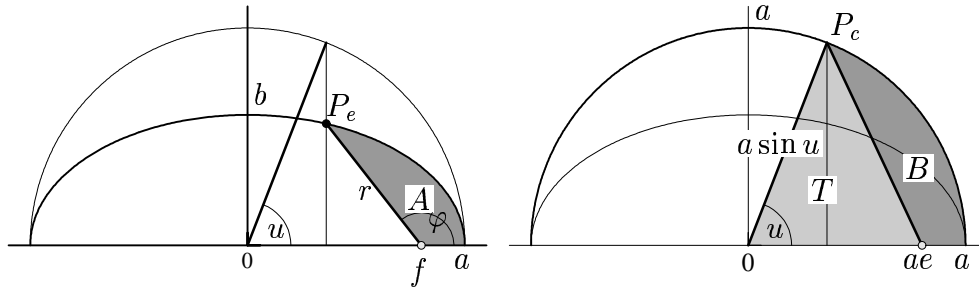


FIG. 4.7 – *Orbite de Kepler* ; P_e la planète, f le foyer (Soleil), u l'anomalie excentrique, a le demi-axe majeur (périhèle), e l'excentricité

La première loi, extraite par Kepler des innombrables mesures effectuées par Tycho Brahe, stipule que les planètes se meuvent sur des ellipses, le soleil étant dans un des foyers. Mais à quelle vitesse bougent-elles ? Ici, la deuxième loi affirme que les aires, balayées par le rayon dans des temps égaux, sont égales. Prenons le point $t = 0$ au périhèle. Alors par cette loi, t est proportionnel à l'aire A (voir figure 4.7 à gauche). Ici, la période P de l'orbite correspond à l'aire totale $ab\pi$ de l'ellipse. Donc

$$\frac{A}{ab\pi} = \frac{t}{P}.$$

Nous étalons l'ellipse à un cercle (voir figure 4.7 à droite), pour avoir $B = \frac{a}{b}A$; mais nous avons aussi $B = \frac{a^2}{2}(u - e \sin u)$ (différence des aires d'un secteur et du triangle T). Ces équations nous donnent

$$\frac{2\pi}{P} \cdot t = u - e \sin u \quad (\text{équation de Kepler}). \quad (4.6)$$

Cette équation gouverne le mouvement d'une planète sur son orbite.

Le triangle quelconque.

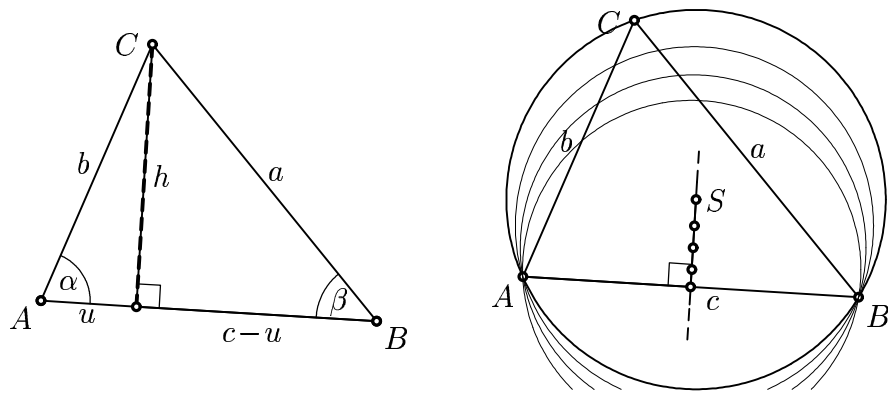


FIG. 4.8 – *Preuve du Théorème du cosinus (à gauche) ; genèse du cercle circonscrit (à droite)*

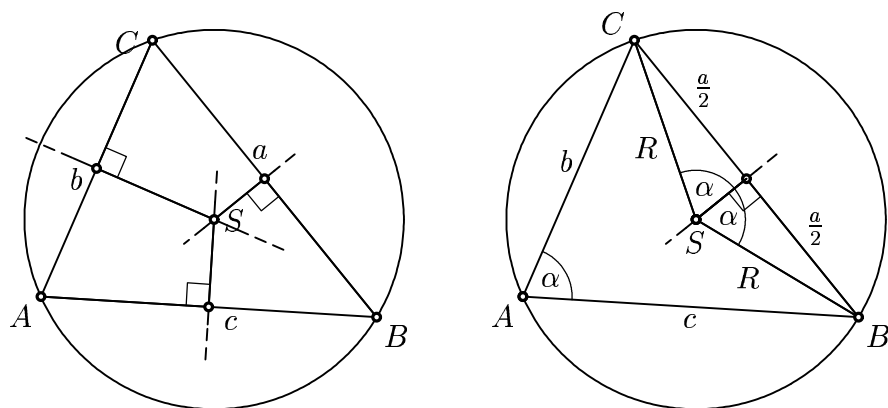


FIG. 4.9 – *Cercle circonscrit et Théorème du sinus*

Le théorème du cosinus.

En présence d'un triangle arbitraire, tirons une hauteur pour fabriquer deux triangles rectangles (voir figure 4.8 à gauche), auxquels on appliquera les formules connues :

$$u = b \cdot \cos \alpha, \quad h = b \cdot \sin \alpha, \quad a^2 = h^2 + (c - u)^2 \quad (\text{Pythagore}).$$

On insère simplement pour h et u (ne pas oublier $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) ; on trouve alors le *théorème du cosinus* :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad \text{ou} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (4.7)$$

La première formule permet de calculer le troisième côté, si deux côtés et l'angle inclu sont connus ; la deuxième formule permet de trouver les angles, si les 3 côtés sont connus. Après des permutations cycliques $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow a$, on trouve encore quatre nouvelles formules. Pour $\cos = 0$ (angle droit), ces formules redeviennent le théorème de Pythagore.

Le théorème du sinus.

Du deuxième triangle rectangle, nous avons encore $h = a \sin \beta$; en comparant avec la formule pour h ci-dessus (et encore par permutations cycliques), nous trouvons le *théorème du sinus* :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}. \quad (4.8)$$

Ce théorème s'applique si l'on connaît un côté et deux angles.

Le cercle circonscrit.

Laissons glisser sur la médiatrice entre A et B le centre d'un cercle passant par A et B (voir figure 4.8 à droite). Au moment où le cercle passe par le troisième point, son centre se trouve *sur les trois médiatrices* (voir figure 4.9, à gauche). Donc : *les trois médiatrices d'un triangle se rencontrent en un seul point S , le centre du cercle circonscrit* (Eucl. IV.5). Notons R son rayon.

Retour au théorème du sinus. L'angle α est un angle périphérique du cercle circonscrit. Rapportons le au centre et partageons le en deux (voir figure 4.9 à droite). On voit apparaître un triangle rectangle avec $\frac{a}{2} = R \cdot \sin \alpha$. Cela prouve de nouveau le théorème du sinus, avec une information en plus :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R} . \quad (4.9)$$

Le cercle inscrit.

Prenons la bissectrice de l'angle en C et laissons glisser dessus le centre d'un cercle qui touche les deux côtés adjacents (voir figure 4.10, à gauche). Au moment où il touche aussi le troisième côté, le centre du cercle se trouve sur les *trois bissectrices*, car le cercle est en contact avec les *trois* côtés du triangle. Nous avons : *les trois bissectrices se coupent en un seul point O , le centre du cercle inscrit* (Eucl. Prop. IV.4). Notons ρ le rayon du cercle inscrit.

Aire du triangle. Le triangle ABC se décompose en trois triangles AOC , COB , et BOA , qui ont tous la même hauteur ρ (voir figure 4.10, à gauche). Par conséquent, nous avons pour l'aire du triangle

$$\mathcal{A} = s \cdot \rho \quad \text{où} \quad s = \frac{a + b + c}{2} \quad \text{est le demi-périmètre.} \quad (4.10)$$

Théorème de Héron d'Alexandrie.

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} . \quad (4.11)$$

Preuve. Les preuves habituelles de ces belles formules font appel à des calculs bourrés d'identités algébriques et trigonométriques (voir exercices). Mais un théorème vieux de 2200 ans se doit d'avoir une preuve élégante et purement géométrique. La voilà :

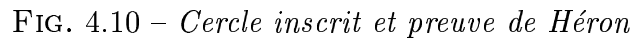
Notons x , y et z les distances de A , B et C aux points de contact du cercle (voir figure 4.10 à droite). Car $y + z = a$, $x + z = b$ et $x + y = c$, nous avons $x = s - a$, $y = s - b$ et $z = s - c$.

L'astuce est de tirer en B la normale à CB et en O la normale à CO . Le point d'intersection de ces deux normales est L . Cela crée deux triangles rectangles COL et CBL , pour lesquels on dessine le cercle de Thalès, centré en M .

Nous voyons que $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$ sont des angles périphériques, que nous ramenons comme β et γ au centre M . Le troisième angle au centre doit être α (Eucl. I.32). Cet angle est ramené comme $\frac{\alpha}{2}$ à la périphérie en C .

Maintenant les triangles CBL et ADO sont semblables. Par Thalès (deux fois) nous avons

$$\frac{z + y}{x} = \frac{\ell}{\rho} = \frac{y - m}{m} , \quad \Rightarrow \quad mz + my = xy - xm \quad \Rightarrow \quad ms = xy .$$


$$\rho^2 = \frac{xyz}{s} \quad (4.10) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} = \sqrt{sxyz}. \quad \text{QED.}$$

Médianes.

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 348)

Soient D , E et F les milieux des côtés BC , CA et AB (Eucl. I.10). Alors on appelle *médianes* les droites AD , BE et CF . *Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un seul point, le barycentre ou centre de gravité* (Archimède, *De l'équilibre des plans*, Livre I, Prop. XIV ; voir figure 4.11 à gauche). *Le barycentre coupe les médianes en rapport $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$.*

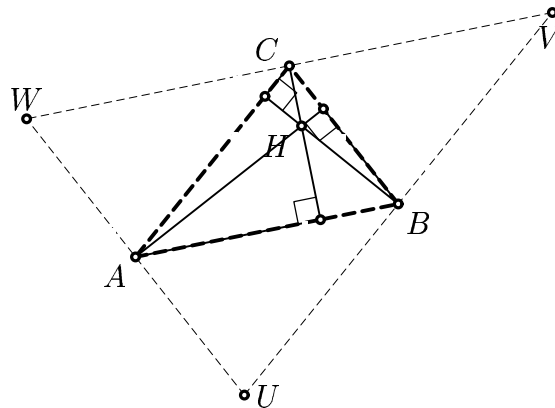


FIG. 4.12 – Hauteurs et orthocentre

Ces affirmations deviennent visibles, si on remplit le triangle par 9 triangles 3 fois plus petits, chacun équipé de ses médianes en miniature, comme pour la preuve du Théorème de Thalès (voir figure 1.3 et figure 4.11, à droite). Par Thalès, les médianes du grand triangle coïncident avec des médianes des petits triangles.

Hauteurs.

ὀρθός, droit, qui se dresse, qui monte en ligne droite, à pic ...

(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 1399)

Le quatrième point remarquable d'un triangle est l'*orthocentre*: les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un seul point (découverte de Proclus; voir M. Cantor, *Vorl. Gesch. Math.* I, p. 466). Pour cela, on fait passer par les points A , B et C des droites parallèles aux côtés opposés, i.e., perpendiculaires aux hauteurs. Le nouveau triangle UVW a justement les anciennes hauteurs comme médiatrices (une fois de plus par Thalès...). Mais nous savons que les médiatrices d'un triangle se rencontrent en un seul point. QED.

La droite d'Euler.

Some of his [Euler's] simplest discoveries are of such a nature that one can well imagine the ghost of Euclid saying, "Why on earth didn't I think of that?"

(H.S.M. Coxeter, *Intr. to Geometry* (1961), p. 17.)

Euler, dans *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*⁶ (1767, *Opera* Vol. 26, p. 139), a mis au jour une propriété "remarquable" des 4 "points remarquables" d'un triangle. La "solutio facilis" réside pour Euler dans des calculs algébriques sur 8 pages A4. Or, nous constatons avec satisfaction que le dessin de la figure 4.12 nous conduit à une preuve de quelques lignes.

Théorème. Pour chaque triangle, les points H , G et S se trouvent sur une droite (la droite d'Euler), et le point G coupe le segment HS dans un rapport de $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$.

Preuve. Prenons le triangle ABC et son orthocentre H de la figure 4.13. Formons ensuite le triangle $A'B'C'$, où les points sont les milieux des côtés du triangle ABC . Le clou de la preuve est que le nouveau orthocentre H' de $A'B'C'$ coïncide avec le centre du cercle circonscrit S du triangle original ABC .

Le triangle $A'B'C'$ est similaire au triangle ABC , rétréci par un facteur $\frac{1}{2}$ et tourné de 180° (par Thalès, Thalès et encore Thalès!). Si on poursuit le jeu en rétrécissant

6. Le grec est bientôt derrière nous, bonjour le latin!...

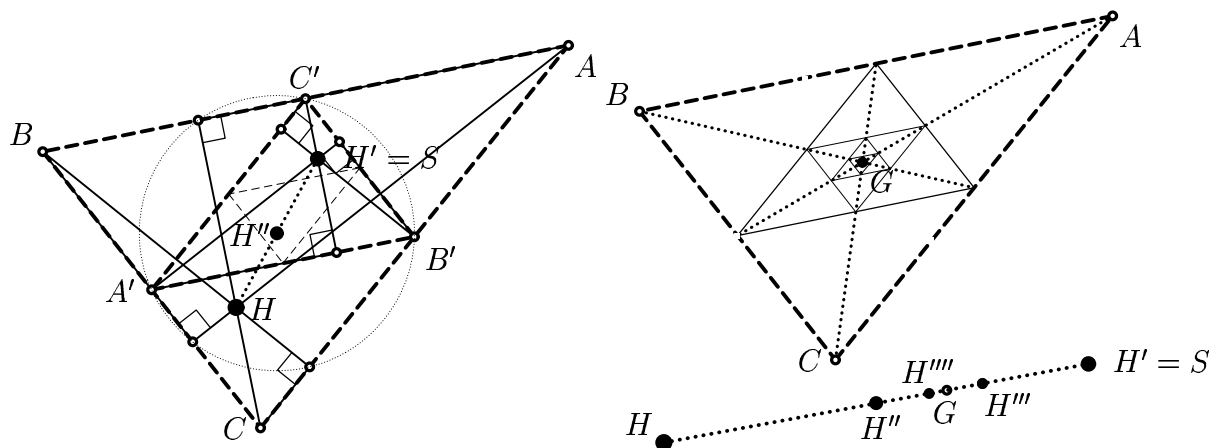


FIG. 4.13 – Alignement de H , S et G (droite d'Euler) et cercle de Feuerbach

une deuxième fois, l'orthocentre H'' de $A''B''C''$ va retourner en arrière par la moitié du chemin parcouru auparavant. La prochaine fois on avancera d'un quart, et ainsi de suite. Le chemin parcouru sera finalement

$$HS\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \pm \dots\right) = \frac{HS}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{2}{3} HS$$

(voir Archimède, figure 3.12). Car tous ces triangles vont se contracter, avec les points $H'''''' \dots'$, vers le barycentre G (image de droite), nous avons prouvé notre affirmation. QED.

Le cercle des 9 points. Si on dessine le cercle circonscrit de $A'B'C'$ de centre H'' , il aura des propriétés étonnantes: d'abord, il passe par les 3 pieds des médianes; ensuite, car H'' est au milieu de H et H' , il passe aussi par les 3 pieds des hauteurs. Enfin, il passe encore par les milieux des segments AH , BH et CH . Ce cercle s'appelle *cercle des 9 points* ou *cercle de Feuerbach* (K.W. Feuerbach, Erlangen 1822).

Le Théorème de Morley

Une démonstration élémentaire de ce théorème n'est pas facile.

(J. Marchand, *L'Ens. Math.* XXIX (1930), p. 291)

La méthode de Morley ressortissant à une géométrie analytique du plan de la variable complexe, on s'empresse ... de rechercher une démonstration aussi courte et aussi élégante que l'énoncé ... A mon avis, de tels désirs ne sauraient être satisfaits.

(H. Lebesgue, *L'Ens. Math.* XXXVIII (1939), p. 39)

Morley's theorem is startling, difficult to prove, and utterly beautiful.

(W. Dunham, *Euler, the master of us all*. Math. Ass. Amer. 1999)

... pour apprécier le théorème, il est bon d'essayer soi-même des démonstrations géométriques, ou même trigonométriques, avant de lire ce qui suit.

(M. Berger, *Géométrie I*, 1990)

Much trouble is experienced if we try a direct approach, but the difficulties disappear if we work backwards, ...

(H.S.M. Coxeter, *Geometry* (1961), p. 24.)

Théorème. Pour chaque triangle ABC , le triangle PQR , formé par les intersections des trisectrices du premier triangle (voir figure 4.14), est un triangle équilatéral.

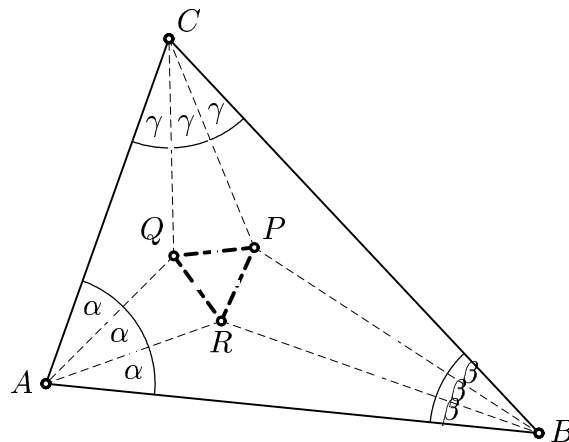


FIG. 4.14 – Le triangle de Morley

Remarques. Ce théorème (découvert en 1904, non publié à l'époque, connu progressivement ; voir G. Loria, *Math. Gazette* 23 (1939), p. 367) est remarquable pour plusieurs raisons :

- Sa simplicité et l'élégance de son énoncé ;
- Le fait qu'il ait échappé durant deux mille ans aux génies de la géométrie ;
- La difficulté de sa preuve (voir citations) qui a suscité l'intérêt de plusieurs grands mathématiciens (H. Lebesgue, G. Kowalewski, R. Penrose, A. Connes) ;

Preuve. Oublions le triangle ABC de la figure 4.14, et retenons seulement les valeurs des angles α , β et γ avec

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \quad (4.12)$$

(Eucl. I.32). Plaçons un triangle équilatéral $P'Q'R'$ de côtés 1 où le côté $R'Q'$ est en position verticale (voir figure 4.15).

Au-dessus des côtés du triangle équilatéral, traçons trois cercles de centres K , L , M et d'angles au centre 2α , 2β , 2γ respectivement. Tirons alors les quatre sécantes $Q'D$, $Q'E$, $R'F$ et $R'G$, toutes de même longueur 1. Relions ED et FG .

La prochaine étape consiste à prouver que le point d'intersection A' des droites ED et FG se trouve à la périphérie du cercle. Pour cela, nous observons que la droite DQ' forme un angle 2α avec la verticale, et la droite EQ' un angle de $60^\circ - 2\gamma$. Le triangle $DQ'E$ étant isocèle, la droite DE forme donc un angle de $30^\circ + \alpha - \gamma$ avec l'horizontale. Similairement, la droite FG forme un angle de $30^\circ + \alpha - \beta$ avec l'horizontale. Ainsi, les droites DE et FG forment un angle de (utiliser (4.12))

$$60^\circ + 2\alpha - \gamma - \beta = 3\alpha + (60^\circ - \alpha - \beta - \gamma) = 3\alpha .$$

Car l'angle au centre FKD est 6α (le double), notre affirmation est une conséquence de la réciproque d'Eucl. III.20.

Ainsi, par Eucl. III.20, les angles $FA'R'$, $R'A'Q'$ et $Q'A'D$ sont tous égaux à α .

Conclusion. Nous trouvons B' et C' de la même façon et nous arrivons à un triangle $A'B'C'$ satisfaisant le théorème de Morley et qui est semblable au triangle ABC . Ce dernier doit donc aussi satisfaire le même théorème. QED.

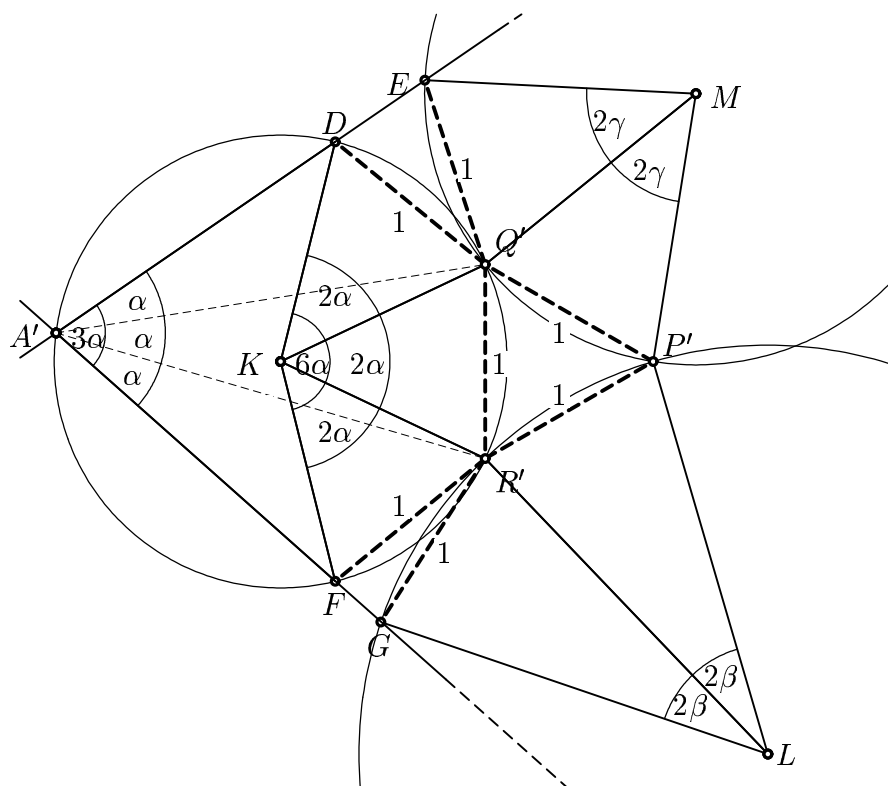


FIG. 4.15 – Preuve du théorème de Morley

Remarque. Une autre preuve “rétrograde” (voir 5e citation) est due à R. Penrose (1953); elle se trouve dans le livre de Coxeter (1961, p. 24).

La projection stéréographique.

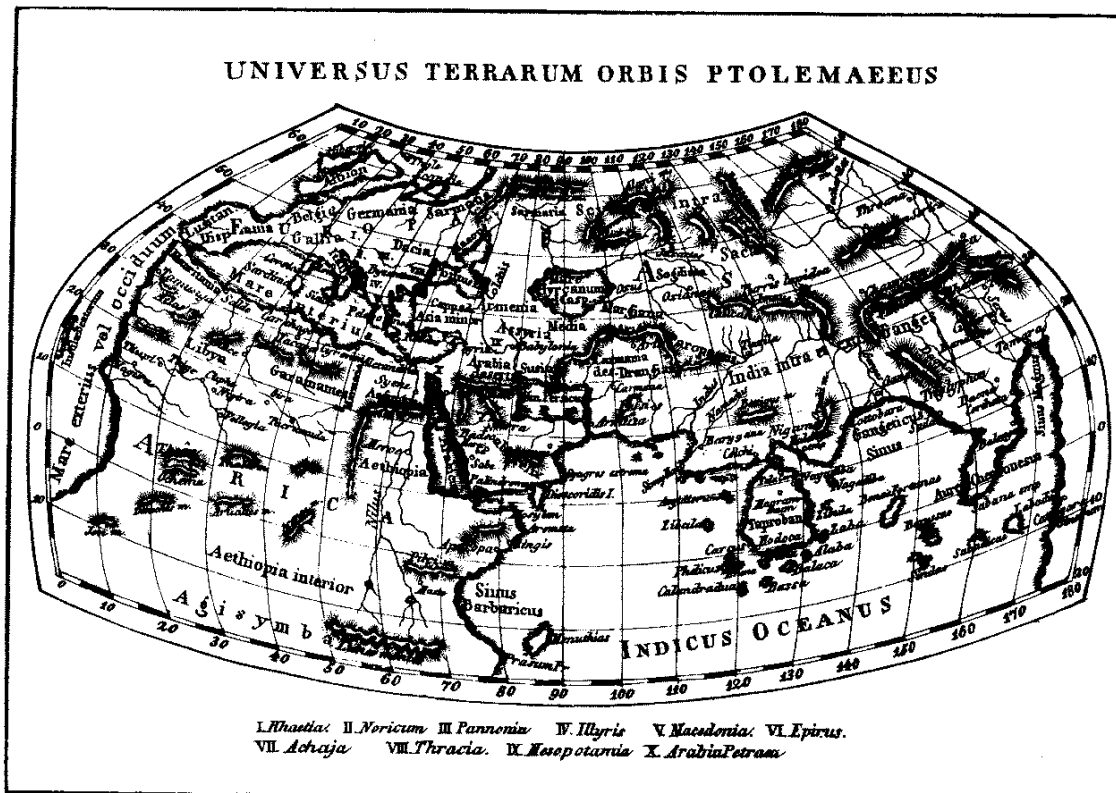
Ptolémée, une fois les fonctions trigonométriques établies, a mesuré les latitudes et longitudes de huit mille points du monde connus à l’époque, et a publié les valeurs dans un ouvrage monumental, la *Geographia* (trois volumes). Une des valeurs, celle de “Parisien”, se trouve en bas de la figure 4.16 avec $48\frac{1}{2}$ degrés de latitude. Cette valeur n’est erronée que d’un tiers de degré. La carte du monde qui en résulte a fait autorité jusqu’au XVIe siècle. Les longitudes, plus difficiles à déterminer avec les instruments de l’époque, sont incorrectes vers l’Inde (erreurs de $\approx 50^\circ$): une cause indirecte de la découverte de l’Amérique.

Pour représenter la surface du globe sur une feuille plane, Hipparque et Ptolémée ont inventé la projection sur un plan tangent depuis le point *N* opposé de la sphère (voir figure 4.17 à gauche). Cette projection porte depuis 1613 le nom de *projection stéréographique* (voir M. Cantor, *Vorl. Gesch. Math.* I, p. 395).

Théorème. *La projection stéréographique*

1. transforme cercles en cercles (Ptolémée);
2. transforme angles en angles égaux (Halley 1696).

Preuve de 2. Dans le dessin de la figure 4.17 à droite, on voit que $\alpha_1 = \alpha_2$ (triangle isocèle), $\alpha_2 = \alpha_3$ (angles opposés), $\alpha_1 = \alpha_4$ (angles parallèles). Donc $\alpha_3 = \alpha_4$ et le triangle ABA' est isocèle. Un angle en A formé de deux droites est appliqué sur le même angle en A' ,



ὑφ' οὗς Παρίσιοι, καὶ πόλις
 Παρισίων Λουκοτεκία $\pi\gamma$ $\mu\eta$ ϵ

FIG. 4.16 – La carte de Ptolémée; en bas : la ligne de la “Geographia” de Ptolémée concernant la “polis Parision Loukotekia”

car les deux intersections de ces deux droites avec la droite sous B ne bougent pas (voir le dessin dans la figure 4.18 à gauche).

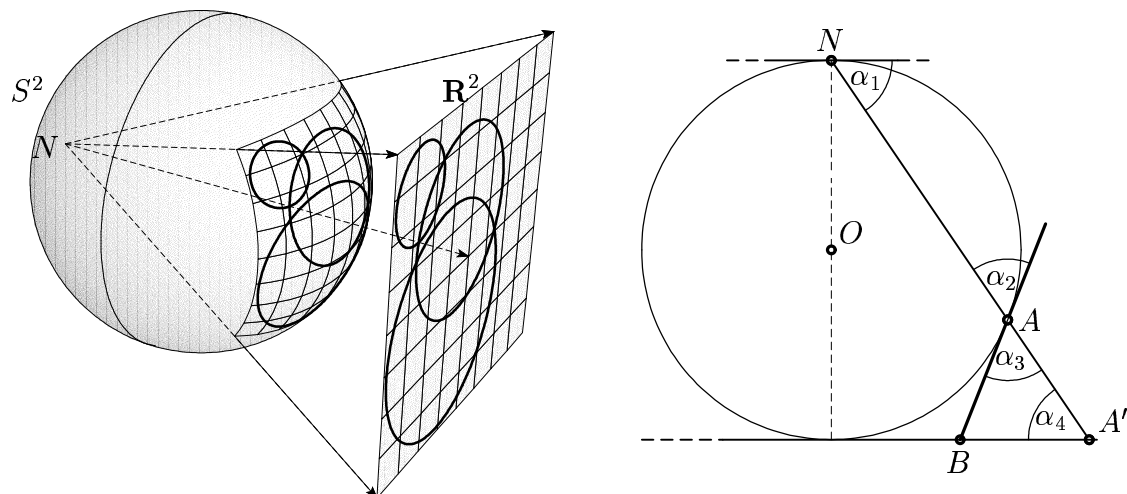


FIG. 4.17 – Projection stéréographique (à gauche); préservant les angles (à droite)

Preuve de 1. Soit un cercle sur la sphère donnée. L'idée élégante consiste à rajouter à ce cercle le cône des tangentes orthogonales et de projeter le tout par la projection

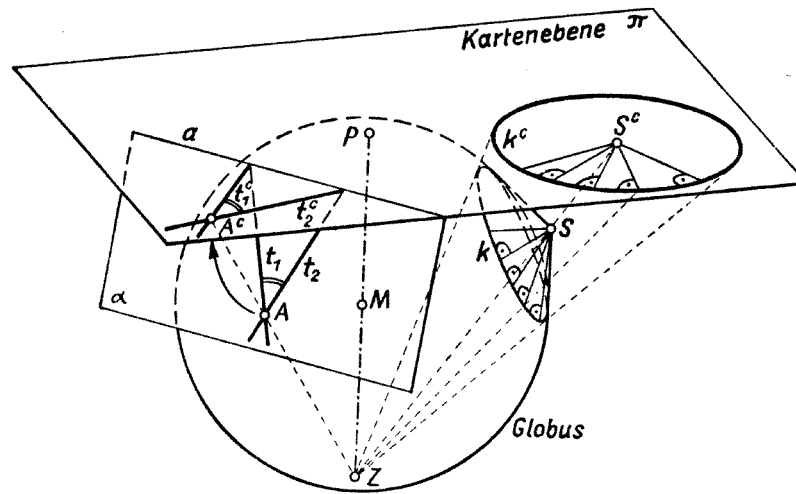


FIG. 4.18 – *Projection stéréographique préservant angles et cercles (illustration tirée de “Darstellende Geometrie” de E. Ludwig et J. Laub, Wien 1956)*

stéréographique sur le plan (voir figure 4.17 à droite). On obtient alors l'image du cercle accompagnée d'un faisceau de droites passant par l'image du sommet du cône, qui sont *orthogonales* à cette courbe (par 2.). Il s'agit donc d'un cercle. QED.

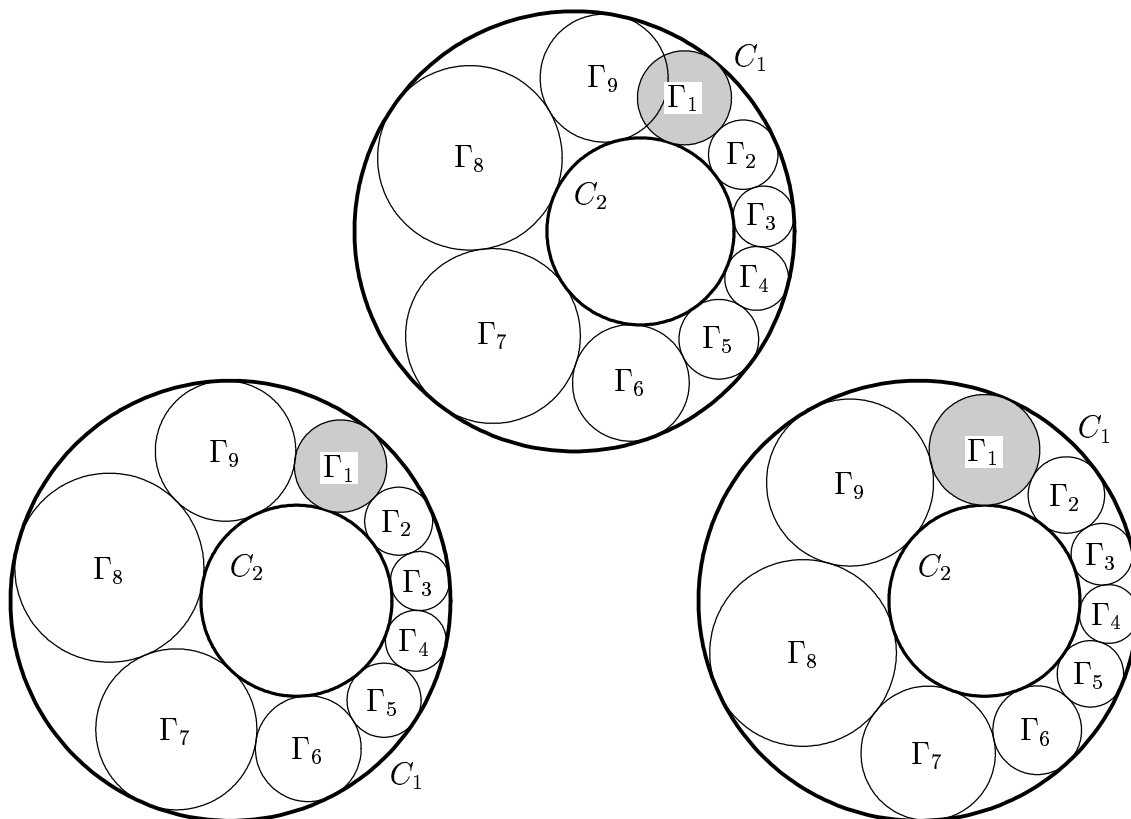


FIG. 4.19 – *Alternative de Steiner*

Application : l'alternative de Steiner.

“Sowie Formeln kommen, so bin ich blödsinnig”. (Lettre de Jakob Steiner à Schläfli; cité d'après Meschkowski, *Math. Lexikon.*)

Jakob Steiner (1796-1863), fils de paysans suisses, sans formation scolaire, ne savait ni lire ni écrire jusqu'à l'âge de 14 ans. Contre la volonté de ses parents, à 18 ans, il alla à l'école Pestalozzi d'Yverdon, où son génie pour la géométrie a vite été remarqué. Pourtant, les formules algébriques sont toujours restées des énigmes pour lui (voir citation). Contre toutes les réglementations et coutumes, il fut finalement nommé Professeur de Géométrie à l'Université de Berlin ; on le considère comme le plus grand géomètre depuis Apollonios.

Voici le résultat intéressant d'une de ses découvertes :

Théorème. Soient C_1 et C_2 deux cercles, C_2 inclus dans C_1 . Supposons qu'on remplisse l'espace entre ces deux cercles, à partir d'un cercle Γ_1 , par une chaîne de cercles Γ_2, Γ_3 , etc..., tangents entre eux et avec les cercles C_1 et C_2 . Alors, si pour un nombre n , on a $\Gamma_n = \Gamma_1$ (ce qui n'est pas le cas pour le premier dessin, mais pour le deuxième de la figure 4.19), on aura la même propriété quel que soit le cercle de départ Γ_1 (voir le troisième dessin).

Preuve : L'affirmation est triviale si les deux cercles sont concentriques (pensez à un ancien disque de téléphone modèle 1960). Sinon, projetons tous les cercles par une projection stéréographique bien choisie : le point de contact se situe sur la droite de symétrie des deux cercles C_1 et C_2 . Puis on déplace ce point sur cette droite jusqu'à ce que les deux cercles sur la boule deviennent concentriques. Cela est toujours possible, si on prend le diamètre de la boule suffisamment petit. QED

Trigonométrie sphérique

Ptolémée, dans l'*Almagest* (Livre I, chap. 11) développe une théorie des triangles *sur la sphère* qui joue un rôle important en astronomie et en géographie. Sur la sphère, une "droite" devient un *grand cercle* (ligne géodésique), i.e., un cercle dont le centre coïncide avec celui de la sphère. La longueur d'un segment est mesurée par son angle au centre.

Un *triangle sphérique* possède donc trois côtés a, b, c , mesurés en angles, et trois angles α, β, γ exprimant les angles d'inclinaison des trois grands cercles entre eux. Si un des angles, disons γ , est droit, le triangle sphérique est rectangle.

La trigonométrie sphérique recherche toutes les relations possibles entre toutes ces grandeurs. Les premières ont été trouvées par Ptolémée pour les triangles rectangles, à l'aide d'un théorème assez compliqué de Menelaos. La théorie a été reprise par Napier, puis par Euler ; ce dernier développe directement le cas général "ex primis principiis breviter et dilucide derivata" (1782 ; Opera 26, p. 224-236). Notre approche consiste à appliquer les idées d'Euler au triangle rectangle, d'une manière encore plus *breviter et dilucide* :

Idée. Prenons un triangle sphérique ABC avec un angle droit en C et l'angle β en B . *Projetons ce triangle depuis le centre O au plan tangent en B .* Ainsi on obtient un triangle rectangle plane $A'BC'$ possédant le même angle β en B . Regardons alors, dans l'ordre,

les triangles rectangles suivants et calculons les grandeurs indiquées :

$$\begin{aligned}
 \triangle OBC' &\Rightarrow BC', OC' \\
 \triangle OBA' &\Rightarrow BA', OA' \\
 \triangle OC'A' &\Rightarrow C'A', OA'
 \end{aligned}$$

$$(4.13)$$

Les deux valeurs obtenues pour OA' fournissent une première formule intéressante, le *théorème du cosinus* :

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

$$(TC) \quad (4.14)$$

Un triangle sphérique rectangle possède 5 inconnues a , b , c , α et β . La formule (TC) connecte les trois valeurs a , b , c , de sorte qu'on peut trouver la troisième, si *deux* d'entre elles sont connues. Cela est symbolisé par la petite rose des vents.

Regardons maintenant le triangle $A'BC'$ et trouvons les trois relations suivantes (et les formules analogues après échange $a \leftrightarrow b$, $\alpha \leftrightarrow \beta$; “(TC)” veut dire : simplification à l’aide de (4.14)) :

$$\sin \beta = \frac{\tan b}{\cos a \cdot \tan c} \stackrel{(TC)}{=} \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad (4.15)$$

$$\cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad (4.16)$$

et

$$\tan \beta = \frac{\tan b}{\cos a \cdot \tan a} = \frac{\tan b}{\sin a}$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b} \quad (4.17)$$

En divisant les formules à gauche et à droite de (4.15) et (4.16) respectivement, on trouve

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin a \cos c \sin c}{\cos a \sin c \sin a} \stackrel{(TC)}{=} \cos b$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \cos a \quad (4.18)$$

Enfin, en insérant ces dernières expressions dans (TC), nous aurons encore

$$\cos c = \frac{1}{\tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$(4.19)$$

Voilà une belle moisson ... sans avoir fourni de trop grands efforts.

Pour mémoriser cette famille nombreuse, de savantes règles ont été trouvées (p.ex. la “règle de Napier”); depuis peu, l’humanité s’est enrichie d’une nouvelle règle, la “règle de Wanner” : mémorisez *la preuve* et non les formules !...

Le triangle quelconque. Pour ce cas, procédons exactement comme pour le triangle quelconque plane. Il n’est même pas nécessaire de faire un nouveau dessin, imaginons simplement légèrement arrondi le dessin à gauche de la figure 4.8.

Théorème du cosinus. Nous appliquons le théorème du cosinus *rectangle* aux deux triangles rectangles de ce dessin :

$$\cos b = \cos u \cdot \cos h, \quad \cos a = \cos h \cdot \cos(c - u) = \frac{\cos b}{\cos u} \cdot \cos(c - u).$$

On insère alors le “théorème d’addition” (4.3) pour $\cos(c - u)$ et la formule (4.16) sous la forme $\tan u = \cos \alpha \tan b$. Le tout se simplifie pour donner

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha. \quad (4.20)$$

On peut encore permuter les indices cycliquement ; nous aurons alors deux autres formules.

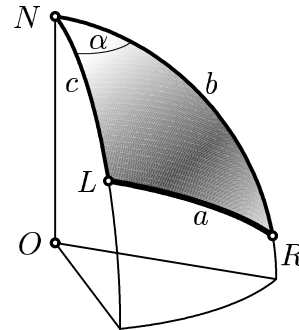
Théorème du sinus. Pour un triangle sphérique quelconque, nous avons

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}. \quad (4.21)$$

Cela découle tout simplement des formules (4.15), appliquées aux deux triangles rectangles de la figure 4.8.

Exemple 1. La distance sphérique de deux points. Les admirateurs de Goscinny connaissent bien les deux “cités les plus prestigieuses de l’Univers”, Rome (*Le laurier de César*, p. 1) et Lutèce (p. 2); les admirateurs de Ptolémée trouvent dans sa *Geographia* les longitudes et latitudes suivantes : $36\frac{2}{3}^\circ, 41\frac{2}{3}^\circ$ pour l’une, et $23\frac{1}{2}^\circ, 48\frac{1}{2}^\circ$ (voir figure 4.16 en bas) pour l’autre (le méridien zéro est à l’extrême ouest du monde alors connu, les Açores); les admirateurs d’Eratosthène savent que le rayon de la Terre est environ de 6360 km. On veut calculer la distance de ces deux cités prestigieuses.

Solution. L’idée est de compléter la ligne LR à un triangle LNR où N est le Pôle nord (voir dessin). On connaît alors $c = 90 - 48\frac{1}{2} = 41.5^\circ$ et $b = 90 - 41\frac{2}{3} = 48.3^\circ$. L’angle α est la différence des longitudes $\alpha = 36\frac{2}{3} - 23\frac{1}{2} = 13.17^\circ$. Le troisième côté se calcule alors par le théorème du cosinus (4.20). On obtient $\cos a = 0.979953$, $a = 11.5^\circ$, $d = 1275.6\text{km}$.



Exemple 2. Corps platoniciens.

Problème. Sous quel angle se rencontrent les faces d’un dodécaèdre?

Solution. On place le centre d’une boule sur un des sommets du dodécaèdre. Ce corps coupe alors dans la sphère un triangle sphérique équilatéral dont tous les côtés ont 108° , les angles d’un pentagone régulier. Un angle α de ce triangle

est précisément l'angle recherché, car les arêtes du dodécaèdre sont orthogonales à cette sphère. Cet angle se calcule, une fois de plus, grâce au théorème du cosinus (4.20), cette fois-ci pris différemment :

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{C - C^2}{\sqrt{1 - C^2} \cdot \sqrt{1 - C^2}} = \frac{C}{1 + C} = -0.4472136 \quad (4.22)$$

avec $C = \cos 108^\circ$. Donc $\alpha = \arccos(-0.4472) = 116.565^\circ$.

Problème. Sous quel angle se rencontrent les faces d'un icosaèdre?

Solution. Si l'on procède comme auparavant, on obtient un *pentagone* sphérique de côtés 60° . Donc, finie la trigonométrie et bonjour la pentagonométrie!... En l'absence d'une telle théorie, coupons notre pentagone en 5 triangles isocèles d'angles 72° au sommet, et de côtés 60° à la base. L'angle β à la base aura la moitié de l'angle recherché. Ce triangle isocèle est encore coupé en deux triangles rectangles avec $\alpha = 36^\circ$ et $a = 30^\circ$. Un discret coup d'oeil à nos roses des vents ci-dessus nous amène à la formule (4.18) à gauche ; nous trouvons

$$\sin \beta = \frac{\cos 36^\circ}{\cos 30^\circ} = 0.9341724 \quad (4.23)$$

et $\beta = \arcsin(\dots) = 69.094842$. Donc la réponse est $2\beta = 138.189685^\circ$.

Problème. Sous quel angle apparaissent les arêtes d'un icosaèdre depuis le centre?

Solution. Si l'on projette les triangles équilatéraux du corps sur la sphère circonscrite, on obtient des triangles sphériques équilatéraux qui se rencontrent toujours à cinq à chaque sommet. Ils ont donc des angles de 72° . Les longueurs de leurs côtés sont recherchées. Il s'agit du problème réciproque traité sous (4.22) : nous pouvons donc inverser cette formule

$$\frac{\cos a}{1 + \cos a} = \cos 72^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos a = \cos 72^\circ + \cos a \cos 72^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos a = \frac{\cos 72^\circ}{1 - \cos 72^\circ} .$$

Donc $\cos a = 0.4472136$ et $a = 63.435^\circ$. Une autre solution consiste à couper le triangle en deux triangles rectangles à angles $\beta = 72^\circ$ et $\alpha = 36^\circ$ où l'hypoténuse c est recherchée. Nos roses des vents nous amènent à la formule (4.19) pour trouver $\cos c = 1/(\tan 72^\circ \cdot \tan 36^\circ) = 0.4472136$, le même résultat.

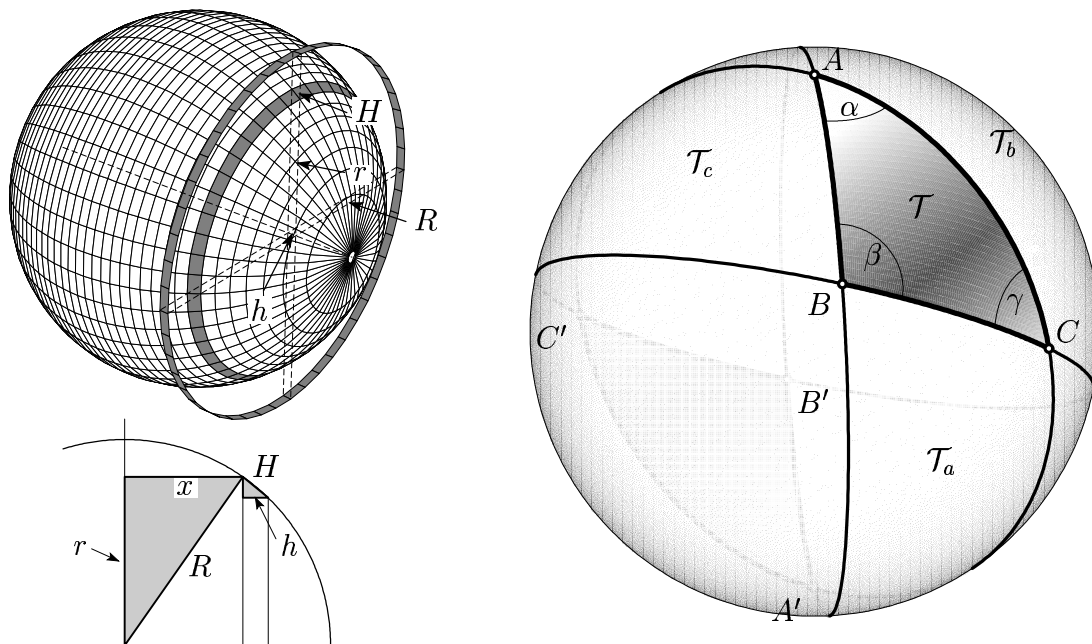


FIG. 4.20 – Aire de la sphère (à gauche) et d'un triangle sphérique (Girard, à droite)

Aire d'un triangle sphérique.

Proposition. (Archimède, *De la sphère et du cylindre*, Prop. XXV et XXX): l'aire de toute sphère est quadruple de son plus grand cercle, i.e.,

$$\mathcal{A} = 4R^2\pi \quad \text{où } R \text{ est le rayon de la sphère.} \quad (4.24)$$

Conséquence: l'aire d'un secteur, coupé de la sphère par deux grands cercles sous un angle α (mesuré en radians), est

$$\mathcal{A} = 2R^2\alpha. \quad (4.25)$$

Pour la *preuve*, étudier les deux dessins de la figure 4.20 à gauche: par Thalès $rH = Rh$, c'est-à-dire les deux rubans grisés du dessin supérieur ont la même aire. Ainsi, la sphère possède la même aire (tranche par tranche) que le cylindre circonscrit (Lambert 1772).

Théorème (A. Girard 1626, voir aussi Euler, *Opera* 26, p. 205). L'aire d'un triangle sphérique à angles α , β et γ (mesurés en radians) est

$$\mathcal{T} = R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (4.26)$$

Preuve. Les trois grands cercles prolongeant les trois côtés du triangle coupent la surface de la sphère en 8 triangles sphériques: T , T_a , T_b , T_c et 4 triangles antipodaux ayant mêmes aires (voir figure 4.20 à droite). Donc, nous avons pour les aires par (4.24)

$$\mathcal{T} + \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_b + \mathcal{T}_c = 2\pi \cdot R^2. \quad (4.27)$$

Mais $T \cup T_a$, $T \cup T_b$ et $T \cup T_c$ sont des secteurs à angles α , β et γ respectivement. Ainsi par (4.25)

$$\mathcal{T} + \mathcal{T}_a = 2\alpha \cdot R^2 \quad \mathcal{T} + \mathcal{T}_b = 2\beta \cdot R^2 \quad \mathcal{T} + \mathcal{T}_c = 2\gamma \cdot R^2.$$

Il suffit maintenant d'additionner ces trois formules et de soustraire (4.27). QED.