Questionnaire

Questions pour examens de Géométrie I, sem. été. Prière de cocher les 5-6 sujets les plus difficiles (d+), les moins difficiles (d-), les plus intéressants (i+) et les moins intéressants (i-).

d+ d– i+ i– II.1. Expliquer les principes de la géométrie de Descartes (somme, différence, produit, division et racine transformés en constructions géométriques). Application à un théorème de Fermat concernant un demi-cercle et un rectangle de largeur $\sqrt{2}$ attaché.

d+ d– i+ i– II.1. Expliquer les principes de la géométrie de Descartes (somme, différence, produit, division et racine transformés en constructions géométriques). Application au calcul de l'aire d'un quadrilatère inscrit dans un cercle (Euler 1750).

d+ d– i+ i– II.1. Expliquer les principes de la géométrie de Descartes (somme, différence, produit, division et racine transformés en constructions géométriques). Application au problème de Cramer-Castillon concernant un polygone inscrit dans un cercle dont les côtés doivent passer par des points donnés.

d+ d– i+ i– II.1. Expliquer les principes de la géométrie de Descartes (somme, différence, produit, division et racine transformés en constructions géométriques). Application au problème des angles aux foyers pour un billard dans une ellipse et le 'most elementary theorem' d'Urquhart.

d+ d– i+ i– II.1. Équation d'une droite en coordonnées cartesiennes pour les trois cas : (1) la pente et l'ordonnée à l'origine q sont connues, (2) la pente et un point P_0 sont connus, (3) deux points P_0 et P_1 sont connus. Formule pour la distance d'un point donné d'une droite donnée.

d+ d– i+ i– II.1. Montrer le Lemme disant que toute construction par règle et compas correspond à une composition d'opérations rationnelles et de racines carrées ; et vice versa. À quoi sert ce Lemme plus tard ?

d+ d– i+ i– II.1. Esquisser la marche générale de la solution du problème de Pappus par la géométrie de Descartes. En détail : Formule pour la distance d'un point donné d'une droite donnée. Application au problème de Pappus concernant trois ou quatre droites donnés où on cherche le lieu géométrique de tous les points P pour lesquels $PA \cdot PB = PC^2$ ou $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. À quelle formule générale même ce problème ?

d+ d– i+ i– II.1. Expliquer le calcul de la polaire d'un point à une ellipse et ses propriétés pour le trois cas : (1) le point P_0 se trouve sur l'ellipse ; (2) le point P_0 se trouve à l'extérieur de l'ellipse ; (3) le point P_0 se trouve à l'intérieur de l'ellipse.

d+ d– i+ i– II.1. Montrer que $\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = 1$ est la condition de contact d'une droite $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$

à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En déduire la condition de contact pour une droite $y = px + q$ et pour $y - y_0 = p \cdot (x - x_0)$. Que peut on conclure sur le lieu géométrique des points depuis lesquels une ellipse est vue sous un angle droit ?

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.1. Soient P et Q deux points sur les tangentes des sommets des grands axes d'une ellipse, respectivement, et F un foyer. Donner et démontrer une condition pour que la droite (PQ) est tangente à l'ellipse.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.2. Expliquer les propriétés des nombres complexes, la signification géométrique de la multiplication, la fonction exponentielle (formule d'Euler) et de la racine carrée.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.2. Expliquer la méthode de Vandermonde et Gauss pour le calcul et la construction des racines 5-ièmes de l'unité et la construction par règle et compas du pentagone.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.2. Expliquer la méthode de Vandermonde et Gauss pour le calcul et la construction des racines 7-ièmes de l'unité et léquation qu'il fallait résoudre pour la construction du heptagone.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.2. Expliquer comment le jeune Gauss est parvenu à montrer que le 17-gone régulier peut être construit par règle et compas.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.2. Montrer que le heptagone, i.e., la solution de $\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0$ ne peut pas être effectuée par règle et compas.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.2. Montrer que la trisection de l'angle et la duplication du cube ne peuvent pas être effectuées par règle et compas.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.3. Expliquer la naissance de la notation vectorielle (Grassmann, Hamilton, Heaviside, Gibbs), somme, produit avec un scalaire, et différence de vecteurs, signification géométrique.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.3. Premières applications des vecteurs : droite passant par deux points, le Théorème de Varignon.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.3. Premières applications des vecteurs : plan passant par trois points ; équation paramétrique, coordonnées barycentriques.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.3. Aires et volumes ; étant donnés deux (ou trois) vecteurs a, b (, c) dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), déterminer l'aire (le volume) du parallélépipède engendré par ces vecteurs.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

II.3. Norme et produit scalaire : démontrer la signification géométrique du produit scalaire, orthogonalité, projection orthogonale d'un poit sur un vecteur normé.

d+ d– i+ i– II.3. Norme et produit scalaire : équation cartésienne d'un plan, distance d'un point à un plan, angle entre deux plans.

d+ d– i+ i– II.3. Étant donnés deux vecteurs a et b, trouver un vecteur x orthogonal sur a et b. En déduire le produit vectoriel. Calculer ensuite le produit mixte $(a \times b) \cdot c$. Quel est le résultat ? Utiliser le résultat pour déterminer la norme du produit extérieur.

d+ d– i+ i– II.3. Étant donné un point $\widetilde{x}$, représentant l'oeil d'un artiste ou le foyer d'une caméra, et un vecteur a, la direction de vue et la distance du plan de projection, calculer pour chaque objet spatial en position x, les coordonnées u_1, u_2 de l'image par projection centrale. Comment ces formules permettent de "corriger" des dessins artistiques ?

d+ d– i+ i– II.4. Montrer comment un changement de coordonnées correspond à une multiplications des coordonnées par une matrice. Que signifient les colonnes de cette matrice ?

d+ d– i+ i– II.4. Montrer comment une application linéaire correspond à une multiplications des coordonnées par une matrice. Que signifient les colonnes de cette matrice ?

d+ d– i+ i– II.4. Expliquer les formules pour la rotation des coordonnées et pour une translation ? Lesquelles sont des applications linéaires et lequelles ne le sont pas ?

d+ d– i+ i– II.4. Applications linéaires : signification géométrique et algébrique de la composition de deux applications et de l'application réciproque.

d+ d– i+ i– II.4. Relation entre la matrice d'une application linéaire et du déterminant de sa matrice. Conséquences sur le déterminant $\det(A^t)$ et $\det(BA)$.

d+ d– i+ i– II.4. Caractériser les applications linéaires $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $y = Qx$, qui préservent les distances et les angles. Donner 5 propriétés équivalentes.

d+ d– i+ i– II.4. Caractériser les applications orthogonales à l'aide d'une matrice antisymétrique (Cayley). Application : trouver toutes les matrices orthogonales dans $\mathbb{R}^2$.

d+ d– i+ i– II.4. Utiliser la caractérisation de Cayley $Q = (I + A)(I - A)^{-1}$ (A une matrice antisymétrique), pour trouver toutes les applications orthogonales dans $\mathbb{R}^3$ à $\det Q = 1$ et leur signification géométrique (Th. d'Euler).

d+ d– i+ i– II.4. Trouver la formule pour la réflexion du point x par rapport au plan orthogonal à un vecteur normalisé n. Montrer que la composition de deux réflexions, dont les miroirs forment un angle α entre eux, est une rotation par un angle 2α.

d+ d– i+ i– II.4. Formes quadratiques : montrer comment on écrit la forme générale pour une conique $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + g = 0$ comme un produit matriciel et comment on élimine les termes linéaires par une translation. Exemple $36x_1^2 - 24x_1x_2 + 29x_2^2 + 120x_1 - 290x_2 + 545 = 0$.

d+ d– i+ i– II.4. Formes quadratiques : expliquer leur diagonalisation par une matrice orthogonale composée par les vecteurs propres de A. Exemple $36x_1^2 - 24x_1x_2 + 29x_2^2 = 180$. Que faire dans trois dimensions ?

d+ d– i+ i– III.1. Expliquer le Lemme PP (sur la projection perspective) et le Lemme PP' de Poncelet sur la transformation d'une ellipse sur un cercle et d'une droite donnée à l'infini.

d+ d– i+ i– III.1. Appliquer le Lemme PP à la démonstration du Théorème de Pappus.

d+ d– i+ i– III.1. Appliquer le Lemme PP à la démonstration du Théorème de Desargues.

d+ d– i+ i– III.1. Appliquer le Lemme PP' à la démonstration du Théorème de Pascal.

d+ d– i+ i– III.1. Appliquer le Lemme PP' à la démonstration du Théorème de Brianchon.

d+ d– i+ i– III.1. Appliquer le Lemme PP à la démonstration du "Grand Théorème de Poncelet" pour le cas $n = 4$.

d+ d– i+ i– III.1. Caractériser les transformations projectives en coordonnées affines et en coordonnées homogènes. Signification topologique de la droite projective.

d+ d– i+ i– III.1. Expliquer le birapport et son invariance par rapport aux transformations projectives (deux preuves).

d+ d– i+ i– III.1. Expliquer les diverses caractérisations des points harmoniques.

d+ d– i+ i– III.1. Expliquer le plan projectif, coordonnées de Plücker, coordonnées homogènes et propriété topologique (non orientabilité) du plan projectif.