Questionnaire

Questions pour examens de Géométrie I. Prière de cocher les 5-6 sujets les plus difficiles (d+), les moins difficiles (d-), les plus intéressants (i+) et les moins intéressants (i-).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Expliquer la démonstration “naïve” (pre-euclidienne) du théorème de Thalès et ses applications à la mesure des nombres rationnels.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Expliquer et démontrer les propriétés des angles dans un triangle et dans un cercle (cercle de Thalès, angle au centre — angle périphérique).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Calculer la longueur de la diagonale du pentagone (nombre d’or) et montrer que ce nombre ne peut pas être rationnel.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Expliquer le calcul des aires d’un rectangle, d’un parallélogramme (deux méthodes) et d’un triangle. Expliquer le rapport des aires de deux triangles semblables.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Théorème de Pythagore : expliquer une des trois preuves classiques (à choix Chou-pei Suan-ching, Bhāskara, Thābit Ibn Qurra) et celle d’Euclide.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Démontrer le “Théorème de Pythagore” et le “Théorème de la Hauteur” par Thalès. Idée de la preuve de Naber.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.1. Calcul des rayons des cercles inscrits (les *apothèmes*) et circonscrits des polygones réguliers à 3 et 5 côtés à l’aide du Théorème de Pythagore.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.2. Les premiers trois postulats d’Euclide et leur application pour construire un triangle équilatéral et d’un cercle de rayon donné et de centre donné (Eucl. I.1 et I.2). Critique de Zenon.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.2. Contenu d’Eucl. I.4 (triangle “c.a.c.”) et d’Eucl. I.5 (triangle isocèle). Preuve d’Euclide et de Pappus pour ce dernier résultat.

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.2. Montrer comme trois côtés déterminent un triangle et ses angles de manière unique (Eucl. I.7 et I.8 ; preuves d’Euclide “par l’absurde” et de Philos de Byzantium).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.2. Postulat 4 d’Euclide et son application à la preuve d’Eucl. I.13, I.14 et I.15 (angles de droites alignées et angles opposés).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i– I.2. Montrer deux inégalités pour l’angle extérieur d’un triangle (Eucl. I.16) et expliquer les divers théorèmes d’Euclide de congruence de triangles (c.a.c., c.c.c., a.c.a., a.a.c., a.c.c.). Lequel de ces cas est dangereux et pas mentionné chez Euclide ?

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Le postulat des parallèles d'Euclide et son application sur les angles parallèles, construction d'une parallèle à une droite donnée et par un point donné. Somme des angles dans un triangle (Euclide I.32).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Propriétés des angles dans un quadrilatère inscrit dans un cercle (Euclide III.22, deux preuves). Application à la "puissance" d'un point par rapport à un cercle (Euclide III.35 et III.36, Corollaire de Clavius).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Expliquer la preuve d'Euclide pour une partie du Théorème de Thalès (Eucl. VI.2) et le Théorème de la bissectrice (Eucl. VI.3).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Décrire la configuration des cinq corps platoniciens (τετράεδρον, κύβος, οκτάεδρος, εικοσάεδρος, δωδεκάεδρος) et d'autres corps (πυραμίς, πρίσμα, σφαῖρά, κῶνός, κύλινδρός).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Démontrer, suivant Euclide XII.2, que les aires de deux cercles de rayons r_1 et r_2 satisfont

$$\frac{r_2}{r_1} = q \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = q^2.$$

Comment s'appelle la constante dans la formule $\mathcal{A} = r^2 \cdot C$ et qui l'a calculée le premier ?

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Comment peut on justifier les formules pour le volume de pyramides et de cônes (en particulier le facteur $\frac{1}{3}$).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Trouver et justifier la formule d'Archimède pour le volume d'une boule (intérieur d'une sphère) ?

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.2. Construction du dodécaèdre à partir d'un cube (Euclide XIII.17, Exercices).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.3. Définition d'une parabole par rapport à son foyer F et sa directrice d ; montrer qu'une parabole est l'intersection d'un plan et d'un cône, si le plan est positionné sous une certaine condition (Apollonios, Dandelin).

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.3. Déterminer la position de la tangente à un parabole en un point P de la courbe ; trouver l'équation d'une parabole en coordonnées x, y centrées au sommet. Pourquoi dit-on "parabole" ?

☐ d+ ☐ d– ☐ i+ ☐ i–

I.3. Donner la première définition d'une ellipse (foyer F, directrice d, excentricité e). Montrer qu'une ellipse est l'intersection d'un plan et d'un cône, si le plan est positionné sous une certaine condition. Preuve par la boule de Dandelin.

d+ d– i+ i– I.3. Donner la deuxième définition d'une ellipse (foyer F, autre foyer F', grand axe $2a$). Montrer qu'une ellipse est l'intersection d'un plan et d'un cône, si le plan est positionné sous une certaine condition. Preuve par les boules de Dandelin. Déterminer la position de la tangente à une ellipse en un point P de la courbe.

d+ d– i+ i– I.3. Dériver les équations d'une ellipse 1. pour coordonnées centrées sur un sommet ; 2. pour coordonnées centrées au centre de l'ellipse. Expliquer comment une ellipse se crée à partir d'un cercle par une homothétie.

d+ d– i+ i– I.3. Construction d'une ellipse par une homothétie à partir d'un cercle ; diamètres conjugués ; Construction d'une ellipse à partir d'une paire de diamètres conjugués (Rytz) ; construction par un bâtonnet (Proclus).

d+ d– i+ i– I.3. Propriétés de l'hyperbole, équations, et asymptotes. Expliquer pourquoi la courbe $x \cdot y = 2$ du problème délien est une hyperbole.

d+ d– i+ i– I.3. Expliquer comment Archimède a calculé l'aire de la parabole.

d+ d– i+ i– I.3. Expliquer comment Nicomède a utilisée la conchoïde pour la trisection d'un angle donné.

d+ d– i+ i– I.4. Définition de sin et cos pour un angle, les formules pour un triangle rectangle et le théorème d'addition.

d+ d– i+ i– I.4. Dériver, à partir du théorème d'addition, les formules pour $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(\frac{\alpha}{2})$, $\cos(\frac{\alpha}{2})$. Comment peut-on voir ces dernières formules géométriquement ?

d+ d– i+ i– I.4. À quoi servent les fonctions trigonométriques en Astronomie (équation des coniques en coordonnées polaires, équation de Kepler).

d+ d– i+ i– I.4. Preuve du théorème du cosinus et du sinus pour un triangle quelconque.

d+ d– i+ i– I.4. Cercle circonscrit d'un triangle et sa relation avec le théorème du sinus.

d+ d– i+ i– I.4. Le cercle inscrit d'un triangle et la formule pour l'aire d'un cercle par Héron.

d+ d– i+ i– I.4. Montrer que les médianes d'un triangle et les hauteurs d'un triangle sont concurrentes.

d+ d– i+ i– I.4. Montrer que trois points "remarquables" d'un triangle sont alignés sur la droite d'Euler en réspectant un certain rapport.

d+ d– i+ i– I.4. Expliquer le théorème de Morley et donner une idée de sa preuve.

d+ d– i+ i– I.4. Montrer les deux propriétés remarquables de la projection stéréographique.

d+ d– i+ i– I.4. Montrer l'application d'une propriété remarquable de la projection stéréographique pour montrer l'alternative de Steiner.

d+ d– i+ i– I.4. Avec quelle idée peut-on démontrer les 10 formules fondamentales pour un triangle rectangle sphérique.

d+ d– i+ i– I.4. Démonstration du théorème du cosinus d'un triangle sphérique quelconque et son application au calcul de la distance de deux points sur la sphère, dont on connait les coordonnées sphériques.

d+ d– i+ i– I.4. Comment peur on calculer l'angle sous lequel se rencontrent les faces d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre. On vous demande de savoir quelles formules existent et comment on les applique (et dérive), mais on vous ne demande pas de les savoir par coeur.

d+ d– i+ i– I.4. Comment peut on expliquer que la surface de la sphère est quatre fois celle de son plus grand cercle (Archimède), que la "projection cylindrique parallèle" préserve les aires, et comment on détermine l'aire d'un triangle sphérique (Th. de Girard).