Analyse Complexe - Automne 2019

Andras Szenes

Contents

1 Nombres complexes (Révision)

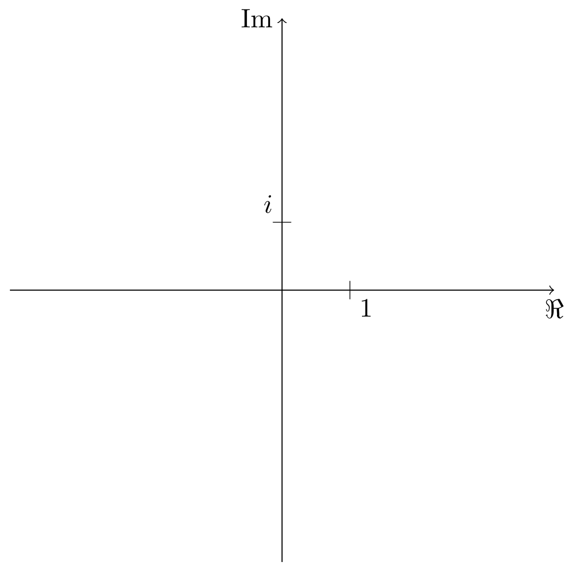
1.1 Plan complexe

On définit les complexes comme:

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Il existe une bijection $\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, c'est dans ce sens qu'on pourra parler de "plan Complexe".

Pour $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, $\Re(z) = x$, et $\mathrm{Im}(z) = y$. $\mathbb{R}$ est inclu dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
On représente le plan complexe avec un axe réel, et un axe "imaginaire".



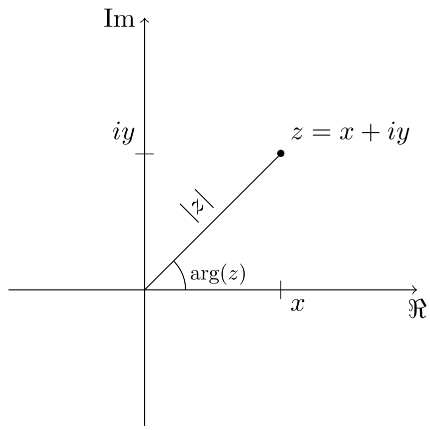
1.2 Algèbre

On défini l'addition:	$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v)$
Ainsi que la multiplication:	$(x + iy) \cdot (u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu)$
La division:	$\dfrac{x + iy}{u + iv} = (x + iy) \cdot \dfrac{1}{u + iv} := (x + iv) \cdot \left(\dfrac{u}{u^2 + v^2} - \dfrac{iv}{u^2 + v^2} \right)$

1.3 Conjugué, coordonnées polaires

Pour $z = x + iy$ un complexe, son conjugué est défini par: $\overline{z} := x - iy$
Remarquons que: $z + \overline{z} = 2 \cdot \Re(z)$ et $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

Le module de z est défini par: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, ainsi $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$



On peut définir les arguments de nombres réels commes les angles $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ où $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un groupe pour l'addition. On peut donc définir l'addition pour deux angles θ_1, θ_2. On peut aussi définir la multiplication $n \cdot \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ (c.f. Algèbre I), mais on ne peut pas (en général) définir la division pour les angles !

On écrit donc, en coordonées polaires, le nombre complexe z comme:

$$z = |z| \cdot \big(\cos(\theta_z) + i \sin(\theta_z)\big) \quad \text{où } \theta_z \text{ est l'argument de } z$$

La forme exponentielle d'un nombre complexe passe par l'identité: $e^{i\theta} := \cos\theta + i \sin\theta \rightsquigarrow z = |z| \cdot e^{i\theta_z}$

Proposition: [Cx-CPolaires]

a) $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

b) $|zw| = |z| \cdot |w|$

c) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

1.4 Racines de l'unité

Les racines de l'unité sont les solutions de l'équation:

$$z^n = 1 \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

On note: $\forall z \quad |z^n| = |z|^n \implies \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$ ainsi que $|1| = 1,\ \arg(1) = 0$
Donc: $|z|^n = 1$ et $n \arg(z) \cong 0$, directement $|z| = 1,\ n \cdot \arg(z) = 2\pi k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

$\implies \arg(z) = \frac{2\pi k}{n}$ où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (car $\frac{2\pi n}{n} \cong 0$). Les solutions sont données par:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \left\{\exp\left(i2\pi\frac{k}{n}\right) \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}$$

1.5 Polynômes et fonctions rationnelles

On note polynômes les éléments $P \in \mathbb{C}[z]$ noté: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, si $a_n \neq 0$ on note le degré du polynôme: $\deg(P) = n$. Si $a_n = 1$ on dit que P est monique. P est une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avec $a_i \in \mathbb{C} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$ les coefficients du polynôme.

En interprétant les polynômes comme des fonctions, nous pouvons définir, pour $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ les opérations suivantes:
$P + Q,\ P \cdot Q,\ P \circ Q$ (la composition).

Pour $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ des polynômes, une fonction rationnelle R est une fonction telle que $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et on défini son degré par $\deg(R) = \deg(P) - \deg(Q)$

Le domaine de définition de $R(z)$ est l'ensemble des points tel que Q ne s'annule pas: $R : \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$

2 Analyse dans $\mathbb{C}$

2.1 La Metrique

Comme vu dans le cours précédent, la métrique est une fonction $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$

Cette métrique est définie dans $\mathbb{C}$ par : $d(z,w) = |z - w|$, elle possède quelques propriétés:

1. Inégalités triangulaires
   $\forall z, w \in \mathbb{C} \qquad |z + w| \leq |z| + |w|$ ou encore $|z| - |w| \leq |z - w|$

2. Variante continue: $h : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\left| \int_a^b h(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |h(t)|\, dt$$

2.2 Limites des suites

$z_n = x_n + iy_n \qquad n = 1, 2, \dots$, notation: $(z_n, \mathbb{N})$ et $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = x + iy$ ou $z_n \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} z$ si:

$$\begin{gathered}
\forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon \ :\ n > N_\varepsilon \implies |z - z_n| < \varepsilon \\
\Updownarrow \\
(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \\
\Updownarrow \\
x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \longrightarrow y
\end{gathered}$$

2.3 Convergence des séries

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ (la somme formelle) converge vers $S \in \mathbb{C}$ si $s_N := \sum\limits_{n=1}^{N} z_n \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} S$.

Remarques

- $a + b = b + a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Convergence absolue

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$ converge absolument si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

2.3.1 Théorème: Convergence absolue

Supposons $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$$

Limite et Séries

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n(k)$ $\qquad k = 1, 2, \ldots$ On dit que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n(k) = z(k)$ converge de manière <u>absolue</u> et <u>uniforme</u> si:

$$\exists b_n > 0,\ b_n \geq |z_n(k)|\ \forall k \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

2.3.2 Théorème: Convergence dominante

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} z_n(k) = z(k)$ une série convergeant absolument et uniformément. Alors:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z_n(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} z_n(k)$$

Exemple

$$z_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

2.3.3 Théorème: Convergence dominante [intégrales]

$f_k : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\exists B$ tel que $|f_k(t)| < B \qquad \forall k, t$ alors:

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt = \int_a^b \left(\lim_{k\to\infty} f_k(t) \right) dt$$

2.4 Continuité

Rappel: Il existe une bijection entre $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

Notations

Pour une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on défini $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\hat{f}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big) = \big(\Re\big(f(x + iy)\big), \mathrm{Im}\left(f(x + iy)\right)\big)$$

Exemple

$f(z) = z^2$, donc $z = x + iy \rightsquigarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, alors on défini $\hat{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

2.4.1 Définition: Continuité

Soit $U \subset \mathbb{C}$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est continue si:

$$\forall (z_n \in U \mid n \in \mathbb{N}) \quad \text{tels que} \quad z_n \longrightarrow z \in U \quad \text{On a} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z) = f\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)$$

Ce qui est équivalent à dire que $\hat{f}(x, y)$ est continue dans $\mathbb{R}^2$.

2.5 La dérivée

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Une fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continuement dérivable $\big(h \in C^1([a, b])\big)$ s'il existe $h' : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall t \in [a, b]$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = h'(t)$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction dans $\mathbb{R}^2$. La fonction f est continuement dérivable si les dérivées partielles existent et sont continues.

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ où U est ouvert, une fonction complexe. On dit de f qu'elle est continuement complexe dérivable ou <u>holomorphe</u> s'il existe $f' : U \to \mathbb{C}$ continue tel que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

2.5.1 Propriétés

Pour des fonctions $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphes.

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $g : U \to V \subset \mathbb{C}$, $f : V \to \mathbb{C}$ holomorphes, alors:
  $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$
- Les fonctions rationnelles sont holomorphes.

Les conditions sur $\hat{f}$: les équations de Cauchy-Riemann.

$f(z) = z^2 \rightsquigarrow \hat{f}(x, y) = (x^2 - y^2 =: u, 2xy =: v)$ Calculons la jacobienne:

$$J_{\hat{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

2.5.2 Théorème de Cauchy-Riemann

Pour $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, elle est holomorphe si et seulement si $\hat{f}$ est continuement dérivable et $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

<u>*Démonstration:*</u>
Montrons $[\implies]$:
$\hat{f}(u, v)$, $f(x + iy) = u + iv$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

Posons $z = x + iy$ et $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ce qui transforme la limite en:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i\big(v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\big)}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z)$$

On peut approcher la limite de plusieurs direction dans le plan complexe, prenons $\Delta y = 0$ et $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i\big(v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\big)}{\Delta x} = u_x - iv_x = f'(z)$$

Le même raisonnement s'applique pour la partie imaginaire. On approche 0 par $\Delta x = 0$ et $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + i\big(v(x, y + \Delta y) - v(x, y)\big)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}u_y + v_y = v_y - iu_y = f'(z)$$

$$\implies f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

$\square$

3 Séries entières (Jeu de Newton)

3.0 Motivation

Les fonctions rationnelles sont holomorphes, y a t'il un classe plus grande d'exemples ??

3.1 Séries entières, définition

Soit $(a_n \mid \mathbb{Z}_{\geq 0})$ suite de nombres complexes.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la somme formelle appellée série entière avec coefficient $a_n,\ n = 0, 1, \ldots$

Exemples

1) $1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

2) $1 - z$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

3.2 Algèbre sur les séries

On défini l'addition par:

$$+ : \sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n$$

Et le produit par:

$$\cdot : \left(\sum a_n z^n\right) \cdot \left(\sum b_n z^n\right) = \sum \left(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n\right) z^n = \sum c_n z^n \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

De même:

$$\frac{\sum a_n z^n}{\sum b_n z^n} \quad \text{est bien défini si} \quad b_0 \neq 0 \quad \text{cf. Math discrète pour la formule exacte}$$

Et pour deux séries entières A, B, $\frac{1}{A} = B \implies A \cdot B = 1$.

On peut définir 2 opérations additionnelles:

1. Composition ($\circ$):

$$\sum a_n W^n \circ W = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n \circ [w = z + z^2] = 1 + (z + z^2) + (z + z^2)^2 + \cdots = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$$

2. Dérivation $\frac{d}{dz}$:

$$\frac{d}{dz} \sum a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

3.3 Convergence des séries entières

Exemple

Soit la série $\sum z^n$ qu'on peut évaluer en plusieurs points: $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n & z = 2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 & z = \frac{1}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} & z = r \quad \text{où} \quad -1 < r < 1 \end{cases}$

Quelques notations:

Le disque ouvert de rayon r centré en w:

$$D_r(w) := \{z \mid |z - w| < r\}$$

Et le disque fermé:

$$\overline{D}_r(w) := \{z \mid |z - w| \leq r\}$$

Et notons le disque centré en 0 par $D_r := D_r(0)$

Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière le rayon de convergence de la série est défini par

$$\text{RdC}\left[\sum a_n z^n\right] := \sup\{r \mid |a_n r^n| \quad \text{une suite bornée et} \quad r \geq 0\}$$

Exemples

1)
$$\text{RdC}\left[\sum z^n\right] = \sup\{r > 0 \mid r^n,\ n = 0, 1, 2, \dots\} = \sup[0, 1] = 1$$

2)
$$\text{RdC}\left[\sum nz^n\right] = \sup\{r > 0 \mid |nr^n|,\ n = 0, 1, 2 \dots \quad \text{bornée} \quad \} = \sup[0, 1) = 1 \quad \text{cf Analyse I}$$

Proposition: Rayon de convergence de $\sum na_n z^n$

$$\text{RdC}\left[\sum na_n z^n\right] = \text{RdC}\left[\sum a_n z^n\right]$$

et plus généralement, pour $P(n)$ un polynôme:

$$\text{RdC}\left[\sum P(n) a_n z^n\right] = \text{RdC}\left[\sum a_n z^n\right]$$

La preuve est en exercice.

Théorème: Convergence Dominée (Variante continue)

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ une série avec un paramètre $t \in U$ ($U = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou un ouvert dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Supposons qu'il existe $b_n,\ n = 0, 1, \ldots$ telle que:

- $|f_n(t)| < b_n \quad \forall t \in U$
- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$

La convergence est absolue et uniforme.

Alors pour tout $t_0 \in U$, on a

$$\lim_{t \to t_0} \sum f_n(t) = \sum \lim_{t \to t_0} f_n(t)$$

Corollaire

Si $f_n(t)$ est continue pour tout n, et la convergence est absolue et uniforme, alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est continue.

Théorème: convergence série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

(A) $R :=$RdC$[\sum a_n z^n]$, alors $\sum a_n z^n$ converge si $|z| < R$ et $\sum a_n z^n$ diverge si $|z| > R$
Cela nous donne une fonction $f(z) = \sum a_n z^n$ qui est définie sur D_R.

(B) Pour $r < R$ la convergence est absolue et uniforme. Donc par le corollaire précédent, $f(z)$ est continue dans D_R

(C) RdC$\left[\sum n a_n z^{n-1}\right] = R$ (exercice)
Par (A) et (B) $\rightsquigarrow g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ est continue sur D_r, et f-holomorphe: $f'(z) = g(z)$.

Remarque sur le rayon de convergence

- RdC$[\sum a_n z^n] = \sup\{r > 0 \mid a_n z^n \to 0\} = \sup \left\{ r > 0 \quad \middle| \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n \quad \text{est convergente} \quad \right\}$
- $\{r > 0 \mid a_n r^n \to 0\}$ et $\{r > 0 \mid a_n r^n$ bornée $\forall n\}$ sont des intervalles

Preuve:

(A) Montrons que si $|z| > R$, la série diverge.
Par définition RdC on a la suite $|a_n z^n|$ n'est pas bornée et évidemment, la série diverge.
Remarquons que (B) $\Longrightarrow$ la convergence pour $|z| < R$.

(B) Soit $r < R$ et $\varepsilon > 0$ tel que $r + \varepsilon < R$. On cherche une suite $b_n > 0$ telle que $|a_n z^n| < b_n \qquad \forall z \in D_r$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$.

$z \in D_r$, on a: $r+\varepsilon < R$ implique par définition $\exists B$ tel que $|a_n(r+\varepsilon)^n| < B \qquad \forall n$.
Alors pour $z \in D_r$:

$$|a_n z^n| < |a_n r^n| = |a_n(r+\varepsilon)^n| \cdot \frac{r^n}{(r+\varepsilon)^n} < B\frac{r^n}{(r+\varepsilon)^n} =: b_n$$

On peut montrer que b_n converge:

$$\sum b_n = \sum_{n=0}^{\infty} B\frac{r^n}{(r+\varepsilon)^n} = \frac{B}{1-\frac{r}{r+\varepsilon}} = B \cdot \frac{r+\varepsilon}{\varepsilon} = B\left(\frac{r}{\varepsilon}+1\right) < \infty$$

On a montré que f est continue $\forall r < R \implies f$ est continue sur D_R.

(C) On a donc $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ continue sur D_R. Il faut verifier que: $\frac{d}{dz}f(z) = g(z)$

Fixons $z \in D_R$. Il faut calculer:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Effectivement:

$$\frac{1}{\Delta z}\left(\sum a_n(z+\Delta z)^n - \sum a_n z^n\right) \overset{\text{Conv. Abs.}}{=} \sum a_n \left(\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}\right)$$

En remarquant que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{d}{dz} z^n = n \cdot z^{n-1}$$

Mais est ce que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum a_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \overset{?}{=} \sum a_n \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = g(z)$$

Nous remarquons donc qu'il faut montrer que la convergence de la série $\sum a_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$ est absolue et uniforme en Δz (z fixé).
Autrement dit, on cherche $c_n > 0,\ n = 0, 1, \ldots$ telle que $\left| a_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \right| < c_n \qquad \forall \Delta z \in D_\varepsilon$ et $\sum c_n < \infty$

Rappel: Binôme de Newton

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ et $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Mais alors:

$$\begin{aligned} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \Delta z^k - z^n}{\Delta z} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} \Delta z^{k-1} \end{aligned}$$

En sachant (Exercice) que $\binom{n}{k} < n\binom{n-1}{k-1}$ et avec l'inégalité triangulaire:

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \, |\Delta z|^{k-1} < n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} |z|^{n-k} \, |\Delta z|^{k-1}$$

En changeant les variables: $k-1 \to k$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} |z|^{n-1-k} \, |\Delta z|^{k} = n \cdot (|z| + |\Delta z|)^{n-1}$$

Et si $|z| + |\Delta z| < R$, alors $\sum |a_n| \, (|z| + |\Delta z|)^n$ est convergente.
Supposons donc $|z| = r < R$ et $0 < |\Delta z| < \varepsilon$ avec $r + \varepsilon < R$. Soit $c_n = n(r+\varepsilon)^n \cdot |a_n|$.
Alors on a que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$

$\square$

3.4 Corollaires / Applications

Corollaires

1. Pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $|z| < R = \text{RdC}$ on a

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

   et donc f est holomorphe dans D_R.

   Mais on peut appliquer le théorème aussi à $g(z)$, et donc $g(z)$ est aussi holomorphe. On peut continuer à itérer le processus et arriver à la conclusion que f est infiniment dérivable.

2. Formule de Taylor

   Observons les dérivées successives:

$$f''(z) = g'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} z^n$$

   On remarque facilement que $f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1,\ f''(0) = 2 \cdot a_2 \ldots,\ f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$. En effet:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) \cdot a_n \cdot z^{n-k}$$

$$\Longrightarrow\ f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k \rightsquigarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

3. Séries entières centrées en $z_0 \neq 0$

   C'est une expression de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

   Evidemment cette série converge pour $|z - z_0| < \text{RdC}\left[\sum a_n z^n\right] =: R$, donc dans le disque $D_R(z_0)$

Exemple

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z_0}(z - z_0)} \overset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$$

On arrive à cette égalité $(\star)$ en passant par $\frac{1}{1-q} = \sum q^n$, cependant l'égalité ne tiens que si $|q| < 1$. Donc:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n \quad \text{Si} \quad \left| \frac{1}{z_0}(z - z_0) \right| < 1 \Rightarrow |z - z_0| < |z_0| \qquad (D_{|z_0|}(z_0))$$

Définition

$f : U \to \mathbb{C}$ (ouvert) est analytique si $\forall z_0 \in U$, $\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ avec RdC$= R > 0$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour} \quad z \in D_R(z_0)$$

Exemple

Comme vu précédemment, $\dfrac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Remarque: Idée du prolongement analytique

On a vu que l'égalité $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est vraie si $z \in D_{|z_0|}(z_0)$. Mais en général si on a une fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{si} \quad z \in D_R(z_0)$$

Soit $w_0 \in D_R(z_0)$, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w_0)^n$ alors $b_n = \dfrac{f^{(n)}(w_0)}{n!}$. Donc considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!} (z - w_0)^n$$

Quel est son rayon de convergence ?

Si R_{w_0} (le rayon de convergence de cette série) est tel que $D_{R_{w_0}}(w_0) \nsubseteq D_{R_{z_0}}(z_0)$ alors on a retrouvé des valeurs de la fonction $f(z)$ qui sont en dehors du disque $D_{R_{z_0}}(z_0)$ original.

$$f^{(k)}(w_0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n \cdot w_0^{n-k}$$

On peut donc choisir un autre point pour centrer notre série et augmenter les points de définitions de la fonction originale. Si on arrive à chaque fois à trouver des valeurs en dehors du cercle original, on peut finir par "paver" le plan complexe et donc eventuellement définir un "prolongement analytique" de la fonction sur le plan $\mathbb{C}$.

3.5 Jeu de Newton vs. convergence

Rappel

$$\begin{aligned}
\text{RdC}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\right] &= \sup\{r > 0 \mid |a_n| \cdot r^n \quad \text{bornée} \quad \} \\
&= \sup\{r > 0 \mid a_n \cdot r^n \to 0\} \\
&= \sup\{r > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < \infty\}
\end{aligned}$$

Nous avions aussi défini les opérations de base: $+, \cdot, \div, \dfrac{d}{dz}, \circ$

Soit les deux séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ avec comme rayon de convergence respectif $R_1,\ R_2$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$?

On peut trouver cette suite d'implication:

$$\begin{aligned}
a_n r^n \to 0,\ b_n r^n \to 0 &\implies (a_n + b_n) r^n \to 0 \\
&\implies \{r > 0 \mid (a_n + b_n) r^n \to 0\} \supset \{r > 0 \mid a_n r' n \to 0\} \cap \{r > 0 \mid b_n r^n \to 0\} \\
&\implies \text{Rdc}\left[\sum (a_n + b_n) z^n\right] \geq \min(R_1, R_2)
\end{aligned}$$

C'est la même réponse pour la multiplication, la division est un problème d'un tout autre niveau donc on ne va pas se soucier pour l'instant, de même pour la composition. Pour la différenciation, on sait que le rayon de convergence reste inchangé par un théorème précédent.

3.6 Fonction exponentielle

Définition

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Propriétés:

- Le rayon de convergence est infini. (Vu en exercice)
- $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$
- $\exp(0) = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C} \qquad \exp(z) \neq 0$
- $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$

$\ulcorner$

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum \frac{z^n}{n!} \cdot \sum \frac{w^n}{n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+k=N \\ n,k \geq 0}} \frac{z^n \cdot w^k}{n! \cdot k!}$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k \cdot z^{N-k}}{k! \cdot (N-k)!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (z+w)^N = \exp(z+w)$$

$\lrcorner$

- Définissons $e^z := e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos(y) + i \cdot e^x \cdot \sin(y)$ pour $z = x + iy$
  Cette fonction satisfait les équations de Cauchy-Riemann et donc elle est holomorphe.
  $e^0 = 1$, et $\frac{d}{dz} e^z = e^z$. On peut ensuite montrer que $\frac{d}{dz} \frac{\exp(z)}{e^z} = 0$ Cela implique que $\frac{\exp(z)}{e^z}$ est constant et donc $\exp(z) = e^z$ car $\exp(0) = e^0$.

3.7 Fonctions inverses, logarithme

Soit $f : U \to V$ une fonction bijective, on peut définir $g : V \to U$ tel que $w = f(z) \iff z = g(w)$. Donc $f \circ g(w) = w,\ g \circ f(z) = z$.

Proposition: Fonctions inverses

Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts, $f : U \to V$ une fonction bijective holomorphe et $\forall z \in U,\ f'(z) \neq 0$.
Alors pour $g : V \to U$ telle que $w = f(z) \iff z = g(w)$ on a g holomorphe et si $w = f(z)$

$$\forall z \in U \qquad g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Par la proposition précédente, on défini la fonction log : $U_2 \to U_1$ l'inverse de l'exponentielle. On a bien $\frac{d}{dz}e^z = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ qui est holomorphe et alors $w = \exp(z) \iff z = \log(w)$

$$\frac{d}{dw}\log(w) = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$$

Exercice

Pour $w \in U_2$ et $(\arg(w) \nsim \pi)$ on peut arriver à:

$$\log(w) = \log|w| + i\arg(w)$$

4 Intégrales curvilignes

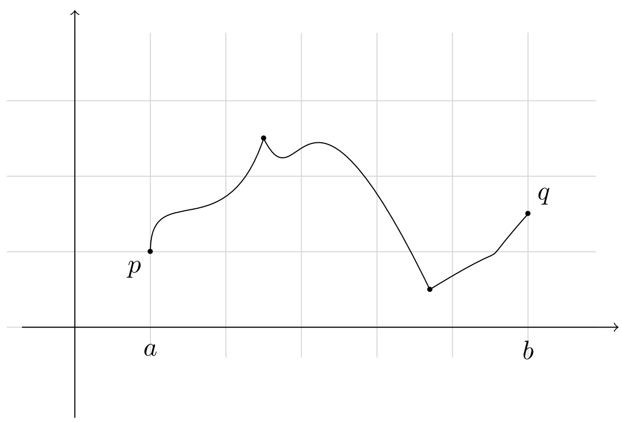
4.0 Courbes (Définition ?)

Définition naïve : $C \subset U$ sous-ensemble de U avec un point de départ et un autre d'arrivée (trace cf. dessin) avec quelques propriétés.

Définition

C_γ - courbe paramétrée dans U
($C_\gamma :\ p \to q$) si $\gamma :\ [a, b] \to U$ où $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle

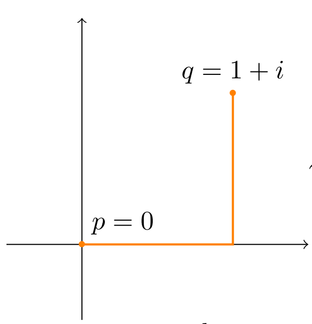
- γ continue.
- γ continue dérivable par morceaux.
- $(\gamma(a) = p \quad \text{et} \quad \gamma(b) = q)$



Commentaires

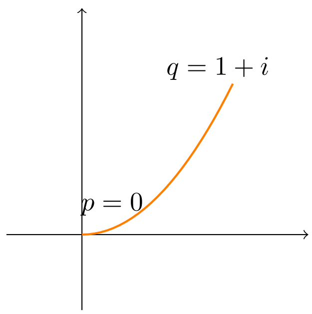
$$\gamma(t) = \gamma_{\Re}(t) + i \cdot \gamma_{\mathrm{Im}}(t) \quad \text{et} \quad \gamma'(t) = \gamma'_{\Re}(t) + i \cdot \gamma'_{\mathrm{Im}}(t)$$

Exemples

1. 

$$\gamma_1(t) \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + (t-1)i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \text{avec donc } 0 \leq t \leq 2$$

A gauche: $\gamma_1' = \dfrac{d}{dt} t = 1$ et à droite $\gamma_1' = \dfrac{d}{dt}(1 + (t-1)i) = i$

2. 

$\gamma_2(t) = t + t^2 i,\ \gamma'(t) = 1 + 2ti$ pour $0 \leq t \leq 1$

On écrit aussi en place de γ:
$\gamma_2(t) = t + t^2 i \rightsquigarrow z = t + t^2 i$ ou bien $x = t,\ y = t^2$ par équation.

4.1 Intégrales curvilignes

$$\int_{C_\gamma} f(z)\,dz \quad \text{avec} \quad \gamma:\ [a,b] \to U$$

- $C_\gamma \subset U \subset \mathbb{C}$ une courbe paramétrisée

Définition

$$\int_{C_\gamma} f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

Exemple

En reprenant γ_1 de la section précédente et $f(z) = \overline{z}$:

$$\begin{aligned}\int_{C_{\gamma_1}} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 t \cdot 1\ dt + \int_1^2 \big(1-(t-1)i\big) \cdot i\ dt \\ &= \frac{1}{2} + \int_1^2 (t-1)\ dt + i\int_1^2 1\ dt = 1+i\end{aligned}$$

Avec l'autre courbe

$$\begin{aligned}\int_{C_{\gamma_2}} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{(t+t^2 i)} \cdot (1+2ti)\ dt = \int_0^1 (t-t^2 i)(1+2ti)\ dt \\ &= \int_0^1 (t+2t^3)\ dt + i\int_0^1 (2t^2-t^2)\ dt = 1+\frac{i}{3}\end{aligned}$$

Propriétés

- Linéarité:

$$\int_{C_\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)]\ dz = \alpha\int_{C_\gamma} f(z)\ dz + \beta\int_{C_\gamma} g(z)\,dz$$

4.2 Reparamétrisation

Proposition: Reparamétrisation

Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ continue, C_γ la courbe paramétrisée par, $\gamma : [a,b] \to U$ et $\delta : [a,b] \to [c,d]$ une bijection continuement dérivable où $\delta' > 0$ ($\delta(a) = c,\ \delta(b) = d$).
On défini $C_{\gamma\circ\delta}$ la courbe C_γ reparamétrisée par δ. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \delta$.
Les traces sont les mêmes: images(γ) = image$(\gamma \circ \delta)$ alors:

(1)
$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_c^d |\tilde{\gamma}'(t)|\, dt$$

(2)
$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\, dt$$

4.3 Définition d'une courbe

- La "définition": Les courbes sont les courbes paramétrisées où on identifie $\gamma \sim \gamma \circ \delta$ ce qui justifie la notation:

$$\gamma \rightsquigarrow C : \quad \gamma \text{ paramétrise } C$$

- Les invariantes (par rapport aux reparamétrisations):
  - ⋆ La longueur de C:
  $$L(C) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$
  Pour $\gamma \rightsquigarrow C$
  - ⋆ Si $f : U \to \mathbb{C}$ continue
  $$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$
  Pour $\gamma \rightsquigarrow C$
  - ⋆ Image(C) := Image(γ) pour $\gamma \rightsquigarrow C$

- Mais l'image ne caractérise pas la courbe, par exemple:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= e^{it} \qquad 0 \le t \le 2 * \pi \\ \gamma_2(t) &= e^{it} \qquad 0 \le t \le 4 * \pi \end{aligned}$$

  On a donc:
  $$\text{Image}(\gamma_1) = \text{Image}(\gamma_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

- On dit que C est simple si pour $C \leftsquigarrow \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on a $\gamma(t_1) = \gamma(t_2),\ t_1 < t_2 \implies t_1 = a,\ t_2 = b$
  Et donc pour C simple, l'image définit presque la courbe.

- On dit $C : p \to q$ est fermée si $p = q$ ($p = \gamma(a),\ q = \gamma(b)$)

- Changement d'orientation:
  $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \rightsquigarrow C : p \to q$. On défini:
  $$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t) \quad \text{où} \quad \tilde{\gamma}(a) = \gamma(b) \quad \tilde{\gamma}(b) = \gamma(a)$$
  On note donc la courbe paramétrisée par $\tilde{\gamma} \rightsquigarrow -C$.

- Enchainement:
  Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C} \rightsquigarrow C_1 : p_1 \to p_2$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C} \rightsquigarrow C_2 : p_2 \to p_3$ Alors:

  $$\gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{C} \rightsquigarrow C_1 \sqcup C_2$$

  Où γ est la courbe enchainée définie comme:

  $$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t+c-b) & b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

5 La primitive et $\int$ curvilignes

Question

Quelles sont les fonctions conitnues $f : U \to \mathbb{C}$ qui sont les dérivées des fonctions holomorphes ?

Terminologie

Si F est une fonction holomorphe et si $\dfrac{dF}{dz} = f$, on dit que F est la primitive de f. La primitive (si elle existe) est unique à une constante additive près.

On dit que f a une primitive dans $U \subset \mathbb{C}$, s'il existe $F : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\dfrac{dF}{dz} = f$

Théorème: Primitive

$U \subset \mathbb{C}$ ouvert. Alors $f : U \to \mathbb{C}$ continue a une primitive dans U si et seulement si $\forall C \subset U$ courbe fermée on a:

$$\int_C f\ dz = 0$$

Lemme: Newton - Leibniz

Soit $C : p \to q$ une courbe dans U (ouvert); $F : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors:

$$\int_C F'(z)\ dz = F(q) - F(p)$$

Preuve du Théorème

[$\Longrightarrow$] Supposons $F' = f$, $C : p \to p$ fermée, alors par le lemme de Newton Leibniz:

$$\int_C f(z)\ dz = \int_C F'(z)\ dz \overset{N-L}{=} F(p) - F(p) = 0$$

[$\Longleftarrow$] Observation:

Si $\displaystyle\int_C f\ dz = 0 \quad \forall C$ fermée alors pour $C_1,\ C_2 : p \to q \subset U$ on a:

$$\int_{C_1} f\ dz = \int_{C_2} f\ dz$$

Effectivement:

$$\int_{C_1} f\ dz - \int_{C_2} f\ dz = \int_{C_1} f\ dz + \int_{-C_2} f\ dz = \int_{C_1 \sqcup -C_2} f\ dz$$
$$= 0 \quad \text{Car } C_1 \sqcup -C_2 \text{ est fermée}$$

On peut donc définir: $F : U \to \mathbb{C}$:
On fixe $p \in U$, $\forall z \in U$ prenons $C : p \to z$, et définissons la fonction

$$F(z) := \int_C f(z)\ dz$$

Pour $p, q \in \mathbb{C}$ on va noter l'intervalle $[p, q]$ comme la courbe paramétrée $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & p + (q-p) \cdot t \end{array}$

Etudions maintenant la courbe décrite par $\tilde{C} \sqcup [z, z + \Delta z] \sqcup -C$ qui est donc une courbe fermée.

$$\int_{\tilde{C}} f \, dz - \int_C f \, dz = \int\limits_{[z, z+\Delta z]} f \, dz$$

Et donc

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int\limits_{[z, z+\Delta z]} f \, dz$$

Il nous reste plus qu'à montrer que $F' = f$:

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z, z+\Delta z]} f \, dz = \frac{1}{\Delta z} \int_0^1 f(z + t\Delta z) \cdot \Delta z \, dt \\ &= \int_0^1 f(z + t\Delta z) \, dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue $\exists \delta$ tq $|\Delta z| < \delta \implies |f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$. Et donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta t) - F(t)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 f(z + t\Delta z) \, dt - \int_0^1 f(z) \, dt \right| = \left| \int_0^1 f(z + t\Delta z) - f(z) \, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(z + \Delta z \cdot t) - f(z)| \, dt \overset{|\Delta z| < \delta}{\leq} \int_0^1 \varepsilon \, dt = \varepsilon \end{aligned}$$

Et donc nous avons bien que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

$\square$

6 Théorème de Cauchy

Exemple central

Soit C la courbe du cercle unité (sens trigonométrique) alors nous avons vu (Exercice):

$$\int_C z^k \, dz = \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 2\pi \cdot i & k = -1 \end{cases}$$

Le théorème des primitives nous dit donc que $f(z) = \frac{1}{z}$ n'a pas de primitives. Mais attention au domaine, en effet $f(z)$ n'a pas de primitive dans un domaine qui contient cette rotation autour du cercle. En effet on peut se dire que (vu en cours) $\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}$ et donc il existe une primitive à f, mais on ne peut définir $\log(z)$ que dans certains domaines par exemple $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \neq \pi\}$

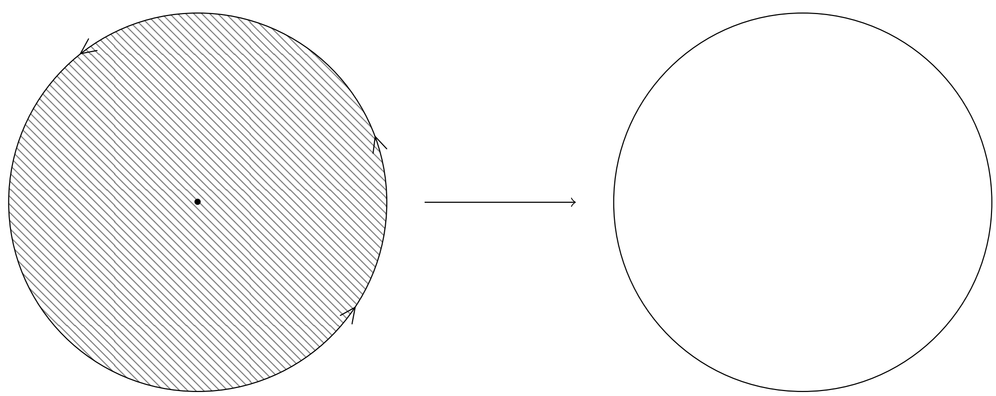
6.1 Classification de domaines

Définition

- $S \subset \mathbb{C}$ est <u>convexe</u> si $p, q \in S \implies [p, q] \subset S$.
- $S \subset \mathbb{C}$ est <u>étoilé</u> si $\exists c$ tel que $\forall q \in S$ on a $[c, q] \subset S$.
- $S \subset \mathbb{C}$ est <u>connexe</u> si $\forall p, q \in S \quad \exists C : p \to q \subset S$

Notation

Si ∂S est l'image d'une courbe fermée, simple (orientée dans le sens anti-horaire) C, alors on note C comme ∂S. Par exemple:



Rappel

On cherche les fonctions qui ont des primitives, nous arrivons donc naturellement à ce théorème:

Théorème: Cauchy

Soit U étoilé, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $C \subset U$ fermée, alors

$$\int_C f \, dz = 0$$

En utilisant le théorème des primitives, il est équivalent de dire:

$$\left.\begin{array}{l} U \quad \text{étoilé} \\ f : U \to \mathbb{C} \quad \text{holomorphe} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \forall C \quad \text{fermée} \quad \int_C f \, dz = 0 \\ \Updownarrow \\ \exists F : U \to \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad F' = f \end{array}$$

Lemme

U étoilé, $f : U \to \mathbb{C}$ continue. Alors pour tout T-triangle on a $\displaystyle\int_{\partial T} f\ dz = 0 \implies \exists F \quad \text{tq} \quad F' = f$

<u>*Démonstration:*</u>

a) Soit $P = c$ centre de U. $F(z) \overset{\text{Déf}}{=} \displaystyle\int\limits_{[c,z]} f\ dz$

b) En prenant le triangle $c, z, z + \Delta z$ on arrive à retrouver une courbe fermée et alors $\displaystyle\int_{\partial T} f\ dz = 0$

□

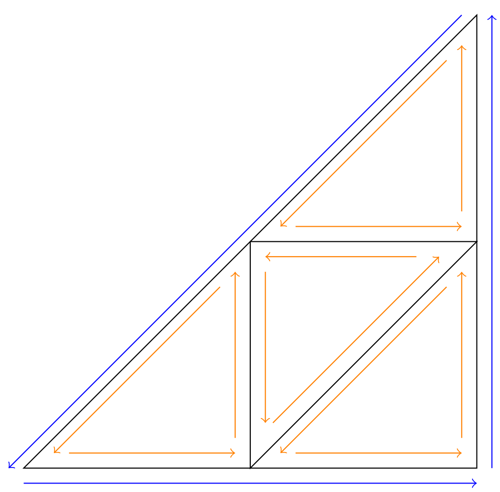
Alors, pour la preuvve du théorème de Cauchy il nous suffit de montrer le Lemme de Goursat:

Lemme: Goursat

U ouvert $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $T \subset U$ un triangle (fermé). Alors

$$\int_{\partial T} f\ dz = 0$$

<u>*Preuve:*</u> *(par contradiction)*
Supposons donc que $\displaystyle\int_{\partial T} f\ dz = b \neq 0$. Nous pouvons diviser notre triangle original en plusieurs triangles en découpant sur la moitié des côtés:



On va construire une suite de triangle: $T = T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \cdots$
Notons ces égalités:

$\to$ $T = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{4} T_j$

$\to$ $\displaystyle\int_{\partial T} f\ dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial T_j} f\ dz \implies \left|\int_{\partial T} f\ dz\right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\partial T_j} f\ dz\right|$

Soit $\ell \in \{1,2,3,4\}$ tel que $\left|\int_{\partial T_\ell} f\ dz\right| \geq \left|\int_{\partial T_j} f\ dz\right|$, nous avons alors:

$$|b| = \left|\int_{\partial T} f\ dz\right| \leq 4 \cdot \left|\int_{\partial T_\ell} f\ dz\right|$$

On note $T^{(1)} = T_\ell$ et on a $4 \cdot \left|\int_{\partial T^{(1)}} f\ dz\right| \geq |b|$

On répète la procédure pour $T^{(1)}$: on a

-
$$\left|\int_{\partial T^{(1)}} f\ dz\right| \leq \sum \left|\int_{\partial T^{(1)}} f\ dz\right|$$

- On choisit $\ell \in \{1,2,3,4\}$ qui maximise, donc tel que:
$$\left|\int_{\partial T_\ell^{(1)}} f\ dz\right| \geq \left|\int_{\partial T_j^{(1)}} f\ dz\right| \quad j = 1,2,3,4$$

- On note $T^{(2)} = T_\ell^{(1)}$, et donc:
$$4 \cdot \left|\int_{\partial T^{(2)}} f\ dz\right| \geq \left|\int_{\partial T^{(1)}} f\ dz\right| \geq \frac{|b|}{4}$$

En continuant la suite on obtient la formule:

$$4^k \cdot \left|\int_{\partial T^{(k)}} f\ dz\right| \geq |b|$$

Définition

Pour $S \subset \mathbb{C}$, le diamètre est $\operatorname{diam} S = \sup\{|z-w| \ : \ z, w \in S\}$

Nous avons donc:

- $L(\partial T) \leq 3 \cdot \operatorname{diam} T$ (la longeur du triangle est plus petite que 3 fois son diamètre)
- $\operatorname{diam} T^{(k)} = \dfrac{1}{2^k} \operatorname{diam} T$

Alors comme T est compact, il existe un unique point $p \in T$ tel que:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{(k)} = \{p\}$$

Rappel

- Les polynômes ont des primitives et donc pour C fermée et g un polynôme, $\int_C g(z)\ dz = 0$
- L'estimation standard (cf Exercices):
$$\left|\int_C f\ dz\right| \leq \max_{z \in C} |f(z)| \cdot L(C)$$
- Définition d'être holomorphe:
f est holomorphe dans $U \iff \forall p \in U \quad f(z) = f(p) + f'(p)(z-p) + r(z)(z-p)$ tel que $r(z) \underset{z \to p}{\longrightarrow} 0$

Finissons donc la preuve maintenant:

$$\begin{aligned}
4^k \left| \int_{\partial T^{(k)}} f \, dz \right| &= 4^k \left| \int_{\partial T^{(k)}} (f(p) + f'(p)(z-p) + r(z)(z-p)) \, dz \right| \\
&\leq 4^k \left| \int_{\partial T^{(k)}} (f(p) + f'(p)(z-p)) \, dz \right| + 4^k \left| \int_{\partial T^{(k)}} r(z)(z-p) \, dz \right|
\end{aligned}$$

La première partie étant un polynôme l'intégrale d'une courbe fermée donne 0. Ensuite on utilise l'estimation standard pour écrire:

$$\leq 4^k \cdot \max_{z \in T^{(k)}} |r(z)| \cdot \max_{z \in T^{(k)}} |z-p| \cdot L(\partial T^{(k)})$$

On sait que: $\max\limits_{z \in T^{(k)}} r(z) \leq \max\limits_{z \in D(p)} |r(z)|$, $\max\limits_{z \in T^{(k)}} |z-p| \leq \operatorname{diam} T^{(k)}$, $L(\partial T^{(k)}) \leq 3 \operatorname{diam} T^{(k)}$

$$\leq \cancel{4^k} \cdot \max_{|z-p| \leq 1/2^k \cdot \operatorname{diam} T} |r(z)| \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}} \operatorname{diam} T \cdot 3 \frac{1}{\cancel{2^k}} \operatorname{diam} T$$

Donc pour $k \to \infty$

$$4^k \left| \int_{\partial T^{(k)}} f \, dz \right| \longrightarrow 0 \neq b$$

$\lightning$

Remarque

1. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $|z-z_0| < R$, on savait qu'il existe une primitive $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1} \rightsquigarrow F' = f$
   Le théorème de Cauchy montre l'existance de primitive pour toute f holomorphe (dans un domaine étoilé).

2. $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitives dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, on remarque que ce domaine n'est pas étoilé.

Définition

$U \subset \mathbb{C}$ ouvert et connexe, est simplement connexe si $\forall f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\exists F : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $F' = f$.

Remarques

- U étoilé $\implies$ U simplement connexe.
- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe.

Proposition: Ensemble Simplement Connexe

Si U, V sont simplement connexe et $U \cap V$ est connexe (non-vide) alors $U \cup V$ est simplement connexe. (Preuve vue exo)

Lemme: Réduction des Contours

Soit W ouvert, U étoilé tel que $\overline{U} \subset W$ et ∂U est une courbe fermée, $w \in U$, $f : W \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$. Supposons aussi que w se trouve dans un petit disque: $D_\varepsilon(w) \subset U$. Alors:

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial D_\varepsilon(w)} f(z)\, dz$$

<u>*Preuve:*</u>
(Donné sans preuve formelle mais quelques indications)

Prendre le centre c de U étoilé et prendre la doite passant par c et w et prolonger jusqu'à l'intersection avec $\partial U \ni q$
$U \setminus [q, w)$ étoilé, $\partial U \sqcup [q, p) \sqcup -D_\varepsilon(w) \sqcup [p, q)$ est fermé aussi.

$\square$

Remarque

On peut généraliser le Lemme pour un nombre fini de trous: $z_1, \ldots, z_\ell$

$$f : W \setminus \{z_1, \ldots, z_\ell\} \to \mathbb{C} \implies \int\limits_{\partial U} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{D_\varepsilon(z_j)} f(z)\, dz$$

7 Théorème: Formule Intégrale de Cauchy

Soient U étoilé, $z \in U$, $\overline{U} \subset W \subset \mathbb{C}$ et $f : W \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

<u>*Démonstration:*</u>

- Par le Lemme de réduction des contours.

$$A = \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

  Notons que la deuxième intégrale ne dépend en fait pas du choix d'epsilon.

- Notons aussi B comme:

$$B = \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{w-z}\, dw = f(z) \cdot \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{dw}{w-z} \overset{\text{cf. exo}}{=} 2\pi i \cdot f(z)$$

- Il ne reste plus qu'à calculer $A - B$:

$$|A - B| = \left| \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw \right|$$

  Rappel: f holom $\rightsquigarrow f(w) = f(z) + f'(z) \cdot (w-z) + r(w) \cdot (w-z)$ où $r(w) \underset{w \to z}{\longrightarrow} 0$. Et donc:

$$\begin{aligned} &= \left| \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z)} \Big(f'(z) + r(w)\Big)\, dw \right| \\ &\overset{\text{Esti. Std.}}{\leq} \Big(|f'(z)| + \max_{|w-z|=\varepsilon} |r(w)|\Big) \cdot L\big(\partial D_\varepsilon(z)\big) \\ &\overset{\text{Pour } \varepsilon \leq 1}{\leq} (|f'(z)| + 1) \cdot 2\pi\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

  Ce qui implique alors: $A = B$

$\square$

Remarques

1. Cela nous montre que les valeurs de f dans U sont déterminées par les valeurs de f le long de ∂U.
2. <u>Théorème de la moyenne</u>, cas spécial où $U = D_r(p)$ et $z = p$.

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-p}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(p + re^{it}\right) \cdot i\cancel{re^{it}}}{\cancel{r \cdot e^{it}}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(p + re^{it}\right)\, dt$$

   Donc la valeur d'un point, dans le cas d'une fonction holomorphe, est directement reliée aux valeurs des bords de disque qui entourent ce point. C'est la moyenne des valeurs du bord du disque.

Théorème: Cauchy-Taylor

Prenons $U = D_r(p)$, et $z \in D_r(p) \iff |z-p| < r$ Voyons où nous pouvons arriver:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-p)-(z-p)} = \frac{1}{w-p} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-p}{w-p}} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{w-p} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{w-p}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-p)^n}{(w-p)^{n+1}} \quad \forall w$$

$(\star)$ car $\left|\dfrac{z-p}{w-p}\right| < 1$, de plus cette convergence est absolue et uniforme en $w \in \partial D_r(p)$ parce que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(z-p)^n}{(w-p)^{n+1}}\right| = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-p|}{r}\right)^n = \frac{1}{r} \frac{1}{1-\dfrac{|z-p|}{r}} = \frac{1}{r-|z-p|} < \infty$$

Et alors:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \cdot \frac{(z-p)^n}{(w-p)^{n+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw \right) \cdot (z-p)^n$$

C'est une série entière centrée en p !

Conclusion: Ennoncé du Théorème de Cauchy-Taylor

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{D}_r(p) \subset U$. Alors si $z \in D_r(p)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n, \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw$$

Remarques

1. f analytique est infiniment dérivable dans U, et de plus

$$f^{(n)}(p) = n! \cdot a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw$$

2. En reprenant la preuve précédente, on remarque que le rayon $D_r(p)$ utilisé ne change pas la valeur de l'intégrale. Mais donc en regardant le Rayon de Convergence on voit que le rayon de convergence de cette série est inférieur (ou égal) à $\operatorname{dist}(p, \mathbb{C} \setminus U)$.

3. Corollaire: $U = D_r(p)$

$$\left|f^{(n)}(p)\right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw \right| \overset{|w-p|=r}{\leq} \frac{n!}{2\pi} \frac{\max_{|w-p|=r} |f(w)|}{r^{n+1}} \cdot r\pi r = \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|w-p|=r} |f(w)|$$

Inégalité de Cauchy

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $D_r(p) \subset U$, alors

$$\left|\frac{f^{(n)}(p)}{n!}\right| \leq \frac{\max_{|z-p|=r} |f(z)|}{r^n}$$

Définition

Une fonction $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe est appelée, une fonction entière.

Théorème de Lioville

f entière et bornée. Alors f est constante.

Démonstration:
f holomorphe $\implies$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec RdC}=\infty\text{, et} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

On sait aussi que: $\exists B$ tel que $|f(z)| \leq B \quad \forall z \in \mathbb{C}$
Donc par l'inégalité de Cauchy on obtient:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \leq \frac{\max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{r^n} \leq \frac{B}{r^n} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \neq 0$, ce qui implique que $f(z) = a_0$, une constante.

$\square$

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P(z)$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors $\exists w \in \mathbb{C}$ tel que $P(w) = 0$.

Preuve: *(par contradiction)*
Supposons par l'absurde que $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

- Alors la fonction $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ est entière.

- Montrons que f est bornée. $\forall r > 0$, le disque $\overline{D_r}$ est compact$\rightsquigarrow \exists B_r$ tel que $|f(z)| \leq B_r \quad \forall z \in \overline{D_r}$
  Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.
  Soit $A = \max\limits_{0\leq j\leq n-1} |a_j|$, $R = \max(1, 2nA)$. Alors

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^n + \cdots}\right| = \left|\frac{1}{z^n}\right| \cdot \left|\frac{1}{1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{z^{n-j}}}\right|$$

  Supposons $|z| \geq R$, alors par l'inégalité du triangle

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^n} \cdot \left|\frac{1}{1 - \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{R^{n-j}}}\right| \overset{R\geq 1}{\leq} \frac{1}{R^n} \cdot \left|\frac{1}{1 - \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{R}}\right| \overset{R\geq 2n|a_j|\forall j}{\leq} \frac{1}{R^n} \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{1}{R^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{R^n} \overset{R\geq 1}{\leq} 2$$

  Alors $|f(z)| \leq \max(2, B_R)$, ce qui implique que f est bornée et par Lioville, f est constante. $P(z)$ constante $\implies \deg P = 0$.

$\lightning$

Corollaire

Si $P(x)$ est un polynôme réel, alors $P(x) = \prod_{i=1}^{\ell} F_i(x)$ où $F_i(x)$ est linéaire ou quadratique réel.

Parce que P réel $\implies P(w) = 0 \implies P(\overline{w}) = 0$

8 Théorème des résidus/calcul d'intégrales et sommes.

Théorème: Série entière division

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$ avec RdC= R. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ l'inverse $\frac{1}{f}$ obtenu par le jeu de Newton. Quel est le rayon de convergence de cette nouvelle série ?

Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{1}{f}$, RdC $\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right] = \inf\{|w| \mid f(w) = 0\}$

Remarque

Même si $a_0 = 0$, mais $a_1 \neq 0$

$$f = z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \rightsquigarrow \frac{1}{f}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{a_1 + a_2 z + \cdots} \quad \text{pour } z \neq 0$$

8.1 Définitions

- Les zéros, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ pour $z \in D_R(p)$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$, alors on dit que f a un réro d'ordre k en p ($ord_p f = k$).

- Les pôles, supposons que f a un zéro d'ordre k en p, alors $\frac{1}{f}(z) = \frac{1}{(z-p)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k} (z-p)^n$. Dans ce cas on dit que $\frac{1}{f}$ a un pôle d'ordre k en p ($ord_p f = -k$).

  Définition (plus formelle)

  $g : D_R(p) \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, et $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)} & z \neq p \\ 0 & z = p \end{cases}$ est holomorphe, ayant un zéro d'ordre k en p. Alors, on dit que g a un pôle d'ordre k en p.

  Cela nous mène à définir:

  Définition

  On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est méromorphe avec pôles dans $S \subset U$ (fini), si $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ est holomorphe et f a un pôle $\forall p \in S$

  Exemples

  1. $\frac{1}{z}$ méromorphe dans $\mathbb{C}$ un pôle d'ordre 1 en 0.
  2. $\frac{1}{z^2+1}$ méromorphe dans $\mathbb{C}$ 2 pôles: $\pm i$.
  3. $e^z - 1$ holomorphe, zéros d'ordre 1: $\{2\pi i\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$
  4. $e^z - 1 - z$ a un zéro d'ordre 2 en $Z = 0$
  5. $\frac{1}{e^z - 1 - z}$ dans D_R a des pôles d'ordre 1 dans $\left\{2\pi i\ell \mid 0 < |\ell| < \frac{R}{2\pi}\right\}$ et un pôle d'orde 2 en $z = 0$.

- Si $f : U \to \mathbb{C}$ méromorphe, S-ensemble fini de pôles $\rightsquigarrow p \in S$ alors $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-p)^n$ dans ce cas:

$$\operatorname*{Res}_{z=p} f(z) = a_{-1}$$

Remarque

La définition du résidu est motivée par ce calcul:
Si $f : D_R(p) \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec p un pôle d'ordre k. Alors notons premièrement que f peut s'écrire:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-p)^n \quad \text{avec} \quad a_{-k} \neq 0$$

Calculons maintenant l'intégrale d'un cercle autour de p:

$$\int_{\partial D_r(p)} f(z)\, dz \overset{0<r<R}{=} \int_{\partial D_r(p)} \left(\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-p)^n \right) dz = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n \int_{\partial D_r(p)} (z-p)^n\, dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

Théorème des résidus

$f : W \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorphe. S fini; U étoilé avec $\overline{U} \subset W$, $S \cap \partial U = \varnothing$ et ∂U une courbe. f a des pôles en tout $p \in S$ et de plus:

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{p \in S \cap U} \operatorname*{Res}_{z=p} f(z)$$

Exemple

Essayons de calculer l'intégrale suivante:

$$\int_{\partial D_R} \frac{dz}{1-e^z}$$

Lors de la résolutions de tels problèmes, séparons en 3 partie notre raisonnement.

1. Étude des pôles de $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$.

   $g(z) := \dfrac{1}{f(z)} = 1 - e^z$ et p est un pôle de $f \iff g(p) = 0$:

   $$1 - e^z = 0 \iff e^z = 1 \iff z = 2\pi \cdot i \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

   Et par le théorème des résidus on obtient donc:

   $$\int_{\partial D_R} \frac{dz}{1-e^z} = 2\pi i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |2\pi n| < R}} \operatorname*{Res}_{z=2\pi i \cdot n} f(z)$$

2. Ensuite vient le calcul des résidus:

   Nous avons vu (série exo) que pour une fonction f qui a un pôle simple en p, $\operatorname*{Res}_{z=p} f(z) = \dfrac{1}{g'(p)}$ où $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$

   $$\operatorname*{Res}_{z=2\pi i \cdot n} \frac{1}{1-e^z} = \frac{1}{g'(2\pi i \cdot n)} = \frac{1}{-e^{2\pi i n}} = -1$$

   Où $g(z) = 1 - e^z \Rightarrow g'(z) = -e^z$

3. Il ne nous reste plus qu'à calculer:

$$\int_{\partial D_R} \frac{dz}{1-e^z} = -2\pi i \left(2\left\lfloor \frac{R}{2\pi} \right\rfloor + 1\right)$$

2.bis Que se passe-t-il si la fonction n'a pas de pôles simples ?

$$\int_{\partial D_R} \frac{dz}{(1-e^z)^2}$$

Bah go jeu de Newton.

8.2 Calcul d'intégrales impropres

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R^+} \frac{dz}{z^4+1} \right) - \int_{C_R^+} \frac{dz}{z^4+1}$$

Où on note C_R^+ le demi cercle reliant R et $-R$ passant par la partie supérieur du plan complexe

$$= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{z^4+1} + \operatorname*{Res}_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{z^4+1} \right)$$

De plus les pôles sont simples, il nous suffit donc de calculer $\dfrac{1}{g'(p)}$ pour avoir les résidus.

$$= 2\pi i \cdot 4 \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^3 + \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] - \cancelto{0}{\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{dz}{z^4+1}}$$

En effet, on peut borner le "reste" C_R^+ comme suit:

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{dz}{z^4+1} \right| \leq L(C_R^+) \cdot \max_{z\in C_R^+} \left(\frac{1}{z^4+1} \right) \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^4-1} \underset{\mathbb{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

8.3 Calcul d'intégrales trigonométriques

Pour $p > 1$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{p+\cos t} \overset{*}{=} \int_{\partial D_1} \frac{dz}{iz} \cdot \frac{1}{p + \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{1}{2i} \int_{D_1} \frac{dz}{1+2pz+z^2}$$

Avec l'étape $(*)$ qui passe par cette astuce:

$$\int_{\partial D_1} G(z)\, dz = \int_0^{2\pi} G(e^{it}) i e^{it}\, dt \quad \text{en posant} \quad z = e^{it} \quad \text{et donc} \quad dz = ie^{it}\, dt$$

$$\iff \cos t = \frac{z+z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z-z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$$

8.4 Sommes infinies

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-e^z)}$$

On remarque que les pôles sont $z = 2\pi i n,\ n \in \mathbb{Z}$ et ils sont d'ordre 1 pour $z \neq 0$ et d'ordre 3 pour $z = 0$.
On peut calculer les résidus, on obtient dans le cas $z \neq 0$: $\operatorname*{Res}_{z=2\pi i n} f(z) = \dfrac{1}{g'(2\pi i n)} = \dfrac{1}{4\pi^2 n^2}$