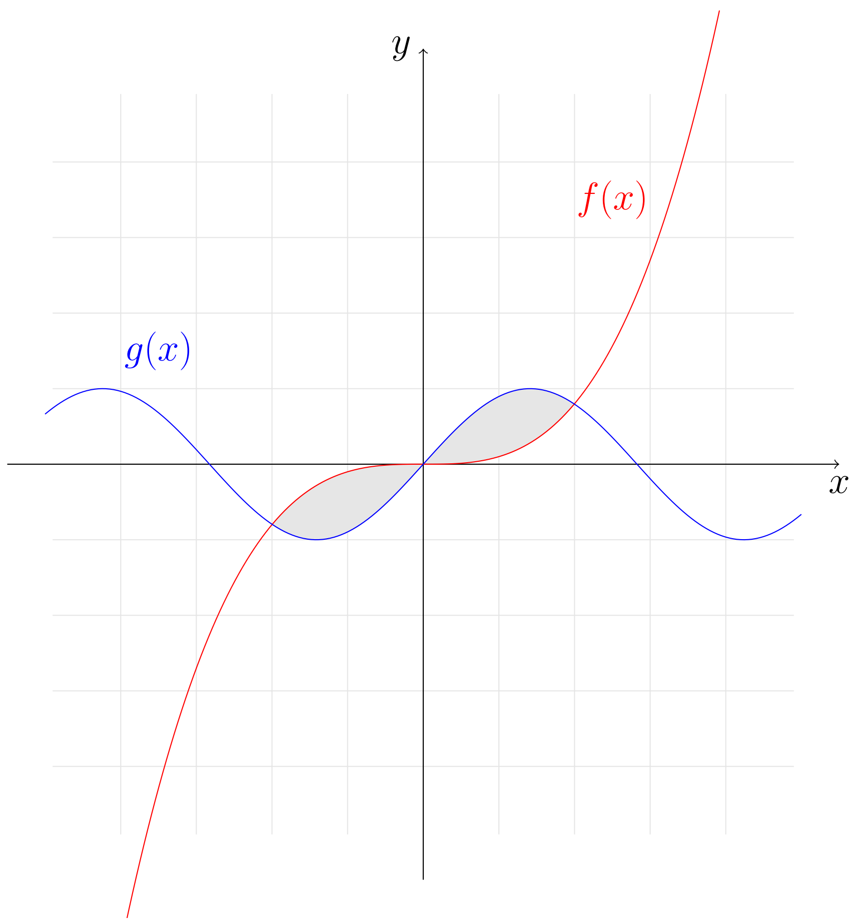
Analyse I - Printemps

P. Severa



Contents

1 Séries numériques

$$a_1, a_2, a_3, ... \in \mathbb{R} \quad \text{une suite}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1.1 Définitions

Si $a_1, a_2, a_3, ... \in \mathbb{R}$ est une suite, alors :

$$\sum_{n=1}^{\inf} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Propriétés:

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{convergent}$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et si $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Preuve:
Si $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Mais $a_n = s_n - s_{n-1}$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0 (= \sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

$\square$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divèrge même si } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Remarque

Si $c_1, c_2, ... \in \mathbb{C}$ est une suite et si $c \in \mathbb{C}$, alors on dit que:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \iff \lim_{n\to\infty} |c_n - c| = 0$$

Exemples

Série géométriques soit $q \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$$

- si $|q| \geq 1$ alors il n'est pas vrai que

  $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

  (car $|q^n| \geq 1$) alors

  $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ diverge}$$

- si $|q| < 1$

  $$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}$$

1.1.1 Définition

Soit $a_1, a_2, ... \in \mathbb{C}$ sune suite. On dit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

<u>converge absolument</u> si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

1.1.2 Théorème

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, c'est à dire si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

<u>*Preuve:*</u>

Rappel: une suite $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ converge et elle est de Cauchy, c'ests à dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m > n > n_0 \quad : \quad |c_m - c_n| < \varepsilon$$

Posons: $t_n = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$
$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
Notre hypothèse: $\lim t_n$ converge $(= \sum |a_n|)$
à montrer : $\lim s_n$ converge $(\sum a_n)$ t_n converge $\implies$ t_n est une suite de Cauchy, c'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m > n > n_0$$
$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |t_m - t_n| < \varepsilon$$

Mais:

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \underbrace{\leq}_{\text{Inégalité triangulaire}} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

$$\implies \text{ La suite } (s_n)_{n=1}^{\infty} \text{ est de Cauchy, donc elle converge.}$$

□

1.1.3 Observation

Si $a_n \geq 0 \quad (a_n \in \mathbb{R}) \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$
alors

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

est une suite croissante:

$$(s_{n+1} \geq s_n \text{ car: } s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0),$$

Et donc:

- soit la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée $\implies$ elle converge, c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

- soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas bornée, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \text{ c'est à dire: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{Diverge vers } +\infty$$

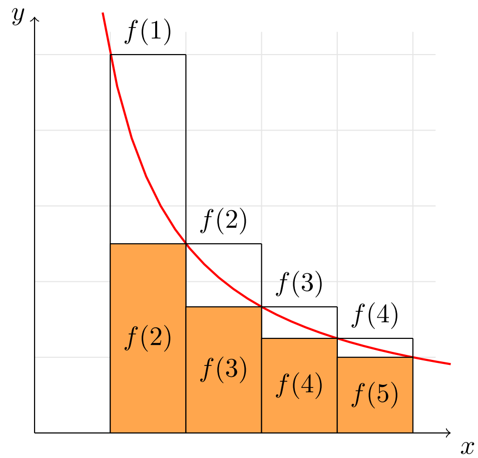
1.2 Comparaison avec une intégrale

1.2.1 Théorème

Soit $f: \begin{array}{ccc} [1,\infty) & \longrightarrow & [0,\infty) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une fonction décroissante. Alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge } \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

<u>*Preuve:*</u>
Non formelle (dessin).



$\square$

<u>*Preuve:*</u>
Preuve formelle.

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx$$
$$\leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n)$$

Pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}$:

$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$
$$\lim_{N\to\infty} : \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Et donc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

$\square$

Exemples:

Soit $a > 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^a}$, quand est ce que:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} < \infty \text{ ?}$$

Si et seulement si: $a > 1$ car:

$$\int \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{1}{1-a} \cdot x^{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ log(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} < \infty \quad \text{si et seulement si } a > 1$$

On a donc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge} \iff a > 1$$

$$\text{En particulier: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{(La série harmonique)}$$

1.3 Comparaison avec une autre série

Nous savons si $\sum_n q^n$ converge, et si $\sum_n \frac{1}{n^a}$ converge, est-ce que cette serie converge ?:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1.3.1 Propostion

$$\text{Si} \quad 0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{et si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Preuve:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

$$\lim_{N\to\infty} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$\square$

1.3.2 Proposition

Soient $a_n \in \mathbb{C}$ et $b_n \in (0, \infty)$. Si la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ est bornée, c'est à dire si $\exists C > 0$ tel que $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C \quad \forall n$

et si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge absolument.}$$

Preuve:

On a:

$$|a_n| \leq C \cdot b_n$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot b_n = C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \text{ (converge)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge, c'est à dire:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge absolument}$$

$\square$

1.3.3 Théorème: Critère de la limite

Soient $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in (0, \infty)$. Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.
Alors:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge, alors } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge absolument.}$$

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge, alors } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

Corrolaire

Avec les mêmes hypothèses, si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.

Corrolaire

Si $a_n \in (0, \infty)$, $b_n \in (0, \infty)$, et si $\lim \frac{a_n}{b_n} \neq 0$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \text{ converge}$$

(Car on peut échanger les suites a_n et b_n)

<u>*Preuve:*</u>

La suite $\frac{a_n}{b_n}$ converge $\implies$ elle est bornée, c'est à dire:

$$\exists C > 0 \quad \text{t.q.} \quad \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C$$

On a donc

$$|a_n| \leq C \cdot b_n$$

Par l'hypothèse $\sum b_n$ converge

$$\underset{Prop.}{\implies} \sum a_n \text{converge}$$

□

Exemples

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

on pose $b_n = \left. 1 \middle/ n^2 \right.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge, et donc}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{ diverge } \implies \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

1.3.4 Théorème: Critère du quotient

Soit $a_n \in \mathbb{C}$ une suite.

- Si $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ alors $\sum a_n$ converge absolument
-
  Si $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$

  Alors $\sum a_n$ diverge

Preuve:
Des deux parties:

1. Soit q t.q. :

   $$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1 \implies \exists n_0 \text{ t.q.} \quad \forall n \geq n_0$$

   on a

   $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$$

   On a donc:

   $$|a_{n_0+1}| < q \cdot |a_{n_0}|$$
   $$|a_{n_0+2}| < q \cdot |a_{n_0+1}| < q^2 \cdot |a_{n_0}|$$
   $$|a_{n_0} + k| < q^k \cdot |a_{n_0}|$$

   Vu que

   $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ converge}$$
   $$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_0+k}| \text{ converge } \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

   C'est à dire $\sum a_n$ converge absolument

2. Soit q t.q.

$$1 < q < \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$
$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q$$
$$\implies |a_{n_0+k}| > q^k\,(a_{n_0}) \qquad \implies \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$
$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

□

Exemples

1.

$$x \in \mathbb{C},\ x \neq 0$$
$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0(< 1)$$
$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ converge absolument}$$

2.

$$\sum \frac{n}{2^n} \to \lim \frac{(n+1)\big/ 2^{n+1}}{n \big/ 2^n} = \frac{1}{2} < 1$$
$$\implies \sum \frac{n}{2^n} \text{ converge}$$

Rappel

Si $a_n \in \mathbb{R}$ est une suite, alors

$$\lim_{n\to\infty} sup\, a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \qquad \in (-\infty, \infty)$$

= le plus grand point d'accumulation. Si $\lim_n a_n$ existe, alors:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

1.3.5 Thérorème: critère de racine

Soit $a_n \in \mathbb{C}$ une suite.

1. si $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ Alors $\sum a_n$ Converge absolument
2. si $\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ alors $\sum a_n$ diverge

Preuve:

1.

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$

Par la définition de lim sup:

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0$$
$$\sqrt[n]{|a_n|} < q, \text{ c'est à dire } |a_n| < q^n \implies \sum |a_n| \text{ converge}$$
$$(\text{Car } \sum q^n \text{ converge})$$

2.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$$

Par la définition de lim sup

$$\exists \text{ un nombre infini de } n \in \mathbb{N}\text{t.q.}$$
$$\sqrt[n]{|a_n|} > q \text{ c'est à dire } |a_n| > q^n \implies \text{ on ne peut pas avoir } \lim |a_n| = 0$$
$$\implies \sum a_n \text{ diverge}$$

$\square$

Exemple

$\sum \frac{n}{2^n}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{n} \subset n \to \infty {\to} \frac{1}{2} < 1$

$\implies \sum \frac{n}{2^n}$ converge

1.4 Critères de Leibnitz et de Dirichlet

Ce sont 2 critères pour convergence non-absolue

1.4.1 Théorème: critère de Leibnitz

Soit $b_n \in \mathbb{R}$ est une suite décroissante t.q. $\lim_n b_n = 0$ Alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n \text{ converge}$$

<u>*Preuve:*</u>

On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot b_k$$

On a

$$s_0 \leq s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$$
$$\implies \lim_n s_{2n} \text{ existe (} s_{2n} \text{ est croissante et bornée), aussi: } \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \text{ existe}$$

on a aussi $\lim_n s_{2n} = \lim_n s_{2n+1}$, car

$$\lim_n (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_n b_{2n+1} = 0 \text{ par l'hypothèse } \implies \text{ la suite } s_n \text{ converge}$$

$\square$

Exemple

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \quad (= \log(2))$$

converge mais ne converge pas absolument. ($\sum \frac{1}{n}$ ne converge pas)

1.4.2 Théorème: Critère de Dirichlet

Soit $b_n \in \mathbb{R}$ une suite décroissante t.q. $\lim_n b_n = 0$. Soit $a_n \in \mathbb{C}$ une suite t.q.

$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ est bornée(c'est à dire: $\exists C > 0 \quad$ t.q. $\quad |s_n \leq C$) Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ converge

<u>*Preuve:*</u>
L'idée: sommation par parties

$$s_0 := 0, \qquad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$t_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(s_k - s_{k-1})}_{a_k} \cdot b_k = s_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0, \text{ car } (s_n)_{n=1}^{\infty} \text{ est bornée et } \lim_n b_n = 0$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$$

On va montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(b_k - b_{k+1}) \text{ converge.}$$

s_k est bornées, c'est à dire: $\exists C > 0$ t.q. $|s_k| \leq C$ et la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) \text{ converge:}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = (b_1 - \cancel{b}_2) + (\cancel{b}_2 - \cancel{b}_3) + (\cancel{b}_3 - \cancel{b}_4) + \ldots + (\cancel{b}_n - b_{n+1}) \overset{n\to\infty}{\to} b_1$$

On a donc:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) \text{ converge, } b_k - b_{k+1} \geq 0$$

$$|s_k| \leq C \implies \sum_{k=1}^{\infty} s_k(b_k - b_{k+1}) \text{ converge}$$

$\square$

Exemple

Soit $z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z| = 1$ et $z \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad a_n = z^n, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = z + z^2 + \ldots + z^n = z \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

$$|s_n| = |z|\frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} \leq \frac{|1| + |z^n|}{|1 - z|} = \frac{z}{|1 - z|} =: C \implies \text{la suite } s_n \text{ est bornée} \implies \sum \frac{z^n}{n} \text{ converge}$$

1.5 Convergence absolue et convergence non-absolue

Théorème A

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Alors:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

Si une série converge absolument, alors la somme ne dépend pas de l'ordre de la somation.

Théorème B

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge non-absolument $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty\right)$, et supposons que $a_n \in \mathbb{R}$ $(\forall n)$ Alors $\forall s \in \mathbb{R}$ $\exists$ bijection $\sigma_s :\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_s(n)} = s$$

Aussi, $\exists\, \sigma\ :\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ t.q. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ diverge

Lemme

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$$

<u>*Preuve:*</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

En prenant la limite:

$\lim_{N\to\infty}$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

$\square$

<u>*Preuve:*</u>
Pour le théorème A.
Posons $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ et $s'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(n)}$. Il faut montrer que $\lim_n s'_n = \lim_n s_n$, c'est à dire que:

$\lim_{n\to\infty} (s'_n - s_n) = 0$

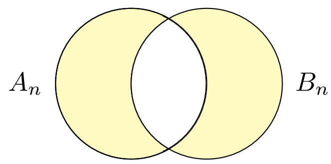
posons

$$A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, \quad B_n = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$$

On a donc

$$s_n = \sum_{k \in A_n} a_k$$

$$s'_n = \sum_{k \in B_n} a_k \implies s'_n - s_n = \sum_{k \in B_n} a_k - \sum_{k \in A_n} a_k = \sum_{k \in B_n \setminus (A_n \cap B_n)} a_k - \sum_{k \in A_n \setminus (B_n \cap A_n)} a_k$$



$$\implies |s'_n - s_n| \leq \sum_{k \in A_n \triangle B_n} |a_k| \quad \text{Où } \triangle \text{ est la différence symétrique}$$

Si N est borné, alors $\forall$n suffisament grand on a
$\{1, 2, \ldots, N\} \subset A_n \cap B_n$, et donc

$$|s'_n - s_n| \leq \sum_{k \in A_n \triangle B_n} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$$

car:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| = 0$$

On a

$$\lim_{n \to \infty} |s'_n - s_n| = 0$$

□

__Preuve:__
Théorème B (indication)

On a $\sum a_n$ qui converge mais $\sum |a_n|$ diverge. Soient:

$$\begin{array}{ll} b_1, b_2, b_3, \ldots & \text{les } a_n \geq 0 \\ c_1, c_2, c_3, \ldots & \text{les } a_n < 0 \end{array}$$

$$\lim b_n = 0, \quad \lim c_n = 0$$

et

$$\sum b_n = \infty \quad \text{en plus de} \quad \sum c_n = -\infty$$

Pour construire σ_s ($s \in \mathbb{R}$), nous allons additionner les termes positifs (b_i) jusqu'à dépasser la valeur s, puis additionner les termes négatifs c_i jusqu'à passer au dessous de s, puis repasser sur les termes positifs et ainsi de suite. Nous pouvons ensuite montrer que grâce à cette construction, la série converge vers la valeur s.

□

1.6 Produit de séries et l'exponentielle complexe

Nous savons:

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{converge}$$

Théorème

Si $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sin(x)$$
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos(x)$$

Preuve:
Taylor-Lagrange:
pour $t_n \in [0,1]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{f^{(n+1)}(t_n \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

si $f(x) = \exp(x)$

$$(e^x)' = e^x \to f^{(k)}(0) = 1$$
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{e^{t_n x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}_{=:R_n(x)}$$
$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \implies \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Pour $\sin(x)$ et $\cos(x)$, voir exercices.

$\square$

Définition

Si $x \in \mathbb{C}$, alors

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Proposition

Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) + i \cdot (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots) \\ &= \cos(x) + i \cdot \sin(x)\end{aligned}$$

□

On va montrer: $\forall x, y, \in \mathbb{C}$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$$

Preuve:

$$\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum \frac{y^n}{n!}\right)$$

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \quad b_n = \frac{y^n}{n!}$$

$$d_n = sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!k!}}_{=\binom{n}{k}} \cdot x^{n-k} y^k$$

$$= \frac{1}{n!}(x+y)^y$$

Donc

$$\sum d_n = \sum \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y)$$

□

Définition

Supposons que X est un ensemble dénombrable et que on a des nombres $a_x \in \mathbb{C}$ ($\forall x \in X$) c'est à dire $a : X \to \mathbb{C}$, si $\sigma : \mathbb{N} \to X$ est une bijection, alors on pose:

$$\sum_{x \in X} a_x := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

Supposant que la série converge absolument. La convergence absolue nous assure que la somme ne dépend pas de σ.

Théorème

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent absolument alors:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i \cdot b_j$$

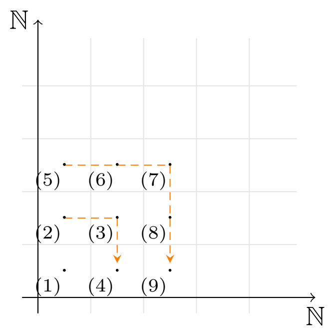
<u>*Preuve:*</u>

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j \quad \text{converge absolument}$$

c'est à dire

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_i b_j| < \infty$$

On prend cet ordre pour la somation:



Si $\ell \in \mathbb{N}$, alors la ℓ^2-ème somme partielle est :

$$\left(\sum_{i=1}^{\ell} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |b_j|\right)$$

Cette somme partiell est

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$$

$\implies$ la suite des sommes partielles (qui est croissante) converge.

$$\sum_{i=1}^{\ell} |a_i| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_i|$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j$$

On utilise le même ordre de la somation, la ℓ^2-ème somme partiell est:

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\ell} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |b_j|\right) \tag{a}$$

$$\lim_{\ell\to\infty} ((\text{a})) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$$

on a donc trouvé une sous-suite qui converge vers

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right) \qquad (\star)$$

la suite des sommes partielles converge (car on a une série qui converge même absolument) $\implies$ la limite est $(\star)$

$\square$

Corollaire

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent absolument et si: $\displaystyle d_n := \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ alors,

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Aussi :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

où

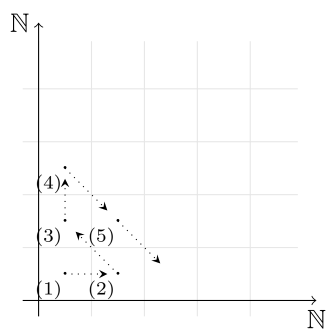
$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Preuve:

On sait que

$$\sum a_i \cdot \sum b_j = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i \cdot b_j$$

On doit choisir un ordre de la sommation pour $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, il s'agit de trouver une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$



$$\underbrace{a_1b_1}_{d_2} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)}_{d_3} + \underbrace{(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)}_{d_4} + \cdots$$

$\square$

Exemple

si $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n} x^n$$

donc

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \overset{\text{corr.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \rightsquigarrow d_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}x^k = (n+1)x^n$$

1.7 Résumé

- ⋆ Savoir faire: déterminer si une série converge ou pas
- ⋆ Méthodes:
  - Comparer avec $\sum q^n$ (critère du quotient et de la racine)
  - Comparer avec $\sum_n \frac{1}{n^q}$
  - Critères de Leibnitz et de Dirichlet
- ⋆ Théorie:
  - $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$ si convergence absolue
  - Produit de séries, $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$

1.7.1 Théorème (Euler)

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty$$

($\implies$ # des premiers est ∞, vu que $\sum {}^1\!/_{n^2} < \infty$, alors les premiers sont plus dense dans $\mathbb{N}$ que les carrés)

Preuve:
(l'idée)

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots\right) \\
&= \sum \frac{1}{n} = \infty \\
(*) &= \frac{1}{1 - {}^1\!/_2} \cdot \frac{1}{1 - {}^1\!/_3} \cdot \cdots \\
&= \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - {}^1\!/_p} = \infty \\
\log : &\sum_p -\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \infty
\end{aligned}$$

vu que

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\log(1-x)}{x} = 1$$

on a aussi que

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty$$

Puis avec beaucoup de travail: $|\{p \text{ premier}, p \leq n\}| \approx \frac{n}{\log(n)}$

□

2 Suite et séries de fonctions

Motivation

Justifier les calculs:

Pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\implies \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

Ou encore:

$$\int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

2.1 Convergence uniforme

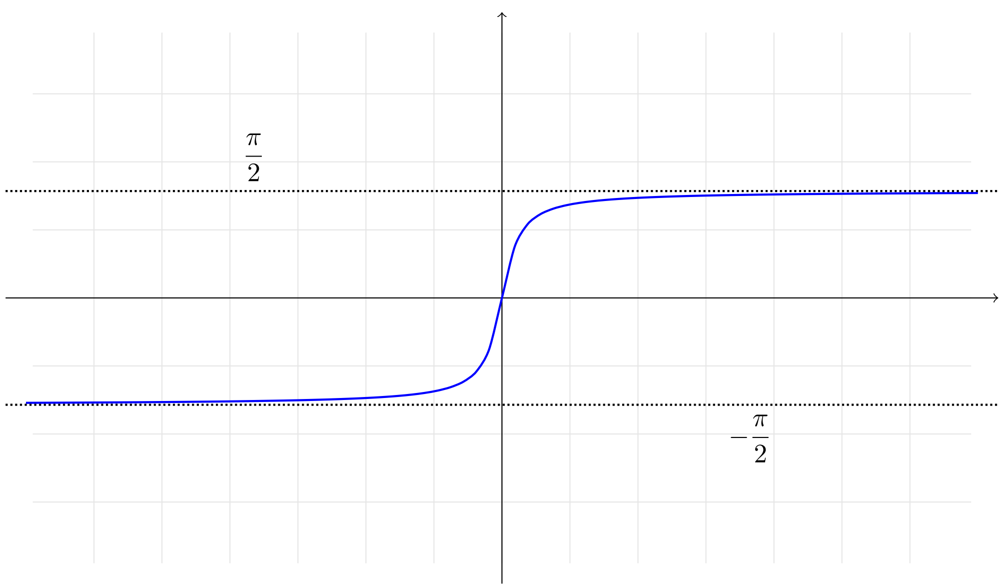
2.1.1 Définition: Convergence ponctuelle

Soient A un ensemble, et $f_n : A \to \mathbb{K} \quad n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite $(f_n)_{n=1}$ converge ponctuellement vers $f : A \to \mathbb{K}$ si:

$$(\forall a \in A) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

Exemples

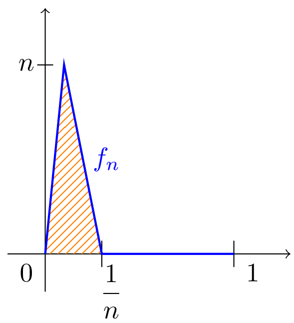
i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \arctan(nx)$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{array} \right\} = f(x)$$

Alors f_n converge ponctuellement vers $f(x)$, cette limite n'est pas continue.

ii) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$



$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \implies \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{0} dx$$

Notation

pour $f : A \to \mathbb{C}$ on pose: $\|f\| := \sup_{a\in A} |f(a)|$ la norme de f

Motivation

si $f, g : A \to \mathbb{C}$, alors on va voir $\|f - g\|$ comme "la distance" entre f et g.

2.1.2 Définition: Convergence uniforme

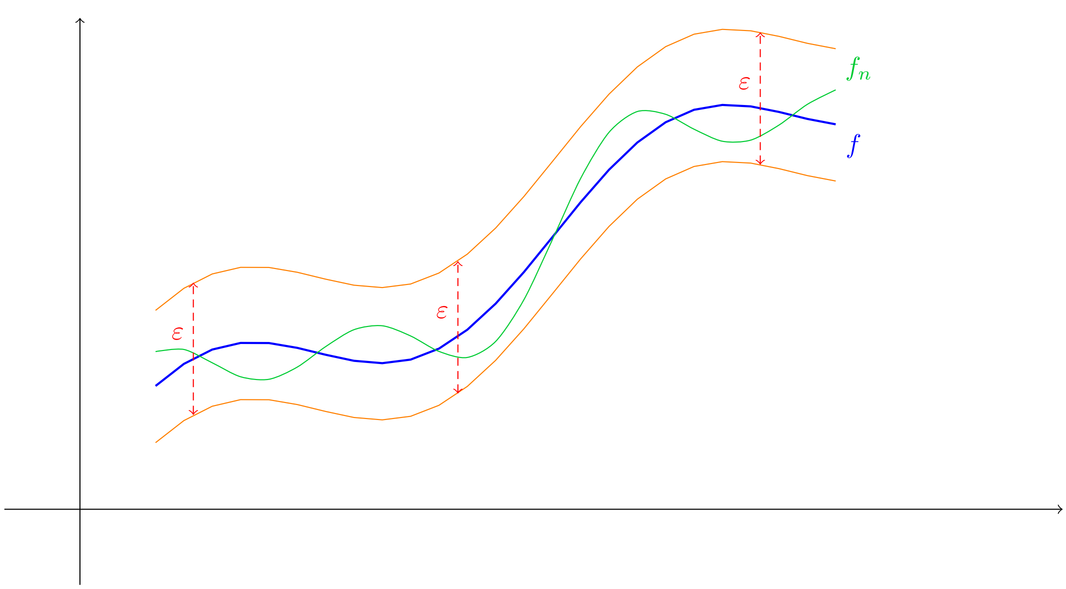
On dit que une suite de fonctions $f_n : A \to \mathbb{C}$ <u>converge uniformément</u> vers $f : A \to \mathbb{C}$ si:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

c'est à dire si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \qquad \|f_n - f\| < \varepsilon$$

Visualisation



Proposition

Si $f_n \to f$ uniformément, alors $f_n \to f$ ponctuellement

Preuve:
Soit $a \in A$, alors $\|f_n - f\| \geq |f_n(a) - f(a)|$
Donc si $\lim \|f_n - f\| = 0$, alors aussi :

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$$

C'est à dire:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

$\square$

Exemples

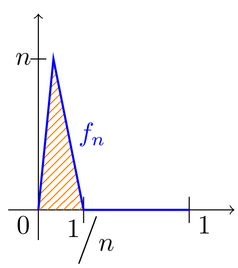
i)

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

la limite ponctuelle est 0

On a $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ponctuelle est-ce que $f_n \to 0$ uniforme ?

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies f_n \to 0 \text{ uniforme}$$

ii) Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que :  et donc $f_n \to 0$ ponctuel et ce $\forall x \in [0,1]$

Est ce que $\lim f_n(x) = 0$ uniforme ?

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$\implies$ la convergence n'est pas uniforme

iii) Considérons la fonction suivante : $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(nx) \end{array}$

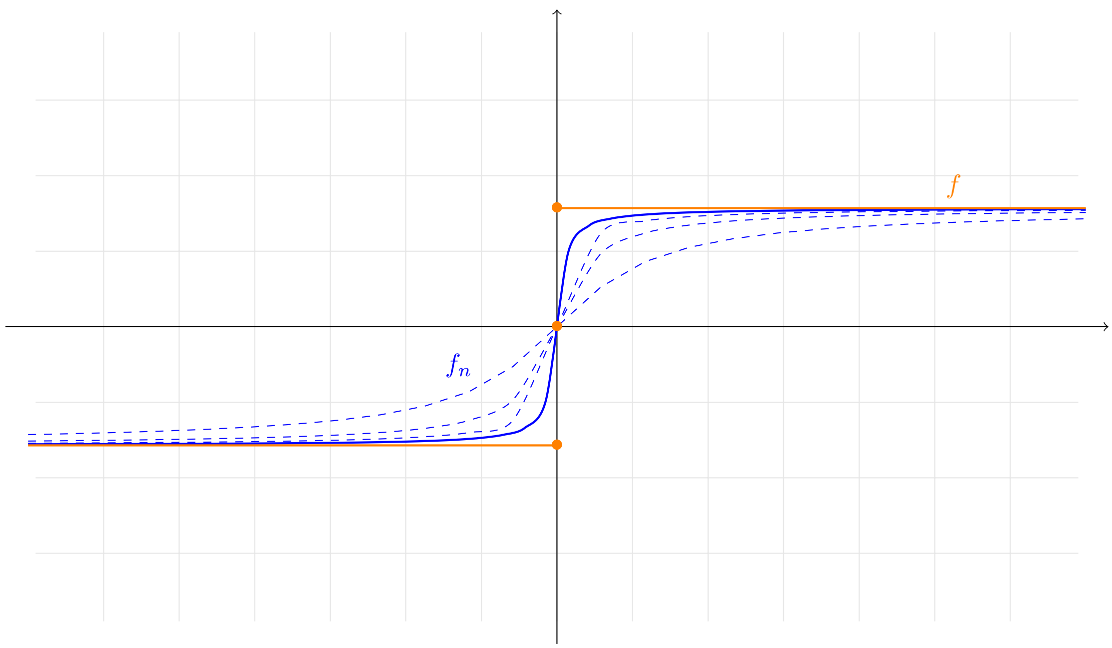
La limite ponctuelle est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Considérons maintenant $\|f_n - f\|$

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} \implies \quad \text{la convergence n'est pas uniforme}$$

De manière visuelle:



En bref

$f_n \to f$ est uniformément convergeante si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall a \in A \qquad |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

Donc il existe un n_0 valable pour tout $a \in A$
En revanche la convergence ponctuelle se traduit par

$$\forall a \in A \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \qquad |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

Ici n_0 peut dépendre de a

Théorème

Soient $A \subset \mathbb{K}$ et $f_n : A \to \mathbb{K}, n = 1, 2, 3, \ldots$
Supposons que toute f_n est continue et que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $f : A \to \mathbb{K}$. Alors f est continue.

Preuve:
Par définition, f est continue en $a \in A$ si:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall a' \in A \qquad |a' - a| < \delta \implies |f(a') - f(a)| < \varepsilon$$

$f_n \to f$ uniformément $\implies \forall n$ suffisament grand $\|f_n - f\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
f_n est continue $\implies \exists\delta > 0 \quad \forall a' \in A \qquad |a' - a| < \delta \implies |f_n(a') - f_n(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Il faut montrer: si $|a' - a| < \delta$ alors $|f(a') - f(a)| < \varepsilon$

Mais:

$$\begin{aligned}
|f(a') - f(a)| &= |(f(a') - f_n(a')) + (f_n(a') - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))| \\
&\leq |f(a') - f_n(a')| + |f_n(a') - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Critères de la convergence uniforme

2.2.1 Critère de Cauchy

Toute suite de Cauchy converge uniformément:
Soit $f_n : A \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions telle que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \qquad \|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$$

est une suite de Cauchy. Alors la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément.

<u>*Preuve:*</u>

- Convergence ponctuelle:
  Si $a \in A$, alors $|f_m(a) - f_n(a)| \leq \|f_m - f_n\| \quad \forall m, n$. Par définition, on a que la suite $(f_n(a))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy $\implies$ $(f_n(a))_{n=1}^{\infty}$ converge et on pose $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(A)$. On a donc une fonction $f : A \to \mathbb{K}$ et $f_n \to f$ ponctuellement continue
- $f_n \to f$ uniforme:
  Nous savons que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \qquad \|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$, en particulier:
  $\forall a \in A \quad |f_m(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$.
  $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(a) - f_n(a)| = |f(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$
  On a donc $\forall a \in A \quad |f(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$ c'est à dire $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$.
  Cela implique que $f_n \to f$ uniformément

$\square$

Définition

Si $g_n : A \to \mathbb{C}$ on dit que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ <u>converge uniformément</u> si $\lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} g_n$ converge uniformément.

Proposition

Si $f, g : A \to \mathbb{C}$ alors $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

<u>*Preuve:*</u>

$\forall a \in A \quad |f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq \|f\| + \|g\|$
On prend $\sup\limits_{a \in A}$:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$\square$

2.2.2 Critère de Weierstrass

Soit $g_n : A \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions telle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\| < \infty$.

Alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformément.

<u>*Preuve:*</u>

Posons $s_n := \sum_{k=1}^{n} g_k \quad (s_n : A \to \mathbb{C}), t_n := \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|$
Si $m \geq n$ alors:

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} g_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|g_k\| = t_m - t_n \leq |t_m - t_n|$$

Par l'hypothèse la suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $\implies$ elle est de Cauchy $\implies$ la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy $\underset{\text{Crit. conv. Cauchy}}{\implies}$ s_n converge uniformément.

$\square$

Exemple

Soit la fonction $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(nx)}{n^2} \end{array}$ est ce que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniformément ?

$$\|g_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\implies \sum \frac{\sin(nx)}{n^2} \quad \text{converge uniformément}$$

$$\implies f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \quad \text{est une fonction continue}$$

2.2.3 Corollaire: Forme alténative du critère de Weierstrass

Si $g_n : A \to \mathbb{C}$ et si $b_n \geq 0$ sont tels que

$$\forall a \in A \quad |g_n(a)| \leq b_n \quad \text{et si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

Alors $\sum g_n$ converge uniformément.

Preuve:

$$\|g_n\| \leq b_n \implies \sum \|g_n\| < \infty$$

$\square$

2.3 Intégration et différentiation

Théorème

Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ des fonctions continues ($n = 1, 2, \ldots$). Si la suite f_n converge uniformément, alors:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Version pour séries:

Si $\sum g_n$ converge uniformément, alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) dx$$

<u>*Preuve:*</u>
Posons $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

On veut montrer:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

On a

$$\left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq (b-a) \cdot \|f - f_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overset{\text{conv. unif.}}{0}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx = 0$$

$\square$

Remarque

Le même chose est vrai si $f_n \to f$ uniformément sur $[c,d]$ et $a, b \in [c,d]$ car la convergence uniforme sur $[c,d]$ implique la converence uniforme sur $[a,b]$

Exemples

i) Si $|x| < 1$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. La convergence est uniforme sur $[-q,q]$, si $0 \leq q < 1$, par Weierstrass $\|x^n\| = q^n$ (sur $[-q,q]$) et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ converge.

ii) Si $0 \leq t < 1$:

$$\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^t \frac{dx}{1-x} = -\log(1-t) \implies \forall t \in [-1,1]$$

$$-\log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

Question

Quand est ce que $\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f\right)'$? Nous pouvons voir que la convergence uniforme n'est pas suffisante.

Exemples

1)

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \qquad \lim_n f_n = 0 \quad \text{conv. uniforme}$$

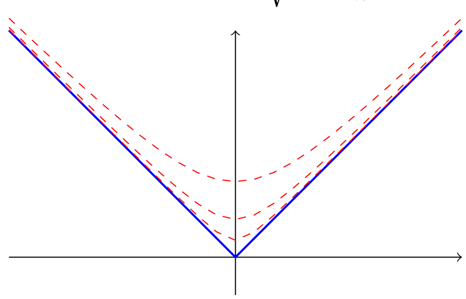
$$(\|f_n\| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0)$$

Mais $f_n'(x) = \cos(nx)$ ne converge pas.

$\lim_{n\to\infty} f_n'$ n'existe pas

2)

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}$$



$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x| =: f(x) \quad \text{converge uniformément mais } f \text{ n'est pas dérivable.}$$

Théorème

Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ des fonctions de la classe C^1 (c'est à dire f_n' est continue). Supposons que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge (ponctuellement) et que la suite $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément. Alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est de la classe C^1 et $\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'$

Preuve:

Posons $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Vu que f_n' sont continues et que $f_n' \underset{n\to\infty}{\to} g$ uniformément, nous savons que g est continue. Il faut montrer que $g = f'$.

Soient $t_0, t_1 \in [a,b]$ alors:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} g(x)\,dx &= \int_{t_0}^{t_1} \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} f_n'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (f_n(t_1) - f_n(t_0)) \\ &= f(t_1) - f(t_0) \implies \quad f \text{ est une fonction primitve de } g_1 \text{ c'est à dire } f' = g \end{aligned}$$

$\square$

Pour les séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right)'$$

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge et si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n'$ converge uniformément.

Exemple

Si $x \in (-1, 1)$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

On pose $g_n(x) = x^n,\ g_n'(x) = nx^{n-1}$ est ce que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ converge uniformément ?

Avec Weierstrass: Soit q tel que $0 < q < 1$ sur $[-q, q]$ on a $\left|nx^{n-1}\right| \leq nq^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ converge par critère du quotient:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = q < 1$$

$\implies \sum nx^{n-1}$ converge uniformément sur $[-q, q] \implies \left(\sum x^n\right)' = \sum nx^{n-1} \qquad \forall x \in [-q, q]$
$\implies$ vrai $\forall x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

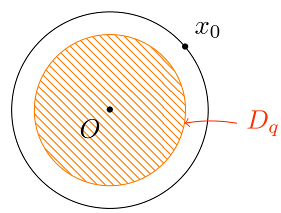
2.4 Séries entières

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ par exemple:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \text{ t.q } |x| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \qquad \forall x$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

Proposition

Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ converge. Alors $\forall x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge. La convergence de cette série est uniforme sur le disque $D_q := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq q\}$ pour tout q tel que $q < |x_0|$



Preuve:

$$\sum c_n x_0^n \text{ converge } \implies \lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0 \implies \exists C > 0 \text{ tel que } |c_n x_0^n| \leq C \qquad \forall n$$

Si $|x| < |x_0|$, alors

$$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq C \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$$
$$\implies \sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty$$
$$\implies \sum |c_n x^n| < \infty$$

C'est à dire $\sum c_n x^n$ converge absolument.
Pour la convergence uniforme:

On utilise Weierstrass

$$\|c_n x^n\| = \sup_{x \in D_q} |c_n x^n| = |c_n| \cdot q^n$$

$\sum |c_n| q^n < \infty$ (car $q < |x_0|$) et donc $\sum c_n x^n$ converge uniformément dur D_q.

$\square$

Théorème

Si $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ alors $R \in [0, \infty]$ tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \begin{cases} \text{converge absolument si } |x| < R \\ \text{diverge si } |x| > R \end{cases}$$

Si $q < R$ alors $\sum c_n x^n$ converge uniformément sur D_q

Preuve:
On pose:

$$R = \sup\{x \in \mathbb{C} \mid \sum c_n x^n \quad \text{converge} \quad \}$$

et on utilise pa proposition précédente.

$\square$

R est le rayon de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Théorème

(1) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$

(2) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ si cette limite existe.

Preuve:

(1) Par le critère de la racine:
Posons $a_n = c_n x^n$
$\sum a_n = \sum c_n x^n \begin{cases} \text{converge si } \limsup\limits_{n\to\inf} \sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1 \\ \text{diverge si } \limsup\limits_{n\to\inf} \sqrt[n]{|c_n x^n|} > 1 \end{cases}$
Mais $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$
Et donc: si $|x| < 1/\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ la série converge et si $|x| > 1/\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ la série diverge.

(2) Avec le critère du quotient:

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = (*) < 1$ alors $\sum c_n x^n$ converge et si $(*) > 1$ alors la série diverge. On a donc:

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{converge}$$
$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{diverge}$$

c'est à dire

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad \Longrightarrow \quad \text{converge}$$
$$|x| > \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad \Longrightarrow \quad \text{diverge}$$

$\square$

Exemple

$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ Donc le cas $c_n = n^2$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Prenons $x \in \mathbb{R}$ dorénavant

Théorème

Si le rayon de la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est R alors le rayon de la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ est aussi R et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \qquad \forall x \in (-R, R)$

La fonction:

$$f: \begin{array}{ccc} (-R,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{array}$$

et C^{∞} et $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve:

Le rayon R' de la convergence de $\sum c_n n x^{n-1}$ est le même que pour $x \sum c_n n x^{n-1} = \sum c_n n x^n$ et donc:

$$R' = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}}$$

$$= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

C'est à dire $R' = R$

Rappel: $\sum (g_n') = \left(\sum g_n\right)'$ si $\sum (g_n')$ converge uniformément et si $\sum g_n$ converge. On pose $g_n(x) = c_n x^n$ et donc $g_n'(x) = n c_n x^{n-1}$

Choisissons q tel que $0 \leq q < R$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \sum g_n' \quad \text{et} \quad \sum g_n \quad \text{converge uniformément sur } [-q, q] \\
&\Longrightarrow \sum g_n' = \left(\sum g_n\right)' \quad \text{sur } [-q,q] \qquad \forall q < R \\
&\Longrightarrow \sum g_n' = \left(\sum g_n\right)' \quad \text{sur } (-R, R)
\end{aligned}$$

On a donc $\forall x \in (-R, R)$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n \leftarrow \quad \text{une série entière ave le même } R$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1) x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1) x^n$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum c_n x^n \quad \text{est } C^{\infty} \text{ sur } (-R, R)$$

Si on calcule

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k x^k\right)^{(n)} \Big|_{x=0} = c_n \left(x^n\right)^{(n)} \Big|_{x=0} = c_n n!$$

$$\implies c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

□

Théorème

Si $t \in (-R, R)$ alors:

$$\int_0^t \left(\sum c_n x^n\right) \, dx = \sum c_n \int_0^t x^n \, dx = \sum c_n \frac{t^n + 1}{n+1}$$

Preuve:
Convergence uniforme

□

2.4.1 Théorème: Abel

Supposons que $(*) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge pour $x = x_0 \in \mathbb{R}$. Alors la convergence de $(*)$ est uniforme sur $[0, x_0]$ (si $x_0 \geq 0$) ou sur $[x_0, 0]$ (si $x_0 \leq 0$)
En particulier, la fonction $(*)$ est continue sur $[0, x_0]$ (ou sur $[x_0, 0]$ si $x_0 \leq 0$) et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Démonstration:

- On peut supposer que $x_0 = 1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$
- Si $x_0 = 1$ on peut supposer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$ (pour cela on peut remplacer c_0 par $-\sum_{n=1}^{\infty} c_n$)

L'idée de la preuve: sommation par parties, on pose $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ et (et $s_{-1} := 0$)
Donc $c_n = s_n - s_{n-1}$ et $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^k = s_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k \cdot \left(x^k - x^{k+1}\right)$$

vue que $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $s_n x^n \to 0$ uniforme sur $[0, 1]$ car $\|s_n x^n\| = |s_n| \to 0$

Donc il faut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} s_k \left(x^k - x^{k+1}\right)$$

est uniforme sur $[0,1]$, c'est à dire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_n \left(x^k - x^{k+1}\right) \quad \text{converge uniformément}$$

A montrer:

$$fn(x) := \sum_{k=0}^{n} s_k x^k (1-x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k (a-x) =: f(x) \quad \text{uniformément sur } [0,1] \text{ en utilisant que } \lim_{k\to\infty} s_k = 0$$

Il faut donc montrer que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$

$$\begin{aligned} |\ f(x) - f_n(x)\ | &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x^k (1-x)\right| = |1-x| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x^k\right| \leq |1-x| \cdot \sup_{k\geq n+1} |s_k| \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= (1-x) \cdot \sup_{k\geq n+1} |s_k| \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^{n+1} \cdot \sup_{k\geq n+1} |s_k| \leq \sup_{k\geq n+1} |s_k| \end{aligned}$$

Donc: $\forall x \in [0,1]$ on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{k\geq n+1} |s_k| \quad \text{c'est à dire} \quad \|f - f_n\| \leq \sup_{k\geq n+1} |s_k|$$

Finalement:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n+1} |s_k| = \limsup_{n\to\infty} |s_n| = \lim_{n\to\infty} |s_n| = 0 \implies \|f - f_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \qquad \forall |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \overset{\text{Abel}}{=} \lim_{x\to -1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x\to -1} -\log(1-x) = -\log(2)$$

2.5 Séries de Taylor

Rappel

Si R est le rayon de convergence de $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, alors f est C^∞ sur $(-R, R)$ et $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Définition

Soit $f : (-a, a) \to \mathbb{K}$ une fonction C^∞. Alors la série de Taylor de f est la série entière:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Question

Est ce que la série converge vers f ? Et pour quels $x \in (-a, a)$?

Contre-Exemple

i) $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^\infty$ telle que sa série de Taylor ne converge que pour $x = 0$ (c'est à fire le rayon de la convergence est 0)

ii) $f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ et $f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall n \implies$ la série de Taylor est $0 \neq f(x)$
Pour comprendre il faudra suivre le cours d'Analyse complexe.

Exemples Corrects

i) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in (-1, 1)$

ii) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x$

iii) formule du binome: $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad \forall x \in (-1, 1) \quad a \in \mathbb{R}$

2.6 Résumé de la partie 2

Savoir faire:

- Détérminer si une suite ou une série de fonctions converge uniformément ou pas
  Méthodes:
  - ⋆ de la définitions
  - ⋆ critère de Weierstrass

  A quoi cela sert:
  - ⋆ montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n$ est continue
  - ⋆ $(\lim f_n)' = \lim f_n' \implies \int_a^b \lim f_n(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$
- Cas particuliers:
  - ⋆ rayon de la convergence
  - ⋆ On peut échanger $\sum$ avec la dérivée ou avec l'intégrale

3 Espaces métriques

Motivation

- Préparation pour les fonctions à plusieurs variables
- Comprendre mieux la convergence uniforme
- "Une grande généralisation"

3.1 Métriques et normes

Définition

Si X est un ensemble, alors une métrique sur X est une fonction $d: X \times X \to [0, \infty)$ telle que $\forall x, y, z \in X$

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace métrique est un ensemble avec une métrique.

Exemples

1. si (X, d) est un espce métrique, et si $Y \subset X$, alors $(Y, d|_{Y \times Y})$ est aussi un espace métrique.
2. $X = \mathbb{R},\ d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $X = \mathbb{C},\ d(x, y) = |x - y|$
4. $X = \mathbb{R}^n,\ d(x, y) = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$

Définition

Soit V un espace vectoriel réel (ou complexe). Une norme sur V est une fonction $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ telle que $\forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Exemples

$V = \mathbb{R}^n,\ \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Proposition

Si $\| \cdot \|$ est une norme sur V alors $d(u, v) = \|u - v\|$ est une métrique sur V.

Démonstration:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v \\ d(u, v) &= \|v - u\| = \|(-1)(u - v)\| = \|u - v\| = d(u, v) \\ d(u, w) &= \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(u, w) \end{aligned}$$

$\square$

Terminologie

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé une <u>espace normé</u>.

Exemples

1. $V = R^n,\ v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$$

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|v\|_2 := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

2. Si A est un ensemble, $V = B(A) := \{f :\ A \to \mathbb{K} \mid f \text{ est bornée } \}$
   Si $f \in V$, on pose:

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \in A} |f(a)|$$

3. $a < b \in \mathbb{R}$, $V := C([a, b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$$

3.2 Fonctions continues

Définition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métrique.
Une application $f: X \to Y$ est <u>continue</u> en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Définition

Si (X, d) est un espace métrique, $x_0 \in X,\ R \in (0, \infty)$, alors la boule ouverte de rayon R centrée en x_0 est

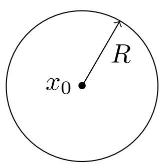
$$B_X(x_0, R) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < R\}$$

Exemples

- $X = \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$B_{\mathbb{R}}(x_0, R) = (x_0 - R, x_0 + R)$$

- $X = \mathbb{R}^2$

$B_{\mathbb{R}^2}(x_0, R) =$ 

On a donc $f: X \to Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \qquad f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

Théorème

Si $f: X \to Y$ est continue et si $g: Y \to Z$ est continue, alors $g \circ f: X \to Z$ est aussi continue.

<u>Preuve:</u>
Soit $x_0 \in X$, on pose $y_0 := f(x_0),\ z_0 := g(y_0)$. Par l'hypothèse: g est continue, donc:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \qquad g(B_Y(y_0, \delta)) \subset B_Z(z_0, \varepsilon)$$

Mais f est aussi continue, donc:

$$\exists \delta' > 0 \qquad f(B_X(x_0, \delta')) \subset B_Y(y_0, \delta)$$

Donc:

$$g(f(B_X(x_0, \delta'))) \subset B_Z(z_0, \varepsilon) \implies g \circ f \quad \text{est continue}$$

$\square$

Proposition

Si $f, g: X \to \mathbb{R}$ sont continues alors $f + g, fg: X \to \mathbb{R}$ sont continues.

<u>Preuve:</u>
Voir semestre 1.

$\square$

Définition

Une fonction $f: X \to Y$ est Lipschitzienne si $\exists C > 0$ tel que $\forall x, x' \in X$ on a

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq C \cdot d_X(x, x')$$

Proposition

Si f est Lipschitzienne, alors elle est continue.

Preuve:
On peut poser $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$.

$\square$

Remarque

Si V, W sont des espaces normés et $f: V \to W$ est linéaire, alors f est Lipschitzienne si et seulement si

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall v \in V \qquad \|f(v)\|_W \leq C\|v\|$$

Preuve:

$$\forall v_1, v_2 \in V \qquad d_W(f(v_1), f(v_2)) = \|f(v_1) - f(v_2)\|_W = \|f(v_1 - v_2)\|_W \leq C\|v_1 - v_2\|_V \qquad v := v_1 - v_2$$

$\square$

Exemples

1)

$$p_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

p_i est linéaire et $\|p_1(x)\| = |x_1| \leq \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$, c'est à dire p_i est lipschitzienne avec $C = 1 \implies p_i$ est continue.

2) (Si on utilise la prop $f + g, f \cdot g$) Tout polynôme est une fonction continue $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Par exemple: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & 3x_1x_2 + x_3^2 \end{array}$

3) (On peut composer des fonctions continues), par exemple: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \sin(x_1x_2^2 + e^{x_1 + x_2^2}) \end{array}$

4) $X = C([a, b])$ avec $\| \cdot \|_\infty$

$$I : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(x)\, dx \end{array}$$

I est une fonction linéaire et elle est lipschitzienne:

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = (b-a) \cdot \|f\|_\infty \implies I \quad \text{est continue} \quad (C = b-a)$$

Quelle norme à utiliser sur $\mathbb{R}^n$? (Spoiler: peut importe)

Définition

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur V sont <u>équivalentes</u> si

$$\exists C_1, C_2 > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall v \in V \quad \|v\| \leq C_1\|v\|' \quad \text{et} \quad \|v\|' \leq C_2\|v\|$$

i.e.: $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalents si et seulement si: $\begin{array}{llll} id_[V]: & (V, \|\cdot\|) & \rightarrow & (V, \|\cdot\|') \\ id_[V]: & (V, \|\cdot\|') & \rightarrow & (V, \|\cdot\|) \end{array}$ sont lipschitziennes.

Proposition

Des normes équivalentes donnent les mêmes notions de la continuité, c'est à dire: Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur V sont équivalents; si X est un espace métrique, et si $f: X \to V$ et $g: V \to X$ sont des foncitons, alors f est continue. $X \to (V, \|\cdot\|)$ si et seulement si f est continue $X \to (V, \|\cdot\|')$. La même chose pour g

<u>*Preuve:*</u>
$X \overset{f \text{ cont.}}{\longrightarrow} (V, \|\cdot\|) \overset{id_[V] \text{ cont.}}{\longrightarrow} (V, \|\cdot\|')$ et la composition de fonction continues est continues.

$\square$

Plus tard on va montrer: Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

<u>*Preuve:*</u>
Si $x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum x_1^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ évident
$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ évident
$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$
$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

$\square$

3.3 Limites de suites

Définition

Si (X,d) est un espace métrique, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite d'éléments de X, et si $x \in X$, alors on dit que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$.

Exemples

(i) $X = \mathbb{R},\ d(x,y) = |x,y|$
$\to$ La définition classique le la limite.

(ii) A un ensemble, $B(A) = \{f :\ A \to \mathbb{R} \mid f \text{ est bornée }\}$, d donnée par $\|\cdot\|_\infty$ $\quad (\|f\|_\infty := \sup\limits_{a\in A} |f(a)|)$
Si $f_n \in B(A)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in B(A)$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ si et seulement si $f_n \to f$ uniformément.

Proposition

Soient X, Y des espaces métriques et $f :\ X \to Y$ une application. Alors f continue en $x \in X \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ on a:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

<u>*Preuve:*</u>
Voir le premier semestre.

$\square$

Exemple

$X = C([a,b])$ avec $\|\cdot\|_\infty, Y = \mathbb{R}$, on a vu que $I : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \end{array}$ est continue $\implies$ si $f_n \to f$ dans X, c'est à dire si $f_n \to f$ uniformément, alors $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$.

Rappel

$\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur V sont équivalentes si $\exists C_1, C_2 > 0$ tels que $\|v\| \le C_1 \|v\|'$ et $\|v\|' \le C_2 \|v\|$

Proposition

Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur V sont équivalent et si x_n est une suite dans V, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ par rapport à $\|\cdot\| \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ par rapport à $\|\cdot\|'$.

<u>*Preuve:*</u>

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \text{ par rapport à } \|\cdot\| & \iff & \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \\ & & \Updownarrow \text{ par la déf. d'équivalence de normes} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \text{ par rapport à } \|\cdot\|' & \iff & \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|' = 0 \end{array}$$

$\square$

Rappel

Les normes $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition

Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite dans $\mathbb{R}^k, x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}), x_{ni} \in \mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^k \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = a_i \qquad \forall i = 1, \ldots, k$.

<u>*Preuve:*</u>

Utilisons la norme $\|\cdot\|_1$ $\left(\|a\|_1 := \sum_{i=1}^k |a_i|\right)$.

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - a\|_1 = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^k |x_{ni} - a_i| = 0 \iff \forall i \lim\limits_{n\to\infty} |x_{ni} - a_i| = 0$

$\square$

Proposition

Soit X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}^k$ une fonction. Autrement dit, on a k fonctions $f_1, \ldots, f_k$: $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_1(x), \ldots, f_k(k) \end{array}$
Alors f est continue si et seulement si f_i est continue pour tout $i = 1, \ldots, k$.

<u>*Preuve:*</u>

f est continue $\iff \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$ pour toute suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ convergente dans X.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \iff \lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x)$ (par la proposition précédente) $\iff$ les f_i sont continues.

$\square$

3.4 Sous-ensembles ouverts et fermés

Rappel

La boule ouverte $B_X(x, R) = \{x \in X \mid d(x, y) < R\}$ pour X un espace métrique, $x \in X, R > 0$

Définition

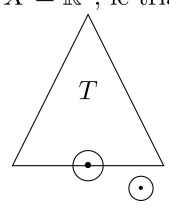
Soit X un espace métrique. Alors un sous-ensemble $U \subset X$ est <u>ouvert</u> si:

$$\forall x \in U, \quad \exists \varepsilon > 0 \qquad B_X(x, \varepsilon) \subset U$$

On dit que $U \subset X$ est <u>fermé</u> si $X \setminus U \subset X$ est ouvert.

Exemples

(i) $X = \mathbb{R}^2$, le triangle $T \subset \mathbb{R}^2$



$T \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas ouvert mais $T \subset \mathbb{R}^2$ est fermé.

(ii) $X = \mathbb{R}$
$x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ est ouvert et pas fermé.
$x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ est fermé, et non ouvert.
$(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$ est fermé et pas ouvert, le complément (a, ∞) est ouvert et pas fermé.
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ est ouvert et fermé car le complément $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing \subset \mathbb{R}$ est ouvert et fermé.
$(a, b] \subset \mathbb{R}$ est ni ouvert, ni fermé.

Proposition

Si $x \in X, R > 0$, alors $B(x, R) \subset X$ est un sous-ensemble ouvert.

<u>*Preuve:*</u>
Si $x' \in B(x, R)$ alors par définition $d(x, x') < R$. Montrons que $B(x', R - d(x, x')) \subset B(x, R)$:

$$y \in B(x', R - d(x, x')) \iff d(y, x') < R - d(x, x')$$

Il faut verifier que $d(x, y) < R$, on a

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) < d(x, x') + R - d(x, x') = R$$

$\square$

Notation

$f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$

Théorème

$f: X \to Y$ est continue si et seulement si $\forall U \subset Y$ ouvert la préimage $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert.

Preuve:
Rappel: f est continue en $x \in X$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \qquad f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(f(x),\varepsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$$

[$\Rightarrow$]: Supposons que f est continue. Soit $U \subset Y$ un sous-ensemble ouvert. Il faut montrer que $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert, c'est à dire:

$$\forall x \in f^{-1}(U), \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(U)$$

Mais $U \subset Y$ est ouvert. $\implies \exists \varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(x),\varepsilon) \subset U$
Comme f est continue:

$$\exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon)) \subset f^{-1}(U)$$

[$\Leftarrow$]: Supposons $\forall U \subset Y$ ouvert $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert.
Il faut montrer que f est continue:
Si $x \in X, y := f(x) \subset Y$. Si $\varepsilon > 0$, alors $B_Y(y,\varepsilon) =: U$ est ouvert.
Donc $(\star) = f^{-1}(B_Y(y,\varepsilon)) \subset X$ est ouvert, $x \in (\star)$ (car $f(x) = y$), donc:

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(y,\varepsilon))$$

Donc f est continue.

$\square$

Corollaire

$f: X \to Y$ est continue $\iff \forall S \subset Y$ fermé $f^{-1}(S) \subset X$ est fermé.

Preuve:

$$f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$$

$\square$

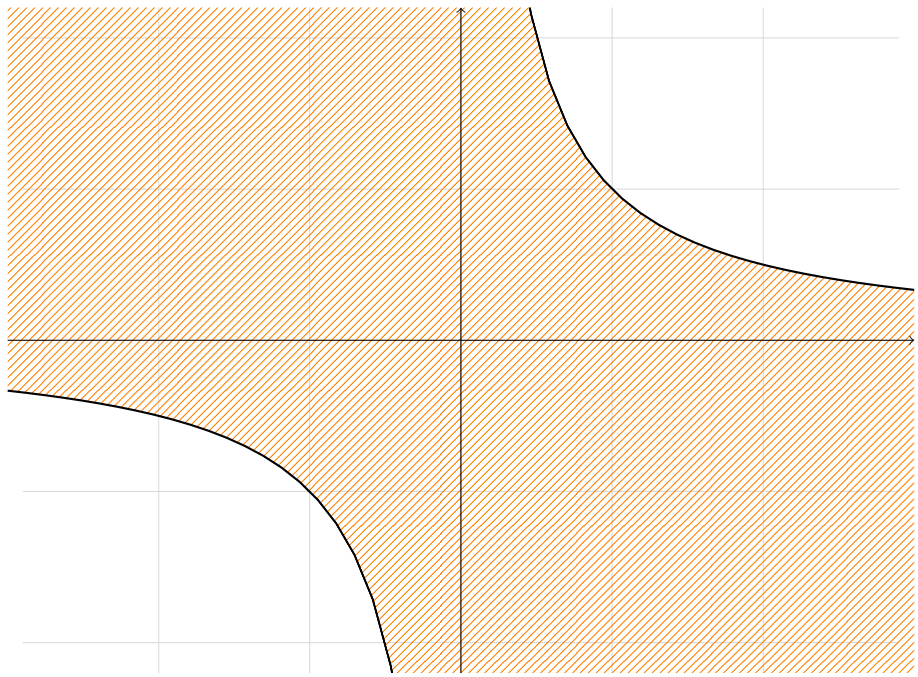
Exemples

(i) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & \exp(x_1 \sin(x_2)) + x_1 x_3 \end{array}$ est continue.
$(0,\infty) = U \subset \mathbb{R}$ sous-ensemble ouvert. Alors $f^{-1}(U)$ est ouvert$\subset \mathbb{R}^3$.

$$f^{-1}(U) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid f(x_1,x_2,x_3) > 0\}$$

Mais avec $[0,\infty) = U \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{R}^3 \supset f^{-1}(U) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid f(x_1,x_2,x_3) \geq 0\}$ est fermé.

(ii) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$. Alors $f^{-1}((-\infty,1)) = \{(x,y) \mid xy < 1\}$



Théorème

Soit X un espace métrique, $U_\alpha \subset X$ des sous-ensemble ouverts, $\alpha \in A$ (A un ensemble, peut être infini). Alors $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset X$ est ouvert. Si $U_1, \ldots, U_n \subset X$ sont ouverts, alors $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ est ouvert.

<u>*Preuve:*</u>
Si $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, c'est à dire si $\exists \beta \in A$ tel que $x \in U_\beta$, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ car U_β est ouvert.
Et donc cela implique que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ est ouvert.
Si $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$: pour tout $i = 1, 2, \ldots, n \quad \exists \varepsilon_i$ tel que $B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$.
On pose $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n} \varepsilon_i$. Alors $B(x, \varepsilon) \subset U_i \quad \forall i$. Donc $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

□

Corollaire

Si $S_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$, sont fermés, alors $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ est fermé.
Si $S_1, \ldots, S_n$ sont fermés, alors $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ est fermé.

<u>*Preuve:*</u>

$$X \setminus \bigcap_\alpha = \underbrace{\bigcap_\alpha \overbrace{(X \setminus \underbrace{S_\alpha}_{\text{fermé}})}^{\text{ouvert}}}_{\text{ouvert}} \implies \underbrace{X \setminus \bigcap_\alpha S_\alpha}_{\text{fermé}}$$

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} S_i = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \overbrace{(X \setminus \underbrace{S_i}_{\text{fermé}})}^{\text{ouvert}}}_{\text{ouvert}}$$

□

Exemple

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 > 1, x_1 + x_2 < 2, x_1 > 0\}$ est ouvert.
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0\}$ est fermé.
C'est l'intersection de 3 sous-ensembles ouverts/fermés.

Théorème

Soit X un espace métrique. Alors un sous-ensemble $S \subset X$ est fermé si et eulement si pour toute suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}, s_n \in S$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =: x \in X$ existe, on a $x \in S$.

<u>*Preuve:*</u>
Si $x \in X$ alors $\exists$ suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n \in S$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing \qquad (\star)$$

Si $\lim s_n = x$, alors $\lim d(s_n, x) = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall \geq n_0 \qquad d(s_n, x) < \varepsilon$ $s_n \in B(x, \varepsilon) \cap S \implies B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing$
Si $B(x, \dfrac{1}{n}) \cap S \neq \varnothing$, choisissons $s_n \in B(x, \dfrac{1}{n}) \cap S$, et on a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

Il faut montrer: S est fermé si et seulement si $\forall x \in X$. x satisfait $(\star)$ si et seulement si $x \in S$. Mais S est fermé si et seulement si $X \setminus S$ est ouvert.

$$\iff \forall x \notin S, \exists \varepsilon > 0 \qquad B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing = B(x, \varepsilon) \subset X \setminus S$$

Si et seulement si x satisfait $(\star) \iff x \in S$.

□

Exemple

$X = B(A) =$ les fonctions bornées $A \to \mathbb{R}$ avec $\|\cdot\|_{infty} \qquad (\sup_{a\in A} |f(a)| = \|f\|_\infty)$
$A = [c, d], S = C([c, d]) \subset B([c, d])$

Une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge dans X si et seulement si elle converge uniformément. Si $f_n \in S$, et si $\lim f_n \in X$ existe,

alors $\lim f_n \in S$ (la limite unifrome d'une suite de fonctions continues est une fonction continue).
$\overset{\text{Thm.}}{\Longrightarrow}$ $S \subset X$ est fermé.

3.5 Espaces compacts

Rappel

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$ est une suite bornée, alors il existe une sous-suite convergente. $\Longrightarrow$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f atteint son maximum et son minimum.

Définition

Un sepace métrique X est compact si $\forall$ suite $x_n \in X$, $\exists$ sous-suite qui converge.

Exemple

$$X = [a,b] \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Théorème

Si X est compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f atteint son max et son min.

Preuve:
(Pour max:) $\exists$ suite $x_n \in X$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\limits_{x\in X} f(x) \in (-\infty, \infty)$
Soit $y_n \in X$ une sous-suite convergente de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. On a donc

$$(\sup f =) \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n}_{y\in X})$$

Et alors $f(y) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$, donc f atteint son max en y.

(Pour min:) - La preuve est similaire.

$\square$

Définition

On dit qu'un espace est borné si:

$$\exists R > 0 \quad \text{tel que} \quad S \subset B(0, R)$$

Théorème

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^k$ est un espace compact si et seulement si $S \subset \mathbb{R}^k$ est fermé et borné.

Preuve:
[$\Leftarrow$]: Supposons que $S \subset \mathbb{R}^k$ est borné et fermé.
Soit $x_n \in S, n = 1, 2, \ldots$ une suite. $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk})$, $x_{ni} \in \mathbb{R}$

S est borné $\Longrightarrow$ $|x_{n1}| < R \quad \forall n$, c'est à dire la suite $(x_{n1})_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Soit y_n une sous-suite de x_n telle que $(y_{n1})_{n=1}^{\infty}$ converge.

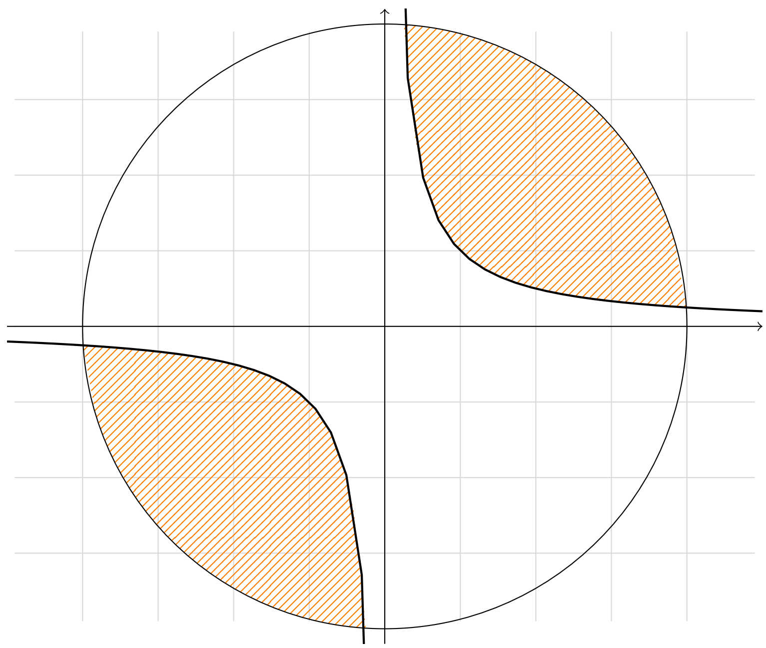
Soit z_n une sous-suite de y_n telle que la suite z_{n2} converge. En continuant la construction nous arrivons au final à une sous-suite w_n de x_n telle que $(w_{ni})_{n=1}^{\infty}$ converge ($\forall i = 1, 2, \ldots, k$), c'est à dire w_n converge dans $\mathbb{R}^k$.
Mais S est fermé et $w_n \in S$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \in S$

[⇒]: Pas très important, à faire en exercice.

□

Exemple

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$$



$$S \subset \mathbb{R}^2 \text{ est fermé et borné } \implies S \text{ est compact.}$$

Théorème

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Preuve:

Si $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une nomre, on va montrer que N est équivalent à $\| \cdot \|_1$. $(\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_1|)$

- $v = {}_{i=1}^{n} v_i e_i,\ e_i$la base de $\mathbb{R}^n$.

$$N(v) \leq \sum_{i=1}^{n} N(v_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |v_i| N(e_i) \leq \underbrace{(\max_{i=1,\dots,n} N(e_i))}_{c_1} \cdot \|v\|_1$$

- L'autre inégalité, montrons que $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue.
  Si $u, v \in \mathbb{R}^n$: $\quad |N(u) - N(v)| \leq N(u - v) \leq C_1 \|u - v\|_1$.
  C'est à dire que $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne, donc continue.

  Posons $S := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_1 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$, S est fermé et borné $\implies$ S compact $\implies$ $\exists v_0 \in S$ tel que $N(v_0)$ est minimal, c'est à dire:
  $$\forall v \in S,\ N(v) \geq N(v_0)$$

Car $\|v_0\|_1 = 1$, on sait que $v_0 \neq 0$, donc $N(v_0) > 0$.
Si $w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$, alors $\frac{w}{\|w\|_1} \in S$ et donc $N(\frac{w}{\|w\|_1}) \geq N(v_0)$, donc $\|w\|_1 \leq \frac{1}{N(v_0)} \cdot N(w)$ (aussi vrai pour $w = 0$)

$\square$

3.6 Espaces complets

Définition

Si X est un espace metrique et si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans X alors $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall k, l \geq n_0 \qquad d(x_k, x_l) < \varepsilon$$

Définition

X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge.

Proposition

Si X est complet et si $S \subset X$ est fermé, alors S est complet.

Preuve:
Si $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans S, alors cette suite converge dans X (car X est complet). Comme $S \subset X$ est fermé, on a que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in S$.

□

Exemples

(i) $\mathbb{R}^k$

Si $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^k$, alors les suites dans $\mathbb{R}$ $(v_{ni})_{n=1}^{\infty}(i = 1, \ldots, k)$ sont de Cauchy, donc elles convergent, et donc la suite $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

(ii) Si X est compact, alors il est complet (exercice).

(iii) Si A est un ensemble, $B(A) = \{f :\ A \to \mathbb{R} \mid f \text{ est bornée}\}$ avec la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. $B(A)$ est complet (le critère de Cauchy)

(iv) $C([a, b]) \subset B([a, b])$ est un sous-ensemble fermé $\implies C([a, b])$ est complet.

3.7 Résumé de la partie 3

Vocabulaire

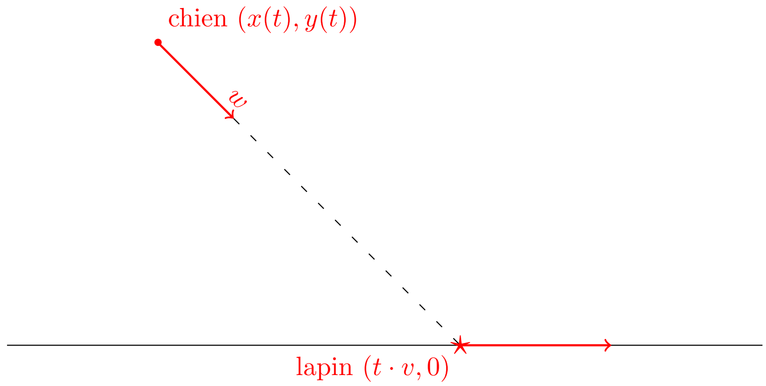
Métrique, norme, sous-ensemble ouverts/fermés, espacec compacts et complets.

Théorèmes

- f est continue si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert $\forall U$ ouvert
- $S \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si S est fermé et borné.
- X compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue $\implies$ f atteint son max et min.

4 Equations différentielles ordinaires

4.1 Introduction



La vitesse du chien est obtenue par:

$$w \cdot \frac{(tv, 0) - (x(t), y(t))}{\sqrt{(tv - x(t))^2 + y(t)^2}} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

Si $(x(0), y(0))$ (position initiale) est connue, il faut trouver les fonctions $x(t), y(t)$.

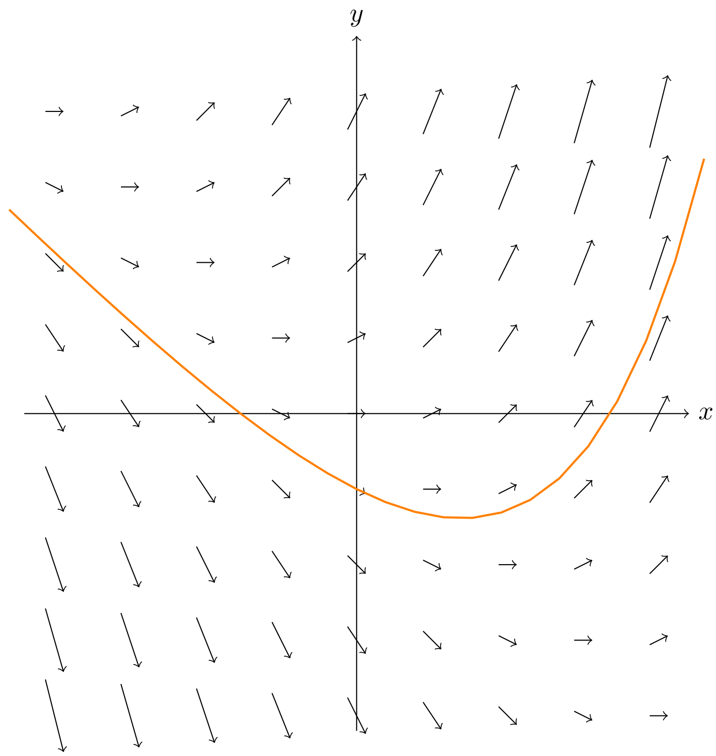
Définition

Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors l'équation $y'(t) \overset{(\star)}{=} f(t, y(t))$ pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une équation différentielle ordinaire (EDO) (d'ordre 1). Dans les composantes: Si $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ $y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, alors $(\star)$ est $y_i'(t) = f_i(t, y_i(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Problème de la valeure initiale

Trouver la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ si $y(t_0) \in \mathbb{R}^n$

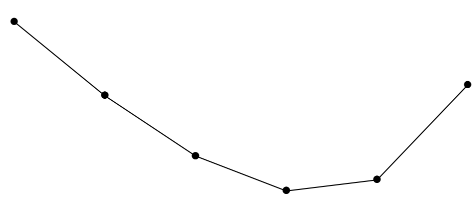
Visualisation



4.1.1 Théorème: existence et unicité des solutions

$\forall c \in \mathbb{R}^n$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists y : (t_0 - \varepsilon_1 t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ tel que $y(t_0) = c$ et $y'(t) = f(t, y(t))$ $\forall t \in (t_0 - \varepsilon_1 t_0 + \varepsilon)$.
Si f est localement Lipschitzienne alors y est unique.

<u>*Preuve:*</u>
Cf. Analyse II. Mais voici une idée:
Construire une solution approximative y_n. Pour $h > 0$ (très petit):
$y_n(t_0) := c, \quad y_n(t_0 + h) = y_n(t_0) + h \cdot f(t_0, y_n(t_0)), \quad y_n(t_0 + (n+1)h) = y_n(t_0 + nh) + h \cdot f(t_0 + nh, y_n(t_0 + nh))$
et on prend l'interpolation linéaire:



Il faut montrer: dans la suite $(y_{1/n})_{n=1}^{\infty}$, $\exists$ sous-suite convergente et que sa limite est une solution de $y'(t) = f(t, y(t))$

$\square$

Remarque

Une EDO d'ordre k est:

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}\right)$$

Le problème initial: trouver y si $y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(k-1)}(t_0)$ sont données.
On peut transformer cette EDO d'ordre k en EDO d'ordre 1:

On pose $Y = (y, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1})$ et
$\dfrac{dy}{dt}(t) = p_1(t),\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = p_2(t), \ldots, \dfrac{dp_{k-2}(t)}{dt} = p_{k-1}(t),\ \dfrac{dp_{k-1}(t)}{dt} = f(t, y(t), p_1(t), \ldots, p_{k-1}(t))$
On a donc trouvé une EDO $\dfrac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t))$

Exemple

$\dfrac{d^2y}{dt} = -ky - l\dfrac{dy}{dt}$, on pose $p(t) = y'(t)$:
Donc: $y'(t) = p(t),\ p'(t) = -ky(t) - lp(t)$.

4.2 Méthodes de résolution

4.2.1 EDO autonomes

Définition

Les EDOs autonomes sont les EDO de la forme $y'(t) = f(y(t))$, où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue donnée.

Solution pour le cas $n = 1$

$$y'(t) \overset{(*)}{=} f(y(t))$$

Si $f \neq 0$

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1$$

Puis si H est une fonction primitive de $\frac{1}{f}$, $H' = \frac{1}{f}$, alors

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = H(y(t))'$$

Donc $(*)$ est $H(y(t))' = 1$, c'est à dire: $H(y(t)) = t - c$ et donc $y(t) = H^{-1}(t - c)$

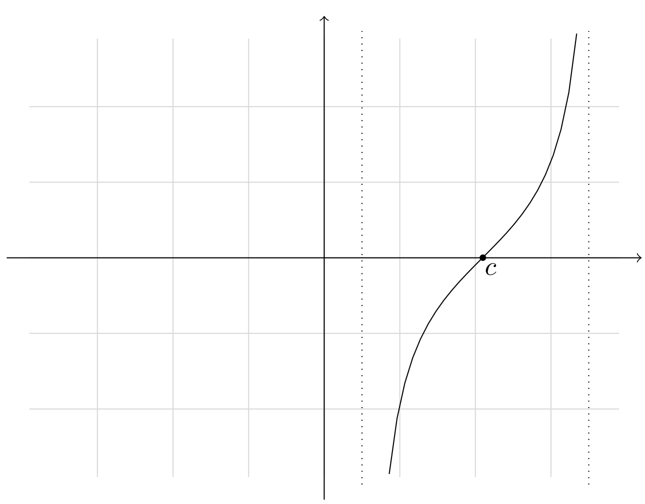
$$\frac{dy}{dt} = f(y) \iff \int \frac{dy}{f(y)} = \int dt = t - c$$

Si $y_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $f(y_0) = 0$ alors la fonction constante $y(t) = y_0$ et une solution.

Exemple

(i)

$$f(y) = 1 + y^2 \implies \frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \implies \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \implies \arctan(y) = t - c \implies y(t) = \tan(t - c)$$



$y(t)$ est définie sur $(c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$

(ii)

$$f(y) = y^{2/3} \qquad y' = y^{2/3}$$

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dt = t - c \implies y(t) = \left(\frac{t-c}{3}\right)^3$$

Pour $y = 0$ on a $f = 0$ ($f(0) = 0$) $\implies y(t) = 0$ est aussi une solution. La solution générale:

Proposition

Si $a \in \mathbb{C}$ alors les solutions $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de $y' = ay$ sont $y(t) = ce^{at}, \quad c \in \mathbb{C}$

Preuve:
Posons $z(t) := y(t)e^{-at}$, c'est à dire $y(t) = z(t)e^{at}$. On a:

$$y'(t) = \left(z(t)e^{at}\right)' = (z' + az)\, e^{at} = aze^{at}$$

C'est à dire $z' = 0 \implies z$ est constante.

$\square$

4.2.2 Séparation de variables

EDO de la forme $y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t)$ pour $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données.

Solution

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t) \implies \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\, dt$$

Et donc on trouve $y(t)$

Exemple

$y' = ty \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int t\ dt \rightsquigarrow \log|y| = \frac{1}{2}t^2 + c \rightsquigarrow y = \pm e^{1/2\ t^2} \cdot e^c$, c'est à dire $y(t) = \tilde{c} \cdot e^{1/2\ t^2}$ pour $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ arbitraire.

4.2.3 EDO linéaires d'ordre 1

Si $a, b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont données, on cherche les solutions de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ pour $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si $b = 0$, l'EDO est séparable:

$$y' = a(t)y(t) \implies \int \frac{dy}{y} = \int a(t)\, dt \implies y(t) = \exp(A(t)) \quad \text{où } A'(t) = a(t)$$

est une solution. La solution générale est $y(t) = c \cdot \exp(A(t))$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Si $b \neq 0$:

On pose

$$z(t) = y(t) \cdot \exp(-A(t))$$

C'est à dire

$$y(t) = z(t)\exp(A(t))$$
$$y'(t) = z'(t)\exp(A(t)) + z(t)\cdot a(t)\exp(A(t)) \overset{!}{=} a(t)y(t) + b(t)$$

C'est à dire

$$z'(t) = b(t)\exp(-A(t)) \implies z(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt + c$$
$$\implies y(t) = e^{A(t)} \cdot \left(c + \int b(t)e^{-A(t)}\,dt\right)$$

Exemple

$$\begin{aligned}
y'(t) &= ty + t \qquad\qquad\qquad\qquad A(t) = \frac{t^2}{2}\\
z(t) &= \int t\cdot\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,dt = -\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + c\\
y(t) &= z(t)\cdot\exp\left(A(t)\right) = \left(c - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)\cdot\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = c\cdot\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - 1
\end{aligned}$$

4.2.4 Les EDO homogènes et la méthode d'une symétrie

EDO hom: $\qquad y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$

On pose $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, c'est à dire $y(t) = z(t)\cdot t$.

$$y' = (z(t)t)' = z't + z = f(z) \implies t\frac{dz}{dt} = f(z) - z \quad \text{est séparable} \quad \implies \int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dz}{t}$$

Exemple

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t} + \frac{t}{y}\\
t\cdot z' + \cancel{z} &= \cancel{z} + z^{-1}\\
\int z\,dz &= \int \frac{dt}{t}\\
\frac{1}{2}z^2 &= \log|t| + c\\
z(t) &= \sqrt{2\log|t| + c}\\
y(t) &= t\cdot\sqrt{2\log|t| + c}
\end{aligned}$$

Méthode d'une symétrie

une EDO autonome $\frac{dy}{dt} = f(y)$ a une symétrie $\begin{matrix} y & \to & y \\ t & \to & t+c \end{matrix}$

Si on a une EDO avec une autre symétrie: par exemple une EDO homogène $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ la symétrie: $\left.\begin{array}{ccc} y & \to & cy \\ t & \to & ct \end{array}\right\} (\star)$

On cherche des nouvelles variables $y, t \rightsquigarrow z, s$ pour que $(\star)$ devienne $\begin{array}{ccc} z & \to & z \\ s & \to & s+\lambda \end{array}$ Une EDO autonome.

On prend:

$$z = \frac{y}{t} \quad s = \log(t) \quad y = e^s z \quad t = e^s$$
$$\rightsquigarrow \frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right) \rightsquigarrow \frac{dz}{ds} = g(z)$$

effectivement

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(e^s z)}{de^s} = \frac{e^s z\ ds + e^s\ dz}{e^s\ ds} = \frac{dz}{ds} + z = f(z)$$
$$g(z) = f(z) - z, \qquad z = \frac{y}{t^2}$$

Exemple

$\frac{dy}{dt} = t + \frac{y^2}{t^3} \rightsquigarrow \frac{dz}{ds} = g(z)$

$\begin{array}{ccc} y & \to & c^2 y \\ t & \to & ct \end{array}$ est une symétrie. (exo.)

4.2.5 Réduction d'ordre

Si $y'(t) = f(y(t)) \qquad (*)$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une EDO autonome: on peut remplacer $(*)$ par une EDO non-autonome dans $\mathbb{R}^{n-1}$

L'idée: on cherche d'abord $y_i \quad (i = 2, \ldots, n)$ comme des fonctions de y_1 (la réduction). Après on va trouver $y_1(t) \quad (i = 2, \ldots, n)$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, y_n)$$
$$\downarrow$$
$$\frac{dy_i}{dy_1} = \frac{f_i(y_1, \ldots, y_n)}{f_1(y_1, \ldots, y_n)} \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

Exemple

$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \frac{dy_2}{dt} = -y_1 \implies \frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{y_1}{y_2} \implies \int y_2\ dy_2 = \int y_1\ dy_1 \implies y_2^2 + y_1^2 = \text{ constante } = R^2$

$y_2 = \sqrt{R^2 - y_1^2} \implies \frac{dy_1}{dt} = y_2 = \sqrt{R^2 - y_1^2} \implies \int \frac{dy_1}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} = \int dt$

$$y_1 = R\sin(t-c) \qquad \& \qquad y_2 = R\cos(t-c)$$

4.3 EDO linéaires à coefficients constants

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ on cherche les solutions $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Observation

$L: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ est une application linéaire, c'est à dire $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ et $L(\alpha y) = \alpha L y$ et ce $\forall y_1, y_2, y \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Proposition

Les solutions y de $Ly = 0$ forment un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$

Preuve:
Si $Ly = 0$, alors $y \in C^\infty(\mathbb{R})$, y est n fois différentiable.
$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y$, en réitérant cet argument:

$$y^{(n+1)} = -a_{n-1}y^{(n)} - \cdots - a_0 y'$$

etc...

$\{$Les solutions de $Ly = 0\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ est égal à $\mathrm{Ker}(L)$, qui est un espace vectoriel.

□

Théorème: Problème de la valeur initiale

Si $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ sont donnés, alors $\exists! y$ telle que $Ly = 0$ et $y^{(k)}(0) = c_k,\ \forall k = 0, \ldots, n-1$

Remarque

La dimension de l'espace des solutions de $Ly = 0$ est n. (car $\forall c \in \mathbb{C}^n \quad \exists! y$, c'est à dire on a une bijection linéaire entre $\mathbb{C}^n$ et l'espace des solutions.)

Définition: Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de L est:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

D'où cela vient il ?

–
$$Le^{\lambda t} = p(\lambda)e^{\lambda t}$$

– Si $D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ est donné par $Dy = y'$ alors
$$L = p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$$

Observation

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est telle que $p(\lambda) = 0$, alors $Le^{\lambda t} = 0$, donc $e^{\lambda t}$ est une solution. Donc si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les racines de p et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, alors

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_k e^{\lambda_k t}$$

est une solution (car les solutions forment une espace vectoriel).

Théorème

Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ pour $(\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j)$ est le polynôme caractéristique de L, alors les solutions de $Ly = 0$ sont

$$y(t) = q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_k(t)e^{\lambda_k t}$$

où q_i est un polynôme de degré $\leq n_i - 1$.

Les polynômes q_i sont uniquement détérminés par y, et donc

$$\left\{t^\ell e^{\lambda_i t} \mid q \leq i \leq k, 0 \leq \ell \leq n_i - 1\right\}$$

est une base de l'espace des solutions.

Remarque

Si $n_i = 1$, $\forall i$, c'est à dire si $k = n$, alors les solutions sont: $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}$

Exemples

y"+y=0

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Les racines $= \pm i$ avec multiplicité 1, donc les solutions sont données par:

$$\alpha_1 e^{it} + \alpha_2 e^{-it}, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

Rappel:

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ e^{-it} &= \cos t - i \sin t \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \alpha_1 e^{it} + \alpha_2 e^{-it} &= \beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t = \gamma \cos(t - c) \\ y'' + ay' + y = 0, &\qquad a \geq 0 \\ p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 1 &\implies \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$

Si $a < 2$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2} &\implies y(t) = e^{-\frac{1}{2}at} \cdot \left(\alpha_1 e^{\frac{i}{2}\sqrt{4-a^2}t} + \alpha_2 e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4-a^2}t}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}at} \cdot \left(\beta_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}t + \beta_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}t\right) \end{aligned}$$

Si $a > 2$ alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et les solutions sont $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

Si $a = 2$: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, racine double de $\lambda_1 = -1$. Cela implique que la solution est

$$y(t) = (\alpha + \beta t) \cdot e^{-t}$$

Proposition

Si $p(\lambda) = \lambda^n$, les solutions de $y^{(n)} = 0$ sont les polynômes de degré $\leq n-1$

<u>*Preuve:*</u>
Par récurrence:

$n = 0$... vrai

$n \implies n+1$:
Si $y^{(n+1)} = 0$, alors $(y')^{(n)} = 0 \implies y'$ est un polynôme de degré $\leq n-1$ c'est à dire y est une fonction primitive d'un polynôme de degré $\leq n-1 \implies y$ est une polynôme de degré $\leq n$

$\square$

Proposition

Si $p(\lambda) = (\lambda - c)^n, \quad c \in \mathbb{C}$, les solutions de $(D-c)^n y = 0$ sont $q(t)e^{ct}$, où q est un polynôme de degré $\leq n-1$

<u>*Preuve:*</u>
Observons que:

$$D\left(e^{-ct} \cdot y(t)\right) = \left(e^{-ct}y(t)\right)' = (y'(t) - c \cdot y(t)) \cdot e^{-ct} = e^{-ct}(D-c)y(t) \implies D^n\left(e^{-ct}y\right) = e^{-ct}\left(D-c\right)^n y$$

Donc

$$\begin{aligned} (D-c)^n y = 0 &\iff D^n(e^{-ct}y) = 0 \\ &\iff e^{-ct}y(t) = q(t) \end{aligned}$$

où q est un polynôme de degré $\leq n-1$.

$\square$

Proposition

Si V est un espace vectoriel, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ un polynôme, et $D: V \to V$ une application linéaire, alors les solutions $v \in V$ de $p(D)v = 0$ sont $v = v_1 + \cdots + v_k$ où $(D - \lambda_i)^{n_i} v_i = 0$. De plus, les v_i sont uniquement détérminés par v. C'est à dire:

$$\operatorname{Ker} p(D) = \operatorname{Ker}(D - \lambda_1)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(D - \lambda_k)^{n_k}$$

<u>*Preuve:*</u>
On utilise la décomposition en fonctions partielles:

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{s_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{s_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{n_k}}$$

Où $s_i(\lambda)$ est un polynôme de degré $\leq n_i - 1$ (voir décomposition du premier semestre)

Multiplions par $p(\lambda)$:

$$1 = \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n_1}} s_1(\lambda)}_{r_1(\lambda)} + \cdots + \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{n_k}} s_k(\lambda)}_{r_k(\lambda)}$$

r_i est un polynôme $r_i(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = s_i(\lambda)p(\lambda)$ et $r_1 + \cdots + r_k = 1$
Si $p(D)v = 0$, alors on pose $v_i := r_i(D)v$, et: $v = v_1 + \cdots + v_k$ car $r_1 + \cdots + r_k = 1$:

$$(D - \lambda_i)^{n_i} v_i = (D - \lambda_i)^{n_i} r_i(D)v = s_i(D) \underbrace{p(D)v}_{0} = 0$$

Il faut encore vérigier 2 choses:

- Si $v_1, \ldots, v_k \in V$ sont tels que $(D - \lambda_i)^{n_i} v_i = 0$, alors $p(D)(v_1 + \cdots + v_k) = 0$, mais $p(D)v_i = 0$ et donc $p(D) \sum v_i = 0$
- Si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} v_i$, $(D - \lambda_i)^{n_i} v_i = 0$, alors les v_i sont uniquement détérminés par v:
  En fait, $v_i = r_i(D)v$, car $r_i(D)v_j = 0 \quad (i \neq j)$ (car $(\lambda - \lambda_j)^{n_j} \mid r_i(\lambda)$) et donc:
  $$\begin{aligned} r_i(D)v = r_i(D)(v_1 + \cdots + v_k) = r_i(D)v_i &= (\underbrace{r_i(D) + \cdots + r_k(D)}_{1})v_i \\ &= v_i \end{aligned}$$

$\square$

Remarque

En ce qui concèrne le théorème: Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ pour ($\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$)etc... vu précédemment: On applique la proposition précédente avec $V = C^\infty(\mathbb{R})$ et cela démontre le théorème.

Proposition

Si $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une solution de $Ly_0 = b$, alors la solution générale de $Ly = b$ est $y = y_0 + y_1$ où $Ly_1 = 0$

Preuve:

$$Ly = b \iff Ly = Ly_0 \iff L(\underbrace{y - y_0}_{y_1}) = 0$$

$\square$

Comment trouver une solution de $Ly = b$?
Solution si $b(t) = R(t) \cdot e^{\alpha t}$ $R(t)$ un polynôme.

Méthode

- Si $p(\alpha) \neq 0$ alors $\exists$ solution de la forme $y(t) = S(t) \cdot e^{\alpha t}$ où S est un polynôme et deg S = deg R.

– Si α est une racine de p de multiplicité m alors il existe une solution de la forme $y(t) = t^m S(t)e^{\alpha t}$ toujours avec deg S=deg R.

Si $p(\alpha) \neq 0$:
Soit $\ell :=$ deg R.

$$\mathbb{C}[t]_{\deg \leq \ell} \xrightarrow{L} \mathbb{C}[t]_{\deg \leq \ell} \cdot e^{\alpha t} \ni R(t) \cdot e^{\alpha t}$$

Notons L injective $\implies$ bijective, et que les dimensions coïncident

Si $m \neq 0$ $(p(\alpha) = 0)$

$$t^m \mathbb{C}[t]_{\deg \leq \ell} \cdot e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \mathbb{C}[t]_{\deg \leq \ell} \ni R(t)e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \quad \text{bijective}$$
$$\implies \exists t^m S(t)e^{\alpha(t)} \overset{L}{\mapsto} R(t)e^{\alpha t}$$

Exemples

$$y'' + y' + y = \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1, \quad p(i) \neq 0 \rightsquigarrow \exists$ une solution de la forme $ae^{it} = y(t)$.

$$\begin{aligned} &Ly = p(i)ae^{it} = iae^{it} \overset{!}{=} e^{it} \\ &\quad \implies a = -i \\ &Ly = e^{it} \rightsquigarrow ie^{-it} \text{ est une solution.} \\ &Ly = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \text{une solution est} \quad \frac{-ie^{it} - ie^{-it}}{2i} = -\cos t \end{aligned}$$

Les solutions de: $Ly = 0$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \lambda_{1,2} \qquad\qquad \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}_{(\star)}$$

Il existe une solution générale de $y'' + y' + y = \sin t$ est

$$y(t) = -\cos t + \underbrace{e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(\tilde{c_1} \cos(\sqrt{3}t) + \tilde{c_2} \sin(\sqrt{3}t)\right)}_{(\star)}$$

Autre exemple:

$$y'' + y = \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$, $p(i) = 0$, multiplicité $= 1 (= m)$

$y'' + y = e^{it} \cdots$, il existe une solution de la forme $y = ate^{it}$, il faut détérminer a.

$$(ate^{it})'' + ate^{it} = -ate^{it} + 2aie^{it} + ate^{it} \overset{!}{=} e^{it}$$
$$\implies a = -\frac{i}{2} \rightsquigarrow -\frac{i}{2}te^{it} \quad \text{est une sol. de } Ly = e^{it}$$

Et $\frac{i}{2}te^{-it}$ est une solution de $Ly = (y'' + y) = e^{-it}$. Donc: $\dfrac{\frac{-i}{2}te^{it} - \frac{i}{2}te^{-it}}{2i} = -\frac{t}{2}\cos t$

Cela implique que $-\frac{t}{2}\cos t$ est une solution de $y'' + y \overset{(\star)}{=} \sin t$

$$\implies \Im\left(\frac{i}{2}te^{it}\right) \quad \text{est une solution de } (\star)$$

Et donc la solution générale de $y'' + y = \sin t$ est

$$y(t) = -\frac{t}{2}\cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

4.4 Systèmes d'EDO linéaires à coefficients constants

A une matrice $n \times 4 \in \mathbb{K}^{n\times 4}$. On cherche une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de $y' = Ay$, c'est à dire: si $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on veut

$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j, \quad y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Proposition

Les solutions de $y = Ay$ forment un espace vectoriel, c'est à dire:
Si y et $\tilde{y}$ sont des solutions et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $\alpha y + \beta \tilde{y}$ est une solution.

Preuve:

$$\begin{aligned}(\alpha y + \beta \tilde{y})' &= \alpha y' + \beta \tilde{y}' = \alpha A y + \beta A \tilde{y} \\ &= A(\alpha y + \beta \tilde{y})\end{aligned}$$

□

Théorème: Problème de la valeur initiale

$\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\exists!$ solution y de $y' = Ay$ telle que $y(0) = v$

Proposition

Si $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A, $Av = \lambda v$, alors $y(t) := e^{\lambda t} v$ est une solution.

Preuve:

$$y' = \left(e^{\lambda t}\right)' v = \lambda y, Ay = Ae^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v = e^{\lambda t} \cdot \lambda v = \lambda y \implies y' = Ay$$

□

Proposition

Si A est diagonalisable, c'est à dire si il existe une base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{C}^n$ tel que les v_i sont des vecteurs propres de A, alors la solution générale de $y' = Ay$ est:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \qquad (c_i \in \mathbb{C},\ Av_i = \lambda_i v_i)$$

Preuve:
Si $v \in \mathbb{C}^n$, alors $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$. Alors $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$ est une solution, et $y(0) = v$, c'est à dire: $y(t)$ est la solution (unique) de $y' = Ay$ avec la valeur initiale v.

□

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique de A: $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) \implies A$ est diagonalisable.
Valeurs propres: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2.$

Vecteurs propres: $\lambda_2 = 2:\qquad A - 2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (Av_2 = -v_2)$

$\lambda_1 = 1:\qquad A + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (Av_1 = 2v_1)$

Solution générale de $y' = Ay$ est $c_1 e^{2t} v_1 + c_2 e^{-t} v_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$ Trouvons une solution $y(t)$ telle que $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc: $c_1 = \dfrac{2}{3},\ c_2 = \dfrac{-1}{3}.$

Problème

soit $y'(t) = Ay(t)$, A matrice $n \times n$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n.$ comment résoudre cette équation si A n'est pas diagonalisable ?

Définition

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, alors $\exp(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = -1,\ A^3 = -A,\ A^4 = 1,\ A^5 = A, \ldots$

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= 1 + tA - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \qquad t \in \mathbb{R} \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) + A \cdot \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos t + \sin t \cdot A \to \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut ensuite montrer que la série converge pour toute matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Posons $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{i,j} |A_{ij}|$

Proposition

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$$

Preuve:

$$\|AB\|_1 = \sum_{i,j} |(AB)_{ij}| = \sum_{ij} \left| \sum_k A_{ik} B_{kj} \right| \leq \sum_{i,j,k} |A_{ik}||B_{kj}| \leq \sum_{i,j,k,l} |A_{ik}||B_{lj}| = \|A\|_1 \|B\|_1$$

$\square$

Théorème

$\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge (dans $M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$)

Preuve:

Il faut montrer $\forall i, j$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(A^k\right)_{i,j}}{k!}$ converge. On a:

$$\left|(A^k)_{ij}\right| \leq \left\|A^k\right\|_1 \leq \|A\|_1^k \implies \frac{\left|\left(A^k\right)_{i,j}\right|}{k!} \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!}$$

Mais la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|_1^k}{k!} = \exp\|A\|$ converge.

$\square$

Propriétés de $\exp A$

- $\exp 0 = 1$

- $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ si $AB = BA$
  En particulier: si $s, t \in \mathbb{C}$ alors $\exp\big((s + t)A\big) = \exp(sA)\exp(tA)$

- $\exp(A) \cdot \exp(-A) = 1$

- Si Q est une matrice inversible, alors $\exp(QAQ^{-1}) = Q \cdot \exp(A) \cdot Q^{-1}$

Proposition

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$$

Preuve:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \exp(tA)$$

est une série entière (avec variable t) qui converge pour $\forall t \implies$ on peut différentier terme par terme:

$$\implies \frac{d}{dt}\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot k \cdot t^{k-1} = A \cdot \exp(tA)$$

$\square$

Théorème

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ et si $v \in \mathbb{C}^n$, alors $\exists! y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ telle que $y(0) = v$ et $y'(t) = Ay(t)$. En fait:

$$y(t) = \exp(tA) \cdot v$$

Preuve:

Montrons que $y(t) := \exp(tA)v$ est une solution:

1. $y(0) = v \qquad \checkmark$

2. $\dfrac{d}{dt}y(t) = \dfrac{d}{dt}\exp(tA)v = A\exp(tA)v = Ay(t) \qquad \checkmark$

3. En ce qui concerne l'unicité:
   Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, posons $z(t) := \exp(-tA)y(t)$, c'est à dire, $y(t) = \exp(tA)z(t)$, donc:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A\exp(tA)z(t) + \exp(tA)z'(t) \\ &= Ay(t) + \exp(tA)z'(t) \end{aligned}$$

   Donc $y' = Ay \iff z' = 0 \iff z$ est constante.

$\square$

Remarque: Problème de la valeur initiale

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \quad (\star)$$

Remplaçons $(\star)$ par un système d'ordre 1:

$$\begin{aligned} y' &= p_1 \\ p_1' &= p_2 \\ &\vdots \\ p_{n-2}' &= p_{n-1} \\ p_{n-1}' &= a_{n-1}p_{n-1} + \cdots + a_1 p_1 + a_0 y \end{aligned}$$

C'est à dire:

$$Y'(t) \overset{(\star\star)}{=} AY(t) \quad \text{où} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\forall v \in \mathbb{C}^n$ le système $(\star\star)$ a une unique solution avec $Y(0) = v$, c'est à dire si $v = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})^T$, on peut dire que $(\star\star)$ a une unique solution y telle que $y^{(k)}(0) = c_k \qquad \forall k = 0, \ldots, n-1$.
Sous-remarque: $\det(\lambda - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$

Problème, comment calculer $\exp(A)$?

- Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \implies \exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Si $A = QDQ^{-1}$, D diagonale (c'est à dire A, diagonalisable):

$$\exp(A) = \exp\left(QDQ^{-1}\right) = Q\exp(D)Q^{-1}$$

- $A = D + N$ où D diagonale et N nilpotente ($\exists n \in \mathbb{N}$ tq. $N^n = 0$) (Par exemple la forme Canonique de Jordan), et si $ND = DN$:

$$\exp(A) = \exp(DN) = \exp(D) \cdot \exp(N) = \exp(D) \cdot \left(1 + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

Par exemple: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$

$$\begin{aligned} \exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN) &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \cdot (1 + tN) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rappel: Théorème de Cayley-Hamilton

Si $p(\lambda) = \det(\lambda - A)$ est le polynôme caractéristique de A alors $p(A) = 0$.

Méthode pour calculer $\exp(A)$

1. Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j)$: On cherche des polynômes $r_1(\lambda), \ldots, r_k(\lambda)$ tels que $r_1 + \cdots + r_k = 1$ et tels que $p(\lambda) \mid r_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$
   Comment trouver les r_i:(décomposition en fractions partielle)

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{s_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{s_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{n_k}}$$

   Donc: $1 = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} s_i(\lambda)}_{r_i(\lambda)}$
   Comme $p(A) = 0$, on a aussi que $(A - \lambda_i)^{n_i} r_i(A) = 0 \quad (= p(A)s_i(A))$
   On peut maintenant calculer:

$$\exp(tA)r_i(A) = \exp(t\lambda_i) \cdot \exp\big(t(A - \lambda_i)\big) \cdot r_i(A) = e^{t\lambda_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{t^l}{l!}(A - \lambda_i)^l \cdot r_i(A)$$

   Finalement:

$$\exp(tA) = \exp(tA)\left(r_1(A) + \cdots + r_k(A)\right) = \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i} \sum_{l=0}^{n_1 - 1} \frac{t^l}{l!}(A - \lambda_i)^l r_i(A)$$

   Remarque:

$$n_i = 1 (\forall i) \implies l^{tA} = \sum_{i=1}^{n} e^{t\lambda_i} r_i(A)$$

Exemple

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\qquad p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$

$$\frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{\frac{1}{5}}{\lambda - 2} - \frac{\frac{1}{5}}{\lambda + 3}$$

   $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$

$r_1 = \frac{1}{5}(\lambda+3),\ r_2(\lambda) = -\frac{1}{5}(\lambda-2)$

$$e^{tA} = e^{2t} \cdot \frac{1}{5}(A+3) - e^{-3t} \cdot \frac{1}{5}(A-2)$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ p(\lambda) = (\lambda+1)^2$
   $\lambda_1 = -1,\ r_1(\lambda) = 1 \to r_1(A) = 1$

$$e^{tA} = e^{-t} \cdot \big(1 + t(A+1)\big) = e^t \begin{pmatrix} 1+2t & 2t \\ -2t & 1-2t \end{pmatrix}$$

   (On a utilisé que $(A+1)^2 = 0$)

3. Trouvons $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $y' = Ay$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et tel que $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$
   $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \implies e^{tA}v = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

Problème

Résoudre $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ si $b:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est donnée: méthode de variation de constantes (déja vu pour $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$)

On pose:

$$y(t) = e^{tA} \cdot z(t),\ z:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \qquad \big(z(t) = e^{-tA}y(t)\big)$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \cancel{A \overbrace{e^{tA} z(t)}^{y(t)}} + e^{tA} z'(t) \\ &\overset{!}{=} \cancel{Ay(t)} + b(t) \end{aligned}$$

$z'(t) = e^{-tA}b(t)$

$$\implies z(t) = \int e^{-tA} b(t)\, dt + c \qquad (c \in \mathbb{C}^n)$$

$$y(t) = e^{tA} \int e^{-tA} b(t)\, dt + c \cdot e^{tA}$$

Remarque

Comment résoudre:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y \overset{(\star)}{=} b(t)$$

$b:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction donnée: On peut transfomer $(\star)$ en un système d'ordre 1 et appliquer la variation de constantes.

4.5 Système d'EDO linéaires générales

Problème

Résoudre:

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{1}$$

, $A:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ est une fonction donnée (on cherche $y:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$).

L'idée

On va construire une suite $y_0, y_1, y_2, \ldots :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de "solutions approximatives (approximation de Picard)" de (1), et finalement on trouve $y(t)$ comme $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$

On pose:

$$\begin{aligned} &y_0(t) = v \in \mathbb{C} \\ &y_1'(t) = A(t)y_0(t),\ y_1(0) = v \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} &y_1(t) = \int_0^t A(s)y_0(s)\,ds + v \\ &\qquad\vdots \\ &y_n'(t) = A(t)y_{n-1}(t),\ y_n(0) = v \end{aligned}$$

C'est à dire

$$y_n(t) = v + \int_0^t A(s)y_{n-1}(s)\,ds$$

Autrement dit:
On construit $M_0(t), M_1(t), \ldots, M_k(t), \ldots$ matrice $n \times n$ telles que $y_k(t) = M_k(t)v$

Par:

$$\begin{aligned} &M_0(t) = 1 \\ &M_1'(t) = A(t)M_0(t),\ M_1(0) = 1 \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} &M_1(t) = 1 + \int_0^t A(s)M_0(s)\,ds \\ &\qquad\vdots \\ &M_k(t) = 1 + \int_0^t A(s)M_{k-1}(s)\,ds \end{aligned}$$

On va montrer que $M(t) := \lim\limits_{k\to\infty} M_k(t)$ existe et que $M'(t) = A(t)M(t),\ M(0) = 1$

Exemple

Si $A(t) = A$ est constante:

$$\begin{aligned}
M_0(t) &= 1 \\
M_1(t) &= 1 + \int_0^t A\, ds = 1 + tA \\
M_2(t) &= 1 + \int_0^t A \cdot (1 + sA)\, ds = 1 + tA + \frac{t^2}{2} A^2 \\
&\vdots \\
M_k(t) &= 1 + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k
\end{aligned}$$

Et donc $\lim_{k\to\infty} M_k(t) = e^{tA}$

Théorème

(On suppose que $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ est continue.) La suite de foncitons $M_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ converge ponctuellement, et cette convergence est uniforme sur $[-N, N]$ ($\forall N > 0$). La limite $M(t) := \lim_{k\to\infty} M_k(t)$ satisfait $M'(t) = A(t)M(t)$ et $M(0) = 1$

<u>Preuve:</u>
L'idée: Utiliser le critère de Weierstrass

$$\begin{aligned}
\|M_k(t) - M_{k-1}(t)\|_1 &= \left\| \int_0^t A(s)\big(M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\big)\, ds \right\|_1 \\
&\leq \left| \int \|A(s)\|_1 \cdot \|M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\|_1\, ds \right|
\end{aligned}$$

Sur $[-N, N]$, la fonction $\|A(s)\|_1$ est continue $\implies$ bornée, posons $c_N := \max_{s\in[-N,N]} \|A(s)\|_1$

$$\leq C_N \left| \int_0^t \|M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\|_1\, ds \right| \quad \text{si} \quad t \in [-N, N]$$

Donc:

$$\|M_k(t) - M_{k-1}(t)\|_1 \leq C_N \left| \int_0^t \|M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\|_1\, ds \right|$$

On a:

$$\| \underbrace{M_0(t)}_{=1} - \underbrace{M_{-1}(t)}_{:=0} \|_1 = n$$

$k = 1$

$$\|M_1(t) - M_0(t)\|_1 \leq C_N \left| \int_0^t n\, ds \right| = nC_N|t|$$

$k=2$

$$\|M_2(t)-M_1(t)\|_1 \leq C_N \left|\int_0^t nC_N|s|\,ds\right| = nC_N^2\frac{|s^2|}{2}$$

$$\vdots$$

$$\|M_k(t)-M_{k-1}(t)\|_1 \leq n\cdot C_N^k\frac{N^k}{k!} \quad \text{sur} \quad [-N,N]$$

On a

$$\lim_{k\to\infty} M_k = \sum_{k=0}^{\infty}\big(M_k - M_{k-1}\big)$$
$$\|M_k(t)-M_{k-1}(t)\|_1 \leq n\frac{(C_N N)^k}{k!}$$

Car

$$\sum_{k=0}^{\infty} n\frac{(C_N N)^k}{k!} = n\exp(C_N N) \quad \text{converge}$$

Donc par Weierstrass, la suite M_k converge uniformément sur $[-N,N]$

On a $(\forall k)$ $\quad M_k'(t) = A(t)M_{k-1}(t) \overset{k\to\infty,\text{unif.}}{\longrightarrow} A(t)M(t)$. Donc la suite M_k' converge uniformément, donc on peut échanger lim et dérivée, et on obtient $M'(t)=A(t)M(t)$.

□

Théorème

$\forall v\in\mathbb{C}^n$, $\exists! y:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}^n \quad$ t.q. $\quad y(0)=v$ et $y'(t)=A(t)y(t)$.
On a $y(t)=M(t)v$

<u>Preuve:</u>
Vérifions que $y(t):=M(t)v$ est une solution:

$$y'(t) = M'(t)v = A(t)M(t)v = A(t)y(t)$$
$$y(0) = M(0)v = 1v = v$$

En ce qui concerne l'unicité:

Supposons que $M(t)$ est inversible $\forall t\in\mathbb{R}$ (à montrer plus tard):
Si $y:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}^n$, on pose $z(t)=M^{-1}(t)y(t)$ c'est à dire $y(t)=M(t)z(t)$. On a:

$$\begin{aligned} y'(t) &= M'(t)z(t) + M(t)z'(t) \\ &= \cancel{A(t)M(t)z(t)} + M(t)z'(t) \\ &\overset{!}{=} \cancel{A(t)y(t)} \end{aligned}$$

C'est à dire: $M(t)z'(t)=0$, $z'(t)=0$, donc $z\in\mathbb{C}^n$ est une constante.

Pour montrer que $M(t)$ est inversible:
$M(0)=1$ inversible
Supposons que $\exists t>1$ tel que $M(t)$ n'est pas inversible, et soit $t_0=\inf\limits_{t>0}\{t \mid \det M(t)=0\}$. $\det M(t)$ une fonction continue.

Soit $\tilde{M}(t)$ une solution de $\tilde{M}(t_0) = 1$, $\tilde{M}(t) = A(t)\tilde{M}(t)$. On sait que $\tilde{M}$ est inversible sur $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ (car $\det \tilde{M}(t)$ est continue, $= 1$ et $t = t_0$)
On a sur $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

$$M(t) = \tilde{M}(t)K(t) \quad \text{où} \quad K(t) = \tilde{M}(t)^{-1}M(t)$$

et donc:

$$\begin{array}{ccc} M'(t) & = & \tilde{M}'(t)K(t) + \tilde{M}(t)K'(t) \\ \| & & \| \qquad\qquad \\ \cancel{A(t)M(t)} & = & \cancel{A(t)\underbrace{\tilde{M}(t)K(t)}_{=M(t)}} + \tilde{M}(t)K'(t) \end{array}$$

$\implies K' = 0 \implies K$ est constant $\implies M(t)$ soit inversible soit non-inversible sur tout $(-\varepsilon + t_0, \varepsilon + t_0)$ $\lightning$

$\square$

4.6 Résumé partie 4

EDO non-linéaire:

- Séparable

- Homogènes

- $y'' = f(x, x')$ - réduction d'ordre

EDO linéaires:

- $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ (variation de constante)

- $p(D)y = 0$ $(y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0)$

- Système $y' = Ay$ (vect./val. propres ou $\exp(tA)$)

5 Fonctions de plusieurs variables

Problème typique: trouver les maxs et les mins lovaux de $f(x,y) = x^2y + xy + y^3$

5.1 La différentielle et les dérivées partielles

On va étudier des fonctions $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ ou plus généralement $f : U \underset{\text{ouvert}}{\subset} V \to W$

Définition

Si $a \in U$, $v \in V$, alors la dérivée directionnelle

$$\partial_v f(a) := \left(\frac{d}{dt} f(a+tv) \right)\bigg|_{t=0}$$

Si $x_1, \ldots, x_k$ sont les coordonnées sur $V = \mathbb{R}^k$ et si $e_1, \ldots, e_k$ est la base canonique de $V = \mathbb{R}^k$, alors la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{e_i} f(a)$$

Remarque

Comment calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{d}{dt} f(x_1, x_2, \ldots, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_k)\bigg|_{t=0}$$

= la dérivée de f par x_i si les autres variables sont vues comme des constantes.

Exemple

Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x+y+xy) \end{array}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x+y+xy) \cdot (1+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x+y+xy) \cdot (1+x) \end{aligned}$$

Remarque

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ c'est à dire si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}$, $f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_\ell}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Définition

$f : U \subset V \to W$ est <u>différentiable</u> en $a \in U$ si il existe une fonction linéaire $d_a f : V \to W$ (appellée la <u>differentielle</u> de f en $a \in U$) telle que ($h \in V$)

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o\big(\|h\|\big)$$

Explication de $o\big(\|h\|\big)$:

On a $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + R(h)$ où R est une sorte de "Reste". On écrit que $R(h) = o\big(\|h\|\big)$ si "R est négligeable par rapport à $\|h\|$", c'est à dire si $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$, c'est à dire si $R(h) = \|h\| r(h)$ et $r(0) = 0$, r continue en 0.

Exemple

Si $V = W = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f'(a)$ existe ($a \in \mathbb{R}$) alors pour $h \in \mathbb{R}$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o\big(|h|\big)$$

Donc $d_a f(h) = f'(a)h$

Proposition

Si $d_a f$ existe, alors $\partial_v f(a) = d_a f(v)$

<u>*Preuve:*</u>

$$\partial_v f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{d_a f(tv) + o\big(|t|\|v\|\big)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{t d_a f(v)}^{d_a f(x) \text{ lin.}} + o\big(|t|\|v\|\big)}{t}$$

$$= d_a f(v) + \lim_{t\to 0} \cancelto{0}{\frac{o\big(|t|\big)}{t}}$$

$\square$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = d_a f(e_i)$ car $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{e_i} f(a)$.
$\partial_v f(a) = d_a f(v)$

Proposition

Si $d_a f$ existe, alors $d_a f(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i$. (ici $v = \sum v_i e_i$, $v_i \in \mathbb{R}$)

<u>*Preuve:*</u>

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_i v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} v_i d_a f(e_i) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$\square$

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors la matrice de $d_a f$ est $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)$

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}$, $f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors la matrice $d_a f$ est :

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\ell}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Définition

f est C^1 si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ sont des fonctions continues.

Théorème

Si $f : U \subset V \to W$ est C^1, alors f est différentiable partout, c'est à dire $d_a f$ existe $\forall a \in U$.

Proposition

Si f est differentiable en $a \in U$ (c'est à dire si $d_a f$ existe), alors f est continue en a.

Preuve:

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o\big(\|h\|\big)$$

En passant à la limite:

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) + \cancelto{0}{d_a f(0)} + \cancelto{0}{o\big(\|h\|\big)} = f(a)$$

$\square$

$$f \text{ est } C^1 \implies f \text{ différentiable} \begin{cases} \implies \partial_v f \quad \text{existe} \quad (\forall v) \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{existent} \\ \implies f \quad \text{continue} \end{cases}$$

Les autres implications ne sont pas vraies.

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice df est:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

f est $C^1 \implies f$ est différentiable.

Exemple

Si $f : V \to W$ est linéaire, alors f est différentiable, et $(\forall a \in V)\ d_a f = f$ car:

$$f(a+h) = f(a) + \overset{=d_a f(h)}{f(h)}$$

en particulier, les coordonnées:

$$x_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est linéaire $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $d_a x_i(h) = h_i$ (où $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$)

La matrice de $d_a x_i$ est $(0, 0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$

Proposition

Si $d_a f$ existe, alors

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) d_a x_i$$

<u>*Preuve:*</u>
Il faut montrer: $\forall h \in \mathbb{R}^k$:

$$d_a f(h) \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overbrace{d_a x_i(a)}^{h_i}$$

$\square$

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x+y+xy) \end{array}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \cos(x+y+xy)\left((1+y)dx + (1+x)dy\right)$$

Définition

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors $a \in \mathbb{R}^k$ est un <u>point critique</u> si $d_a f = 0$, c'est à dire: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i$

Proposition

Si a est un extremum local de f, alors a est un point critique.

<u>*Preuve:*</u>
Si a est un extremum local, et si $g(t) := f(a+tv) \quad (v \in \mathbb{R}^k)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors 0 est un extremum local de g, donc $\frac{d}{dt}g(0) = 0$ mais $\partial_v f(a) := \frac{d}{dt}g(0)$.
On a donc: $\partial_v f(a) = 0 = d_a f(v) \quad (\forall v) \implies f_a f = 0$

$\square$

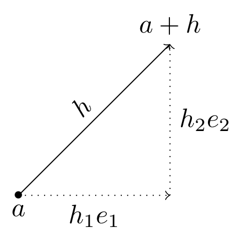
Théorème

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ est C^1, alors f est différentiable.

<u>*Preuve:*</u>
Si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}$, $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors il suffit de montrer le théorème pour les $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, donc on peut supposer que $\ell = 1$.
Pour des raisons de simplicité, supposons que $k = 2$ (La généralisation est plus lourde mais utilise les même principes).

Soient $a \in \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 e_1 + h_2 e_2$.

$$f(a+h) - f(a) = f(a + h_1 e_1) - f(a) + f(a+h) - f(a + h_1 e_1)$$

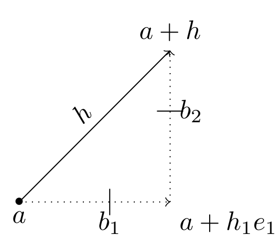


On utilise le théorème des accroissements finis:

$$g_1(t) := f(a + te_1)$$

Donc:

$$f(a + h_1 e_1) - f(a) = g_1(h) - g_1(0) = h_1 \underset{s_1 \in [0,h_1]}{g_1'(s_1)} = h_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underbrace{a + s_1 e_1}_{b_1})$$



$$
\begin{aligned}
g_2(t) &= f(a + h_1e_1 + te_2)\\
f(a+h) - f(a+h_1e_1) &= g_2(h_2) - g_2(0) \overset{TAF}{=} \overset{s_2\in[0,h_2]}{h_2 g_2'(s_2)} = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overbrace{a + h_1e_1 + s_2e_2}^{b_2})\\
f(a+h) - f(a) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2)\\
&= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right) + h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)
\end{aligned}
$$

Mais $\lim_{h\to 0} \overset{\in[-1,1]}{\frac{h_1}{\|h\|}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right) = (\star)$

Et aussi $h \to 0 \implies b_1 \to a$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ continue $\implies (\star) = 0$

$\square$

Théorème: Règle de la chaîne

Soient $\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^\ell & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \\ a & \mapsto & b = f(a) & \mapsto & c = g(b) \end{array}$

Supposons que d_af et d_bg existent. Alors $d_a(g \circ f) = d_bg \circ d_af$ (La linérisation de la composition est la composition des linéarisations)

Preuve:

$$
\begin{aligned}
g(f(a+h)) &= g\big(\overbrace{f(a)}^{b} + d_af(h) + o(\|h\|)\big)\\
&= \underbrace{g\big(f(a)\big)}_{g(b)} + d_bg\big(d_af(h)\big) + \underbrace{d_bg\big(o(\|h\|)\big)}_{o(\|h\|)} + \underbrace{o\big(\, \|d_af(h) + o(\|h\|)\| \,\big)}_{o(\|h\|)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Remarque

Comment calculer les dérivées partielles avec la règle de la chaîne:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}
$$

La matrice de d_af est $\left(\frac{\partial y_q}{\partial x_r}\right)_{q,r}$, aussi $d_bg = \left(\frac{\partial z_p}{\partial y_q}\right)_{p,q}$

Le théorème nous affirme:

$$
\frac{\partial z_p}{\partial x_r} = \sum_{q=1}^{\ell} \frac{\partial z_p}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial x_r}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} y_1 = & x_1 + x_2 \\ y_2 = & x_1x_2 \end{pmatrix} & \longrightarrow & z = \sin(y_1 + y_2)\\
\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}
\end{array}
$$

On a:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\
&= \cos(y_1 + y_2)\cdot 1 + \cos(y_1 + y_2)\cdot x_2 \\
&= \cos(x_1 + x_2 + x_1 x_2)\cdot(1 + x_2)
\end{aligned}
$$

Remarque

On peut écrire la règle de la chaîne aussi comme:

$$
(*) = \sum_r \frac{\partial z_p}{\partial x_r} dx_r = dz_p = \sum_{q=1}^{\ell} \frac{\partial z_p}{\partial y_p} = \sum_{q,r} \frac{\partial z_p}{\partial y_p} \overbrace{\frac{\partial y_q}{\partial x_r} dx_r}^{dy_q} = (**)
$$

$$
(*) \cap (**) \implies \frac{\partial z_p}{\partial x_r} = \sum_q \frac{\partial z_p}{\partial y_q}\frac{\partial y_q}{\partial x_r}
$$

5.2 Dérivées partielles supérieurs

On pose:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \quad \text{etc.}$$

Définition

$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ est C^n si toutes les n-ièmes dérivées partielles de f existent et elles sont continues.

Théorème

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ est C^2, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Preuve:

On peut supposer que $\ell = 1$ (si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}$, il suffit de montrerle théorème pour les f_i)

L'idée: approximer les derivées par des différences:
Si $v \in \mathbb{R}^k$, on pose

$$\Delta_v f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+v) - f(x) \end{array}$$

Si $v, w \in \mathbb{R}^k$, alors

$$\Delta_v\left(\Delta_w f\right)(x) = \Delta_w\left(\Delta_v f\right)(x) \quad (\dagger)$$

Et

$$\Delta_v\left(\Delta_w f\right)(x) = f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a)$$

On va montrer:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta_{te_j}\Delta_{te_i} f}{t^2} \quad (\star)$$

Car on remarque que $(\star) + (\dagger) \implies$ THM

Pour montrer $(\star)$ on utilise TAF:
Si $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors on pose $g(t) = \tilde{f}(a + te_i)$

$$\Delta_{te_1}\tilde{f}(a) = g(t) - g(0) \overset{TAF}{=} tg'(\tilde{t}) \overset{\tilde{t}\in[0,t]}{=} t\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(a + \tilde{t}e_i)$$

On a donc:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{te_j}\overbrace{\left(\Delta_{te_i} f\right)}^{\tilde{f}}(a)}{t^2} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta_{te_i} f\right)(a + \tilde{t}e_j)}{t} = \frac{\Delta_{te_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\tilde{t}e_j)}{t} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \tilde{t}e_i + \tilde{\tilde{t}}e_j)_{\tilde{t},\tilde{\tilde{t}}\in[0,t]} \overset{f \text{ est } C^2}{\underset{t\to 0}{\longrightarrow}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire

Si f est C^n, alors les m-ièmes dérivées partielles ($\forall m \leq n$) ne dépendent pas de l'ordre.

Théorème (Taylor d'ordre 2)

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est C^2, alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x^i} h_i + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o\left(\|h\|^2\right)$$

<u>*Preuve:*</u>

On définit $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a+th) \end{array}$. Par Taylor-Lagrange:

$$f(a+h) = g_h(1) \overset{TL}{=} g_h(0) + g_h'(0) + \frac{1}{2} g_h''(t_h)$$

où $t_h \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g_h(0) &= f(a) \\ g_h'(t) &= \sum \frac{\partial f(a+th)}{\partial x^i} h_i \\ g_h''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial f(a+th)}{\partial x_i} h_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+th)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \end{aligned}$$

($\star$) nous donne:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+t_h h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

Finalement:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+t_h h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \overbrace{\left(\frac{\partial^2 f(a+t_h h)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)}^{(*)} h_i h_j$$

$(*) \to 0$ quand $h \to 0$ car f est C^2, $|h_i| \leq \|h\|$ et $|h_j| \leq \|h\|$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o\left(\|h\|^2\right)$$

$\square$

Rappel

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ a un extremum local en $a \in \mathbb{R}^k$, alors $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, donc

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o\left(\|h\|^2\right)$$

où la somme des dérivées partielles est un polynôme qudratique en $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$

5.3 Formes quadratiques

une forme quadratique en variables $x_1, \dots, x_k$ = un polynôme quadratique homogène $q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i,j}^{k} B_{ij} x_i x_j$, $B_{ij} \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $B_{ij} = B_{ji}$ si B est la matrice $k \times k$ avec les éléments B_{ij} alors $q(x) = x^T B x$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$

Exemple

$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$, alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

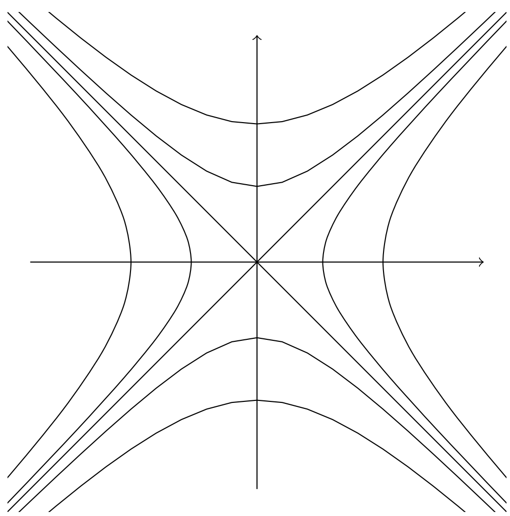
Est-ce que $q(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$?

Complétons les carrés:

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2) &= (x_1 + 3x_2)^2 - 4x_2^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 \end{aligned}$$

Où $y_1 = x_1 + 3x_2, \ y_2 = 2x_2$

La réponse est non. eg: $y_1 = 0, y_2 = 1 \rightsquigarrow q = -1$



Théorème

Si $q(x_1, \dots, x_n)$ est une forme quadratique, alors, il existe un changement de la base tel que

$$q = \underbrace{y_1^2 + \dots + y_n^2}_{n_+} - \underbrace{y_{n_+ + 1}^2 - \dots - y_{n_+ + n_-}^2}_{n_-}$$

Méthode

Compléter les carrés et $x_1x_2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = y_1^2 - y_2^2$

Définition

Si V est un espace vectoriel réel (ou sur un corps K), alors une forme bilinéaire symétrique sur V est une application $B: V \times V \to \mathbb{R}(\text{ou } K)$ telle que

- $B(u,v) = B(v,u) \quad \forall u, v \in V$

- $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u,w) + \beta B(v,w) \quad \forall u, v, w \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\text{ou } K)$

Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de V on pose $B_{ij} := B(e_i, e_j) \in \mathbb{R}$. Si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$, alors:

$$\begin{aligned} B(u,v) &= B\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} u_i v_j \end{aligned}$$

Si B est la matrice avec les éléments B_{ij} alors $B(u,v) = u^T B v$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Remarque

La matrice B est symétrique car $B_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = B_{ji}$

On a donc une bijection entre les formes symétrique bilinéaires et les matrices symétriques $n \times n$ (si une base est choisie)

Définition

La forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique est $q(v) := B(v,v)$. Avec les matrices:

$$q(v) = v^T B v = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} v_i v_j$$

Exemple

Si $B(u,v) = u \cdot v$ ($V = \mathbb{R}^n$), alors $q(v) = v \cdot v = \|v\|^2$

Remarque

On peut calculer B à partir de q:

$$q(u+v) = B(u+v, u+v) = B(u,u) + B(v,v) + 2B(u,v) = q(u) + q(v) + 2B(u,v)$$

Donc

$$B(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

Si une base est choisie, $B(u,v) = u^T Bv$. Si on change la base: si Q est la matrice $(n \times n)$ du changement de la base:

$$\begin{aligned} v_{\text{new}} &= Q^{-1}v \\ u^T_{\text{new}} &= (Qu)^T = u^T(Q^{-1})^T \end{aligned}$$

Et on veut

$$u^T_{\text{new}} B_{\text{new}} v_{\text{new}} \stackrel{!}{=} u^T Bv = u^T_{\text{new}} Q^T BQ v_{\text{new}}$$

Mais donc

$$Q^T BQ = B_{\text{new}}$$

Et donc le changement de la base: $B \rightsquigarrow Q^T BQ$

Théorème

Si B est une matrice symétrique $n \times n$ réelle, alors il existe une matrice $n \times n, Q$ inversible telle que $Q^T BQ$ est diagonale avec $\pm 1, 0$ sur la diagonale.
C'est à dire, pour toute forme quadratique q, il existe une base telle que

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2, \quad c_i \in \{1, -1, 0\}$$

Rappel

$\exists Q$ tel que $Q^T = Q^{-1}$ (C'est à dire Q est orthogonale) telle que $Q^{-1}BQ$ est diagonale. ($\exists$ vecteurs propres de B qiu forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$)

Preuve du Théorème / Algorithme:

On utilise consécutivement des matrices Q élémentaires, c'est à dire on applique des opérations élémentaires sur les lignes de B et (les mêmes opération) sur les colones.

Cas 1: $B_{11} \neq 0$, et $B_{1i} \neq 0$ $(i \neq 1)$:

On fait $l_i \to l_i - cl_1$, où l_i la i-ème ligne et $c = \dfrac{B_{1i}}{B_{11}}$ pour que $B_{1i} \rightsquigarrow 0$. Il faut aussi appliquer $c_i \to c_i - cc_1$

Exemple:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_2 \to c_2 - 2c_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cas 2: $B_{11} = 0$, $B_{1i} \neq 0$:

On peut faire $l_1 \to l_1 + l_2$, $c_1 \to c_1 + c_2$ et on est dans le cas 1.

Exemple:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{l_1 \to l_1 + l_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_1 \to c_1 + c_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme: $B =$

■	0	0	0	0
0	■	0	0	0
0	0	■	0	0
0	0	0	■	0
0	0	0	0	■

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{l_3 \to l_3 - 3l_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_2 \to c_2 - 2c_1 \\ c_3 \to c_3 - 3c_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \underset{l_3 \to l_3 - 2l_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 \to c_3 - 2c_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \\ n_+=2, n_-=1, n_0=0}]{} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement on fait $l_i \to \alpha_i l_i,\ c_i \to \alpha_i c_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ convenable pour que les éléments diagonales sont transformés en ± 1, ou 0

$\square$

Terminologie

Si B est une matrice symétrique et si $\wedge = Q^T B Q$ est digonale (Q inversible), on pose:

$n_+ =$ # éléments > 0 sur la diagonale de $\wedge$

$n_- =$ # éléments < 0 sur la diagonale de $\wedge$

$n_0 =$ # éléments $= 0$ sur la diagonale de $\wedge$

Le triplet (n_+, n_-, n_0) est la signature de B (ou de q). On dit que:

→ B est définie positive
si $n_+ = n,\ n_- = 0,\ n_0 = 0$, c'est à dire $q(x) = x^T B x > 0 \qquad \forall 0 \neq y \in \mathbb{R}^n$

→ B est définie négative
si $n_- = n,\ n_+ = 0,\ n_0 = 0$, c'est à dire $q(x) < 0 \qquad \forall x \neq 0$

→ B est semi définie positive
si $n_- = 0$, c'est à dire si $q(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$

→ B est indéfinie
si $n_+ > 0,\ n_- > 0$, c'est à dire si $\exists x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $q(x) > 0,\ q(y) < 0$

Remarque

- La signature de B est indépendante de Q (preuve dans la Série d'exo)

- Les formes quadratiques/signatures bilinéaires "existent dans la nature"

- Produit scalaire (dans $\mathbb{R}^n$) et $\|\cdot\|^2$

- $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ a pour signature $n_+ = 3,\ n_- = 1,\ n_0 = 0$

5.4 Extremas locaux et selles

Rappel

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et si en $a \in \mathbb{R}^n$ f a un extremas local, alors $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0 \quad (\forall i)$, c'est à dire a est un point critique.

Taylor: Si f est C^2:

$$f(a+h) = f(a) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}}^{\text{La diff. } d_a f(h)} h_i + \overbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}^{\text{forme quad. en } h=(h_1,\ldots,h_n)} + o\left(\|h\|^2\right)$$

Terminologie

$$H_a f := \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Est la matrice Hessienne de f et

$$H_a f(h) := \sum \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

Est la forme quadratique Hessienne.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonciton C^2, et soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point crititque de f.

- Si $H_a f$ est définie positive (c'est à dire $n_+ = n,\ n_- = 0,\ n_0 = 0$) alros a est un minimum local stricte de f.

- Si $H_a f$ est définie négative, alors a est un maximum local strict.

- Si $H_a f$ est indéfinie (c'est si $n_+ > 0,\ n_- > 0$) alors a n'est pas un extremum local de f (on dit que a est une selle)

Remarque

Si $n_+ > 0,\ n_- = 0,\ n_0 > 0$, donc semi définie positive, alors le théorème de dit rien.

Preuve du Théorème:

- Cas où $H_a f$ est définie positive:
  On change la base de $\mathbb{R}^n$ pour que $H_a f(h) = \|h\|^2$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|r(h)| < \dfrac{1}{4}\|h\|^2$, où $r(h)$ représente le reste dans la formule de Taylor, qui est $o\left(\|h\|^2\right)$
  Pour $\|h\| < \varepsilon$ on a:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \underbrace{\|h\|^2}_{H_a f(h)} + r(h) > f(a) + \frac{1}{4}\|h\|^2 > f(a) \quad \text{si } h \neq 0$$

  Donc a est un minimul local strict.

– Cas où H_af est définie négative, pareil.

$$\big(H_af(h) = -\|h\|^2\big)$$

– Car où H_af est indéfinie:
On change le base pour que H_af soit diagonale avec ± 1, 0 sur la diagonale.
H_af est indéfinie $\implies$ $\exists$ vecteurs v, w (on peut choisir des éléments de la base) tels que $\|v\| = 1 = \|w\|$ et $H_af(v) = +1$ et $H_af(w) = -1$. On a pour $|t| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= f(a) + \overbrace{\frac{1}{2}t^2}^{H_af(tv)} + \overbrace{r(tv)}^{\text{Borné par } \pm\frac{1}{4}t^2} \\ &\implies f(a+tv) \geq f(a) + \frac{1}{4}t^2 \end{aligned}$$

Aussi:

$$f(a+tw) \leq f(a) - \frac{1}{4}t^2$$

Donc cela implique que a n'est ni un maximum ni un minimum local.

$\square$

Proposition

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ alors:

→ B est définie positive si et seulement si $\det B > 0$ et $a > 0$.

→ B est définie négative si et seulement si $\det B > 0$ et $a < 0$.

→ B est indéfinie si et seulement si $\det B < 0$.

<u>Preuve:</u>
$\exists Q$ inversible telle que $Q^TBQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ où ε_1, $\varepsilon_2 \in \{0, 1, -1\}$ $\implies$ $\det(Q^TBQ) = \varepsilon_1\varepsilon_2$ mais aussi:

$$\begin{aligned} \det(Q^TBQ) = \overbrace{\det(Q^T)}^{\det(Q)} \det B \det Q &= \overbrace{(\det Q)^2}^{>0} \cdot \det B \\ \implies \varepsilon_1\varepsilon_2 &= \operatorname{sgn}(\det B) \in \{1, -1, 0\} \end{aligned}$$

Donc: $\det B > 0 \iff \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 \iff \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1 \iff B$ est définie positive ou négative.

Mais $(1,0)B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \implies \begin{cases} a > 0 \implies & B \text{ est définie positive} \\ a < 0 \implies & B \text{ est définie négative} \end{cases}$, $\det B < 0 \iff \varepsilon_1\varepsilon_2 = -1 \iff B$ est indéfinie.

$\square$

Exemple

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det B = -1 \implies$ indéfinie.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det B = 2 \implies$ définie positive.

Problème

Comment trouver les extrema locaux d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

- Trouver les points critiques $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, c'est à dire $d_a f$
- Trouver la signature de $H_a f = \left(\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$.

$$H_a f \begin{cases} \text{définie positive} \implies \text{min} \\ \text{définie négative} \implies \text{max} \\ \text{indéfinie} \implies \text{selle} \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy(1-x-y) \end{array}$$

Points critiques:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(1-2x-y) \stackrel{!}{=} 0 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x(1-2y-x) \stackrel{!}{=} 0$$

Les points critiques sont:

$$(y=0 \quad \vee \quad 1-2x-y=0) \qquad \wedge \qquad (x=0 \quad \vee \quad 1-2y-x=0)$$
$$\implies (x,y) \in \left\{(0,0),(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$$

4 points critiques et donc:

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Pour $(x,y) = (0,0)$, $Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et alors $\det Hf = -1 \implies$ indéfinie $\implies$ $(0,0)$ est une selle.

Pour $(x,y) = (1,0)$ ou $(0,1)$ (calcul similaire) $Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et alors $\det Hf = -1 \implies$ indéfinie $\implies$ selle.

Pour $(x,y) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $Hf = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\det Hf = \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} < 0 \implies$ définie négative $\implies$ minimum local.

5.5 Multiplicateurs de Lagrange

Problème

Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et si $S \subset \mathbb{R}^n$ est donné par $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$ où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une fonction donnée. ON cherche les extremas locaux de $g|_S : S \to \mathbb{R}$

Exemple

$n = 2, k = 1$: $\quad g(x, y) = x + y$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

S est donc le cercle unitaire, on cherche un maximum et un minimum de $g|_S$
Remarque: g continue, S compact $\implies$ max et min existent.

5.5.1 Théorème: multiplicateurs de Lagrange

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une fonction C^1, c'est à dire $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}$, $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonctions C^1, $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, et $a \in S$ tel que $g|_S$ a un max ou min local en a.
Si l'application linéaire $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est surjective, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (multiplicateurs de Lagrange) tels que a est un point critique de $g - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_k F_k$

Preuve:

cas 1. $F_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, c'est à dire $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}$
Alors $g|_S = g(0, 0, \dots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ est une fonction de $n - k$ variables.
$\implies \dfrac{\partial g(a)}{\partial x_i} = 0 \qquad i = k+1, k+1, \dots, n$
On pose $\lambda_j = \dfrac{\partial g(a)}{\partial x_i} \qquad j = 1, \dots, k$, et donc

$$\frac{\partial (g - \lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_k x_k)(a)}{\partial x_m} = 0 \qquad m = 1, \dots, n$$

cas 2. Idée: Il existe un changement de variable tel qu'on se retrouve au cas 1.

Lemme

On pose $\tilde{F}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \qquad i = 1, \dots, k$, $\exists$ ouvert $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $v \in V \in \mathbb{R}^n$, et une bijection $\phi : U \to V$ telle que ϕ et ϕ^{-1} sont C^1, $\phi(a) = 0$, et $F = \tilde{F} \circ \phi$

$\ulcorner$

Théorème de la fonction inverse, à voir en Analyse II.

$\lrcorner$

On défini $\tilde{g}$ par:
$$\tilde{g} = g \circ \phi^{-1} \qquad (g = \tilde{g} \circ \phi)$$
En donc, $\tilde{F}, \tilde{g} \ldots$ cas 1 $\Longrightarrow$ $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que 0 est un point critique de $\tilde{g} - \lambda_1 \tilde{F}_1 - \cdots - \lambda_k \tilde{F}_k$.
C'est à dire, $d_0(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i) = 0$, et donc par la règle de la chaîne:
$$(\star) = d_1(g - \sum \lambda_i F_i) = d_0 \tilde{g} \circ d_a \phi - \sum \lambda_i d_0 \tilde{F}_i \circ d_a \phi = d_0(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i) \circ d_a \phi$$
mais remarquons que $d_0(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i) = 0$ et donc $(\star) = 0$.

$\square$

Remarques

- $g|_S = (g - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_k F_k)|_S$ car $F_i|_S = 0 \quad \forall i$

- Pour trouver les extrema de $g|_S$ on cherche $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que a est uun point critique de $g - \sum \lambda_i F_i$.
  Les extremas sont pari ces points a.

- $d_a F$ est surjective:
  $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rang}(d_a F) = k$, c'est à dire $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}} = k$

Exemples

1. $n = 2, k = 1$: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x, y) = x + y$ et donc:
   $g - \lambda F = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad (\star)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On cherche les points critiques de $(\star)$ qui sont dans $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   $$\frac{\partial(\star)}{\partial x} = 1 - 2\lambda x \qquad\qquad \frac{\partial(\star)}{\partial y} = 1 - 2\lambda y$$
   $$2\lambda x = 1 = 2\lambda y$$
   tel que $x^2 + y^2 = 1 \implies x = y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ Cela nous donne les "extrema potentiels" de g_S S compact, g continue $\implies$ max et min (globaux) existent et sont donnés par les points précédents.

2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x, y) = x^2 - xy^2$
   $(\star) = g - \lambda F = x^2 - xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
   $$\frac{\partial(\star)}{\partial x} = 2x - y^2 - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \qquad\qquad \frac{\partial(\star)}{\partial y} = -2xy - 2\lambda y \overset{!}{=} 0$$
   $$x^2 + y^2 \overset{!}{=} 1$$
   Et donc: $y(x + \lambda) = 0$ c'est à dire $y = 0$ ou $x = -\lambda$.

   $y = 0 \;\; x = \pm 1, \;\; \lambda = 1$

$x = -\lambda$ $\lambda = -x \rightsquigarrow 2x - y^2 + 2x^2 = 0$ et $x^2 + y^2 = 1 \rightsquigarrow y^2 = 1 - x^2$ et donc:

$$2x - 1 + x^2 + 2x^2 = 0 \rightsquigarrow 3x^2 2x - 1 = 0 \implies x \begin{cases} -1 & \implies y = 0 \\ \dfrac{1}{3} & \implies y = \pm\dfrac{\sqrt{8}}{3} \end{cases}$$

3. Trouver le max et min de $g(x,y) = x^2 - xy^2$ dans $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, c'est à dire on cherche max et min de $g|_D$, D compact, g continue $\implies$ max et min existent.
Soit on trouve max ou min à l'interieur $(x^2 + y^2 < 1) \implies$ point critique de g. Soit il est sur S et donc on utilise les multiplicateurs de Lagrange. Ou les extrema potentiels qui sont dans S:
$(\pm 1, 0)$, $\left(\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)$ les extrema potentiels à l'intérieurs:
$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x - y^2 \overset{!}{=} 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -2xy \overset{!}{=} 0$ et $x^2 + y^2 < 1$

5.6 Résumé de la partie 5

- Calculer avec les dérivées partielles et différentiells
  - Règle de la chaîne.
- Trouver les extremas d'une fonction
  - points critiques
  - matrices Hessienne
  - signature
  - multiplicateurs de Lagrange.

6 Intégrales multiples

6.1 Motivations

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ L'aire sous le graphe.

Si $A \subset \mathbb{R}^n, f:\ A \to \mathbb{R}$:

$$\int_A f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \quad \text{Volume } n+1 \text{ dimension sous le graphe}$$

Comment définir $\displaystyle\int_A f\ dx_1\ldots dx_n$?

Par analogie au découpage en rectangles pour les fonctions dans $\mathbb{R}$, nous allons découper notre plan $\mathbb{R}^2$ en petits rectangles et regarder le "volume" sous ces rectangles comme nous avons regardé l'aire sous la courbe du graphe.

6.2 Définitions

- Un <u>pavé</u> (rectangle n-dimension) dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de la forme:

$$P = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n],\quad a_i,b_i\in\mathbb{R}$$

- Le <u>volume</u> de P est $\mathrm{vol}(P) = \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$
- Une <u>division</u> d'un intervalle fermé $[a,b]$ = un choix de parts $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$.
- Une <u>division d'un pavé</u> $P\subset\mathbb{R}^n$ = une décomposition de P en sous-pavés qui est donnée par des divisios de cotés de P.
- Un <u>rafinement</u> d'une division D= une divisions D' obtenue de D en ajoutant de nouveaux points de divisions.

Proposition

Si P est un pavé et D une division de P alors:

$$\mathrm{vol}\,P = \sum_{R\in D}\mathrm{vol}\,R$$

<u>*Preuve (pour $n=2$)*</u>

$P=[a,b]\times[c,d]$, découpons P:

$[a,b] \rightsquigarrow [a=t_0,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup\cdots\cup[t_{k-1},t_k=b]$, et de même pour $[c,d]\rightsquigarrow[c=s_0,s_1]\cup\cdots\cup[s_{l-1},s_l=d]$

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(P) = (b-a)(d-c) &= \big((t_k-t_{k-1})+(t_{k-1}-t_{k-2})+\cdots+(t_1-t_0)\big)\cdot\big((s_l-s_{l-1})+\cdots+(s_1-s_0)\big)\\ &= \sum_{i,j}(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1}) = \sum_{R\in D}\mathrm{vol}\,R\end{aligned}$$

□

Définition

Si $P\subset\mathbb{R}^n$ est un pavé, D une division de P et $f:P\to\mathbb{R}$ une fonction bornée, alors la <u>somme de Riemann supérieure</u> de f est:

$$S(f,D) := \sum_{R\in D}\sup_{x\in R} f(x)\cdot\mathrm{vol}(R)$$

et la <u>somme de Riemann inférieure</u> est:

$$s(f,D) := \sum_{R\in D}\inf_{x\in R} f(x)\cdot\mathrm{vol}(R)$$

Obsevation

$S(f,D) \geq s(f,D)$.

Lemme

Si D' est un rafinement de D, alors $S(f,D') \leq S(f,D)$ et $s(f,D') \geq s(f,D)$.

<u>*Preuve:*</u>

$$\begin{aligned}
S(f,D) &= \sum_{R\in D} \sup_{x\in R} f(x)\cdot \operatorname{vol} R = \sum_{R\in D} \sup_{x\in R} \cdot \sum_{R'\in D'} \operatorname{vol} R' \qquad (R'\subset R)\\
&= \sum_{R'\in D'} \sup_{x\in R} f(x)\cdot \operatorname{vol} R' \quad \text{où } R\in D \text{ est tel que } R'\subset R\\
&\geq \sum_{R'\in D'} \sup_{x\in R'} f(x)\cdot \operatorname{vol}(R') = S(f,D')
\end{aligned}$$

Pour $s(f,D') \geq s(f,D)$, la preuve est analogue.

$\square$

Proposition

Si D_1 et D_2 sont des divisions de P, alors $S(f,D_1) \geq s(f,D_2)$

<u>*Preuve:*</u>
Si D' est un rafinement comun de D_1 et D_2, alors:

$$S(f,D_1) \overset{\text{Lemme}}{\geq} S(f,D') \geq s(f,D') \overset{\text{Lemme}}{\geq} s(f,D_2)$$

$\square$

Définition

Si $P \subset R^n$ est un pavé, $f:\ P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, alors l'<u>intégrale de Riemann supérieure</u> de f par P est:

$$\overline{\int_P} f\, dx_1 \cdots dx_n := \inf_{D \text{ divisions de } P} S(f,D)$$

L'<u>intégrale de Riemann inférieure</u> est:

$$\underline{\int_P} f\, dx_1 \cdots dx_n := \sup_{D \text{ div. de } P} s(f,D)$$

Si ces deux intégrales sont égales, on dit que f est <u>intégrable</u>, et son <u>intégrale</u> est:

$$\int_P f \ := \overline{\int_P} f \ = \underline{\int_P} f$$

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné donc il existe un pavé $P \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset P$, et si $f:\ A \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, alors

$$\int_A f \ := \int_P \tilde{f}\ , \text{ où } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

Remarque

Le résultat ne dépend pas du choix de P (exercice)

Propriétés de $\int_A f$:

- $\int_A (af+bg) = a\int_A f + b\int_A g$
- Si $a,b \in \mathbb{R}$, $f,g:\ A \to \mathbb{R}$ tels que $\int_A f$ et $\int_A g$ existent (preuve du premier semestre)
- Si $f \leq g$, alors $\int_A f \leq \int_A g$

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné, alors $\mathrm{vol}(A) := \int_A 1$, A est <u>négligeable</u> si $\mathrm{vol}(A) = 0$. C'est à dire si $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ pavées $P_1, \ldots, P_k$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ et $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(P_i) \leq \varepsilon$.

Théorème

Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé et si $f:\ P \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\int_P f$ existe. Plus généralement, si $f:\ P \to \mathbb{R}$ est bornée, et si l'ensemble $\{x \in P \mid f \text{ n'est pas continue en } x\}$ est <u>négligeable</u>, alors $\int_P f$ existe.

Proposition

Si $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est fermé et borné, et si $g:\ S \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de g $\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in S\}$

6.3 Intégrales itérées

Théorème

Si $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, si $f:\ P \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\int_P f\ dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ dx_1 \right) dx_2 \cdots \right) dx_n$$

si l'intégrale itérée existe.

<u>*Preuve:*</u>
On a $P = [a_1, b_1] \times P'$, où $P' = [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^{n-1}$. On pose:

$$g(x_2, \ldots, x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ dx_1$$

Supposons que g est bien définie. Il faut montrer que

$$\int_P f\ dx_1 \cdots dx_n = \int_{P'} g\ dx_2 \cdots dx_n$$

et que la deuxième intégrale existe.

Soit D une division de P, c'est à dire, une division $t_0 = a_1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$, et une division D' de P'. Montrons que

$$S(f,D) \overset{(1)}{\geq} S(g,D') \geq s(g,D') \overset{(2)}{\geq} s(d,D)$$

Si on le suppose:

$$\overline{\int_P} f \overset{(1)}{\geq} \overline{\int_{P'}} g \geq \underline{\int_{P'}} g \overset{(2)}{\geq} \underline{\int_P} f$$

Mais

$$\overline{\int_P} f = \underline{\int_P} f = \int_P f$$

$\Longrightarrow$ les inégalités sont en fait des égalités $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{P'} g$ existe et $\displaystyle\int_{P'} g = \int_P f$.

Pour montrer (1):

$$g(x_2,\ldots,x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \leq \sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{i-1}) \cdot \sup_{x_i\in[t_{i-1},t_i]} f(x_1,\ldots,x_n)$$

Donc

$$\begin{aligned} S(g,D') &= \sum_{R'\in D'} \sup_{R'} g \cdot \mathrm{vol}(R') \leq \sum_{R'\in D'} \cdot \sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{i-1}) \cdot \sup_{[t_i,t_{i-1}]\times R'} f \cdot \mathrm{vol}(R') \\ &= \sum_{R\in D} \sup_{R} f \cdot \mathrm{vol}(R) \quad \text{où} \quad R = [t_{i-1},t_i]\times R' \\ &= S(f,D) \end{aligned}$$

Pareil pour (2).

$\square$

Exemples

1.
$$\int\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1}} xy\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 xy\,dx\right)dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y\,dy = \frac{1}{4}$$

2.
$$\begin{aligned} \int\limits_{x^2+y^2\leq 1} 1\,dxdy &= \int_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi \end{aligned}$$

6.4 Changement de variables

Intuition

$D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$, si on veut calculer $\displaystyle\int_D f(x,y)\ dx\,dy$ en plus d'une dimension: IMAGE, on peut utiliser : IMAGE

$$\int_D f(x,y)\ dx\,dy = \int\limits_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\ dr\,d\varphi$$

Théorème: Changement de base

Soit $P\subset\mathbb{R}^n$ un pavé $(\star)$, $P\subset U\subset\mathbb{R}^n$ est ouvert, $g:\ U\to\mathbb{R}^n$ une fonction C^1 qui est injective dans l'intérieur de P, et $f:\ g(P)\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\int_{g(P)} f = \int_P f\circ g\cdot|\det(dg)|$$

en coordonnées: $y=(y_1,\ldots,y_n),\ x=(x_1,\ldots,x_n)$ alors:

$$\int_{g(P)} f(y)\ dy_1\cdots dy_n = \int_P f\big(y(x)\big)\left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right|\ dx_1\cdots dx_n$$

$g: x\mapsto y(x)$, "$dy_1\cdots dy_n = \left|\det\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)\right|\ dx_1\cdots dx_n$"

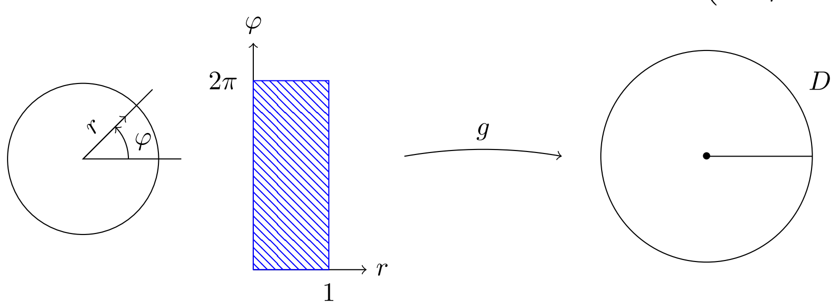
Notons qu'à la place de $(\star)$ un pavé, on peut utiliser n'importe quel sous-ensemble admissible (à définir plus tard).

Exemple - coordonnées polaires

Calculons $\displaystyle\int\limits_{D:=x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\ dx\,dy$:

$$g:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{pmatrix}\end{array} \qquad \text{Fonction}\quad C^1$$

On cherche un rectangle $P\subset\mathbb{R}^2$ tel que $g(P)=D$, $P=\begin{pmatrix} 0\leq r\leq 1\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\end{pmatrix}$



$g|_{\text{l'int de }P}$ est une application injective, la matrice de dg:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

det $= r$

$$\implies \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} \left((r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2\right) r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} r^3\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{2}$$

Exemple - volume du cône

Equation du cône: $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\int_D (1-r)\,dx\,dy = \int\limits_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} (1-r)r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1 (r-r^2)\,dr = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Terminologie

La fonction $\det(dg) = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ est le Jacobien (ou le déterminant Jacobien) du changement de variables.

Exemple - le volume de la boule B_R de rayon R

$$\left.\begin{array}{l} 0\le r\le R\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right\} P$$

$$\int_{B_R} 1\,dx\,dy\,dz = \int_P r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_0^R r^2\,dr\cdot\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = 2\pi\frac{R'3}{3}\cdot 2 = \frac{4\pi}{3}R^3$$

Exemple - Le centre de masse d'une demi-boule

$$\text{Pour } \left.\begin{array}{l} 0\le r\le R\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right\} P$$

$$\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le\mathbb{R}^2\\ z\ge 0}} z\,dx\,dy\,dz = \int_P r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_0^R r^3\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 2\pi\frac{R^4}{4}\frac{1}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Le centre de masse est: $\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi}{3}R^3} = \frac{3}{8}R$

6.4.1 L'intégrale de Gauss

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = I^2$$

Coordonnées polaires

$$\left.\begin{array}{l} 0\le r\le\infty\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right\} P$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_P e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr$$

Avec $s = r^2,\ ds = 2r\ dr$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{2}\ ds = \pi = I^2$$
$$\implies I = \sqrt{\pi}$$

Définition

Pour $s > 0$ (où pour $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0$), on pose:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx$$

Propriétés de Γ

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$

Volume d'une boule de dimension dans $\mathbb{R}^n$

Posons $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$, alors

$$\mathrm{vol}_n\, B_n(R) = \underbrace{\mathrm{vol}_n\, B_n(1)}_{=:V_n} \cdot R^n = V_n \cdot R^n$$

Pour $P := 0 \leq t \leq e^{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$:

$$\int_P 1\ dx_1 \cdots dx_n\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2}\ dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \cdots e^{-x_n^2}\ dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-x_1^2}\ dx_1 \cdots \int_{-\infty}^\infty e^{-x_n^2}\ dx_n = \pi^{n/2}$$

Si on décide d'intégrer par $x_1, \ldots, x_n$ cela donne:

$$\int_0^1 V_n \cdot r(t)^n\ dt = \int_0^\infty V_n r^n \cdot 2re^{-r^2}$$

grâce à la substituion: $t = e^{-r^2},\ dt = -2re^{-r^2}$

$$= 2V_n \int_0^\infty r^{n+1} e^{-r^2}\ dr$$

Puis en posant: $s = r^2,\ ds = 2r\ dr$

$$= V_n \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s}\ ds = V_n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \pi^{\frac{n}{2}}$$
$$\implies V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

Ce qui nous donne pour $n = 2k$

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$$

Et pour $n = 2k+1$

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2} + 1\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$
$$\implies V_{2k+1} = \frac{\pi^k \cdot 2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

Idée d'une preuve

Donnons une idée pour la preuve de la formule du changement de variables:

$$f:\ g(P) \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \int_{g(P)} f = \sum_i \int_{g(P_i)} f \approx \sum_i f\big(g(q_i)\big) \cdot \operatorname{vol}\big(g(P_i)\big)$$

<u>Fait:</u> Si $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, $C_n :=$ le cube $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, alors $\operatorname{vol}_n(T\,C_n) = |\det T|$. Autrement dit: Si T est une matrice $n \times n$, alors le volume du parallélépipède donné par les colones de T est $|\det T|$.

P_i petit $\implies$ g est "presque linéaire" sur P_i (g est C^1). On a donc $\operatorname{vol} g(P_i) \approx \operatorname{vol}(d_{q_i} g)(P_i) = |\det d_{q_i} g| \cdot \operatorname{vol} P_i$

$$\implies \int_{g(P)} \approx \sum_i f\big(g(q_i)\big) \cdot |\det(d_{q_i} g)| \cdot \operatorname{vol} P_i \approx \int_P f \circ g \cdot |\det d_g|$$

Pourquoi le "fait" est-il vrai ?:

Le volume <u>orienté</u> d'un parallélépipède doné par vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$: $\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_n)$ est linéaire pour chaque argument $(v_1, \ldots, v_n)$ et antisymétrique.

6.5 Propriétés élémentaires de l'intégrale

Pour montrer que toute fonction continue est intérable: continuité uniforme

Définition

Si X, Y sont des espaces métriques et $f: X \to Y$, alros f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in X \quad d_X(x, x') < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$$

uniforme car δ ne dépend pas de $x \in X$.

Théorème

Si X est compact, $f: X \to Y$ continue, alors f est uniformément continue.

Preuve: *(par contradiction)*
Supposons que f n'est pas uniformément continue, c'est à dire: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall n, \; \exists x_n, x'_n \in X$ tels que $d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ et $d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \geq \varepsilon$.

X est compact $\rightsquigarrow$ remplaçons la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ par une sous-suite convergente. On peut donc supposer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe. De $d_X(x_n, x'_n) < \dfrac{1}{n}$ on voit que: $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ f est continue $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x'_n\right)$.
Ce n'est pas possible car $d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \geq \varepsilon$.

$\lightning$

Théorème

Soient $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé, $f: P \to \mathbb{R}$ fonction continue, alors f est intégrable (c'est à dire $\displaystyle\int_P f$ existe)

Preuve:
P compact $\implies$ f est uniformément continue ($\forall \varepsilon \; \exists \delta \ldots$) Pour $\delta > 0$, doit D_δ une division de P qui est δ-finie: $\forall P_i \in D_\delta \; \forall x_1, x_2 \in P_i \quad \|x_1 - x_2\| < \delta$.
D_δ est δ-finie: $x, x' \in P_i \in D_\delta \implies \|x - x'\| \delta \implies \sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x) \leq \varepsilon$

$\square$

Théorème

Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé et si $f: P \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que:
$A := \{x \in P \mid f \text{ n'est pas continue en } x\}$ est négligeable. Alors $\displaystyle\int_P f$ existe.

Preuve:
Soit $\varepsilon > 0$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ pavés tels que $A \subset \bigcup\limits_i P_i$ et $\sum \operatorname{vol} P_i^0 \leq \varepsilon$.
Si $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, alors $P^0 := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit D une division de P telle que $\forall R \in D$, $\forall x, y \in R$, on a $\|x - y\| < \delta$, c'est à dire: D est δ-finie. De plus, on suppose $\forall R \in D$, soit $R \subset \bigcup\limits_i P_i$, soit $R \cap \bigcup P_1^0 = \varnothing$. $P \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i^0$ est fermé est bornée

$\implies f\,|_{P\setminus\bigcup P_i^0}$ est uniformément continue, et donc (si δ est bien choisi) on a $\forall R \in D$ tel que $R \subset P \setminus \bigcup_i P_i$: $\sup_R f - \inf_R f \leq \varepsilon$. On sait aussi que f est bornée, c'est à dire $|f(x)| \leq C\ \forall x \in P$.

$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{R\in D} \left(\sup_R f - \inf_R f\right) \cdot \operatorname{vol} R = (\star)$. Si $R \subset P \setminus \bigcup_i P_i^0$, alors (1):

$$\left(\sup_R f - \inf_R f\right) \cdot \operatorname{vol} R \leq \varepsilon \operatorname{vol} R$$

Si $R \subset \bigcup_i P_i$ (2):

$\sup_R f \leq C$, et aussi $\inf_R f \leq -C$

$$\implies \left(\sup_R f - \inf_R f\right) \operatorname{vol}(R) \leq 2C \cdot \operatorname{vol}(R)$$

et

$$(\star) \leq \underbrace{\varepsilon \operatorname{vol}(P)}_{(1)} + \underbrace{2C\varepsilon}_{(2)}$$

car $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol} P_i \leq \varepsilon$.

□

Proposition

Si $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est fermé et borné et si $f : S \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f:

$$\left\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^n \mid x \in S \right\}$$

est négligable.

Preuve:

S compact, f continue $\implies f$ est uniformément continue, c'est à dire: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tels que...
Soit $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé tel que $S \subset P$. Soit D une division δ-finie de P. Alors $\forall R \in D$ tel que $R \cup S \neq \varnothing$:

$$\sup_{R\cap S} f - \inf_{R\cap S} f \leq \varepsilon$$

Si $R_i \in D$ et si $R_i \cap S \neq \varnothing$, on pose:

$$P_i := R \times \left[\inf_R f, \sup_R f\right] \subset \mathbb{R}^n$$

Ensuite

$$\operatorname{vol} P_i = \operatorname{vol} R_i \cdot \left(\sup_R f - \inf_R f\right) \leq \operatorname{vol} R_i \cdot \varepsilon$$

On a $A \subset \bigcup_i P_i$

$$\sum_i \operatorname{vol} P_i \leq \sum_{R\in D} \operatorname{vol} R \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \operatorname{vol} P$$

Vu que ε est arbitraire, A est négligeable.

□

Rappel

- Si A, B sont négligeables alors $A \cup B$ est négligeable.

- A négligeable, $B \subset A \implies B$ négligeable.

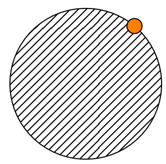
Quels sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}^n$ sont "convenable" pour l'intégration ? $\left(\int_A f\right)$

Définition

Si X est un espace métrique et si $A \subset X$, alors le bord de A est $\partial A := \{x \in X \mid \chi_A \text{ n'est pas continue en } x\}$ avec $\chi_A(x) \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

C'est à dire, $x \in \partial A$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$:

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \quad \text{et} \quad B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$$



$D \in \mathbb{R}^2$

Définition

Un sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^n$ est admissible si $\partial A \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable. Une fonction bornée $f : A \to \mathbb{R}$ est admissible si l'ensemble des discontinuités de f est négligeable.

Proposition

Si A est admissible et $f : A \to \mathbb{R}$ est admissible, alors $\displaystyle\int_A f$ existe.

Preuve:

Si P est un pavé tel que $A \subset P$, on pose (pour $x \in P$):$\tilde{(f)}(x) \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}$$

Les discontinuités de $\tilde{f} \subset$ les discontinuités de $f \cup \partial A$, les deux sont négligeables $\implies \displaystyle\int_P \tilde{f}$ existe.

$\square$

Proposition

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable et si $f : A \to \mathbb{R}$ est bornée, alors $\displaystyle\int_A f = 0$.

Preuve:

$\exists C$ tel que $C \geq f(x) \geq -C$, $\forall x \in A$

$$\begin{aligned}
&\implies \int_A C \geq \int_A f \geq \int_A (-C) = 0 \\
&= C \int_A 1 = 0 \\
&\implies \int_A f = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sont admissibles et si $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ est admissible, alros

$$\int\limits_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int\limits_{A \cap B} f$$

Preuve:
$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$, sur $A \cup B$: $f = f \cdot \chi_{A\cup B} = f \cdot (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) = f\chi_A + f\chi_B - f\chi_{A\cap B}$ qui sont trois fonctions admissibles.

$$\begin{aligned}
\implies \int\limits_{A\cup B} f &= \int\limits_{A\cup B} f \cdot \chi_A + \int\limits_{A\cup B} f \cdot \chi_B - \int\limits_{A\cup B} f \cdot \chi_{A\cap B} \\
&= \int_A f + \int_B f - \int\limits_{A\cap B} f
\end{aligned}$$

$\square$

6.6 Résumé de la partie 6

Comment calculer les intégrales:

- Intégrales itérées

- Changement de variables, en particulier les coordonnées polaires et coordonnées sphériques.
- L'intégrale de Gauss: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$