UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FACULTÉ DES SCIENCES

Cours donné par

Andréy Bytsko

Analyse réelle II

Table des matières

Introduction

Rappel

Soit U R^n un ouvert. Soit X $M(U)$ Soit $\omega = \alpha(x)dx_1 \wedge \quad \wedge dx_n$ 2 $^n(U)$

Définition

$$\int_X \omega = \int_X \alpha(x)dx_1 \wedge \quad \wedge dx_n$$

(Théorème 21)

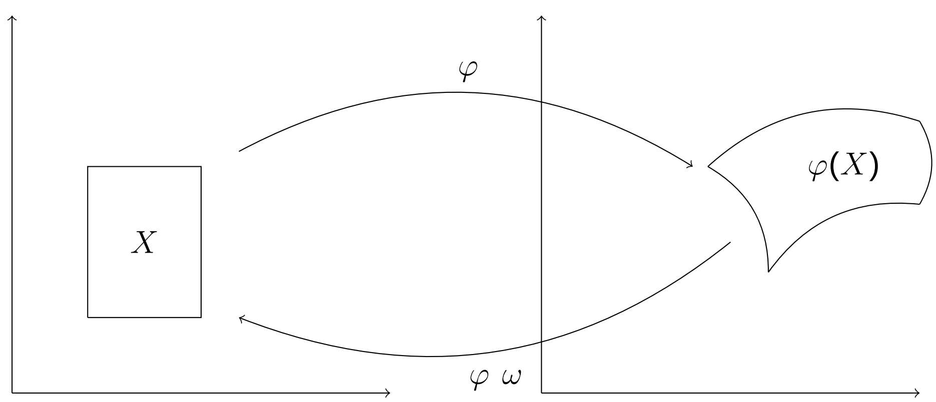
:

U, V R^n des ouverts, ω 2 $^n(U)$ $\varphi C^1(U,V)$ un difféormorphisme.

$$\int_X \varphi \ \omega = \varepsilon_{'} \int_{'(x)} \omega$$

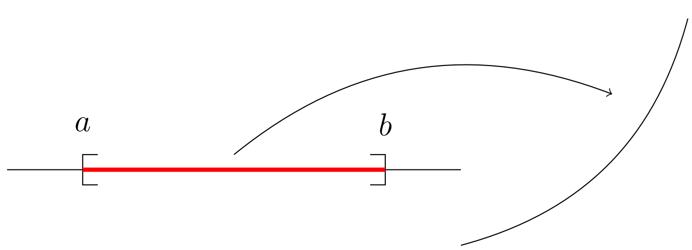
$\varepsilon_{'} = \mathrm{sign}\,(det(D\varphi)_x) = \quad 1$

R^p R^n, n p



Exemple

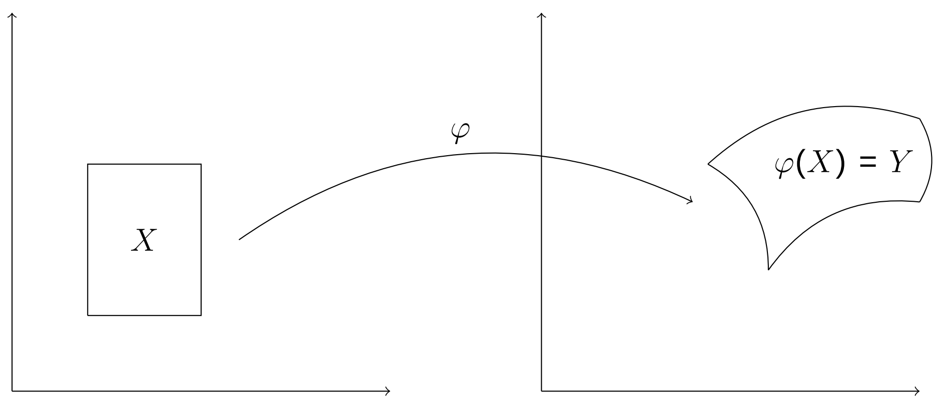
$p = 1$ et ω 2 $^1(U)$



$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est un paramétrage de la courbe

$p \geq 1$

$\mathbb{R}^p$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$, $n \geq p$



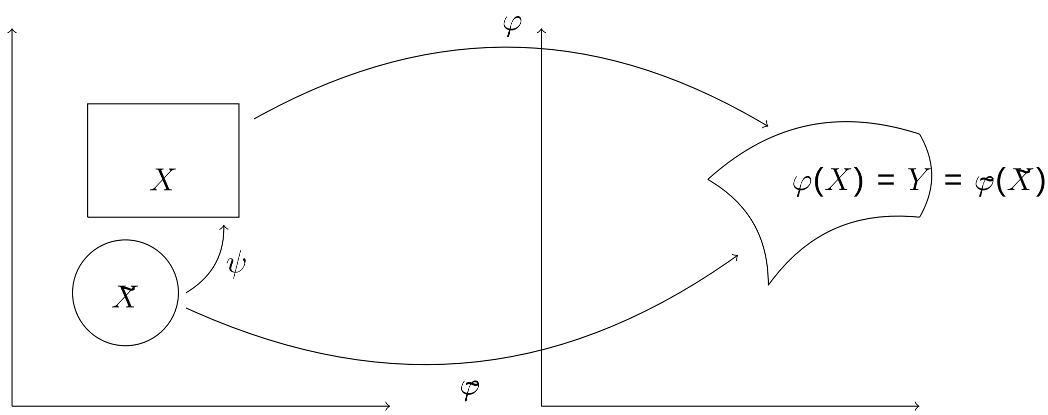
$\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ est un paramétrage du domaine $Y = \varphi(X) \subset \mathbb{R}^n$

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert. Soit $X \subset M(U)$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\varphi \in C^1(U, V)$. Soit $\omega \in \Omega^p(V)$ $\left(\int_{\varphi(X)} \omega = \int_X \varphi^* \omega\right)$

> **Thèorème 1.** *Soit $\tilde{X} \subset U$. Soit $\psi \in C^1(U)$ tel que $\tilde{X} = \psi(X)$. Posons $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \psi$*
>
> *Alors :*
>
> $$\int_{\varphi(X)} \omega = \varepsilon \int_{\tilde{\varphi}(\tilde{X})} \omega$$

$\mathbb{R}^p$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$, $n \geq p$



Démonstration

$$\int_{'(X)} \omega = \int_X \varphi \ \omega = \int_{(\tilde{X})} \varphi \ \omega$$

$$\overset{Th21}{=} \varepsilon \quad \int_X \psi \ (\varphi \ \omega) \overset{Th20}{=} \varepsilon \quad \int_X (\varphi \quad \psi) \ \omega \overset{det}{=} \varepsilon \quad \int_{\perp(\tilde{X})} \omega$$

Exemple

$U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2$

$X = [0,1] \quad [0,1]$

$\varphi(X) = (x_1 + x_2, x_1 \quad x_2, x_1^2, x_2^2)\ ;\ Y\varphi(X) \quad \mathbb{R}^n$

$\omega = \quad y_4 dy_1 \wedge dy_3 + y_3 dy_2 \wedge dy_4$

$$\varphi \ \omega = \quad x_2^2 d(x_1 + x_2) \wedge d(x_1^2) + x_1^2 d(x_1 \quad x_2) \wedge d(x_2^2)$$

$$= 2(x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2) dx_1 \wedge dx_2$$

$$\int_Y \omega = \int_X \varphi \ \omega = \int_{[0;1] \quad [0;1]} 2(x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2) dx_1 \wedge dx_2$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\int_0^1 (x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2) dx_2 \right) \wedge dx_1$$

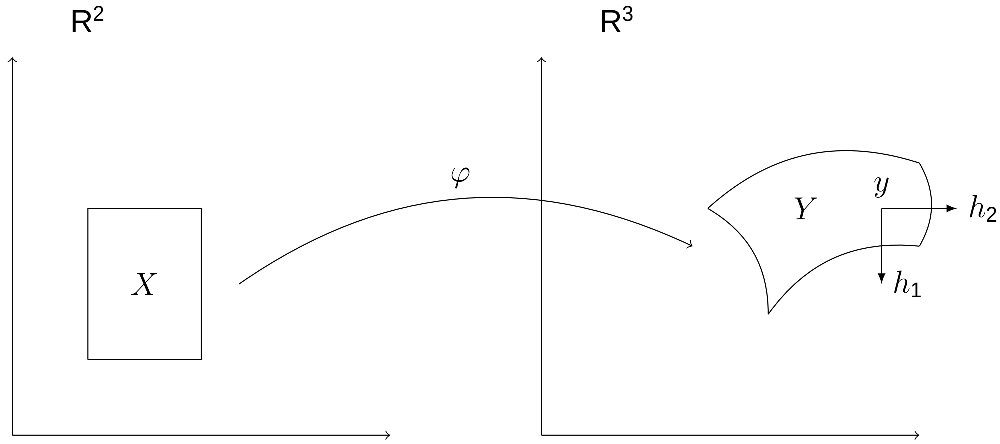
$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_1^2}{2} \right) dx_1 = 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3}$$

1 Chapitre I : Intégration des formes di�érentielles

1.1 Le flux d'un champ de vecteurs :

$U \quad \mathbb{R}^2, V \quad \mathbb{R}^3$. Soit v un champ de vecteurs.

$\omega_v = v_3 dy_1 \wedge dy_2 \quad v_2 dy_1 \wedge dy_3 + v_1 dy_2 \wedge dy_3$



$y \in Y, h_1, h_2 \in T_y Y$

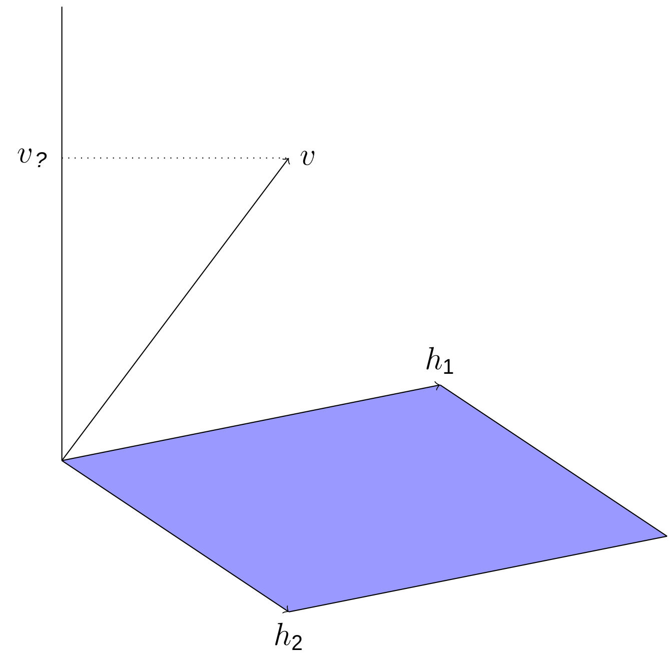
$$\omega_v^2(h_1, h_2) = v_3 \quad det \begin{pmatrix} (h_1)_1 & (h_2)_1 \\ (h_1)_2 & (h_2)_2 \end{pmatrix} - v_2 \quad det \begin{pmatrix} (h_1)_1 & (h_2)_1 \\ (h_1)_3 & (h_2)_3 \end{pmatrix} + v_3 \quad det \begin{pmatrix} (h_1)_2 & (h_2)_2 \\ (h_1)_3 & (h_2)_3 \end{pmatrix}$$

$$= (h_1 \wedge h_2)_3 - (h_1 \wedge h_2)_2 + (h_1 \wedge h_2)_1$$

$$= \langle v, h_1 \wedge h_2 \rangle$$

$$= \underbrace{\|v\| cos(v_1, h_1 \wedge h_2)}_{v_{perp}} \cdot \underbrace{\|h_1 \wedge h_2\|}_{\text{l'aire du paralléolgramme défini par les deux vecteurs} h_1 \text{ et } h_2}$$

$$= \text{ Le flux de } v \text{ à travers le parallélogramme}$$



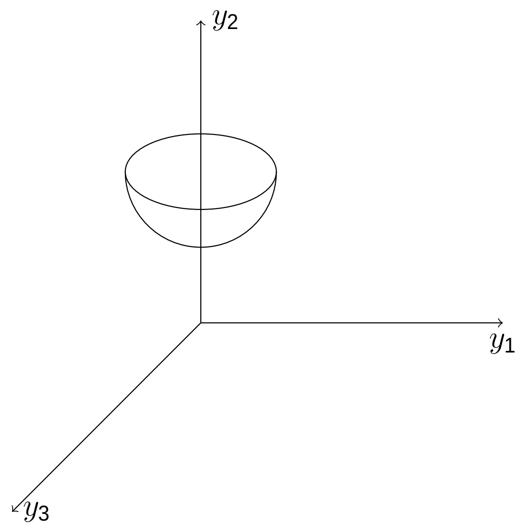
Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. $X \subset M(U)$. Soit $\varphi \in C^1(U, V)$. Soit v un champ de vecteurs sur V. Alors, le flux de v à travers la surface $\varphi = \varphi(X)$ est égal à $\int_{\varphi(X)} \omega_v^2$

Exemple

$U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}^3$

$Y = \{ y \in \mathbb{R}^3 \big| y_1^2 + y_2^2 = y_3, 0 \leq y_3 \leq 1 \}$



$v = (y_1, 0, 0)$, $\omega_v^2 = y_1 dy_2 \wedge dy_3$

$X = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, $\varphi(x) = (x_1 cos(x_2), x_1 sin(x_2), x_1^2)$

$$\varphi\ \omega_v^2 = x_1 cos(x_2)(sin(x_2)dx_1 + x_1 cos(x_2)dx_2) \wedge (2x_1 dx_1)$$

$$= \quad 2x_1^3 cos(x_2)^2 dx_1 \wedge dx_2 \ : \text{ le flux de } v$$

à travers Y :

$$\int_{'(X)} \omega_v^2 = \int_X \varphi\ \omega_v^2 = \quad 2\int_X x_1^3 cos(x_2)^2 dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \quad 2\left(\int_0^1 x_1^3 dx_1 \left(\int_0^2 \ cos(x_2)^2 dx_2\right)\right)$$

$$= \quad \frac{1}{2}\pi$$

1.2 Théorèmes intégraux. 1

Soit U $\quad \mathsf{R}^2$ un ouvert. Soit K $\quad U$ un compact à bord orienté.

Soit $\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ 2 $\quad ^1(U)$

$d\omega = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$

$$\int_{@K} \omega \overset{GR}{=} \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_K d\omega$$

Thèorème 2. *Soit U $\quad \mathsf{R}^2$ un ouvert. Soit K $\quad U$ un compact à bord orienté.*

a) Soit V $\quad \mathsf{R}^n$ un ouvert. Soit φ 2 $C^1(U;V)$. Soit ω 2 $\quad ^1(V)$. Alors $\int_{'(@K)} \omega = \int_{'(K)} d\omega$
C'est la formule de Green-Riemann généralisée.

b) La formule de Stockes-Ampère :

Soit V $\quad \mathsf{R}^3$ un ouvert. Soit φ 2 $C^1(U;V)$. Soit u un champ de vecteurs sur V de classe C^1. Alors le flux de $rot\, u$ à travers la surface $Y = \varphi(K)$ est égal à :

$$\int_{'(K)} \omega_{rot\, u} = \int_{'(@K)} \omega_u^1$$

avec $\omega_u^1 = u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3$

Preuve

a)

$$\int_{\varphi(K)} d\omega \overset{det}{=} \int_K \varphi\ (d\omega) \overset{Th20}{=} \int_K d(\varphi\ \omega) \overset{GR}{=} \int_{\partial K} \varphi\ \omega \overset{det}{=} \int_{\varphi(\partial K)} \omega$$

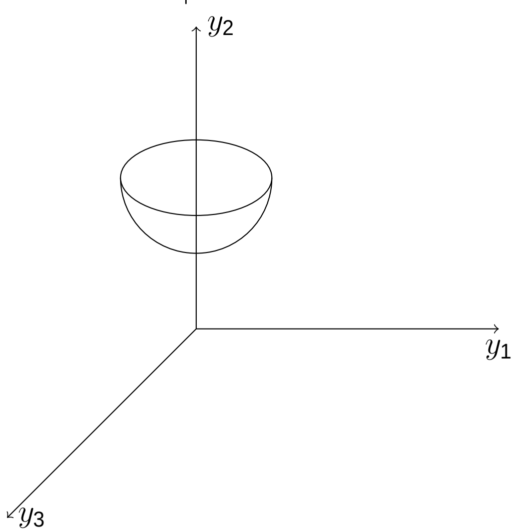
b) $\omega^2_{rot\,u} \overset{TH18}{=} d\omega^1_u$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\varphi(K)} \omega^2_{rot\,u} = \int_{\varphi(K)} d\omega^1_u$

$\overset{a)}{=} \displaystyle\int_{\varphi(\partial K)} \omega^1_u$

Exemple

$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 \big| y_1^2 + y_2^2 = y_3, 0 \quad y_3 \quad 1\}$



$v = (y_1, 0, \ \ y_3)$, $div\, v = 0 \Rightarrow \ \exists u$ tel que $rot\, u = v$

$u = (0, \ \ y_1 y_3, 0)$, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| x_1^2 + x_2^2 \quad 1\}$

$\varphi(x) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$, $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_Y \omega^2_v = \int_{\varphi(K)} \omega^2_{rot\,u} = \int_{\varphi(\partial K)} \omega^1_u = \int_{\partial K} \varphi\ \omega^1_u$

$\omega^1_u = \ \ y_1 y_3 dy_2$, $\varphi\ \omega^1_u = \ \ x_1(x_1^2 + x_2^2) dx_2$

$$= \int_0^{2} (cos\, t)^2 dt = \quad \frac{\pi}{2}$$

$\gamma = (cos\, t, sin\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma' = (\ \ sin\, t, cos\, t)$

Remarque

$V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\omega \in \Omega^1(V)$ une forme exacte.

Soit γ une courbe fermée.

Alors $\displaystyle\int \omega = 0$

> **Thèorème 3.** *Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit $S \subset V$ une sphère. Soit $\omega \in \Omega^2(V)$ une forme exacte.*
>
> $$\Longrightarrow \int_S \omega = 0$$

Soit $S = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$

Prenons $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2+x_2^2 \leq 1\}$ et $\varphi(X) = \left(2x_1\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, 2x_2\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, 1 - 2x_1^2 - 2x_2^2\right)$

Et donc :

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 4x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + 4x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + (1 - 2x_1^2 - 2x_2^2)^2$$

$$= 4(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + (\underbrace{1 - x_1^2 - x_2^2}_{a} - \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{b})^2 = 4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2 - 1$$

$$\int_S \omega = \int_{\varphi(K)} \omega = \left(\int_K \varphi^* \omega\right) = \int_{\varphi(K)} d\omega \overset{\text{Th 2}}{=} \int_{\varphi(X)} \varpi = 0$$

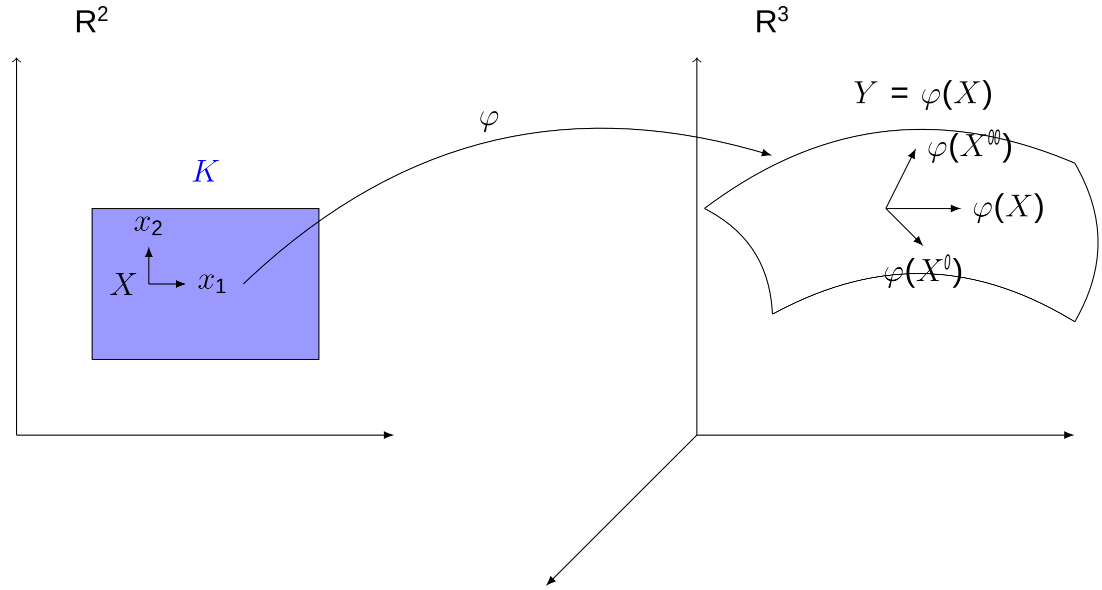
$\partial K = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, $\varphi(\partial X) = (0, 0, -1)$ un point.

1.3 Théorèmes intégraux 2

Remarque

$U \subset \mathbb{R}^2$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ des ouverts.

$K \subset U$ un compact et $\varphi \in C^1(U; V)$



$X = (x_1, x_2)$ 2 K, $\varphi(x + \varepsilon, x_2)$ $\quad \varphi(x_1, x_2) = \varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) + d(\varepsilon)$ 2 $T_{'(X)}Y$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)$ 2 $T_{'(X)}Y$

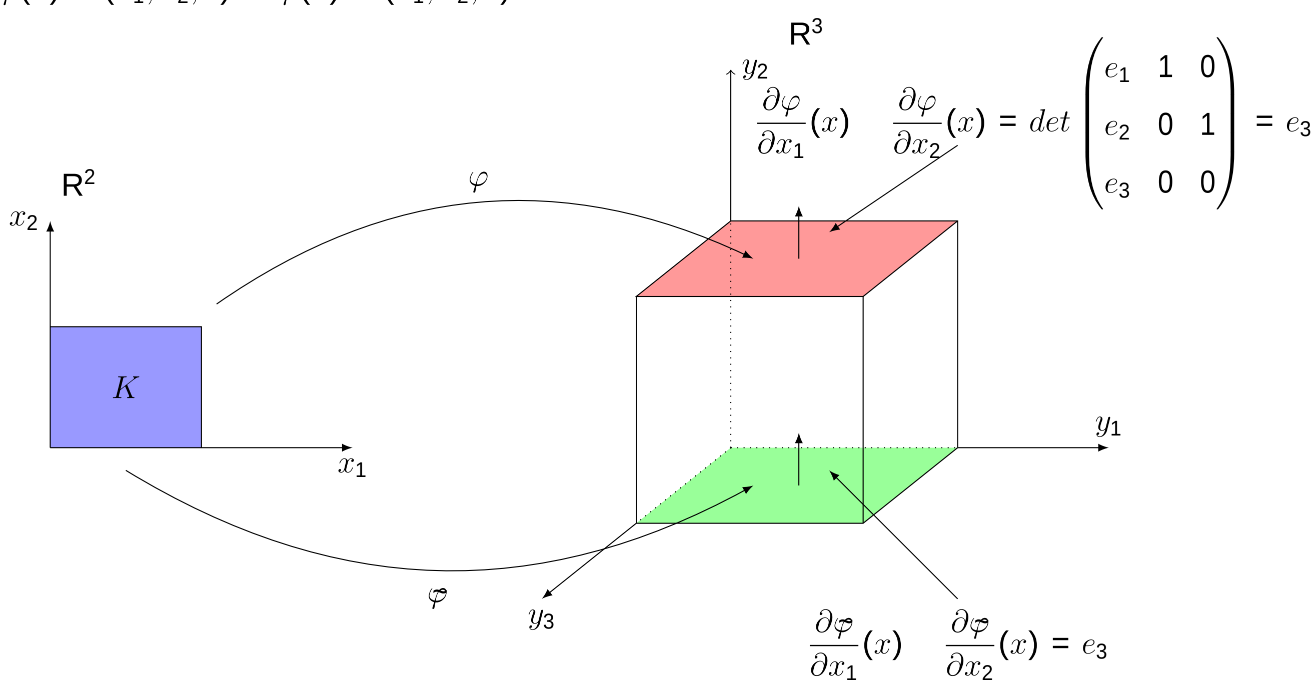
Le vecteur $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)$ est orthogonal à Y au point $\varphi(X)$

Exemple

$M = [0,1] \quad [0,1] \quad [0,1]$

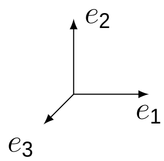
$K = [0,1] \quad [0,1]$

$\varphi(x) = (x_1, x_2, 1)$ et $\tilde{\varphi}(x) = (x_1, x_2, 0)$



Remarque

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$



Définition

Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert . Un compact $M \subset V$ est un compact à bords orientés si :

a) $\partial(M \setminus \partial M) = \partial M$

b) Il existe des ouverts $U_i \subset \mathbb{R}^2$, des compacts $K_i \subset M(U_i)$ et des applications $\varphi_i \in C^1(U_i; V)$ telles que : $\partial M = \bigcup_{i=1}^{m} Y_i$ où $Y_i = \varphi_i(K_i)$

c) $dim(Y_i \cap Y_j) < 2 \, \forall i \neq j$

d) Pour tout i, on a $\left\langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(x), n \right\rangle > 0$, où n est la normale à Y_i au point $\varphi_i(x)$ orientée vers l'intérieur.

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $M \subset V$ un compact à bord orienté.
Soit v un champ de vecteurs sur V. On pose $\int_{\partial M} \omega_v^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi_i(K_i)} \omega_v^2$

Thèorème 4. *Soient $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $M \subset V$ un compact à bord orienté :*

a) (Formule de Gauss-Ostrogradski) Soit v un champ de vecteurs sur V, alors le flux de v à travers ∂M est égal à :

$$\int_{\partial M} \omega_v^2 = \int_M (\text{div } v) dy_1 dy_2 dy_3$$

b) (Théorème de Stokes, le cas $n = 3$) Soit $\omega \in \Omega^2(V)$ de classe C^1, alors :

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega}$$

Remarque

Si $v = \text{rot } u$, alors $\text{div } v = 0$, donc $\int_{\partial M} \omega_v^2 = 0$

Remarque

Si $v = \text{grad } f$, alors $\text{div } v = \quad f \left(\text{div } v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) \right)$

donc, $\int_{\partial M} \omega_v^2 = \int_M \quad f \, dy_1 dy_2 dy_3$

Remarque

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Soit $\omega = \alpha y_2 dy_1 \wedge dy_2 \quad \beta y_2 dy_1 \wedge dy_3 + \gamma y_1 dy_2 \wedge dy_3$, alors :

$$d\omega = \alpha dy_3 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \quad \beta dy_2 \wedge dy_1 \wedge dy_3 + \gamma dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$$

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \omega = \int_M dy_1 dy_2 dy_3 = \int_M 1 \;\; dy_1 dy_2 dy_3 = \text{vol } (M)$$

Preuve

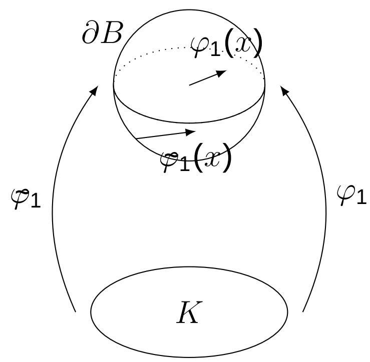
a) $M = B = \{ y \in \mathbb{R}^3 \big| y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad 1 \}$

$\varphi_1(x) = (x_1, x_2, \sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2})$, $\bar{\varphi}_1(x) = (x_1, x_2, \quad \sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2})$

$K = \{ x \in \mathbb{R}^2 \big| x_1^2 + x_2^2 \quad 1 \}$, $\partial B = \varphi_1(K) \cup \bar{\varphi}_i(K)$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_2}(x) = det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & \frac{x_1}{\sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2}} \end{pmatrix}$$

$$= e_1 \frac{x_1}{\sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2}} + e_2 \frac{x_2}{\sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2}} + e_3 = \frac{1}{\sqrt{1 \quad x_1^2 \quad x_2^2}} \varphi_1(x)$$



Soit v un champ de vecteurs sur V. $\omega_v^2 = \underbrace{v_3 dy_1 \wedge dy_2}_{\omega_1} - \underbrace{v_2 dy_1 \wedge dy_3}_{\omega_2} + \underbrace{v_1 dy_2 \wedge dy_3}_{\omega_3}$

$$\int_{\partial B} \omega_1 = \int_{\varphi_1(K)} \omega_1 - \int_{\tilde{\varphi}_1(K)} \omega_1 = \int_K \varphi_1^* \omega_1 - \int_K \tilde{\varphi}_1^* \omega_1$$

$$= \int_K v_3(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) dx_1 dx_2 - \int_K v_3(x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) dx_1 dx_2$$

$$= \int_K \left(\int_{-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}^{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \int_B \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3$$

$\varphi_2(x) = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_2)$, $\tilde{\varphi}_2(x) = (x_1, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_2)$, $\partial B = \varphi_2(K) \cup \tilde{\varphi}_2(K)$

$\varphi_3(x) = (\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2)$, $\tilde{\varphi}_3(x) = (-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2)$, $\partial B = \varphi_3(K) \cup \tilde{\varphi}_3(K)$

$$\int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} \omega_1 + \int_{\partial B} \omega_2 + \int_{\partial B} \omega_3 = \int_B \left(\underbrace{\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}}_{\text{div } v} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_B (\text{div } v) dx_1 dx_2 dx_3$$

b) $\omega \in \Omega^2(U) \Rightarrow \exists\, v$ un champ de vecteurs tel que $\omega = \omega_v^2$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega_v^2 \overset{a)}{=} \int_M (\text{div } v)\, dy_1 dy_2 dy_3 = \int_M (\text{div } v) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$$

$d\omega_v^2 \overset{(\cup)}{=} (\text{div } v) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$

$$\overset{(\cup)}{=} \int_M d\omega_v^2 = \int_M d\omega$$

Exemple

$V = \mathbb{R}^3$

$\omega_0 = y_3 dy_1 \wedge dy_2 - y_2 dy_1 \wedge dy_3 + y_1 dy_2 \wedge dy_3$

$d\omega_0 = 3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$

Considérons la fonction $f(y) = \dfrac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^3)^{3/2}}$

$df = -\dfrac{3}{2} \dfrac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^3)^{5/2}} (2y_1 dy_1 + 2y_2 dy_2 + 2y_3 dy_3)$

$$\omega = f\omega_0 \text{ et } d\omega = df \wedge \omega_0 + f \cdot d\omega_0$$

$$= -\frac{3}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^3)^{5/2}} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 + \frac{3}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^3)^{3/2}} dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 = 0$$

$\implies$ ω est fermée car $df = 0$. $\omega \in \Omega^2(V)$

$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ Prenons $B = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \middle| y_1^2 + y_2^2 + y_3^3 \leq 1 \right\}$

$$\int_{\partial B} \omega \underset{\omega|_{\partial B} = \omega_0}{=} \int_{\partial B} \omega_0 = \int_B d\omega_0 = 3 \cdot vol(B) = 4\pi$$

$\underset{\text{Th 3}}{\implies}$ ω n'est pas exacte. (V n'est pas étoilé)

2 Chapitre II : Le théorème du point fixe

2.1 Espaces de Banach

Définition

Soit $(V, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$

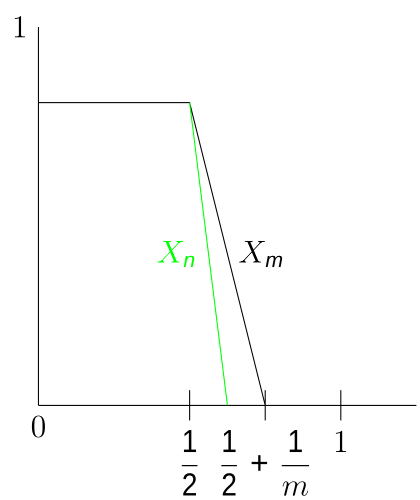
a) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est dite convergente s'il existe $x \in V$ tel que $\|x_n - x\| \underset{n \to \infty}{\to} 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon$ tel que $\|x_n - x\| < \varepsilon \; \forall n > N_\varepsilon$

b) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon$ tel que $\|x_n - x\| < \varepsilon \; \forall n, m > N_\varepsilon$

Exemple

$V = C[0,1]$ (toutes les fonctions continues de [0,1])

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - n\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$



a) $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |x(t)|$

Prenons $n = 2m$, $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}$

$\Rightarrow \quad X_{2m}(S) = 0$, $X_m(S) = 1 - m\left(\frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \|X_{2m} - X_m\|_\infty \geq \frac{1}{2} \underset{m \to \infty}{\not\to} 0$

b) $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$. Soit $n > m$

$$\|X_n - X_m\|_1 \leq \int_0^1 \underbrace{|x_n(t) - x_m(t)|}_{\neq \text{ sur } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} dt \leq \frac{1}{m} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ est de Cauchy

Définition

Un espace vectoriel normé $(V, \|\ \|)$ est un espace de Banach si toute suite de Cauchy est convergente.

Thèorème 5. *a) Tout espace vectoriel normé $(V, \|\ \|)$ sur $\mathbb{R}$ de dimension finie est Banach*

b) $C[0,1]$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$ est de Banach.

c) $C^1[0,1]$ muni de la norme $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ est de Banach

Remarque

$C[0,1]$ muni de la norme $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$ n'est pas de Banach. (On l'a montré dans l'exemple précédent)

$C^1[0,1]$ muni de la norme $\|x\| = \|x\|_\infty$ n'est pas de Banach.

Remarque

$x \in C[0,1] \Leftrightarrow x' \in C^1[0,1]$

Définition

Soit $(V, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $M \subset V$.

a) Soit $x \in V$. On pose $dist(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$

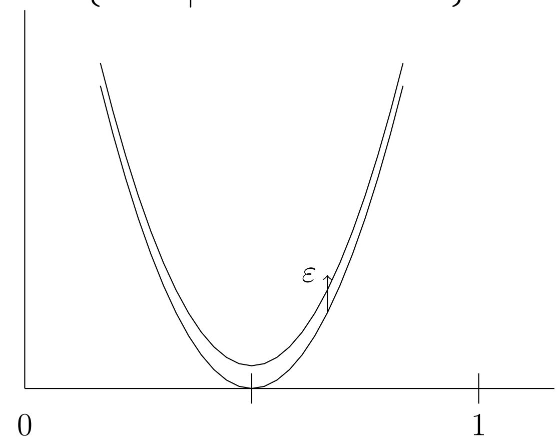
b) $\overline{M} = \left\{x \in V \middle| dist(x, M) = 0\right\}$ est la fermeture de M.

c) M est fermé si $\overline{M} = M$

Exemple

$V = C[0,1]$, $||x||_\infty$ $M = \left\{x \in V \middle| x(t) > 0 \,\forall t \in [0,1]\right\}$

$\overline{M} = \left\{x \in V \middle| x(t) \geq 0 \,\forall t \in [0,1]\right\}$



Lemme 1

Soit $(V, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé. Soit $M = \overline{B_x}(\delta) = \left\{y \in V \middle| ||x - y|| \leq \delta\right\}$, M est fermé.

Preuve

Soit $z \in \overline{M} \iff dist(z, M) = 0 \implies \forall n \,\exists x_n \in M$ tel que $||z - x_n|| < \dfrac{1}{n}$

$\implies ||z - x|| = ||z - x_n + x_n - x|| \leq \underbrace{||z - x_n||}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{||x_n - x||}_{} < \delta + \dfrac{1}{n}$

$\forall n \implies ||z - x|| \leq \delta \implies z \in M \implies M = \overline{M}$

Lemme 2

Soit $(V, ||\ ||)$ un espace de Banach. Soit $M \subset V$ un fermé.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ est de Cauchy, alors $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge dans M.

Preuve

V est de Banach $\implies \exists x \in V$ tel que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$dist(x, M) \leq ||x - x_n|| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ où $x_n \in M$

$\implies$ $dist(x, M) = 0$

$\implies$ $x \in \overline{M}$ $\implies$ $x \in M$ (car M est un fermé).

2.2 Applications lipschitziennes

Définition

Soient $(V, \|\cdot\|)$ et $(W, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit $M \subset V$. Soit $T : V \to W$ une application. (On note Tx l'image de $x \in V$ par T).

a) T est dite uniformément continue sur M si $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ tel que $\|Tx - Ty\|_W < \varepsilon$ pour tous $x, y \in M$ tel que $\|x - y\|_V < \delta$

b) T est dite lipschitzienne s'il existe une constante $L \geq 0$ tel que $\|Tx - Ty\|_W \leq L \|x - y\|_V$

c) T est dite contractante sur M si T est lipschitzienne avec $L < 1$

Lemme 3

Si T est lipschitzienne sur M, alors T est uniformément continue sur M.

Preuve

Fixons $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Prenons $x, y \in M$ tel que $\|x - y\|_V < \delta$ $\implies$ $\|Tx - Ty\|_W \leq L \|x - y\|_V < \delta < \varepsilon$

Exemple

$V = \mathbb{R}$, $M = [-1, 1]$. Soit $f(x) = x^{1/3}$

Supposons que f est lipschitzienne sur M.

Prenons $y = 0$, $\|f(x)\| = |f(x)| = |x|^{1/3} \leq L |x|$

Si $x \neq 0$ $\implies$ $1 \leq L |x|^{2/3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ $\implies$ L n'existe pas.

$\implies$ f n'est pas lipschitzienne sur M.

Thèorème 6. *Soient $V = \mathbb{R}^n$ et $W = \mathbb{R}^m$. Soit $U \subset V$ un ouvert. Soit $M \subset U$ un compact convexe. Soit $f \in C^1(U;W)$ Alors, f est lipschitzienne sur M.*

Preuve

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(U)$, $L_{ij} = \max\limits_{x \in M} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| < \infty$ (car M est compact)

Prenons $L = \max\limits_{i;j} L_{ij}$

Prenons $x, y \in M$. Posons $F_i(t) = f_i(x + t(y - x))$ $x(t) \in M \; \forall t \in [0,1]$ car M est convexe.

$$F_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t))(y_j - x_j) \implies |f_i(x) - f_i(y)| = |F_i(0) - F_i(1)|$$

$$\overset{\text{Théorème des accroissements finis}}{\underset{s \in [0;1]}{=}} |F_i'(x)|\,|1 - 0| \underset{(\ast)}{\le} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t))\right| |y_j - x_j| \le L \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|y_j - x_j|}_{\le \|x-y\|} \le n\,L\,\|x - y\|$$

$$\implies \|f(x) - f(y)\| = \sqrt{\sum \underbrace{(f_i(x) - f_i(y))^2}_{\le n\,L\|x-y\|}} \le \sqrt{m}\; n\; L\|x - y\|$$

$$\implies f \text{ est lipschitzienne sur } M$$

$V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$

$U \subset V$, $M \subset U$ un compact convexe.

$f \in C^1(U, W) \implies f$ est Lipschitzienne sur U.

$V = W = \mathbb{R}$, Soit $f \in C^1[a, b]$. Si $\max |f(t)| < 1 \implies \forall t \in [a, b]$, f est contractante sur $[a, b]$.

Soient $x, y \in [a, b]$, $|f(y) - f(x)| = |f'(z)|\,|y - x| \le C\,|y - x|$ Par le théorème des accroissements finis, $z \in [x, y]$

2.3 Théorème du point fixe

Thèorème 7. *Théorème du point fixe*

Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $M \subset V$ un fermé.

Soit $T : M \to M$ une application contractante (c'est à dire, $\forall x, y \in M$, on a $Tx, Ty \in M$ et $\|Tx - Ty\| \leq C\|x - y\|$ et $C < 1$)

a) Il existe un unique point $x_\infty \in M$ tel que $Tx_\infty = x_\infty$ (le point fixe de T sur M).

b) Pour tout $x_0 \in M$, la suite $\{x_m\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = Tx_{n-1}$ converge vers x_∞.

c) $\|x_\infty - x_n\| \leq \dfrac{c^n}{1-c}\|x_1 - x_0\|$

$\|x_\infty - x_n\| \leq \dfrac{c}{1-c}\|x_n - x_{n-1}\|$

Preuve

Prenons $x_0 \in M$, posons $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$ etc.

$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \leq C\|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq c^n\|x_1 - x_0\|$

Prenons $m > n$,

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_m - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \cdots \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1})\,\|x_1 - x_0\| = c^n(1 + c + \cdots + c^{m-n-1})\,\|x_1 - x_0\| = \frac{c^n(1 - c^{m-n})}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{c^n}{1-c}\,\|x_1 - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \{x_n\} \text{ est de Cauchy}$$

$V, \|\cdot\|$ est de Banach, $M \subset V$ est un fermé et $\{x_n\}$ est de Cauchy.

$\overset{\text{Lemme 2}}{\Rightarrow} \exists x_\infty \in M$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_\infty$

$Tx_\infty = T\left(\underset{n\to\infty}{dim}\, x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(Tx_n)$ parce que T est Lischiptzienne, donc T est continue.

$= \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty \Rightarrow x_\infty$ est un point fixe de T.

Unicité :

Soit $\tilde{x}_\infty \in M$ tel que $T\tilde{x}_\infty = \tilde{x}_\infty$. Alors :

$$\|\tilde{x}_\infty - x_\infty\| = \|T\tilde{x}_\infty - Tx_\infty\| \leq C\|\tilde{x}_\infty - x_\infty\| < \|\tilde{x}_\infty - x_\infty\|$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}_\infty - x_\infty\| = 0 \Rightarrow \tilde{x}_\infty = x_\infty$$

$$\|x_\infty - x_n\| = \|x_\infty - x_m + x_m - x_n\| \le \underbrace{\|x_\infty - x_m\|}_{m \to \infty \Rightarrow 0} + \|x_m - x_n\|$$

$$0 + \frac{C^n}{1-C}\|x_1 - x_0\| \Rightarrow \|x_\infty - x_n\| \le \frac{C^n}{1-C}\|x_1 - x_0\|$$

$$\|x_\infty - x_n\| = \|Tx_\infty - Tx_{n-1}\| \le C\|x_\infty - x_{n-1}\| = C\|x_\infty - x_n + x_n - x_{n-1}\|$$

$$\le C\|x_\infty - x_n\| + C\|x_n - x_{n-1}\| \Rightarrow \|x_\infty - x_n\| \le \frac{C}{1-C}\|x_n - x_{n-1}\|$$

Remarque

Ce théorème est vrai aussi pour un espace métrique complet (X, P)

Remarque

L'équation $Tx = x$ admet une solution unique x_∞. Les points $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sont les approximations successives de x_∞.

Exemple

$V = \mathbb{R}$, $x^3 + x = 1$, $M = [0,1]$

$x = f(x)$ où $x^3 + 4x - 3x = 1 \iff x = f(x) = \frac{1}{4}(1 + 3x - x^3)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) \le C = \frac{3}{4}$ si $x \in [0,1]$.

$f([0,1]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset [0,1]$

$x_0 = 1$, $x_1 = f(x_0) = \frac{3}{4} = 0.75$

$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{4} - \frac{27}{6^4}\right) = 0.707$

$x_\infty = 0.682$

Thèorème 8. *Théorème du point fixe généralisé*

Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $M \subset V$ un fermé. Soit $T : M \to M$ une application. Supposons qu'il existe un $p > 0$ tel que $T^p = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{p\ fois}$ soit contractante.

a) Il existe un unique point $x_\infty \in M$ tel que $Tx_\infty = x_\infty$ (le point fixe de T sur M).

b) Pour tout $x_0 \in M$, la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = Tx_{n-1}$ converge vers x_∞.

Preuve

Par le Théorème 7, $\exists x_\infty \in M$ tel que $T^p x_\infty = x_\infty$.

a) $\tilde{x}_\infty = Tx_\infty$, $T^p(x_\infty) = T^{p+1}x_\infty = T(T^p x_\infty) = Tx_\infty = \tilde{x}_\infty$

$\Rightarrow$ $\tilde{x}_\infty$ est un point fixe de T^p.

Unicité de x_∞ :

$\tilde{x}_\infty = x_\infty \iff Tx_\infty = x_\infty$, donc x_∞ est un point fixe de T.

Unicité pour T :

Si $x \in M$ tel que $Tx = x$, alors $T^p x = T(\cdots(Tx)) = x$

$\Rightarrow$ x est un point fixe de T^p $\Rightarrow$ $x = x_\infty$

b) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{s=0}^{p-1} \{x_{pk+s}\}_{k=1}^{\infty}$

$x_{pk+s} = (T^p)^k (T^s x_0) \xrightarrow[k \to \infty]{\text{Théorème 7}} x_\infty \ \forall s = 0, \dots, p-1$

x_0, $x_1 = Tx_0$, $\dots$, $x_{p-1} = T^{p-1}x_0$, donc $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_\infty$

Fixons $\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon^{(s)}$ tel que $\|x_{pk+s} - x_\infty\| < \varepsilon$ si $pk + s > N_\varepsilon^{(s)}$. Posons $N_\varepsilon = \max_s N_\varepsilon^{(s)}$, alors si $n = pk + s > N_\varepsilon$, on a $\|x_n - x_\infty\| < \varepsilon$

Exemple

$V = \mathbb{R}^2$, $Tx = Ax$ où $A = \begin{pmatrix} a & 2020 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

T n'est pas contractante.

$$Tx = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + 2020x_2 \\ bx_2 \end{pmatrix}$$

$T \circ T = T^2$, $T^2X = A^2x$ et $A^2 = \begin{pmatrix} a & 2020 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2020 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)2020 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

T^2 est contractante si $|a|, |b| << 1$

2.4 Équations intégrales de Fredholm

Définition

Soient $K \in C([a,b] \times [a,b])$, $z \in C([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $x(t) = z(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ est une équation intégrale de Fredholm.

Thèorème 9. *Si $|\lambda| \max_{t \in [a;b]} \int_a^b |K(t,s)|ds = C < 1$, alors l'équation de Fredholm admet une solution unique x_∞*

Remarque

Si $|\lambda| \, |b - a| \max_{s;t \in [a;b]} |K(t,s)| = C < 1$, alors l'équation de Fredholm admet une solution unique x_∞

Preuve

$V = C([a,b])$, $\|\cdot\|_\infty$ est de Banach par le théorème 5.

Définissons $T : V \to V$ par :

$$(Tx)(t) = z(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

$$\|Tx - Tx\|_\infty = \sup_{t \in [a;b]} \lambda \int_a^b K(t,s)(x(s) - y(s))ds$$

$$\leq \sup_{t \in [a;b]} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)| \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{\leq \|x - y\|_\infty} ds$$

$$\leq \left(|\lambda| \max_{t \in [a;b]} \int_a^b |K(t,s)|ds\right) \|x - y\|_\infty$$

$\Rightarrow \exists! x_\infty \in V$ tel que $Tx_\infty = x_\infty$.

x_∞ est une solution de l'équation de Fredholm.

Remarque

Donc, $x_0 \in C([a,b])$, $x_1(t) = z(t) + \lambda \int_a^b K(s,t)x_0(s)ds$

$x_2(t) = z(t) + \lambda \int_a^b K(s,t)x_1(s)ds$ etc.

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_\infty$ (pour $x_0 = z$)

Considérons l'équation de Fredholm :

$$x(t) = z(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

dans le cas particulier où $K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t)g_i(s)$ avec $f_i, g_i \in C[a,b]$. Dans ce cas, toutes les solutions de l'équation de Fredholm sont de la forme $x(t) = z(t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(t)$ où les α_i sont des constantes à déterminer. On obtient alors l'égalité :

$$z(t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(t) = z(t) + \lambda \sum_{i=1}^{m} f_i(t) \left(\int_a^b g_i(s)(z(s) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(s))ds \right)$$

Dans le cas où les fonctions f_i sont linéairement indépendantes, alors l'égalité du dessus est vraie si et seulement si les constantes α_i satisfont le système m équations linéaires :

$$\alpha_i = \lambda \left(\int_a^b g_i(s) \left(z(s) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(s) \right) ds \right) \quad i = 1, \ldots, m$$

Donc, dans le cas particulier de l'équation de Fredholm, le problème se ramène à résoudre un système d'équations linéaires.

Exemple

Considérons l'équation $x(t) = 1 + \int_0^1 tsx(s)ds$ On a $x(t) = 1 + \alpha t$. Donc $1 + \alpha t = 1 + \int_0^1 ts(1 + \alpha s)ds = 1 + t\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha\right)$ Et donc on a $\alpha = \frac{3}{4}$ et donc $x(t) = 1 + \frac{3}{4}t$

3 Chapitre III : Équations différentielles ordinaires

3.1 Équations différentielles ordinaires (EDO) : définitions

Dans ce qui va suivre, on va utiliser les notations suivantes : $J \subset \mathbb{R}$ est un ouvert et $y : x \in J \to y(x) \in \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^k, alors y' désigne la dérivée de y par rapport à x, y'' désigne la dérivée du deuxième ordre, ect.

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k$ un domaine et $f \in C(G;\mathbb{R}^n)$. Alors, $y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ est une EDO d'ordre k dans $\mathbb{R}^n$ sous forme normale.

Définition

Une EDO est dite autonome si f ne dépend pas explicitement de x.

Exemple

L'équation $y'' = y + y'$ où $y(x) \in \mathbb{R}^n$ est une EDO autonome d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^n$ sous forme normale. L'équation $xy'' = y + y'$, où $y(x) \in \mathbb{R}^n$ est une EDO d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^n$, non autonome et pas sous forme normale.

Remarque

Une EDO d'ordre k dans $\mathbb{R}^n$ est équivalente à une EDO d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^k$ (Par le changement suivant : $Y_1 = y, Y_2 = y', \ldots, Y_k = y^{(k-1)}$.)

Exemple

L'EDO $y'' = -y$ dans $\mathbb{R}$ est équivalente à l'EDO suivante dans $\mathbb{R}^2$:
$Y' = f(Y)$ où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est définie par $f(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. On dit que $\varphi \in C^k(I;\mathbb{R}^n)$ est une solution de l'EDO $y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ dans $\mathbb{R}^n$ si l'on a $\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)})$ pour tout

$x \in I\}$. On appelle courbe intégrale l'ensemble des points $\{(x,\varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in I\}$

Définition

Dans le cas où $f \in C(J \times G; \mathbb{R}^n)$ où J est un intervalle et $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\varphi(x) = 0$ est une solution globale (définie sur $I = \mathbb{R}$) tandis que $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ est définie soit sur $I = (-\infty, 0)$, soit sur $I = (0, \infty)$ et donc la solution n'est pas globale.

3.2 Le problème de Cauchy, le théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x_0, z) \in G$. Le problème de Cauchy-Lipschitz associé à l'EDO $y' = f(x,y)$ d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$ consiste à chercher une solution vérifiant la condition initiale $y(x_0) = z$ (c'est à dire on chercher une solution $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^n)$ telle que $x_0 \in I$ et $\varphi(x_0) = z$)

Exemple

La solution du problème de Cauchy $y' = y^2$, $y(0) = -1$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I = (-1, \infty)$

Thèorème 10. *Péano*

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$. Alors, pour tous $(x_0, z) \in G$, le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = z$ admet une solution.

(PAS DE PREUVE DANS LE COURS???)

Remarque

Le théorème de Péano ne garantit pas l'unicité de la solution du problème de Cauchy-Lipschitz. Par exemple, le problème de Cauchy-Lipschitz $y' = 3x\sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$ dans $\mathbb{R}$ admet les solutionis $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(x) = x^3$

Le problème de Cauchy est équivalent à la recherche des solutions d'une équation intégrale.

Lemme 4

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C(G;\mathbb{R}^n)$. Alors $\varphi \in C(I;\mathbb{R}^n)$ est une solution du problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = z$ si et seulement si φ vérifie l'équation intégrale suivante pour tout $x \in I$:

$$\varphi(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds$$

Preuve

a) Soit φ une solution du problème de Cauchy, alors on a $\varphi(x_0) = z$ et $\varphi'(s) = f(s,\varphi(s)) \, \forall s \in I$. Donc $\varphi(x) - z = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds$

b) Puisque $g(s) = f(s,\varphi(s))$ est continue sur I, on a $\left(\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds\right)' = \left(\int_{x_0}^{x} g(s)ds\right)' = g(x) = f(x,\varphi(x))$. Donc si φ est une solution de l'équation intégrale, alors φ est de classe C^1 et on a $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ De plus, $\varphi(x_0) = z + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds = z$

Définition

Soient $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un domaine. Une application $f \in C(M;\mathbb{R}^n)$ est dite L-lipschitzienne sur M par rapport à y s'il existe une constante $L \geq 0$ telle que :

$$||f(x,y_1) - f(x,y_2)|| \leq L \cdot ||y_1 - y_2||$$

pour tous $(x,y_1), x(y_2) \in M$

Thèorème 11. *Cauchy-Lipschitz Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C(G;\mathbb{R}^n)$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x_0,z) \in G$. Supposons qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que f soit L-lipschitzienne sur le domaine :*

$$M = \left\{(x,y) \in G \middle| |x - x_0| \leq a, ||y - z|| \leq b\right\}$$

> *Posons* $\alpha = min\left(a, \frac{b}{m}\right)$ *où* $m = \max_{(x,y)\in M} \|f(x,y)\|$*. Alors le problème de Cauchy* $y' = f(x,y)$*,* $y(x_0) = z$ *admet une unique solution sur l'intervalle* $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$*.*

Preuve

Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Posons $m = \max_{(x,y)\in M} \|f(x,y)\|$, $\alpha = min\left(a, \frac{b}{m}\right)$ et $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Considérons l'espace vectoriel $V = C(I;\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|\varphi(x)\|_\infty = \sup_{x\in I}\|\varphi(x)\|$. Alors $(V, \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach (c'est une généralisation du cas b) du Théorème 5).

Considérons la boule $\overline{B_z}(b) = \left\{\varphi \in V \middle| \|\varphi - z\|_\infty \leq b\right\} \subset V$

Par le Lemme 1, $\overline{B_z}(b)$ est un fermé.

Définissons l'application T sur V par $(T\varphi)(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds$.

Montrons que $T(\overline{B_z}(b)) \subset \overline{B_z}(b)$:

Prenons $\varphi \in \overline{B_z}(b)$, alors $(s,\varphi(s)) \in M \ \forall s \in I$ et on a :

$$\|(T\varphi)(x) - z\| = \left\|\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds\right\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \|\underbrace{f(s,\varphi(s))}_{\in M}\|ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} \max_{(x,y)\in M}\|f(x,y)\|ds\right| = m \cdot |x - x_0| \leq m\alpha \leq b$$

Donc $\|T\varphi - z\|_\infty \leq b \Rightarrow T(\overline{B_z}(b)) \subset \overline{B_z}(b)$

Montrons que T est L-lipschitzienne sur $\overline{B_z}(b)$:

Prenons $\varphi, \psi \in \overline{B_z}(b)$. Alors :

$$\|(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x} \left(f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\right) ds\right\|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} \|f\underbrace{(s,\varphi(s))}_{\in M} - f\underbrace{(s,\psi(s))}_{\in M}\|ds\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} L \cdot \|\varphi(s) - \psi(s)\|ds\right|$$

$$\leq L \cdot |x - x_0| \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \ (\ )$$

Donc $\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq L \cdot \alpha \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$

Lemme

Pour tout $p \geq 1$, on a $\|(T^p\varphi)(x) - (T^p\psi)(x)\| \leq \frac{1}{p!}L^p \cdot |x - x_0|^p \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$

Preuve

Pour $p = 1$, aller voir ( ). Puis, par récurrence sur p :

$$\|(T^{p+1}\varphi)(x) - (T^{p+1}\psi)(x)\| = \|T(T^{p}\varphi)(x) - T(T^{p}\psi)(x)\|$$

$$\left\|\int_{x_0}^{x} (f(s,(T^p\varphi)(s)) - f(s,(T^p\psi)(s)))\, ds\right\| \leq L \left|\int_{x_0}^{x} \|(T^p\varphi)(s) - (T^p\psi)(s)\| ds\right|$$

$$\overset{\text{Hypothèse de récurrence}}{\leq} L \left|\int_{x_0}^{x} \frac{L^p}{p!}|s - x_0|^p \|\varphi - \psi\|_\infty\, ds\right| = \frac{L^{p+1}}{(p+1)!}|x - x_0|^{p+1}\|\varphi - \psi\|_\infty$$

$$= \frac{L^{p+1}}{(p+1)!}|x - x_0|^{p+1} \|\varphi - \psi\|_\infty$$

Par conséquent, $\|T^p\varphi - T^p\psi\|_\infty \leq \frac{L^p}{p!}\alpha^p \|\varphi - \psi\|_\infty$.

Mais $\frac{L^p}{p!}\alpha^p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ Donc, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que T^p est contractante sur $\overline{B_z}(b)$. Donc, par le théorème 8, il existe un unique point fixe $\varphi_\infty \in \overline{B_z}(b)$ de T. Comme $\varphi_\infty = T\varphi_\infty \iff \varphi_\infty(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_\infty(s))ds \overset{\text{Lemme 4}}{\iff} \varphi_\infty$ est une solution du problème de Cauchy, on tire la conclusion que, sur $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = z$ admet une unique solution.

Remarque

Par le Théorème 6, si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ sont continuse sur M, alors f est L-lipschitziennes sur M par rapport à y.

Le théorème de Cauchy-Lipschtiz affirme que le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$:

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = z \tag{1}$$

admet une unique solution sur l'intervalle $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où $\alpha = min\left(a, \frac{b}{m}\right)$ avec $m = \underset{(x,y)\in M}{max}\|f(x,y)\|$ où $M = \left\{(x,y) \in G \middle| |x - x_0| \leq a, \|y - z\| \leq b\right\}$

En général, la valeur de m dépend de a et b. Donc, on peut chercher les valeurs optimales de a et b pour lesquelles α soit maximal.

Exemple

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$y' = x^2 + y^2,\ y(1) = 0 \tag{2}$$

Ici, on a $x_0 = 1$ et $z = 0$. Donc, $M = [1 - a, 1 + a] \times [-b, b]$. Puisque $f \in C^1(M)$, f est Lipschitzienne sur M (la constante de Lipschitz dépend de b). Il est évident que $m = \max\limits_{(x,y)\in M} |f(x,y)| = (1+a)^2 + b^2$. Donc, nous voudrions maximiser la valeur de $min\left(a, \dfrac{b}{(1+a)^2 + b^2}\right)$. Fixons a et considérons $g(b) = \dfrac{b}{(1+a)^2 + b^2}$. g atteint en $b_0 = 1 + a$ le maximum global, $g(b_0) = \dfrac{1}{2(1+a)}$. La fonction $min(a, g(b_0)) = min\left(a, \dfrac{1}{2(1+a)}\right)$ atteint son maximum a_0 vérifiant $a_0 = \dfrac{1}{2(1+a_0)}$ $\left(\text{voir les graphes des fonctions } a \text{ et } \dfrac{1}{2(1+a)}\right)$

Donc a_0 est racine positive de l'équation $2a(1+a) = 1$. On a $a_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0,37$. Donc le problème de Cauchy (2) admet une unique solution sur l'intervalle $I \supset [0,63; 1,37]$.

Thèorème 12. *La méthode des itérations de Picard*

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lispchitz, la série de fonctions $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $\varphi_0(x) = z$ et :

$$\varphi_{n+1}(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))ds$$

converge pour la norme $\|\,\|_\infty$ vers la solution du problème de Cauchy (1).

Preuve

Par le Lemme 4, le problème de Cauchy (1) est équivalent à l'équation $\varphi(x) = (T\varphi)(x)$, où $(T\varphi)(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))ds$. La preuve du théorème 11 montre qu'il existe $p \geq 1$ tel que T^p est contractante. Donc, par le théorème 8, la suite de fonctions $\{\varphi_n\}$, où $\varphi_n = T\varphi_{n-1}$, converge vers la solution φ_∞ de l'équation $\varphi(x) = (T\varphi)(x)$

Remarque

Les fonctions φ_n sont des solutions approchées du problème de Cauchy (1).

Exemple

Considérons encore le problème de Cauchy (2). On a $x_0 = 1$ et $z = 1$. En prenant $\varphi_0(x) = 0$, nous trouvons les deux premières solutions approchées :

$$\varphi_1(x) = \int_1^x f(s, \varphi_0(s))ds = \int_1^x (s^2 + \varphi_0(s)^2)ds = \int_1^x s^2 ds = \frac{1}{3}s^3\Big|_1^x = \frac{1}{3}(x^3 \quad 1)$$

$$\varphi_2(x) = \int_1^x f(s, \varphi_1(s))ds = \int_1^x (s^2 + \varphi_1(s)^2)ds = \int_1^x \left(s^2 + \frac{1}{9}(s^3 \quad 1)^2\right) ds$$

$$= \int_1^x \left(s^2 + \frac{1}{9}(s^6 \quad 2s^3 + 1)\right) ds = \frac{1}{63}x^7 \quad \frac{1}{18}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x \quad \frac{17}{42}$$

Exemple

Considérons l'EDO d'ordre 2 dans R suivante (l'équation d'Airy) :

$$y^{00} = xy \tag{3}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y^0(0) = 2$. Posons $Y_1 = y$ et $Y_2 = y^0$ et considérons le vecteur $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$. Alors nous avons le problème de Cauchy pour l'EDO d'ordre 1 dans R^2 équivalente à (3) suivante :

$$Y^0 := \begin{pmatrix} Y_1^0 \\ Y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_2 \\ xY_1 \end{pmatrix} := f(x, Y) \; Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ici, nous avons $x_0 = 0$ et $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La fonction de classe C^1 est donc Lipschitzienne sur un compact convexe. Donc, nous pouvons utiliser la méthode de Picard.

En prenant $\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, nous trouvons les solutions approchées :

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} (\varphi_0)_2(s) \\ s(\varphi_0)_1(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 2 \\ s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} (\varphi_1)_2(s) \\ s(\varphi_1)_1(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + 2 \\ 2s + 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}x^3 + 2x + 1 \\ \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

Donc, $(\varphi_0)_1(x) = 1$, $(\varphi_1)_1(x) = 2x + 1$ et $(\varphi_2)_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x + 1$ sont les trois premières solutions approchées de l'EDO (3) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

3.3 EDO à variables séparées

Définition

Une EDO à variables séparées dans $\mathbb{R}$ est une équation de la forme :

$$g(y)y' = f(x)$$

Thèorème 13. *Soient $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ des ouverts, $f \in C(J_1)$, $g \in C(J_2)$. Soit $z \in J_2$ tel que $g(z) \neq 0$. Alors, pour tout $x_0 \in J_1$, il existe un intervalle non vide $I \subset J_1$ contenant x_0 tel que l'EDO à variables séparées avec la condition initiale :*

$$g(y)y' = f(x) \quad y(x_0) = z \tag{1}$$

admet une unique solution φ sur l'intervalle I et l'on a pour tout $x \in I$:

$$\int_z^{\varphi(x)} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \tag{2}$$

Preuve

Supposons, sans pertes de généralités, que $g(z) > 0$. Soit $K \subset J_2$ l'intervalle maximal contenant z tel que $g(y) > 0$ pour tout $y \in K$. Posons $G = J_1 \times K$ et considérons sur G le problème de Cauchy suivant :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \; y(x_0) = z \tag{3}$$

Puisque $\frac{f}{g}$ est continue sur G, le théorème de Peano (Théorème 10) affirme que le problème (3) admet une unique solution $\varphi \in C^1(I)$ où $I \subset J_1$ est un intervalle contenant x_0 et tel que $(x, \varphi(x)) \in G$ pour tout $x \in I$. Puisque $g(\varphi(x)) > 0$ pour tout $x \in I$, il est clair que $\varphi(x)$ est aussi une solution de (2). Alors on a $g(\varphi(s))\varphi'(s) = f(s)$ pout tout $s \in I$. On obtient alors :

$$\int_z^{\varphi(x)} g(t)dt \overset{t=\varphi(s)}{=} \int_{x_0}^x g(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \int_{x_0}^x f(s)ds$$

Donc, φ vérifie la relation (2). On peut écrire cette relation sous la forme $G_z(\varphi(x)) = \int_{x_0}^x f(s)ds$, où $G_z(t) = \int_z^t g(\omega)d\omega$. G_z est monotone (croissante) sur K car $G_z'(t) = g(t) > 0$ si $t \in K$. Donc, pour tout $x \in I$, on a $\varphi(x) = G_z^{-1}\left(\int_{x_0}^x f(s)ds\right)$ où G_z^{-1} est l'application réciproque de G_z. La dernière relation implique l'unicité de φ sur I parce que φ est déterminée uniquement par f, g, z et x_0.

Remarque

Ni l'existence, ni l'unicité de la solution de problème (1) ne sont garanties si $g(z) = 0$. Par exemple, l'EDO $yy' = x$ avec $y(0) = 0$ admet les solutions $\varphi(x) = x$ et $\varphi(x) = -x$. tandis que l'EDO $yy' = -x$ avec $y(0) = 0$ n'admet pas de solution (si $\varphi(x)$ est une solution de cette EDO, alors $(\varphi(x)^2 + x^2)' = 0$, d'où, prenant en compte la condition initiale, on obtient $\varphi(x)^2 + x^2 = 0$.

Remarque

Soient G une primitive de g et F une primitive de f. Posons $W(x, y) = G(y) - F(x)$. Alors, la relation (2) est équivalente à l'équation $W(x, \varphi(x)) - W(x_0, z) = 0$ qui définit implicitement φ en fonction de x au voisinage du point (x_0, z). Donc, en général, la solution de (1) est donnée par une implicite.

Exemple

Considérons le problème :

$$(1 + 5y^4)y' = 2x \quad y(0) = 1$$

Alors on a $(t + t^5)\Big|_1^{\varphi(x)} = s^2\Big|_0^x \iff \varphi(x)^5 + \varphi(x) - x^2 - 2 = 0$

Remarque

L'EDO $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ peut être transformée, par un changement de variables, en une EDO à variables séparées. Posons $u = \frac{y}{x}$. Alors $f(u) = y' = (xu)' = u + xu'$, d'où $\frac{1}{f(u) \quad u}u' = \frac{1}{x}$.

Exemple

Considérons le problème de Cauchy dans R suivant :

$$y' = \frac{x+y}{x} \, y(2) = 3 \tag{4}$$

Ici, on a $f(u) = u + 1$ En posant $u = \frac{y}{x}$, nous obtenons un problème de Cauchy équivalent à (4) : $u' = \frac{1}{x}$, $u(2) = \frac{3}{2}$. Soit $\psi(x)$ la solution de ce problème. Alors, $t\Big|_{3=2}^{(x)} = ln(s)\Big|_{2}^{x} \;\; (\;) \;\; ln(x) + \frac{3}{2} \quad ln(2)$. Donc, la solution de (4) est $\varphi(x) = x\psi(x) = xln(x) + \left(\frac{3}{2} \quad ln(2)\right) x$

3.4 EDOs aux différentielles totales

Rappel

Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 \in \Omega^1(U)$ une $1-$forme sur U.

ω est fermée si $d\omega = 0 \left(\iff \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = 0 \right) \iff \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}$

ω est exacte s'il existe une fonction $F \in C^1(U)$ telle que $\omega = dF$, c'est à dire que $\omega = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2$. On dit que F est une primitive de ω.

Toute forme exacte de classe C^1 est fermée.

Lemme de Poincaré : si U est un domaine étoilé (par exemple, un ouvert convexe), alors toute $1-$forme fermée de classe C^1 est exacte.

Rappel

Si $\varphi \in C^k(I; \mathbb{R}^n)$ est une solution d'une équation différentielle dans $\mathbb{R}^n$, alors on appelle courbe intégrale l'ensemble des points $\left\{ (x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x \in I \right\}$

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f, g \in C(G)$. On dit que l'équation

$$g(x, y) y' = f(x, y) \tag{1}$$

est une EDO aux différentielles totales si la $1-$forme

$$\omega = f(x, y) dx - g(x, y) dy$$

est exacte sur G.

3.5 Remarque

Si f et g sont de classe C^1, alors la condition $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ est nécessaire (est suffisant si G est étoilé) pour que l'EDO (1) soit une EDO aux différentielles totales.

Remarque

Soient $x_0, z \in \mathbb{R}$ tels que $(x_0, z) \in G$ et $g(x_0, z) \neq 0$. Alors l'EDO (1) avec la condition initiale $y(x_0) = z$ est équivalente (localement, dans un voisinage du point (x_0, z)) au problème de Cauchy

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)},\ y(x_0) = z$$

Par conséquent (d'après le théorème de Peano), l'EDO (1) avec la condition intiale $y(x_0) = z$ telle que $g(x_0, z) \neq 0$ admet toujours une solution.

Remarque

L'EDO aux différentielles totales (1) est une généralisation de l'EDO à variables séparées $g(y)y' = f(x)$ $\left(\text{où } \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$.

Thèorème 14. *Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f, g \in C(G)$. Supposons que la forme $\omega = f(x,y)dx - g(x,y)dy$ soit exacte sur G. Soit $W \in C^1(G)$ la primitive de ω telle que $W(x_0, z) = 0$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant x_0 et $\varphi \in C^1(I)$ une solution de l'EDO aux différentielles totales avec la condition initiale :*

$$g(x,y)y' = f(x,y),\ y(x_0) = z \tag{2}$$

Alors, pour tout $x \in I$ on a

$$W(x, \varphi(x)) = 0 \tag{3}$$

Preuve

Puisque $dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y} = \omega$, nous avons $\frac{\partial W}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial W}{\partial y} = -g$. Considérons la fonction $H \in C^1(I)$ donnée par $H(x) = W(x, \varphi(x))$. On a $H'(X) = \frac{\partial W}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial W}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) - g(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$ car φ vérifie (2). Par conséquent, $H(x)$ est une constante sur I. Donc, $W(x, \varphi(x)) = H(x) = H(x_0) = W(x_0, \varphi(x_0)) = W(x_0, z) = 0$.

Remarque

Géométriquement, l'équation (3) implique que la courbe intégrale de la solution φ est une partie de la ligne de niveau de W passant pas la point (x_0, z).

Remarque

L'équation (3) définit en fonction de φ de x au voisinage de point (x_0, z). Donc, en général, la solution du problème (2) est donnée par une fonction implicite.

Exemple

Considérons l'EDO aux différentielles totales avec la condition intiale :

$$y(1 - x^2)y' = xy^2 + 1, \; y(0) = 1 \tag{4}$$

Ici, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\omega = (xy^2 + 1)dx - y(1 - x^2)dy$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x} = 2xy - 2xy = 0$.

Donc, ω est exacte. Trouvons sa primitive W. On a $\dfrac{\partial W}{\partial x} = f = xy^2 + 1$. Donc, $W(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + x + C(y)$. Puis, $\dfrac{\partial W}{\partial y} = x^2y + C'(y) = -g = -y + yx^2$. D'où $C(y) = -\dfrac{1}{2}y^2 + C$. Donc, $W(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + x - \dfrac{1}{2}y^2 + C$. Finalement, $W(x_0, z) = W(0, 1) = -\frac{1}{2} + C = 0$, d'où $C = \dfrac{1}{2}$. Donc, $W(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + x - \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}$. On a conclut que la solution de (4) vérifie l'équation $x^2(\varphi(x))^2 + 2x - (\varphi(x))^2 + 1$ et la condition $\varphi(0) = 1$. Donc, la problème (5) a pour solution $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{1 - x^2}}$ sur l'intervalle $I = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f, g \in C(G)$. On dit qu'une fonction non nulle $\mu \in C(G)$ est un facteur intégrant de l'équation

$$g(x, y)y' = f(x, y) \tag{5}$$

si l'équation

$$\mu(x, y)g(x, y)y' = \mu(x, y)f(x, y) \tag{6}$$

est une EDO aux différentielles totales, c'est à dire si la $1-$forme $\varpi = \mu\omega = \mu(x, y)f(x, y)dx - \mu(x, y)g(x, y)dy$ est exacte sur G.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant x_0 et $\varphi \in C^1(I)$ une solution de l'EDO (5) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = z$. Alors, φ est aussi une solution de l'EDO (6) vérifiant la même initiale. Donc, par le Théorème 14, on a :

$$W(x, \varphi(x)) = 0$$

pour tout $x \in I$. Ici, W est la primitive de la 1-forme ϖ telle que $W(x_0, z) = 0$.

Remarque

Soient $x_0, z \in \mathbb{R}$ tels que $(x_0, z) \in G$. $g(x_0, z) \neq 0$ et $\mu(x_0, z) \neq 0$. Alors, l'EDO (6) avec la condition initiale $y(x_0) = z$ est équivalente (localement, dans un voisinage du point (x_0, z) au problème de Cauchy

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)},\ y(x_0) = z$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' = \frac{y}{2(x + y^4)},\ y(0) = 1 \tag{7}$$

Au voisinage du point $(0, 1)$, le problème (7) est équivalent à l'EDO $g(x, y)y' = f(x, y)$, $y(0) = 1$, où $f = y$ et $g = 2(x+y^4)$. On a $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = 1+2 \neq 0$. Donc, cette équation n'est pas une EDO aux différentielles totales. Mais nous pousvons prendre $\mu(x, y) = \frac{1}{y^3}$. Alors, $\mu f = \frac{1}{y^2}$ et $\mu g = \frac{2x}{y^3} + 2y$. On a $\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu g)}{\partial x} = -\frac{2}{y^3} + \frac{2}{y^3} = 0$. Donc la 1-forme $\varpi = \frac{1}{y^2}dx - \left(\frac{2x}{y^3} + 2y\right) dy$ est exacte sur le demi-plan $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y > 0\right\}$. Sa primitive W vérifiant la condition $W(x_0, z) = 0$ est donnée par $W = \frac{x}{y^2} - y^2 + 1$. On conclut que la solution de (7) vérifie l'équation $\frac{x}{(\varphi(x))^2} - (\varphi(x))^2 + 1 = 0$ et la condition $\varphi(0) = 1$. Donc, le problème (7) a pour solution $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{4x + 1}}$ sur l'intervalle $I = \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

Remarque

Si $f, g \in C^1(G)$, alors on cherche $\mu \in C^1(G)$ tel que :

$$\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu g)}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial \mu}{\partial y}f + \frac{\partial \mu}{\partial x}g + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0$$

Si $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)/f$ ne dépend pas de x, alors on prend $\mu = \mu(y)$ et on cherche la solution de l'EDO à une variable $\dfrac{\mu'_y}{\mu} + \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)}{f} = 0$

Si $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)/g$ ne dépend pas de y, alors on prend $\mu = \mu(x)$ et on cherche la solution de l'EDO à une variable $\dfrac{\mu'_x}{\mu} + \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)}{g} = 0$

Dans le cas général, on peut essayer (sans garantie de succès) de choisir un facteur intégrant de la forme $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\mu = \mu(x \quad y)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$, etc.

3.6 EDOs linéaires d'ordre 1 dans $\mathbb{R}$

Définition

Une équation différentielle est dire linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction y et par rapport à ses dérivées y', y'', $\dots$.

Définition

Soient $J \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $f, g \in C(J)$. Alors les équation différentielles

$$y' = f(x)y \quad \text{et} \quad y' = f(x)y + h(x)$$

sont dites, respectivement, linéaire homogène et linéaire non-homogène.

Une EDO linéaire homogène est une EDO à variables séparées. Le problème de Cauchy

$$y' = f(x)y, \; y(x_0) = z$$

a pour solution $\int_z^{\varphi(x)} \frac{1}{t}dt = \ln|\varphi(x)| - \ln|z| = \int_{x_0}^{z} f(s)ds \; \Leftrightarrow \; \varphi(x) = ze^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$

Considérons le problème de Cauchy

$$y' = f(x)y + h(x), \; y(x_0) = z \tag{1}$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution de (1) sous le forme

$$\varphi(x) = z(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

où $z(x)$ est une fonction inconnue de classe C^1

On a $\varphi(x_0) = z(x_0)$ et $\varphi'(x) = z'(x)ze^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + f(x)\varphi(x)$. Donc, φ est une solution du problème (1) si et seulement si $z'(x) = h(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$ et $z(x_0) = z$. D'où :

$$z(x) = z + \int_{x_0}^{x} \left(h(t)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\right) dt, \; \varphi(x) = \left(z + \int_{x_0}^{x} \left(h(t)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\right) dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

Exemple

On considère le problème de Cauchy

$$y' = \frac{2y}{x} - 4x^3,\ y(1) = 3$$

La solution de l'EDO homogène avec la condition initiale $y(1) = z$:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} \implies \int_z^{\varphi(x)} \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{2}{s}ds \implies \ln|\varphi(x)| - \ln|z| = 2\ln|x| \implies \varphi(x) = zx^2$$

La solution de l'EDO non-homogène :

$$\varphi(x) = z(x)x^2 \implies \varphi'(x) = z'(x)x^2 + 2z(x)x = \frac{2\varphi(x)}{x} - 4x^3 = 2z(x)x - 4x^3$$

$$\implies z'(x) = -4x, z(1) = 3 \implies z(x) = 3 - 4\int_1^x t\,dt = 3 - 2t^2\Big|_1^x = 5 - 2x^2$$

Donc, $\varphi(x) = z(x)x^2 = 5x^2 - 2x^4$

Une équation de Bernouilli est une EDO de la forme

$$y' = f(x)y + h(x)y^r$$

où $r \in \mathbb{R}, r \notin \{0, 1\}$

Posons $u = y^{1-r}$. Alors, $u' = (1-r)y^{-r}y' = (1-r)y^{-r}(f(x)y + h(x)y^r) = (1-r)f(x)y^{1-r} + (1-r)h(x)$. Donc, l'équation de Bernouilli se ramène à l'EDO linéaire non homogène

$$u' = (1-r)f(x)u + (1-r)h(x)$$

Exemple

On considère le problème de Cauchy

$$y' = y - y^2,\ y(1) = 2$$

Ici, $r = 2$. Posons $u = y^{-1}$. Alors, $u' = -y^{-2}y' = -y^{-1} + 1$. Donc, on a le problème de Cauchy équivalent :

$$u' = -u + 1,\ u(1) = \frac{1}{2}$$

On a $\frac{1}{1-u}u' = 1 \Longrightarrow \int_{1/2}^{u(x)} \frac{1}{1-t}\,dt = \int_{1}^{x} 1\,ds \Longrightarrow -\ln|1-t|\Big|_{1/2}^{u(x)} = s\Big|_{1}^{x}$

$\Longrightarrow \ln|1-\frac{1}{2}| - \ln|1-u(x)| = x-1 \Longrightarrow u(x) = 1-\frac{1}{2}e^{1-x} \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{1-x}\right)}$

3.7 EDOs de la forme $y'' = f(x, y')$ dans $\mathbb{R}$

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f \in C(G)$. Considérons l'EDO 2 dans $\mathbb{R}$ avec les conditions initiales :

$$y'' = f(x, y'),\ y(x_0) = z_1,\ y'(x_0) = z_2 \tag{1}$$

Posons $u(x) = y'(x)$. Alors $y''(x) = u'(x)$. Donc si u est une solution du problème de Cauchy

$$u' = f(x, u),\ \ u(x_0) = z_2$$

alors $\varphi(x) = z_1 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} u(s)ds$ est une solution du problème (1).

3.8 EDO de la forme $y'' = f(y, y')$ dans $\mathbb{R}$

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un ouvert, $f \in C(G)$. Considérons l'EDO autonome d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$ avec les conditions initiales

$$y'' = f(y, y'),\ \ y(x_0) = z_1,\ y'(x_0) = z_2 \tag{2}$$

Cherchosn une fonction u de classe C^1 telle que $u(y(x)) = y'(x)$. Alors, on a $y''(x) = u'_y(y(x))y'(x) = u'_y(y(x))u(y(x))$ et $u(z_1) = u(y(x_0)) = y'(x_0) = z_2$. Donc (2) est équivalent à l'EDO d'ordre 1 avec la condition initiale :

$$uu'_y = f(y, u),\ \ u(z_1) = z_2 \tag{3}$$

où on considpre u comme une foncion de y. Après avoir trouvé une solution u de (3), il reste à résoudre le problème de Cauchy :

$$y'_x = u(y),\ \ y(x_0) = z_1$$

pour déterminer une solution de (2).

Exemple

Soit l'EDO avec les conditions initiales $yy'' = (y')^3,\ \ y(0) = 1, ,\ \ y'(0) = 2$

Cherchons une fonction u telle que $y' = u(y)$. Elle vérifie l'EDO

$$yuu'_y = u^3,\ u(1) = 2$$

D'où $\frac{1}{u^2}u' = \frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{t}\Big|_2^{u(y)} = ln(s)\Big|_1^y \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{u(y)} = ln(y) \Rightarrow u(y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - ln(y)\right)}$.

Donc $y'_x = u(y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - ln(y)\right)}, y(0) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - ln(y)\right) y' = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}t - tln(t)\right)\Big|_1^{\varphi(x)} = s\Big|_0^x \Rightarrow \varphi(x)(3 - 2ln(\varphi(x))) = 2x + 3, \varphi(0) = 1$

3.9 EDOs autonomes dans $\mathbb{R}^n$. Orbites, intégrales premières

Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $v \in X(U)$ un champ de vecterus sur U.

a) L'équation

$$y' = v(y) \tag{4}$$

où $y \in U$, est une EDO autonome dans $\mathbb{R}^n$ (le "vecteur vitesse" y' ne dépend pas explicitement du "temps" x).

b) Soit $\varphi \in C^1(I; U)$ une solution de (3). On appelle courbe intégrale l'ensemble des points $\left\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x \in I\right\}$. On appelle orbite l'ensemble des points $\left\{\varphi(x) \in \mathbb{R}^n \middle| x \in I\right\}$ dans l'espade de phase $U \subset \mathbb{R}^n$.

Exemple

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$ est une EDO autonome (linéaire) dans $\mathbb{R}^2$.

$\varphi(x) = (cos(x), sin(x)), x \in \mathbb{R}$ est une solution. L'orbite correspondante est un cercle.

Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $v \in X(U)$ un champ de vecteurs sur U. Un point $y_0 \in U$ est dit stationnaire (ou singulier ou d'équilibre) si $v(y_0) = 0$.

Remarque

Si y_0 est un point stationnaire de v, alors l'EDO (3) est une orbite $\left\{\varphi(x)\ 2\ \mathsf{R}^n \middle| x\ 2\ \mathsf{R}\right\}$ ne contenant pas de points stationnaires de v et telle qu'il existe un réel $T > 0$ (appelé période) vérifiant $\varphi(x + T) = \varphi(x)$ pour tout $x\ 2\ \mathsf{R}$.

Remarque

Toute orbite périodique est une courbe fermée simple.

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1^0 = \quad y_2 \\ y_2^0 = y_1 \end{cases}$. Alors $y = (0, 0)$ est le seul point stationnaire. Toutes les orbites non stationnaires sont périodiques (de période minimale $T = 2\pi$).

Il est parfois possible d'exclure l'existence d'orbites périodiques.

> **Thèorème 15.** *Soient $U \quad \mathsf{R}^n$ un ouvert et $v\ 2\ X(U)$ un champ de vecteurs sur U. Supposons qu'il existe une fonction $\mu\ 2\ C(U)$ qui ne s'annule pas sur U et telle que la 1 forme $\omega = \mu \sum_{i=1}^{n} v_i dy_i$ soit exacte sur U. Alors, l'EDO $y^0 = v(y)$ n'a pas d'orbites périodiques non stationnaires dans U.*

Preuve

Supposons sans perte de généralité que $\mu(y) > 0$ pour tout $y\ 2\ U$. Supposons par l'absurde que $\varphi\ 2\ C^1(\mathsf{R}; U)$ soit une solution non stationnaire de période T. Considérons son orbite donnée par la courbe paramétrée $\gamma(x) = (\varphi_1(x), \quad , (\varphi_n(x)), x\ 2\ [0, T]$. Puisque γ est une courbe fermée et la forme ω est exacte, on a $\int \omega = 0$. D'autre part, on a $\gamma^0(x) = (\varphi^0(x) = (\varphi_1^0(x), \quad , \varphi_n^0(x)) = (v_1(\varphi(x)), \quad , v_n(\varphi(x)))$. Donc $\int \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \mu(\gamma(x)) v_i(\gamma(x)) \gamma_i^0(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \mu(\varphi(x)) v_i(\varphi(x))^2 dx > 0$. CONTRADICITION.

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - (y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = 2y_2 + 3(y_1^2 + y_2^2) \end{cases}$. Le point $y = (0,0)$ est un point stationnaire. Donc, si une orbite est périodique, alors elle appartient au domaine $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Prenons $\mu = \dfrac{1}{(y_1^2 + y_2^2)}$. On a $\mu(y_1, y_2) > 0$ sur U et $\omega = \mu v_1 dy_1 + \mu v_2 dy_2 = \left(\dfrac{2y_1}{(y_1^2+y_2^2)} - 1\right) dy_1 + \left(\dfrac{2y_2}{(y_1^2+y_2^2)} + 3\right) dy_2 = d(ln(y_1^2 + y_2^2) - y_1 + 3y_2)$. Alors, ω est exacte sur U et donc l'EDO n'a pas d'orbites périodiques non stationnaires.

En dimension 2, on a aussi un autre critère de non-existence d'orbites périodiques. Rappelons qu'un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit simplement connexe si toute courbe fermé simple de U est homotope à un point. Par exemple, tout domaine étoilé de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe.

Thèorème 16. *Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert simplement connexe. Soit $v = (v_1, v_2)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. Supposons qu'il existe une fonction $\mu \in C^1(U)$ telle qu'on a :*

$$\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y_2} \neq 0$$

pour tout $y \in U$. Alors, l'EDO $y' = v(y)$ n'a pas d'orbites périodiques non stationnaires dans U.

Preuve

Supposons qu'il existe une fonction $\mu \in C^1(U)$ telle qu'on a $div(\mu v) := \dfrac{\partial(\mu v_1)}{\partial y_1} + \dfrac{\partial(\mu v_2)}{\partial y_2} \neq 0$. Puisque $div(\mu v)$ est une fonction continue, on peut supposer sans perte de généralité que $div(\mu v) > 0$ sur U. Considérons la 1-forme $\omega = \mu v_2 dy_1 - \mu v_1 dy_2$. On a $d\omega = \dfrac{\partial(\mu v_2)}{\partial y_2} dy_2 \wedge dy_1 - \dfrac{\partial(\mu v_1)}{\partial y_1} dy_1 \wedge dy_2 = div(\mu v) dy_1 \wedge dy_2$.

Supposons par l'absurde que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; U)$ soit une solution non stationnaire périodque de période T. Considérons son orbite donnée par courbe paramétrée $\gamma(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), x \in [0, T]$. γ étant une courbe fermée simple est le bord d'un domaine $D \subset U$. En utilisant le théorème de Green-Riemann, nous calculons :

$$\left|\int \omega\right| = \left|\int_{\partial D} \omega\right| = \left|\int_D div(\mu v) dy_1 \wedge dy_2\right| = \left|\int_D div(\mu v) dy_1 \wedge dy_2\right| > 0$$

D'autre part, on a $\gamma'(x) = (\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) = (v_1(\varphi(x)), v_2(\varphi(x)) = (v_1(\varphi(x)), v_2(\varphi(x)))$. Donc :

$$\int \omega = \int_0^T \mu(\varphi(x))v_2(\varphi(x))\gamma_1'(\varphi(x)) - \mu(\varphi(x))v_1(\varphi(x))\gamma_2'(\varphi(x))dx$$

$$= \int_0^T (\mu(\varphi(x))v_2(\varphi(x))v_1(\varphi(x)) - \mu(\varphi(x))v_1(\varphi(x))v_2(\varphi(x))) = 0$$

CONTRADICTION

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supposons que $a + d \neq 0$. Alors, on a $div(v) = \dfrac{\partial(\mu v_1)}{\partial y_1} + \dfrac{\partial(\mu v_2)}{\partial y_2} = a + d \neq 0$. Donc cette EDO n'a pas d'orbites périodiques non stationnaires dans $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $v \in X(U)$ un champ de vecteurs sur U. Une fonction non constante $F \in C^1(U)$ est dite intégrale première de l'EDO $y' = v(y)$ si F est constante sur chaque orbite (c'est à dire si $\varphi \in C^1(I; U)$ est une solution, alors $F(\varphi(x)) = F(\varphi(s))$ pour tous $x, s \in I$).

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = y_2 - y_3 \\ y_2' = y_3 - y_1 \\ y_3' = y_1 - y_2 \end{cases}$. On a $y_1' + y_2' + y_3' = 0$. Donc, $F_1 = y_1 + y_2 + y_3$ est une intégrale première. On a aussi $y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3' = 0$. Donc $F_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^3$ est une intégrale première de l'EDO $y' = v(y)$.

Lemme 5

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $v \in X(U)$ un champ de vecteurs sur U. Une fonction non constante $F \in C^1(U)$ telle que $\langle grad(F(y)), v(y)\rangle = 0$ pour tout $y \in U$ est une intégrale première de l'EDO $y' = v(y)$.

Preuve

Soit $\varphi \in C^1(I;U)$ une solution. On a $F(\varphi(x))' = F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}(\varphi(x))\varphi_i'(x) = \langle grad(F(\varphi(x))), v(\varphi(x))\rangle = 0$.

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$. Posons $F(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. On a $grad(F) = (2y_1, 2y_2)$. Alors $\langle grad(F(y)), v(y)\rangle = -2y_1y_2 + 2y_2y_1 = 0$. Donc F est une intégrale première.

Thèorème 17. *Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $v = (v_1, v_2)$ un champ de vecteurs sur U. Supposons qu'il existe une fonction non nulle $\mu \in C(U)$ telle que la 1-forme $\omega = \mu v_2 dy_1 - \mu v_1 dy_2$ soit exacte sur U. Alors, la primitive F de la forme ω est une intégrale première de l'EDO $y' = v(y)$.*

Preuve

On a $dF = \frac{\partial F}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2}dy_2$

Si $dF = \omega$, alors $grad(F) = (\mu v_2, -\mu v_1)$ et donc $\langle grad(F(y)), v(y)\rangle = 0$. Le Lemme 5 implique que F est une intégrale première.

En dimension 2, on a critère d'existence d'orbites périodiques.

Thèorème 18. *Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $v \in X(U)$ un champ de vecteurs sur U. Soit $F \in C^1(U)$ une intégrale première de l'EDO $y' = v(y)$. Si, pour un certain $c \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau $O_c = \left\{y \in U \middle| F(y) = c\right\}$ est une courbe compacte fermée simple de longueur finie ne contenant pas de points stationnaires de v, alors O_c est une orbite périodique.*

Preuve

Puisque O_c ne contient pas de points stationnaires, on y $\|v(y)\| > 0$ pour tout $y \in O_c$. Puisque O_c est compacte et $\|v\|$ est une fonction continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|v(y)\| \geq \alpha$ pour tout $y \in O_c$. Considérons une solution $\varphi(x)$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) \in O_c$. Alors, on a $\varphi(x) \in O_c$ pour tout $x > 0$ car $F(\varphi(x)) = F(\varphi(0))$. Donc, $\varphi(x)$ se déplace le long de O_c à la vitesse $\|v(\varphi(x))\| \geq \alpha$. COmme la longueur L de la courbe O_c est finie, il existe $T \leq \dfrac{L}{\alpha}$ tel que $\varphi(x+T) = \varphi(x)$.

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 + ay_1^3 \end{cases}$, où $a \geq 0$. $F = \frac{1}{2}ay_1^4 + y_1^2 + y_2^2$ est une intégrale première. Pour tout $c > 0$, la courbe $O_c = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \middle| F(y_1, y_2) = c \right\}$ est compacte et homéomorphe à un cercle. Donc, O_c pour $c > 0$ est une orbite périodique.

Remarque

Les intégrales premières de l'EDO $y' = v(y)$ forment un espace vectoriel. En outre, si F est une intégrale première et $g \in C^1(\mathbb{R})$, alors $g(f)$ est aussi une intégrale première.

Définition

Les intégrales premières $F_1, \dots, F_k \in C^1(U)$ sont dites fonctionnellement indépendantes si $grad(F_1(y)), \cdots, grad(F_k(y))$ sont liéairement indépendants pour tout $y \in U$.

Remarque

La connaissance de k intégrales premières indépendantes de l'EDO $y' = v(y)$ dans $\mathbb{R}^n$ permet de ramener le problème à une EDO dans $\mathbb{R}^{n-k}$.

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_1^3 \end{cases}$ avec les conditions initiales $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1$. L'intégrale première $F(y) = y_1^4 + y_1^2 + y_2^2$ vaut $F(y(x_0)) = 3$ sur l'orbite passant par le point $(1, -1)$, dons on a $y_2 = -\sqrt{3 - y_1^4 - y_1^2}$. Ainsi, si $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ est une solution de l'EDO, alors $\varphi_1(x)$ est une solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$, $y_1' = \sqrt{3 - y_1^4 - y_1^2}$, $y_1(0) = 1$ et $\varphi_2(x)$ est donnée par $\varphi_2(x) = -\varphi(x)'$

3.10 EDO linéaires d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$

On note par $Mat(n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles de taille n.

Définition

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$ et $h \in C(I; \mathbb{R}^n)$.

Alors les équations différentielles $y' = A(y)y$ et $y' = A(x)y + h(x)$ sont dites, respectivement, linéaire homogène et linéaire non homogène.

Exemple

Soit $I = (0, \infty)$. $\begin{cases} y_1' = -xy_2 + \dfrac{1}{x} \\ y_2' = \dfrac{1}{x}y_1 + x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x \end{pmatrix}$

Thèorème 19. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$ et $h \in C(I; \mathbb{R}^n)$. Alors, pour tous $x_0 \in I$, $z \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*

$$y' = A(x)y + h(x), \; y(x_0) = z$$

admet une solution unique $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Remarque

Ainsi, toute solution d'une EDO linéaire dans $\mathbb{R}^n$ est globale.

Définition

soit l'espace $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $||\cdot||$. On définit la norme opérateur sur $Mat(n, \mathbb{R})$ par $||B|| = \max\limits_{||y||=1} ||By||$ pour $B \in Mat(n, \mathbb{R})$

Preuve du théorème 19

Soit un segment $[\alpha, \beta] \subset I$ contenant x_0. Considérons l'espace vectoriel $V = C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $||y||_\infty = \sup\limits_{x \in [\alpha, \beta]} ||y(x)||$. Alors $(V, ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach. Définissons l'application $T : V \to V$ par $(T\phi)(x) = z + \int_{x_0}^{x} (A(s)\phi(s) + h(s))ds$. Si $\phi, \psi \in V$, alors :

$$\|(T\phi)(x) - (T\psi)(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x} A(s)(\phi(s) - \psi(s))ds\right\| \le \left|\int_{x_0}^{x} \|\underbrace{A(s)(\phi(s) - \psi(s))}_{\le \|A(s)\|\,\|\underbrace{\phi(s) - \psi(s)}_{\le \|\phi-\psi\|_\infty}\|}\| ds\right|$$

$$\le \|\phi - \psi\|_\infty \left|\int_{x_0}^{x} \|A(s)\|ds\right| \le L|x - x_0|\,\|\phi - \psi\|_\infty$$

où $L = \max_{s\in[\alpha;\beta]} \|A(s)\|$. Donc $\|T\phi - T\psi\|_\infty \le L|\beta - \alpha|\,\|\phi - \psi\|_\infty$. Alots (comme dans la preuve du théorème 11), il existe $p \ge 1$ tel que T^p est contractante sur V.

Donc par le théorème 8, il existe un unique point fixe ψ_∞ de T. Mais $T\phi_\infty = \phi_\infty \iff \phi_\infty(x) = z + \int_{x_0}^{x}(A(s)\phi_\infty(s) + h(s))ds$. Donc, par le Lemme 4, le problème de Cauchy $y' = A(x)y + h(x)$ admet une unique solution ϕ_∞ sur $[\alpha, \beta]$. En prenant α, β arbitrairement proche des bornes de l'intervalle I, on conclut qu'il existe bien une unique solution sur I.

3.11 EDO linéaires homogènres d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$. On considère l'EDO dans $\mathbb{R}^n$:

$$y' = A(x)y \tag{5}$$

Lemme

Soit $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ une solution de (1) non identiquement nulle sur I. Alors $\phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Preuve

Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ telq ue $\phi(x_0) = 0$. Alors, l'application ϕ vérifie l'EDO (1) et la condition initiale $\phi(x_0) = 0$. Mais l'application $\psi = 0$ vérifie également l'EDO (1) et la même condition initiale $\psi(x_0) = 0$. Grâce à l'unicité de la solution du problème de Cauchy (Théorème 19), on a donc $\phi = \psi$. CONTRADICTION.

Lemme 7 (principe de superposition)

Si $\phi_1, \quad, \phi_k \in C(I;\mathbb{R}^n)$ sont des solutions de l'EDO (1) et $c_1, \quad, c_k \in \mathbb{R}$ des constantes, alors $\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i\phi_i$ est aussi une solution de l'EDO (1)

Preuve

$$\phi'(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\phi_i'(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i A(x)\phi_i(x) = A(x)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\phi_i(x)\right) = A(x)\phi(x)$$

Définition

On dit que les applications $\phi_1, \quad, \phi_k \in C(I;\mathbb{R}^n)$ sont linéairement dépendantes sur I s'il existe des constantes $c_1, \quad, c_k$ (non toutes nulles) telles que $\sum_{i=1}^{k} c_i\phi_i(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Thèorème 20. *L'ensemble des solutions de l'EDO (1) est un espace vectoriel de dimension n.*

Preuve du théorème 20

Fixons $x_0 \in I$. Soient $z_1, \quad, z_n$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors, par le Théorème 19 en prenant $h = 0$, il existe les applications $\phi_1, \quad, \phi_n \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ qui vérifient l'EDO (1) et les conditions initiales $\phi_i(x_0) = z_i$. Montrons que $\phi_1, \quad, \phi_n$ sont linéairement indépendantes. Suppsons qu'il existe des constantes $c_1, \quad, c_n$ telles que $\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors, pour $x = x_0$, on a $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i = 0$. CONTRADICTION.

Montrons que $\phi_1, \quad, \phi_n$ forment une base de l'espace des solutions de l'EDO (1). Soit ϕ une solution de (1). Alors, il existe des constantes $c_1, \quad, c_n$ telles que $\phi(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$. Considérons l'application $\psi = \phi \quad \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i$. D'après le principe de superposition, ψ vérifie l'EDO (1). Mais $\psi(x_0) = \phi(x_0) \quad \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x_0) = 0$. Donc, par le Lemme 6, on a $\psi = 0$ et par conséquent $\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i$

3.12 Définition

Soit $I \quad \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Le wronskien des applications $\phi_1, \quad, \phi_n \in C(I\mathbb{R}^n)$ est défini par $W(x) = det(\phi_1(x)| \quad |phi_n(x))$

Lemme 8

Si le wronskien $W(x)$ ne s'annule pas identiquement sur I, alors $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont linéairement indépendantes sur I.

Preuve du Lemme 8

Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont linéairement dépendantes, alors il existe des constantes $c_1, \ldots, c_n$ non toutes nulles telles que $\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) = 0$ pour tout $x \in I$ et donc les vecteurs $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ sont liés en tout $x \in I$. Donc $W(x) \equiv 0$.

Remarque

En général, l'affirmation réciproque n'est pas vraie. Par exemple, $\phi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\phi_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendates mais $det(\phi_1(x)|\phi_2(x)) = 0 \; \forall x$

Thèorème 21. *Soient $\phi_1, \ldots, \phi_n \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ des solutions de l'EDO (1). Alors, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien $W(x)$ ne s'annule pas pour tout $x \in I$.*

Preuve du Théorème 21

[$\Leftarrow$] Si $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors par le Lemme 8, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont linéairement indépendantes.

[$\Rightarrow$] Soient $\phi_1, \ldots, \phi_n$ linéairement indépendantes. Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $W(x_0) = 0$. Alors, les vecteurs $\phi_1(x_0), \ldots, \phi_n(x_0)$ sont liés. Donc, il existe des constantes $c_1, \ldots, c_n$ non toutes nulles telles que $\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x_0) = 0$. Posons $\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$. D'après le principe de superposition, ψ vérifie l'EDO (1). Mais $\psi(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x_0) = 0$. Donc, par le Lemme 6, on a $\psi = 0$. Cela implique que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont linéairement dépendantes. CONTRADICTION

3.13 Matrice fondamentale

Définition

Soient $\phi_1, \ldots, \phi_n \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ des solutions linéairement indépendantes de l'EDO (1). On dit que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ est un système fondamental de solutions. La matrice :

$$M(x) = (\phi_1(x)| \cdots |\phi_n(x))$$

est appelée matrice fondamentale de l'EDO (1).

Remarque

On a $W(x) = det(M(x))$

Lemme 9

Soit $M \in C^1(I; Mat(n, \mathbb{R}))$. Alors $M(x)$ est une matrice fondamentale de l'EDO (1) si et seulement si $M(x)$ est inversible pour tout $x \in I$ et elle vérifie l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$.

Preuve du Lemme 9

Soit $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ des vecteurs colonnes de $M(x)$. Alors $M'(x) = A(x)M(x) \iff \phi_1'(x) = A(x)\phi_i(x) \, \forall i \iff \phi_1, cdots, \phi_n$ sont des solutions de l'EDO (1). En outre, $M(x)$ est inversible pour tout $x \in I \iff W(x) \neq 0 \, \forall x \in I \iff \phi_1, \cdots, \phi_n$ sont linéairement indépendantes par le Théorème 21.

Remarque

Donc, étant donné un système fondamental de solutions de l'EDO (1), on peut écrire une matrice fondamentale $M(x)$ et puis recontruire la matrice $A(x)$ par la formule $A(x) = M'(x)M(x))^{-1}$

Remarque

Si, $F, G \in C^1(I; Mat(n, \mathbb{R}))$, alors on a la règle de Leibniz : $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G(x)' \, \forall x \in I$ (l'ordre des facteurs est important car c'est des matrices !)

Lemme 10

Soit $M(x)$ une matrice fondamentale de l'EDO (1). Soit $C \in Mat(n, \mathbb{R})$ une matrice constante inversible. Alors, $\tilde{M}(x) = M(x)C$ est aussi une matrice fondamentale de l'EDO (1).

Preuve du Lemme 10

Par le Lemme 9 ,on a $\overline{M}(x)' = M'(x)C = A(x)M(x)C = A(x)\overline{M}(x)$ et $det(\overline{M}(x)) = M(x)det(C) \neq 0 \, \forall x \in I$. Donc, encore par le Lemme 9, $\overline{M}(x)$ est une matrice fondamentale.

Thèorème 22. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $A \in C(I; Mat(n,\mathbb{R}))$, $M(x)$ une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)y$. Soient $x_0 \in I$ et $z \in \mathbb{R}^n$. Alors, la solution du problème de Cauchy*

$$y' = A(x)y \quad y(x_0) = z \tag{6}$$

est donnée par $\phi(x) = M(x)(M(x_0))^{-1}z$

Preuve du Théorème 22

On a $\phi'(x) = M'(x)(M(x_0))^{-1}z = A(x)M(x)(M(x_0))^{-1}z = A(x)\phi(x)$ et $\phi(x_0) = M(x_0)(M(x_0))^{-1}z = z$

Remarque

Donc, si on sait qu'une matrice est fondamentale, alors on peut résoudre le problème de Cauchy (2) pour une condition initiale arbitraire.

Lemme 11

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $A \in C(I; Mat(n,\mathbb{R}))$. Supposons qu'il existe des vecteurs propres $v_1, \cdots, v_n$ de $A(x)$ qui sont linéairement indépendants et qui ne dépendent pas de x. On note $\lambda_i(x)$ la valeur propre associée à v_i. Soit $x_0 \in I$. Posons $\phi_i(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)ds}v_i$. Alors, $M(x) = (\phi_1(x)|\cdots|\phi_n(x))$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)y$

Remarque

On peut choisir x_0 comme on veut.

Remarque

Si $A \in Mat(n,\mathbb{R})$ est une matrice constante de rang n, alors on a $\phi_i(x) = e^{(x-x_0)\lambda_i}v_i$.

Preuve du Lemme 11

On a $\phi_i'(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)ds}\lambda_i(v)v_i = e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)ds}A(x)v_i = A(x)\phi_i(x)$. Donc $M'(x) = A(x)M(x)$. En outre, $det(M(x)) = det\left(e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_1(s)ds}v_1 \middle| \cdots \middle| e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_n(s)ds}v_n\right) = e^{\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)ds}det(v_1|\cdots|v_n) \neq 0$. Donc $M(x)$ vérifie les hypothèses du Lemme 9.

Exemple

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2xy_2 \\ y_2' = -2xy_1 + y_2 \end{cases}$ $(*)$ $y' = A(x)y$, où $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$.

On a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\lambda_1(x) = 1 + 2ix$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\lambda_2(x) = 1 - 2ix$. Prenons $x_0 =$.

Alors, $\phi_1(x) = e^{x+ix^2}v_1$ et $\phi_2(x) = e^{x-ix^2}v_2$ sont deux solutions complexes. En effet, $\phi_2(x) = \overline{\phi_1(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Posons $\tilde{\phi_1}(x) = \frac{1}{2}(\phi_1(x) + \phi_2(x)) = \begin{pmatrix} e^x cos(x^2) \\ -e^x sin(x^2) \end{pmatrix}$ et

$\tilde{\phi_2}(x) = \frac{1}{2i}(\phi_1(x) - \phi_2(x)) = \begin{pmatrix} e^x sin(x^2) \\ e^x cos(x^2) \end{pmatrix}$. Par le principe de superposition, $\tilde{\phi_1}$ et $\tilde{\phi_2}$ sont aussi des solutions de l'EDO. Donc $M(x) = \begin{pmatrix} e^x cos(x^2) & e^x sin(x^2) \\ -e^x sin(x^2) & e^x cos(x^2) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale et on a aussi $W(x) = e^{2x}$

Remarque (formule normale de Jordan)

Pour toute matrice $B \in Mat(n, \mathbb{C})$, il existe une matrice inversible $S \in Mat(n, \mathbb{C})$ et une matrice $J \in Mat(n, \mathbb{C})$ diagonale par blocs telles qu'on a :

$$B = SJS^{-1}, \; J = diag(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots)$$

Exemple

Si $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est une bloc de Jordan de taille 2 associé à la valeur propre λ, alors B possède un vecteur propre v et un vecteur propre généralisé u d'ordre 2 tels qu'on a $Bv = \lambda v$ et $Bu = \lambda u + v$

Considérons le cas où chaque bloc de Jordan de $A(x)$ est de taille 2 au maximum.

Lemme 12

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$. Supposons qu'il existe des vecteurs propres $v_1, \dots, v_{n-k}$ de $A(x)$ et des vecteurs propres généralisés d'ordre 2 $u_1, \dots, u_k$ tels que :

$$A(x)v_i = \lambda_i(x)v_i, \; i = 1, \dots, n-k$$

$$A(x)u_i = \lambda_i(x)u_1 + \mu_i(x)v_i, \; i = 1, \dots, k$$

Supposons que les vecteurs $v_1, \dots, v_{n-k}$ et $u_1, \dots, u_k$ sont linéairement indépendants et qu'ils ne dépendant pas de x. Soit $x_0 \in I$. Posons $\phi_i(x) = e^{\int_{x_0}^x \lambda_i(s)ds}$ pour $i = 1, \dots, n-k$ et $\tilde{\phi}_i(x) = e^{\int_{x_0}^x \lambda_i(s)ds}(u_i + \int_{x_0}^x \mu_i(s)ds)v_i)$ pour $i = 1, \dots, k$. Alors, $M(x) = (\phi_1(x)| \dots \phi_{n-k}(x)|\tilde{\phi}_1(x)| \dots |\tilde{\phi}_k(x))$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)y$

Preuve du Lemme 12

On a $\phi_i'(x) = A(x)\phi_i(x)$ (voir la preuve du Lemme 11). Un calcul similaire donne : $\tilde{\phi}_i'(x) = e^{\int_{x_0}^x \lambda_i(s)ds}(\lambda_i(x)u_i + \lambda_i(x)(\int_{x_0}^x \mu_i(s)ds)v_i + \mu_i(x)v_i) = A(x)\tilde{\phi}_i(x)$. On conclut que ϕ et $\tilde{\phi}$ sont des solutions de l'EDO $y' = A(x)y$ et donc $M'(x) = A(x)M(x)$. En outre,

$$det(M(x)) = e^{\sum_{i=1}^n \int_{x_0}^x \lambda_i(s)ds} det\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_{n-k} \middle| u_1 + \left(\int_{x_0}^x \mu_1(s)ds\right) v_1 \middle| \dots \middle| u_k + \left(\int_{x_0}^x \mu_k(s)ds\right) v_k\right)$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\lambda_i(s)ds} det(v_1|\cdots|v_{n-k}|u_1|\cdots|u_k) \neq 0$$

Donc $M(x)$ vérifie les hypothèses du Lemme 9.

Remarque

Si $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ est une matrice constante, alors on a $\phi_i(x) = e^{(x-x_0)\lambda_i}v_i$ et $\tilde{\phi}_i(x) = e^{(x-x_0)\lambda_i}(u_i + (x - x_0)v_i)$

Exemple

Soit l'EDO $y' = A(x)y$, où $A(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & 2x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$. On remarque que $A(x) = E + 2xA$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $det(A - \lambda E) = \lambda^2$. Donc A a une seule valeur propre $\lambda = 0$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur prepre car $Av_1 = 0$ et $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre généralisé car $Au_1 = v_1$. On a $A(x)v_1 = v_1$ et $a(x)u_1 = u_1 + 2xv_1$, donc $\lambda(x) = 1, \mu(x) = 2x$. Prenons $x_0 = 0$. Alors, $\phi_1(x) = e^x v_1$ et $\tilde{\phi}_1(x) = e^x(u_1 + x^2 v_1)$. Donc $M(x) = \begin{pmatrix} e^x & x^2 e^x \\ e^x & (x^2+1)e^x \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale.

3.14 Exponentielle de matrices et matrice fondamentale

Remarque

$(Mat(n, \mathbb{R}), ||\,||)$, où $||B|| = \max_{||y||=1} ||By||$, est un espace de Banach. Pour tout $y \neq 0$, on a $||By|| = \left|\left|B\left(\frac{y}{||y||}\right)\right|\right| ||y|| \leq ||B||\,||y||$. Donc $||B_1B_2y|| \leq ||B_1||\,||B_2y|| \leq ||B_1||\,||B_2||\,||y||$, d'où $||B_1B_2|| \leq ||B_1||\,||B_2||$

Définition

Soit $B \in Mat(n, \mathbb{R})$. On pose $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k = E + B + \frac{B^2}{2} + \cdots$

Remarque

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $e^{\alpha E} = e^{\alpha} E$. En particulier, si $B = 0$, alors $e^B = E$.

Lemme 13

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$ converge absolument dans $(Mat(n, \mathbb{R}), ||\,||)$.

Preuve du Lemme 13

On a $||B^k|| = ||BB^{k-1}|| \leq ||B||\,||B^{k-1}|| \leq \dots \leq ||B||^k$. Posons $S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^k$. Soit $p > m$, alors :

$$||S_p - S_m|| = \left|\left| \sum_{k=m+1}^{p} \frac{1}{k!} B^k \right|\right|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{p} \frac{1}{k!} ||B^k|| \leq \sum_{k=m+1}^{p} \frac{1}{k!} ||B||^k \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

car la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||B||^k$ converge dans $\mathbb{R}$.

On conclut que $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et donc une suite convergente. La série converge absolument car la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||B||^k$ converge dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soient $B_1, B_2 \in Mat(n, \mathbb{R})$. Si $B_1 B_2 = B_2 B_1$, on dit que B_1 et B_2 commutent.

Remarque

Si B_1 et B_2 commutent, on a $e^{B_1 + B_2} = e^{B_1} e^{B_2} = e^{B_2} e^{B_1}$. En particulier, $e^B e^{-B} = E$, et donc $\left(e^B\right)^{-1} = e^{-B}$

Définition

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $x, x_0 \in I$. Soit $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$. Alors, $\int_{x_0}^{x} A(s)ds \in Mat(n, \mathbb{R})$ est la matrice telle que $\left(\int_{x_0}^{x} A(s)ds\right)_{ij} = \int_{x_0}^{x} A_{ij}(s)ds \; \forall i, j$

Thèorème 23. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Soit $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$. Supposons que $A(x)$ et $A(s)$ commutent pour tous $x, s \in I$. Alors, $M(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A(s)ds}$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)y$*

Remarque

Si $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ est une matrice constante, alors $M(x) = e^{(x-x_0)A}$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = Ay$.

Preuve du Théorème 23

Posons $B(x) = \int_{x_0}^{x} A(s)ds$. Alors $B'(x) = A(x)$ et :

$$B'(x)B(x) = A(x)\int_{x_0}^{x} A(s)ds = \int_{x_0}^{x} A(x)A(s)ds = \int_{x_0}^{x} A(s)A(x)ds = B(x)A(x))B(x)B'(x)$$

On a $\left(B(x)^k\right)' = kB'(x)B(x)^{k-1}$ (preuve par récurrence).

Considérons un segment $[\alpha, \beta] \subset I$ contenant x_0. Posons $\|B\|_\infty = \max_{x \in [\alpha;\beta]} \|B(x)\|$. Alors, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B(x)^k$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ (on peut répéter la preuve du Lemme 13).

Donc, on a :

$$M'(x) = \left(E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B(x)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(B(x)^k\right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}kB'(x)B(x)^{k-1} = B'(x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^{(}x)k = A(x)M(x)$$

sur $[\alpha, \beta]$. pour tous $[\alpha, \beta]$ arbitrairement proches de l'intervalle I. De plus, $M(x)$ étant l'exponentielle d'une matrice est inversible pour tout $x \in I$. Donc, $M(x)$ vérifie les hypothèses du Lemme 9.

Remarque

Posons $B(x) = \int_{x_0}^{x} A(s)ds$. Si on sait que les matrices $S(x)$ et $J(x)$ respectent $B(x) = S(x)J(x)S(x)^{-1}$, alors on peut trouver la matrice fondamentale :

$$M(x) = e^{B(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B(x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(S(x)J(x)S(x)^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}S(x)J(x)^kS(x)^{-1}$$

$$= S(x)\left(\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}J(x)^k\right)S(x)\quad 1 = S(x)e^{J(x)}S(x)\quad 1$$

Thèorème 24. *Soit B 2 $Mat(n, \mathrm{C})$.*

a) Si B opssède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \quad , \lambda_n$, alors :

$$e^B = \sum_{i=1}^{n} e^{\ i}\left(\prod_{j \not\in i}^{n}\frac{1}{\lambda_i \quad \lambda_j}(B \quad \lambda_j E)\right)$$

b) Si B a une seule valeur propre λ_1 de multiplicité algébrique n, alors :

$$e^B = e^{\ 1}\sum_{k=0}^{n\ 1}\frac{1}{k!}(B \quad \lambda_1 E)^k$$

Preve du Théorème 24

a) B possède n valeurs propres $v_1, \quad , v_n$ linéairement indépendantes relatids à $\lambda_1, \quad , \lambda_n$. On a $(B \quad \lambda_j E)v_m = (\lambda_m \quad \lambda_j)v_m$, d'où $\left(\prod_{j \not\in i}^{n}\frac{1}{\lambda_i \quad \lambda_j}(B \quad \lambda_j E)\right)v_m = \delta_{im}v_m$.

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\ i}\left(\prod_{j \not\in i}^{n}\frac{1}{\lambda_i \quad \lambda_j}(B \quad \lambda_j E)\right)v_m = \sum_{i=1}^{n} e^{\ i}\delta_{im}v_{im} = e^{\ m}v_m$$

$$= \sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}B^k v_m = e^B v_m$$

Il reste à remarquer que un vecteur arbitraire de R^n est une combinaison linéaire de $v_1, \quad , v_n$.

b) Le polynôme caractéristique de B est $P(\lambda) = (\lambda \quad \lambda_1)^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton implique que $(B \quad \lambda_1 E)^n = 0$. Donc, $e^B = e^{\ 1E + B \quad 1E} = e^{\ 1E}e^{B \quad 1E} = e^{\ 1E}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}(B \quad \lambda_1 E)^k = e^{\ 1}\sum_{k=0}^{n\ 1}\frac{1}{k!}(B \quad \lambda_1 E)^k$.

Exemple

Soit l'EDO $y' = A(x)y$ où $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $A(x) = E + 2xA$. on a $A(x)A(s) = A(s)A(x)$. Prenons $x_0 = 0$. Posons $B(x) = \int_{x_0}^{x} A(s)ds = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ -x^2 & x \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $B(x)$ sont $\lambda_1(x) = x + ix^2$ et $\lambda_2(x) = x - ix^2$.

Donc :

$$M(x) = e^{B(x)} = \frac{e^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}(B(x) - \lambda_2 E) + \frac{e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}(B(x) - \lambda_1 E)$$

$$= \frac{e^{x+ix^2}}{2ix^2}\begin{pmatrix} ix^2 & x^2 \\ -x^2 & ix^2 \end{pmatrix} - \frac{e^{x-ix^2}}{2ix^2}\begin{pmatrix} -ix^2 & x^2 \\ -x^2 & -ix^2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} cos(x^2) & sin(x^2) \\ -sin(x^2) & cos(x^2) \end{pmatrix}$$

est une matrice fondamentale.

3.15 EDO linéaires non homogènes dans $\mathbb{R}^n$

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soient $A \in C(I; Mat(n, \mathbb{R}))$ et $h \in C(I; \mathbb{R}^n)$. Soit $M(x)$ une matrice fondamentale de l'EDO homogène $y' = A(x)y$.

Soient $z \in \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in I$. D'après le Théorème 22, la solution du problème de Cauchy $y' = A(x)y,\ y(x_0) = z$ est donnée par $\phi(x) = M(x)(M(x_0))^{-1}z$

Considérons le problème de Cauchy :

$$y' = A(x)y + h(x),\ y(x_0) = z \tag{1}$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution de (1) sous la forme :

$$\phi(x) = M(x)(M(x_0))^{-1}z(x)$$

où $z \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ est une fonction vectorielle inconnue.

On a $\phi(x_0) = z(x_0)$ et :

$$\phi'(x) = M'(x)(M(x_0))^{-1}z(x) + M(x)(M(x_0))^{-1}z'(x)$$

$$= A(x)M(x)(M(x_0))\ ^1z(x) + M(x)(M(x_0))\ ^1z^0(x) = A(x)\phi(x) + M(x)(M(x_0))\ ^1z^0(x)$$

Donc, ϕ est une solution du problème (1) si et seulement si $z(x_0) = z$ et $z^0(x) = M(x_0)(M(x))\ ^1h(x)$. D'où :

$$z(x) = z + \int_{x_0}^{x} M(x_0)(M(s))\ ^1h(s)ds$$

et donc :

$$\phi(x) = M(x)\left((M(x_0)\ ^1z + \int_{x_0}^{x}(M(s))\ ^1h(s)ds\right)$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y_1^0 = (1 \quad 2x)y_1 + 2xy_2 + x \\ y_2^0 = \quad 2xy_1 + (1 + 2x)y_2 + x \end{cases} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ici, $A(x) = \begin{pmatrix} 1 \quad 2x & 2x \\ 2x & 1 + 2x \end{pmatrix}$, $h(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, $x_0 = 0$ et $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & x^2 + 1 \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale.

On a $(M(x))\ ^1 = e\ ^x \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(M(0))\ ^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, $(M(x_0))\ ^1z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et :

$$\int_{x_0}^{x}(M(s))\ ^1h(s)ds = \int_0^x e\ ^s \begin{pmatrix} s^2 + 1 & s^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^x \begin{pmatrix} se\ ^s \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \quad (x + 1)e\ ^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\phi(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & x^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \quad (x + 1)e\ ^x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2 + 1)e^x \quad x \quad 1 \\ (x^2 + 2)e^x \quad x \quad 1 \end{pmatrix}$

Remarque

Si $B \in Mat(n,\mathbb{C})$, alors $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$ est la trace de B. On a $tr(B_1 + B_2) = tr(B_1) + tr(B_2)$ et $tr(B_1B_2) = tr(B_2B_1)$ pour tous $B_1, B_2 \in Mat(n,\mathbb{C})$. Par conséquent, on a $tr(B\tilde{B}B^{-1}) = tr(\tilde{B})$.

Thèorème 25. *La formule de Liouville Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $A \in C(I; Mat(n,\mathbb{R}))$. Soit $x_0 \in I$. Soit $W(x)$ le wronskien des solutions $\phi_1, \cdots, \phi_n$ de l'EDO $y' = A(x)y$. Alors, pour tout $x \in I$, on a :*

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} tr(A(s))ds}$$

Preuve du Théorème 25

Si les solutions $\phi_1, \cdots, \phi_n$ sont linéairement dépendantes, alors $W(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Considérons le cas où $\phi_1, \cdots, \phi_n$ sont linéairement indépendantes et donc $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ par le Théorème 21. Posons $M(x) = (\phi_1(x)|\cdots|\phi_n(x))$. Alors, $M(x)$ est une matrice fondamentale. Soit $M(x) = S(x)J(x)S(x)^{-1}$ sa décomposition de Jordan, où $J(x)$ est diagonale par blocs et chaque bloc est une matrice triangulaire supérieure. Alors, $W(x) = det(M(x)) = det(J(x)) = J_{11}(x)\cdots J_{nn}(x)$ et donc :

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = \sum_{i=1}^{n} J'_{ii}(x)\frac{1}{J_{ii}(x)} = tr(J'(x)J(x)^{-1})$$

On a $M'(x) = A(x)M(x)$. De l'autre côté, on a $M'(x) = S'(x)J(x)S(x)^{-1} + S(x)J'(x)S(x)^{-1} - S(x)J(x)S(x)^{-1}S'(x)S(x)^{-1}$. Alors, $A(x) = M'(x)M(x)^{-1} = M'(x)S(x)J(x)^{-1}S(x)^{-1} = S'(x)S(x)^{-1} + S(x)J'(x)J(x)^{-1}S(x)^{-1} - S(x)J(x)S(x)^{-1}S'(x)J(x)^{-1}S(x)^{-1}$. D'où, en utilisant les propriétés de trace, on obtient $tr(A(x)) = tr(S'(x)S(x)^{-1}) + tr(J'(x)J(x)^{-1}) - tr(S(x)^{-1}S'(x)) = tr(J'(x)J(x)^{-1})$. Donc, $W(x)$ vérifie l'EDO $\frac{W'(x)}{W(x)} = tr(A(x))$. D'où $log(W(x)) - log(W(x_0)) = \int_{x_0}^{x} tr(A(s))ds$

Exemple

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{x}y_1 + \frac{1}{x^2}y_2 \\ y_2' = -(2+x)y_1 + \left(1+\frac{3}{x}\right)y_2 \end{cases} \iff y' = A(x)y,\ A(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -2-x & 1+\frac{3}{x} \end{pmatrix}$$

On a une solution évidente $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. Prenons $x_0 = 1$. Cherchons une solution ψ telle que $det(\phi(x_0)|\psi(x_0)) = W(x_0) = 1$. On a $W(x) = det\begin{pmatrix} 1 & \psi_1 \\ x & \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_2 - x\psi_1 = e^{\int_1^x tr(A(s))ds} = e^{\int_1^x \left(1+\frac{2}{s}\right)ds} = e^{x-1+2log(x)} = x^2e^{x-1}$. D'où $\phi_2 = x^2e^{x-1} + x\psi_1$. Donc, ψ_1 vérifie l'EDO à une variable, $\psi_1' = -\frac{1}{x}\psi_1 + \frac{1}{x^2}(x^2e^{x-1} + x\psi_1) = e^{x-1} \Rightarrow \psi_1 = c + e^{x-1} \Rightarrow \psi_2 = x^2e^{x-1} + x\psi_1 = (x^2+x)e^{x-1} + cx$. Alors, $\psi = e^{-1}\begin{pmatrix} e^x \\ (x^2+x)e^x \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$.

Donc, $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ x & (x^2+x)e^x \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale.

3.16 EDO linéaires d'ordre 2 dans R

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soient $a, b \in C(I)$ deux fonctions. On considère l'EDO linéaire homogène d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

Lemme 14

Si $y \in C^1(I)$, posons $p(x) = b(x) - \frac{a'(x)}{2} - \frac{a(x)^2}{4}$. Soit $x_0 \in I$. Soit φ une solution de l'EDO (1). Alors, $\psi(x) = \varphi(x)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^x a(s)ds}$ vérifie l'EDO :

$$u'' + p(x)u = 0$$

Preuve du Lemme 14

On a $\psi'(x) = \left(\varphi'(x) + \frac{1}{2}a(x)\varphi(x)\right)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^x a(s)ds}$. Donc :

$$\psi''(x) = \left(\varphi''(x) + \frac{1}{2}a'(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}a(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}a(x)\left(\varphi'(x) + \frac{1}{2}a(x)\varphi(x)\right)\right)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

$$= \left(\varphi''(x) + a(x)\varphi'(x) + (b(x) - p(x))\,\varphi(x)\right)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

$$= \quad p(x)\varphi(x)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = \quad p(x)\psi(x)$$

Lemme 15 (Principe de superposition)

Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^2(I)$ sont des solutions de l'EDO (2) et $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ sont des constantes, alors $\varphi = \sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i$ est aussi une solution de l'EDO (2).

Preuve du Lemme 15

$$\varphi''(x) + a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i''(x) + a(x)\sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i'(x) + b(x)\sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i\left(\varphi_i''(x) + a(x)\varphi_i'(x) + b(x)\varphi_i(x)\right) = 0$$

Définition

On dit que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C(I)$ sont linéairement dépendantes sur I s'il existe des constantes $c_1, \ldots, c_k$ (non toutes nulles) telles que $\sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soient des fonctions $\varphi, \psi \in C^1(I)$. Leur wronskien est défini par $W(x) = \varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x)$.

Remarque

On a $\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = det\begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix}$.

Lemme 16

Si le wronskien $W(x)$ ne s'annule pas identiquement sur I, alors φ et ψ sont linéairement indépendantes sur I.

Preuve du Lemme 16

Si φ et ψ sont linéairement dépendantes, alors il existe des constantes c_1, c_2 non toutes nulles telles que $c_1\varphi(x) + c_2\psi(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors $c_1\varphi'(x) + c_2\psi'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ et donc les vecteurs $\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\psi(x)\\ \psi'(x)\end{pmatrix}$ sont liés pour tout I.

Thèorème 26.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

L'ensemble des solutions de l'EDO (1) est un espace vectoriel de dimension 2.

b) *Soit φ une solution de l'EDO (1) non identiquement nulle sur I. Alors, il n'existe pas $x_0 \in I$ tel que $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$.*

c) *Deux solutions φ, ψ de l'EDO (1) sont linéairement indépendantes sur I si et seuelment si $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.*

Preuve du Théorème 26

a) $\varphi \in C^2(I)$ vérifie l'EDO (1) si et seulement si $= \begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix}$ vérifie l'EDO $Y' = A(x)Y$, où $Y = \begin{pmatrix}y\\ y'\end{pmatrix}$ et $A(x) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ b(x) & a(x)\end{pmatrix}$. Donc, on a une isomorphisme entre les espaces vectoriels des solutions de l'EDO (1) et l'EDO $Y' = A(x)Y$. La dimension du deuxième espace est 2 par le Théorème 20.

b) $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0 \iff (x_0) = 0 \implies$ par le Lemme 6 $(x) = 0$ pour tout $x \in I \iff \varphi(x) = 0$ pour tout $x \in I$ CONTRADICTION

c) Si $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors par le Lemme 16, φ et ψ sont linéairement indépendantes. Si φ et ψ sont linéairement indépendates, alors $= \begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix}$ et $= \begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'EDO $Y' = A(x)Y$ et donc, par le Théorème 21, leur wronskien ne s'annule pas sur I.

Remarque

On a $A(x)A(s) = A(s)A(x)$ si et seulement si a et b sont des fonctions constantes.

Remarque

Étant donné deux solutions φ, ψ de l'EDO (1) linéairement indépendantes sur I, on peut reconstruire les coefficients $a(x)$ et $b(x)$:

$$\begin{cases} a(x)\varphi' + b(x)\varphi = & \varphi'' \\ a(x)\psi' + b(x)\psi = & \psi'' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \varphi' & \varphi \\ \psi' & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'' \\ \psi'' \end{pmatrix}$$

Lemme 17

Soient φ, ψ deux solutions de l'EDO (1). Soit $W(x)$ le wronskien de φ et ψ. Soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a :

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \tag{2}$$

Preuve du Lemme 17

Le wronskien de φ et ψ est égal au wronskien de $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ et $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$ qui vérifie l'EDO $y' = A(x)y$ où $tr(A(x)) = -a(x)$. Dans ce cas, la formule générale $W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} tr(A(s))ds}$ prend la forme (2).

Remarque

Soit φ une solution non nulle de l'EDO (1). Fixonw $x_0 \in I$. Cherchons une solution ψ telle que $\varphi(x_0)\psi'(x_0) - \psi(x_0)\varphi'(x_0) = W(x_0) = 1$. On a $W(x) = \varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$. Donc on peut résoudre l'équation d'ordre 1 : $\varphi\psi' = \psi\varphi' + e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ pour déterminer une autre solution de (1) linéairement indépendante de φ.

Exemple

Soit $I = (0, \infty)$. On cherche la solution de l'EDO :

$$(x^2+x)y'' + (x+1)y' - y = 0$$

vérifiant les conditions initiales : $y(1) = 2$ et $y'(1) = 3$. Prenons $x_0 = 1$. Cherchons d'abord une solution polynomiale. On a une solution évidente $\varphi(x) = x+1$. Une EDO équivalente est $y'' = a(x)y' + b(x)y = 0$ où $a(x) = \frac{1}{x}$ et $b(x) = -\frac{1}{x^2+x}$.

Cherchons maintenant une solution ψ telle que $\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = e^{-\int_1^x \frac{1}{s}ds} = e^{-ln(x)} = \frac{1}{x}$. Alors, $(x+1)\psi' = \psi + \frac{1}{x}$. L'EDO homogène $(x+1)\psi' = \psi$ a pour solution $\psi(x) = z(x+1)$. Donc, en utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de l'EDO non homogène sous la forme $\psi(x) = z(x)(x+1)$ où $z'(x) = \frac{x}{x(x+1)^2} \Rightarrow z(x) = \int_1^x \frac{1}{s(s+1)^2}ds = \int_1^x \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right)ds = ln(x) - ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + c.$

Donc, une solution linéairement indépendante de φ est $\tilde{\Psi}(x) = (x+1)(ln(x) - ln(x+1)) + 1$. Il reste à trouver des constantes c_1, c_2 telles que $\tilde{\varphi} = c_1\varphi + c_2\tilde{\Psi} = c_1(x+1) + c_2(x+1)(ln(x) - ln(x+1)) + c_2$ satisfait les conditions initiales.

On a $\tilde{\varphi}(1) = 2c_1 + c_2(1 - 2ln(2)) = 2$ et $\varphi'(2) = c_1 + c_2(1 - ln(2)) = 3$. D'où $c_1 = 4ln(2) - 1$ et $c_2 = 4$ et donc $\tilde{\varphi} = (4ln(2) - 1)(x+1) + 4(x+1)(ln(x) - ln(x+1)) + 4$ est la solution cherchée.

3.17 EDO linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et l'équation d'Euler

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'EDO linéaire homogène d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$ à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

Définition

L'équation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ est l'équation caractéristique de l'EDO (1).

Lemme 18

Soient λ_1, λ_2 les racines de l'équation caractéristique de l'EDO (1) et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ des constantes arbitraires. Alors, l'EDO (1) a pour solution :

$$\begin{cases} \varphi(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \varphi(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \\ \varphi(x) = c_1 e^{\lambda x} cos(\mu x) + c_2 e^{\lambda x} sin(\mu x) & \text{si } \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda + i\mu, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \neq 0 \end{cases}$$

Preuve du Lemme 18

Les racines de l'équation caractéristique sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Si φ est une solution de l'EDO (1), alors par le Lemme 14 (avec $x_0 = 0$), $\psi(x) = \phi(x) e^{\frac{1}{2}ax}$ est une solution de l'EDO :

$$u'' + pu = 0, \quad \text{où } p = b - \frac{1}{4}a^2 \tag{2}$$

Si $p < 0$, alors $\psi_1(x) = e^{\sqrt{-p}x}$ et $\psi_2(x) = e^{-\sqrt{-p}x}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'EDO (2) et donc $\varphi_1(x) = e^{-\frac{1}{2}ax}\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $\varphi_2(x) e^{-\frac{1}{2}} \psi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'EDO (1).

Si $p = \mu^2 > 0$, alors $\psi(x) = e^{i\mu x}$ et $\overline{\psi(x)} = e^{-i\mu x}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'EDO (2) et donc $\varphi_+(x) = e^{-\frac{1}{2}ax}\frac{1}{2}\left(\psi(x) + \overline{\psi(x)}\right) = e^{-\frac{1}{2}ax} cos(\mu x)$ et $\varphi_- = e^{-\frac{1}{2}ax}\frac{1}{2i}\left(\psi(x) + \overline{\psi(x)}\right) = e^{-\frac{1}{2}ax} sin(\mu x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'EDO (1).

Soit $I = (0, \infty)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation d'Euler est une EDO de la forme :

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{3}$$

Définition

L'équation $\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0$ est l'équation caractéristique de l'EDO (3).

Lemme 19

Soient λ_1, λ_2 les racines de l'équation de l'EDO (3) et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ les constantes aribitraires. Alors, l'EDO (3) a pour solution :

$$\begin{cases} \varphi(x) = c_1x^{\lambda_1} + c_2x^{\lambda_2} & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \varphi(x) = c_1x^{\lambda} + c_2(ln(x))x^{\lambda} & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \\ \varphi(x) = c_1x^{\lambda}cos(\mu \cdot ln(x)) + c_2x^{\lambda}sin(\mu \cdot ln(x)) & \text{si } \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda + i\mu, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \neq 0 \end{cases}$$

Preuve du Lemme 19

On a une bijection entre I et $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto ln(x)$. Soit φ une solution de l'EDO (3). Considérons une fonction ψ telle que $\psi(ln(x)) = \varphi(x)$. Alors, $\varphi'_x(x) = \frac{1}{x}\psi'_t(t)\Big|_{t=ln(x)}$ et $\varphi''_x(x) = \left(\frac{1}{x}\psi'_t(ln(x))'\right)_x = -\frac{1}{x^2}\psi'_t(t)\Big|_{t=ln(x)} + \frac{1}{x^2}\psi''_t(t)\Big|_{t=ln(x)}$.

Donc, $x^2\varphi''_x(x) + ax\varphi'_x(x) + b\varphi(x) = (\psi''_t(t) + (a-1)\psi'_t(t) + b\psi(t))\Big|_{t=ln(x)} = 0$. On conclut que ψ est une solution de l'EDO $y'' + (a-1)y' + by = 0$ dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$.

3.18 EDO linéaires non homogènes d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soient des fonctions $a, b, g \in C(I)$. On considère l'EDO linéaire non homogène d'ordre 2 :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \tag{4}$$

Lemme 20

Soient φ et ψ deux solutions linéairement indépendantes de l'EDO :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{5}$$

Soit ξ une solution de l'EDO (4). Alors, toute autre solution de l'EDO (4) est la forme $\tilde{\xi} = \xi + c_1\varphi + c_2\psi$ où c_1, c_2 sont des constantes.

Preuve du Lemme 20

Soit $\tilde{\xi}$ une solution de l'EDO (4). Alors, $(\tilde{\xi} - \xi)'' + a(x)(\tilde{\xi} - \xi)' + b(x)(\tilde{\xi} - \xi) = \left(\tilde{\xi}'' + a(x)\tilde{\xi} + b(x)\tilde{\xi}\right) - (\xi'' + a(x)\xi' + b(x)\xi) = g(x) - g(x) = 0$.

Donc $\tilde{\xi} - \xi$ est une solution de l'EDO (5). Mais, par le Théorème 26, φ et ψ forment une base de solutions de l'EDO (5). Donc, il existe des constantes c_1, c_2 telles que $\tilde{\xi} - \xi = c_1\varphi + c_2\psi$.

Remarque

Donc, la solution générale de l'équation non homogène (4) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (5).

Thèorème 27. *Soient, φ, ψ deux solutions linéairemnet indépendantes de l'EDO (5) et $W(x) = \varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x)$ leur wronskien. Soit $x_0 \in I$, alors la fonction :*

$$\xi(x) = -\varphi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\psi(s)g(s)}{W(s)}ds + \psi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(s)g(s)}{W(s)}ds$$

est une solution de l'EDO (4).

Remarque

On a $\xi(x_0) = 0$ et $\xi'(x_0) = -\varphi(x_0)\dfrac{\psi(x_0)g(x_0)}{W(x_0)} + \psi(x_0)\dfrac{\varphi(x_0)g(x_0)}{W(x_0)} = 0$.

Preuve du Théorème 27

Considérons les EDO linéaires dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$Y' = A(x)Y, \text{ où } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$Y' = A(x)Y + h(x), \text{ où } h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

φ et ψ vérifient l'EDO (5) ( ) les vecteurs $= \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$ et $= \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^0 \end{pmatrix}$ sont des solutions de l'EDO (6).

$M(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi^0(x) & \psi^0(x) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de l'EDO (6).

D'après le principe de superposition, si C_1 et C_2 sont des constantes, alors $C_1 \ (x) + C_2 \ (x) = M(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ est aussi une solution de l'EDO (6).

ξ vérifie l'EDO (4) ( ) le vecteur $= \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^0 \end{pmatrix}$ est une solution de l'EDO (7). En utilisant la méthode de variation de la constante, cherchons une solution de l'EDO (7) sous la forme $(x) = M(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$. Alors $^0(x) = M^0(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + M(x) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} = A(x)M(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + M(x) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} = A(x) \ (x) + M(x) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix}$.

Donc, $M(x) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} = h(x)$ ( ) $\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi^0 & \psi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$.

D'où on trouve $\begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} \psi^0 & \psi \\ \varphi^0 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$ =) $C_1^0(x) = \dfrac{\psi(x)g(x)}{W(x)}$ et $C_2^0(x) = \dfrac{\varphi(x)g(x)}{W(x)}$ =) $C_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\psi(s)g(s)}{W(s)} ds$ et $C_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(s)g(s)}{W(s)} ds$.

Alors, nous avons trouvé C_1 et C_2 telles que vérifie l'EDO (7) et donc $\xi = \ _1 = \varphi C_1(x) + \psi C_2(x)$ vérifie l'EDO (4).

Exemple

On cherche la solution de l'EDO :

$$y^{00} \quad y^0 \quad 2y = x^2 \tag{8}$$

vérifiant les conditions initiales $\xi(0) = 2$ et $\xi^0(0) = 3$.

L'équation caractéristique de l'EDO $y^{00} \quad y^0 \quad 2y = 0$ est $\lambda^2 \quad \lambda \quad 2 = (\lambda \quad 2)(\lambda + 1) = 0$.

Donc, par le Lemme 18, $\varphi(x) = e^{2x}$ et $\psi(x) = e^{\ x}$ sont des solutions linéairement indépendantes.

On a $W(x) = \quad 3e^x$. Posons $x_0 = 0$. En utilisant le Théorème 27, nous trouvons une solutions particulière de l'EDO (8), $\xi(x) = e^{2x}\int_0^x \frac{1}{3}e^{\quad 2s}s^2ds \quad e^{\quad x}\int_0^x \frac{1}{3}e^{s}s^2ds = \frac{1}{12}e^{2x}+\frac{2}{3}e^{\quad x} \quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x \quad \frac{3}{4}$.

Par le Lemme 20, $\xi = \xi + c_1\varphi + c_2\psi$.

On a $\xi(0) = c_1 + c_2 = 2$ et $\xi^0(0) = 2c_1 \quad c_2 = 3$, d'où $c_1 = \frac{5}{3}$ et $c_2 = \frac{1}{3}$. Donc, $\xi = \frac{7}{4}e^{2x} + e^{\quad x} \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \frac{3}{4}$.

3.19 Le Lemme de Du Bois-Reymond

Définition

Soient $A, B \in \mathbb{R}$. On note :

$$C^1_{A;B}[a,b] = \left\{ y \in C^1[a,b] \middle| y(a) = A, y(b) = B \right\}$$

Exemple

Posons $\varphi(x) = x + 3cos(\pi x)$, alors $\varphi \in C^1_{3;-2}[0,1]$.

Lemme 21

(de Du Bois-Reymond)

Soit deux fonctions $f, g \in C[a,b]$. Supposons que pour tout $h \in C^1_{0;0}[a,b]$, on a :

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x))dx = 0$$

Alors $g \in C^1[a,b]$ et on a $g' = f$.

Preuve du Lemme 21

Considérons le cas $f = 0$.

Posons $h(x) = \int_a^x g(s)ds - (x-a)c$, où $c = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(s)ds$. Alors, $h \in C^1_{0;0}[a,b]$ et $h'(x) = g(x) - c$. Par l'hypothèse du lemme, on a $\int_a^b g(x)h'(x)dx = 0$. Donc :

$$\int_a^b (g(x)-c)^2 dx = \int_a^b (g(x)-c)h'(x)dx = \int_a^b g(x)h'(x)dx - c\int_a^b h'(x)dx$$

$$= -c\int_a^b h'(x)dx = c(h(a)-h(b)) = 0 \implies g(x) = c \implies g' = 0$$

.

Considérons le cas général où $f \neq 0$. Posons $\tilde{g}(x)$ = g(x) - d(x), où $d(x) = \int_a f(s)ds$. Alors, pour tout $hniC^1_{0;0}[a,b]$, on a :

$$\int_a^b \tilde{g}(x)h'(x)dx = -\int_a^b d(x)h'(x)dx + \int_a^b g(x)h'(x)dx$$

$$= \quad d(x)h(x)\Big|_a^b + \int_a^b d'(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h'(x)dx = \int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x))dx = 0$$

On conclut que $\tilde{g}(x)$ est une fonction constante. Donc, $g(x) = d(x) + c \implies g \in C^1[a,b]$ et on a $g' = d' = f$.

3.20 Le Problème de variationnel

Définition

Soit V un espace sur $\mathbb{R}$. On appelle fonctionnelle sur V une application $J : V \to \mathbb{R}$. Une fonctionnelle linéaire est appelée forme linéaire.

Exemple

$V = C^1[a,b]$

1) $J[y] = y(a) + y'(b)$. Par exemple, si $y(x) = sin(x)$, alors $J[y] = sin(a) + cos(b)$

2) $J[y] = \displaystyle\int_a^b y(x)^2 dx$. Par exemple, si $y(x) = x$, alors $J[y] = \dfrac{1}{3}(b^3 - a^3)$

Définition

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $L \in C^1([a,b] \times U)$. On associe à L la fonctionnelle :

$$J_L : \begin{pmatrix} C^1[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ J_L[y] & \to & \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx \end{pmatrix}$$

Remarque

La fonction $L(x, y(x), y'(x))$ est appelée lagrangien.

Exemple

$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3$. Alors, $J_L[y] = \displaystyle\int_a^b x^3 y(x)^2 y'(x)dx$

On munit l'espace vectoriel $C^1[a,b]$ de la norme $||y||_1 = \max_{x \in [a;b]} |y(x)| + \max_{x \in [a;b]} |y'(x)|$.

Définition

Soit $J : C^1[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On considère J sur l'ensemble des fonctions admissibles $C^1_{A;B}[a, b]$. On dit que J a un extremum local en $\varphi \in C^1_{A;B}[a, b]$ s'il existe une δ tel que l'on a $J[y] \geq J[\varphi]$ pour le minimum local ou $J[y] \leq J[\varphi]$ pour le maximum local pour tout $y \in C^1_{A;B}[a, b]$ vérifiant $\|y - \varphi\|_1 < \delta$.

Définition

Soit L un lagrangien. Le problème variationnel (le cas aux extrémités fixes) consiste à chercher les extrema locaux de J_L sous les contraintes $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Thèorème 28. *(Condition nécessaire pour un extremum local)*

Si la fonctionnelle $J_L = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$ *a un extremum local en* $\varphi \in C^1_{A;B}[a, b]$*, alors on a :*

$$\frac{\partial L}{\partial y'}\Big|_{y=\varphi} \in C^1[a, b]$$

et φ *satisfait l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

Preuve du Théorème 28

Supposons que J_L a un extremum local en $\varphi \in C^1_{A;B}[a, b]$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in C^1_{A;B}[a, b]$ vérifiant $\|y - \varphi\|_1 \leq \delta$, on a $J_L[y] \geq J_L[y]$ ou $J_L[y] \leq J_L[\varphi]$.

Fixons $h \in C^1_{0;0}[a, b]$. Alors, $\varphi + th \in C^1_{A;B}[a, b]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\|(\varphi + th) - \varphi\|_1 = |t|\,\|h\|_1$. Posons $F(t) = J_L[\varphi + th] = \int_a^b L(x, \varphi(x) + th(x), \varphi'(x) + th'(x))dx$. Pour tout t vérifiant $|t| < \frac{\|h\|_1}{\delta}$. On a $F(t) \geq F(0)$ ou $F(t) \leq F(0)$. On conclut que F admet un extremum local en $t = 0$ et dont t0 est un poinr critique de F. Alors :

$$F_t'(0) = \int_a^b \left(L(x, \varphi(x) + th(x), \varphi'(x) + th'(x))\right)'_{t=0} dx$$

$$= \int_a^b \left(\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_{y=\varphi(x)} h(x) + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)_{y=\varphi(x)} h'(x)\right) dx = 0 \tag{1}$$

L'égalité (1) est vérifiée pour tout $h \in C^1_{0,0}[a,b]$. Donc on peut utiliser le Lemme de Du Bois-Reymond avec $f = \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{y=\varphi}$ et $g = \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{y=\varphi}$. Alors, $g' = f \iff$ l'équation d'Euler-Lagrange.

Définition

Une solution de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée extrémale de la fonctionnelle J_L.

Remarque

Une extrémale d'une fonctionnnelle J_L est un analogue d'un point critique d'une fonction de plusieurs variables. En particulier, la fonctionnelle J_L n'a pas forcément un extremum local en une extrémale.

Remarque

L'équation d'Euler-Lagrange est, en général, une équation différentielle d'ordre 2. Cette équation peut être non-linéaire. Une solution du problème variationnel est une solution φ de cette équation différentielle vérifiant les conditions ausx limites (de Dirichlet), $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$. Ce problème n'est pas un problème de Cauchy et donc l'existence et l'unicité d'une solution ne sont pas garanties.

Exemple

Soient $C^1_{2;3}[0,1]$ l'ensemble des fonctions admissibles et $J_L[y] = \int_0^1 x^2(y')^2dx$ la fonctionnelle. On cherche des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \implies (2x^2y')' = 0 \implies x^2y' = c_1 \implies \varphi(x) = -\frac{c_1}{x} + c_2$. La condition $\varphi(0) = 2$ implique que $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$. Mais alors $\varphi(1) = 2 \neq 3$. Donc, J_L n'admet pas d'extrémales sur $C^1_{2;3}[0,1]$

Exemple

Soient $C^1_{2;3}[0,1]$ l'ensemble des fonctions admissibles et $J_L[y] = \int_0^1 \left((y')^2 + 4y\right) dx$ la fonctionnelle. On cherche des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \implies (2y')' = 4 \implies y'' = 2 \implies \varphi(x) = x^2 + c_1x + c_2$. Les conditions aux limites $\varphi(0) = c_2 = 2$ et $\varphi(1) = 1 + c_1 + c_2 = 3$ impliquent que $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$. Donc, $\varphi(x) = x^2 + 2$ est une extrémale de J_L sur $C^1_{2;3}[0,1]$.

Montrons que J_L a un minimum global en φ. Soit $\psi \in C^1_{2,3}[0,1]$, alors $h = \psi - \varphi \in C^1_{0,0}[0,1]$ et on a :

$$J_L[\psi] - J_L[\varphi] = \int_0^1 \left((\psi'(x))^2 - (\varphi'(x))^2 + 4\psi(x) - 4\varphi(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left((\varphi'(x) + h'(x))^2 - (\varphi'(x))^2 + 4h(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 (2\varphi'(x)h'(x) + 4h(x))\, dx + \int_0^1 h'(x)^2 dx = 2\varphi'(x)h(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (-2\varphi''(x) + 4)\, h(x) dx + \int_0^1 h'(x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 h'(x)^2 dx > 0$$

Donc $J_L[\psi] > J_L[\varphi]$ pour tout $\psi \neq \varphi$.

Remarques

1) Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement de y', alors l'équation d'Euler-Lagrange est une équation algébrique, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 0$.
2) Si le lagrangien ne dépend pas explicitement de y, alors l'équation d'Euler-Lagrange se ramène à une EDO d'ordre 1, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \implies \dfrac{\partial L}{\partial y'} = c$, où c est une constante à déterminer.
3) Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement de x, alors l'équation d'Euler-Lagrange est une EDO autonome d'ordre 2 de la forme $y'' = f(y, y')$ qui se ramène à une EDO d'ordre 1 pour la fonction u telle que $y'(x) = u(y(x))$. On peut également utiliser le Lemme suivant :

Lemme 22

Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement de x, alors la fonction

$$H(y, y') = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L$$

est une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange (c'est à dire, on a $H(\varphi(x), \varphi'(x)) = c$ avec c une constante si φ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange).

Preuve du Lemme 22

On a :

$$H'_x = \left(y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right)'_x - L'_x = y''\frac{\partial L}{\partial y'} + y'{\frac{\partial L}{\partial y'}}'_x - \frac{\partial L}{\partial y}y' - \frac{\partial L}{\partial y'}(y')'$$

$$= y'\left(\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)'_x - \frac{\partial L}{\partial y}\right)$$

Donc, si φ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange, alors $(H(\varphi(x), \varphi'(x)))'_x = 0$.

Exemple

On considère le problème variationnel pour la fonctionnelle $J_L[y] = \int_0^1 e^{2y}(y')^2 dx$ avec les conditions aux limites $y(0) = 0$ et $y(1) = 2$ (donc, $C^2_{0;2}[0,1]$ est l'ensemble des fonctions admissibles).

On a $H = y'(e^{2y}y') = L = e^{2y}(y')^2$. Donc, pour trouver une extrémale de J_L, on considère l'équation $H(y, y') = c^2$ où c est une constante à déterminer. Alors, on a le problème de Cauchy $e^y y' = c$, $y(0) = 0$. La solution est donnée par $\varphi(x) = ln(cx + 1)$. La condition $\varphi(1) = 2$ implique que $c = e^2 - 1$.

3.21 Problème isopérimétrique

Définition

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $K \in C^1([a,b] \times U)$. Soit $J_K[y] = \int_a^b K(x, y(x), y'(x))dx$ la fonctionelle associée à K. Soient $A, B, Q, R \in \mathbb{R}$. On note :

$$S_{A;B}^{K;Q}[a,b] = \left\{ y \in C^1[a,b] \middle| y(a) = A, y(b) = B, J_K[y] = Q \right\}$$

Exemple

$J_K[y] = \int_0^1 y(x)dx$. Posons $\varphi_n(x) = 2x + (sin(\pi n x))^2$, alors $\varphi_n \in S_{0;2}^{K;3/2}[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Définition

Soient $J_L[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$ et $J_K[y] = \int_a^b K(x, y(x), y'(x))dx$ deux fonctionnelles sur $C^1[a,b]$. Le problème isomérimétrique consiste à chercher les extrema locaux de J_L sur l'ensemble des fonctions admissibles $S_{A;B}^{K;Q}[a,b]$, c'est à dire sous les contraintes $y(a) = A, y(b) = B, J_K[y] = Q$.

Remarque

Un exemple de problème isopérimétrique : déterminer parmi les courbes planes fermées simples de longueur donnée dont l'intérieur a la plus grande surface.

Thèorème 29. *(condition nécessaire pour un extremum local lié) Soient $J_L[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$ et $J_K[y] = \int_a^b K(x, y(x), y'(x))dx$ deux fonctionnelles sur $C^1[a,b]$. Supposons que J_L a un extremum local en $\varphi \in S_{A;B}^{K;Q}[a,b]$ et φ n'est pas une extrémale de J_K sur $C^1[a,b]$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que φ est une extrémale de la fonctionnelle $J_L - \lambda J_K$, c'est à dire φ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial K}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda \frac{\partial K}{\partial y}$$

Preuve du Théorème 29

Fixons $h_1, h_2 \in C^1_{0;0}[a,b]$. Posons $F(t,s) = J_K[\varphi + th_1 + sh_2] - Q$. Puisque $\varphi \in S^{K;Q}_{A;B}$, on a $F(0,0) = J_K[\varphi] - Q = 0$. De plus :

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0,0) = \int_a^b \left(K(x, \varphi(x) + sh_2(x), \varphi'(x) + sh_2'(x))\right)'_{s=0} dx$$

$$= \int_a^b \left(\left(\frac{\partial K}{\partial y}\right)_{y=\varphi(x)} h_2(x) + \left(\frac{\partial K}{\partial y'}\right)_{y=\varphi(x)} h_2'(x) \right) dx$$

Le Lemme de Du Bois-Reymond implique que, si cette intégrale s'annule pour tout $h_2 \in C^1_{0;0}[a,b]$, alors φ satisfait l'équation $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial K}{\partial y'}\right) = \frac{\partial K}{\partial y}$. Mais, par l'hypothèse, φ n'est pas une extrémale de J_K. On conclut que l'on peut choisir $h_2 \in C^1_{0;0}[a,b]$ telle que $\frac{\partial F}{\partial s}(0,0) \neq 0$

Posons maintenant $G(t,s) = J_L[\varphi th_1 + sh_2]$. On a $\varphi + th_1 + sh_2 \in S^{K;Q}_{A;B}[a,b] \iff F(t,s) = 0$ car $\frac{\partial F}{\partial s}(0,0) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites implique que l'équation $F(t,s) = 0$ définit une courbe de classe C^1 passant par le point (0,0). Donc, si J_L a un extremum local en $\varphi \in S^{K;Q}_{A;B}[a,b]$, alors G a un extremum local lié en (0,0) sous la condition $F(t,s) = 0$. On remarque que $grad(F(0,0)) \neq 0$ car $\frac{\partial F}{\partial s}(0,0) \neq 0$. Donc, il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $grad(G(0,0)) = \lambda grad(F(0,0)) \iff \lambda\frac{\partial G}{\partial t}(0,0) = \lambda\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)$ et $\frac{\partial G}{\partial s}(0,0) = \lambda\frac{\partial F}{\partial s}(0,0)$. La deuxième égalité implique que λ existe car $\frac{\partial F}{\partial s}(0,0) \neq 0$ et qu'il ne dépend pas du choix de h_1. La première égalité s'écrit :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(0,0) - \lambda\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)$$

$$= \int_a^b \left(L(x, \varphi(x) + th_1(x), \varphi'(x) + th_1'(x))\right)'_{t=0} dx - \lambda \int_a^b \left(K(x, \varphi(x) + th_1(x), \varphi'(x) + th_1'(x))\right)'_{t=0} dx$$

$$\int_a^b \left(\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \lambda\frac{\partial K}{\partial y}\right)_{y=\varphi(x)} h_1(x) + \left(\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial K}{\partial y'}\right)_{y=\varphi(x)}\right) h_1'(x) dx = 0 \right.$$

La dernière intégrale est toujours égale à 0 pour tout $h_1 \in C^1_{0;0}[a,b]$. Donc on peut utiliser le Lemme de Du Bois-Reymond avec $f = \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \lambda\frac{\partial K}{\partial y}\right)\Big|_{y=\varphi}$ et $g = \left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial K}{\partial y'}\right)\Big|_{y=\varphi}$. Alors $g' = f \iff$ l'équation d'Euler-Lagrange.

Exemple

Soient $J_L[y] = \int_0^1 (y')^2 dx$ et $J_K[y] = \int_0^1 xy dx$. On cherche les extrema locaux de J_L sous les contraintes $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $J_K[y] = 1$. On écrit l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien $L - \lambda K$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial K}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda\frac{\partial K}{\partial y} \implies 2y'' = -\lambda x \implies \varphi(x) = -\frac{1}{12}\lambda x^3 + c_1 x + c_2$$

Les conditions $y(0) = 0$, $y(1) = 2$ impliquent que $c_2 = 0$ et $c_1 - \frac{1}{12}\lambda = 2$. Donc, $\varphi(x) = (2 - c_1)x^3 + c_1 x$. Pour déterminer c_1, utilisons la condition $J_K[y] = 1$. On a $\int_0^1 x((2-c_1)x^3 + c_1 x)dx = \frac{1}{5}(2 - c_1) + \frac{1}{3}c_1 = 1$. D'où $c_1 = \frac{9}{2}$ et donc $\varphi(x) = -\frac{5}{2}x^3 + \frac{9}{2}x$.

Montrons que J_L a un minimum global sur $S_{0;2}^{K;1}[0,1]$ en φ. Soit $\psi \in S_{0;2}^{K;1}[0,1]$, alors $h = \psi - \varphi \in C^1_{0;0}[0,1]$ et on a $J_K[h] = \int_0^1 xh(x)dx = J_K[\psi] - J_K[\varphi] = 0$.

On a :

$$J_L[\psi] - J_L[\varphi] = \int_0^1 \left((\varphi'(x) + h'(x))^2 - (\varphi'(x))^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 2\varphi'(x)h'(x)dx + \int_0^1 h'(x)^2 dx = 2\varphi'(x)h(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(-2\varphi''(x)\right) h(x)dx + \int_0^1 h'(x)^2 dx$$

$$= \lambda\int_0^1 xh(x) + \int_0^1 h'(x)^2 dx = \int_0^1 h'(x)^2 dx > 0$$

Donc $J_L[\psi] > J_L[\varphi]$ pour tout $\psi \neq \varphi$.

Exercice pour s'entraîner sans la solution :

$J_L[y] = \int_1^2 (xy' - y)^2 dx$ sous les contraintes $y(1) = 1, y(2) = 2, \int_1^2 y(x)dx = 2$