Géométrie Hyperbolique - Résumé

Crapito

August 29, 2021

Contents

1 Utilités

Déf: cosh et sinh

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sinh x$ est surjective sur $\mathbb{R}$.

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Quelques identités

- $$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$
- $$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
- $$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
- Loi du sinus:
$$\frac{\sin\alpha}{\sinh(a)} = \frac{\sin\beta}{\sinh(b)} = \frac{\sin\gamma}{\sinh(c)}$$
- 2ème loi du cosinus:
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c$$
- $$e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \qquad e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$$
- Les dérivées
$$\cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \sinh'(x) = \cosh(x)$$
- Pour les inversions de sphère. Prenons C le centre de la sphère et r son rayon. Alors tout point $A \in \mathbb{R}^n$ va satisfaire:
$$r^2 = \overline{CA} \cdot \overline{C\iota(A)}$$
(si $A = C$, $\iota(A) = \infty$)

2 Représentations

2.1 Hyperboloïde

Notons:

$$x \in \mathcal{H}^n \iff x_{n+1} - 1 = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|_2^2$$

Et alors $x, y \in \mathcal{H}^n$ implique

$$\langle x \mid y \rangle \leq -1 \overset{\text{égalité}}{\iff} x = y$$

Déf: Distance

$$\cosh\big(d(x,y)\big) = -\langle x \mid y \rangle$$

Espace Tangent

Soit $x \in \mathcal{H}^n$

$$x^{\perp} := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0\} \overset{\text{Prop.}}{=} T_x\mathcal{H}^n$$

Géodésique

Pour $x \in \mathcal{H}^n$ et $u \in x^{\perp}$ avec $\langle u \mid u \rangle = 1$ on définit:

$$\ell : \mathbb{R} \to \mathcal{H}^n \quad \text{par} \quad t \mapsto \cosh t \cdot x + \sinh t \cdot u$$

Par rapport avec la distance:

$$d\big(\ell(t), \ell(t')\big) = |t' - t|$$

La géodésique de x à y est: $\ell(t) := \cosh t \cdot x + \sinh t \cdot u$ (où $\ell(d(x, y)) = y$). Il faut pour cela poser:

$$u := \frac{1}{\sinh d(x, y)} \cdot y - \frac{\cosh d(x, y)}{\sinh d(x, y)} \cdot x$$

2.2 Le modèle projectif

C'est l'image de la projection de $\mathcal{H}^n$ sur le plan projectif $P^n\mathbb{R}$

On a l'inclusion naturelle: $\mathbb{R}^n \subset P^n\mathbb{R}$ par $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$

Alors naturellement $\mathcal{H}^n \xrightarrow{P} \mathbb{R}^n$ par $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On note alors l'image de la projection $P(\mathcal{H}^n) = B^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\} \subset \mathbb{R}^n \subset P^n\mathbb{R}$. L'inverse $q :\ B^n \to \mathcal{H}^n$, de P se construit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_n \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^n \quad \text{avec} \quad \lambda := \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|_2^2}}$$

Note: On voit que $x \in \mathcal{H}^n \mapsto \frac{1}{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := y \in \mathbb{R}^n$. En étudiant la norme de y:

$$\|y\| = \frac{\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2}{x_{n+1}} \overset{x \in \mathcal{H}^n}{=} \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 1}}{x_{n+1}} < 1$$

Metrique sur B^n

$x, y \in B^n$: $d_p(x, y) := d\big(q(x), q(y)\big)$, i.e. on revient sur la metrique de $\mathcal{H}^n$. Même:

$$\cosh d_p(x, y) = \frac{1 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{1 - \|y\|_2^2}\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}$$

Les géodésiques dans cette représentation sont des droites.

Isométries

Le groupe orthogonal est inclu dans les isométries de $\mathcal{H}^n$, i.e.

$$\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = Id\} = O(n) \subset \mathrm{Isom}(B^n, d_p) = \{f :\ B^n \to B^n \mid f \text{ bijective }, d_p(f(x), f(y)) = d_p(x,y)\}$$

Notons aussi que le groupe linéaire sont les applications qui présèrvent le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.3 Boule de Poincaré

L'idée est d'au lieu de prendre $(0,\ldots,0,1)$ comme point d'ancrage pour la projection, nous prenions $(0,\ldots,0,-1)$. La projection $\pi :\ \mathcal{H}^n \to B^n$ se fera

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x_{n+1}+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L'inverse $\rho :\ B^n \to \mathcal{H}^n$:

$$y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \vdots \\ 2y_n \\ 1+\|y\|^2 \end{pmatrix}$$

Distance

$$d_B(x,y) := d_{\mathcal{H}^n}\big(\rho(x), \rho(y)\big)$$
$$\cosh d_B(x,y) = 1 + \frac{2\|x-y\|^2}{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}$$

Les angles

Il faut se ramener au modèle de l'hyperboloïde pour cela:

$$\langle v \mid w \rangle_y^{B^n} := \langle T_y\rho(v) \mid T_y\rho(w) \rangle = \cdots = \frac{4}{(1-\|y\|^2)^2} \langle v, w \rangle$$

2.4 Le demi-espace supérieur

$$\mathcal{U}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

Idée: projecter la boule de Poincaré sur le demi espace supérieur. On utilise une inversion de cercle/sphere pour cela. L'inversion est donnée par rapport à la sphère centrée en $(0,\ldots,0,-1)$ de rayon $\sqrt{2}$.

$$\iota(x) := 2\frac{x+e_n}{\|x+e_n\|_2^2} - e_n \qquad\qquad B^n \underset{\iota}{\overset{\iota}{\longleftrightarrow}} \mathcal{U}^n$$

Cette projection est telle que: $\partial B^n \mapsto \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$

Distance

$$d_{\mathcal{U}^n}(x,y) := d_{B^n}\big(\iota(x), \iota(y)\big)$$
$$\cosh d_{\mathcal{U}^n}(x,y) = 1 + \frac{\|x-y\|^2}{2x_ny_n}$$

En particulier, sont des isométries:

$$x \mapsto \lambda x \quad \lambda > 0 \qquad\qquad x \mapsto x + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.5 Comparaison des 4 modèles

	$\mathcal{H}^n$	Boule Projective	Boule de Poincaré	$\mathcal{U}^n$
Distance	$\operatorname{arccosh} -\langle x \mid y\rangle$	$\operatorname{arccosh} \dfrac{1-\langle x,y\rangle}{\sqrt{1-\|x\|^2}\sqrt{1-\|y\|^2}}$	$\operatorname{arccosh} 1 + \dfrac{2\|x-y\|^2}{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}$	$\operatorname{arccosh} 1 + \dfrac{\|x-y\|^2}{2x_n y_n}$
Angles	$\arccos\langle u \mid v\rangle$	Calculables mais pas Euclidiens sauf en 0	Euclidiens	Euclidiens
Isométries	$\mathrm{Isom}\mathcal{H}^n \simeq PO(n,1)$	$\mathrm{Stab}(o) \simeq O(n)$	$\mathrm{Stab}(o) \simeq O(n)$	$\mathrm{Stab}(+\infty) \simeq \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^{n-1})$

3 Les isométries de $\mathbb{H}^n$

Rappel de Géom 1

Toute isométrie s'écrit de façon unique:

$$\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \implies \psi = h(x) + w \quad h \in O(n), w = \psi(0)$$

Le groupe $O(n,1)$

$$O(n,1) := \left\{ A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ on a la propriété: $\langle Ax \mid Ay\rangle = \langle x \mid y\rangle$ Le problème est que A n'envoie pas forcément $\mathbb{H}^n$ sur lui-même: $-Id \in O(n,1)$ mais $-Id(\mathbb{H}^n) \neq \mathbb{H}^n$.

Le groupe $PO(n,1)$

Le groupe est obtenu par le quotient de $O(n,1)$ avec $\pm Id$.

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{H}^n \qquad \mathrm{Stab}(x) \simeq O(n)$$

3.1 Isométries de $\mathbb{H}^2$ qui préservent l'orientation

Soit $A \in SL_2\mathbb{R} = \{A \in GL_2\mathbb{R} \mid \det A = 1\}$, alors $f_A : \mathcal{U}^2 \to \mathcal{U}^2$ est une isométrie de $\mathcal{U}^2$ qui préserve l'orientation

$$\text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Thm

$$PSL_2\mathbb{R} \simeq \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$

Points fixes de f_A dans $\mathcal{U}^2$

- $|\operatorname{Tr} A| = 2 \iff$ il existe un unique point fixe sur $\partial\mathcal{U}^2$. On dit que f est parabolique.
- $|\operatorname{Tr} A| > 2 \iff$ il existe 2 points fixes sur $\partial\mathcal{U}^2$. On dit que f est hyperbolique.
- $|\operatorname{Tr} A| < 2 \iff$ il existe un unique point fixe dans $\mathcal{U}^2$. On dit que f est elliptique

3.2 Les réflexions

Déf: Hyperplan

On appelle un hyperplan dans la boule de Poincaré l'intersection $H = S \cap B^n$ où S est une $(n-1)$ sphère (ou hyperplan) perpendiculaire à ∂B^n.

Réflexion

La réflexion par rapport à H est la restriction à B^n de l'inversion par rapport à S.

La réflexion est une isométrie qui renverse l'orientation.

Bissecteur

En prenant deux points $x \neq y \in B^n$ la boule de Poincaré, l'ensemble $H = \{z \in B^n \mid d(x,z) = d(y,z)\}$ est un hyperplan de B^n appelé bissecteur.

La reflexion par rapport à cet hyperplan (r_H) est telle que

- $r_h(x) = y$
- On pose $\dfrac{(1-\|y\|^2)x - (1-\|x\|^2)y}{\|x\|^2 - \|y\|^2} := a$ et $r = \sqrt{\|a\|^2 - 1}$.

$$r_h(z) = r^2 \cdot \frac{z-a}{\|z-a\|} + a$$

Réflexion de paires de points

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$ $\forall i, j$, il existe une isométrie $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ telle que $f(x_i) = y_i \quad \forall i$. De plus f est un produit d'au plus k réflexions.

Proposition sur les isométries

Soit $f \in \mathrm{Isom}\mathbb{H}^n$.

1. Si $f \neq Id$, alors $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid f(x) = x\}$ est contenu dans un hyperplan.
2. Soit H un hyperplan. Si $f|_H = Id_H$, alors ou bien $f = Id$ ou $f = r_H$.

Thm produit de réflexions

Toute isométrie $f \in \mathrm{Isom}\big(\mathbb{H}^n\big)$ est un produit d'au plus $(n+1)$ réflexions.

Définitions

Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, $f \neq Id$.

- f est elliptique si f a au moins 1 point fixe dans $\mathbb{H}^n$.

Si elle n'a pas de points fixes dans $\mathbb{H}^n$:

- f est parabolique si f a exactement un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$.
- f est hyperbolique si f a exactement 2 points fixes dans $\partial\mathbb{H}^n$.

Lemme: Point fixe

Soit $f \in$Isom$(\mathbb{H}^n)$ avec 3 points fixes sur $\partial\mathbb{H}^n$, alors f a au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^n$.

Groupe de similarité

$$\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^{n-1}) := \{\psi:\ \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{t.q.} \quad \|\psi(x)-\psi(y)\| = \lambda\|x-y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

Note: Tout $\psi \in$Sim$(\mathbb{R}^{n-1})$ a la forme $\psi(x) = \lambda g(x) + v$ pour des uniques $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $g \in O(n-1)$ et $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dit autrement, toute similarité est de la forme: rotation·dilatation puis d'une translation.

Prop: Stabilisateur du bord

Soit $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$:

$$\mathrm{Stab}(\xi) \simeq \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Note pour la classification: On définit l'application $F:\ \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^{n-1}) \to \mathrm{Stab}(\infty)$ (importante) par:

$$\psi \mapsto \bar{\psi} \quad \text{où} \quad \bar{\psi}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour donc les uniques λ, g, v vu juste au dessus.

Classification de ces isométries

Soit $Id \neq \bar{\psi} \in$Stab$(+\infty) \simeq$ Sim$(\mathbb{R}^{n-1})$.

- $\bar{\psi}$ est elliptique $\iff$ ψ est une isométrie de $\mathbb{R}^{n-1}$ avec point fixe.
- $\bar{\psi}$ est parabolique $\iff$ ψ est une isométrie de $\mathbb{R}^{n-1}$ sans points fixes.
- $\bar{\psi}$ est hyperbolique $\iff$ ψ n'est pas une isométrie de $\mathbb{R}^{n-1}$ (donc $\lambda \neq 1$).

4 Aires et volumes

4.1 Structure Riemannienne sur $\mathbb{H}^n$

Déf: Métrique Riemannienne

Soit M une variété lisse de dim n. Une métrique Riemannienne sur M attribue à chaque $x \in M$ un produit scalaire sur T_xM et cette attribution est lisse:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & T_xM \\ x & \longmapsto & \langle\cdot,\cdot\rangle_x \end{array}$$

Dans ce contexte lisse veut dire:
Localement M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$

Utilités

- Des longueurs de chemins (lisses):
  Si $\gamma:\ [a,b] \to M$ alors sa longueur est

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

- Une distance Riemannienne:

$$d_{\mathrm{Rie}}(x,y) := \inf_{\substack{\gamma:\,[a,b]\to M \\ \gamma(a)=x,\gamma(b)=y \\ \gamma \text{ lisse par morceaux}}} L(\gamma)$$

- La forme de volume: $\omega \in \Omega^n(M)$.
  C'est l'unique forme différentielle de degré n telle que

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = 1 \quad \forall x \in M, \forall v_1, \ldots, v_n \in T_xM \quad \text{t.q.} \quad \langle v_i, v_j \rangle_x = \delta_{ij}$$

- Le groupe d'isométrie Riemannienne:

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{Riem}}(M) := \left\{ \varphi : M \to M \text{ difféo.} \mid \langle T\varphi(v), T\varphi(w) \rangle_{\varphi(x)} = \langle v, w \rangle_x \quad \forall x \in M, \forall v, w \in T_xM \right\}$$

  Le groupe préserve clairement tous les inarients listé au dessus.

Ex: Sur $\mathbb{H}^n$, on considère le modèle de l'hyperboloïde. La métrique Riemannienne est

$$\langle u, v \rangle_x^{\mathcal{H}^n} = \langle u \mid v \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{H}^n, \forall u, v \in x^\perp$$

Forme de volume dans $\mathcal{U}^n$

La forme de volume est donnée par

$$\omega = \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_n^n} \qquad \forall x \in \mathcal{U}^n$$

Metrique Riemannienne sur $\mathcal{U}^n$

$$\langle v, w \rangle_x^{\mathcal{U}^n} := \langle T\iota(v), T\iota(w) \rangle_{\iota(x)}^{B^n} = \frac{\langle v, w \rangle}{x_n^2}$$

Où donc $\iota : \mathcal{U}^n \to B^n$ est l'inversion dont nous avions parlé.

Note: Cela vient de la métrique Riemannienne sur la boule de Poincaré qui est:

$$\langle v, w \rangle_y^{B^n} = \langle T_y\rho(v) \mid T_y\rho(w) \rangle^{\mathcal{H}^n} = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2} \langle v, w \rangle$$

Où $\rho : B^n \to \mathcal{H}^n$ était l'application envoyant la boule de Poincaré sur l'hyperboloïde.

En passant la métrique Riemannienne dans le modèle projectif B^n est donnée par

$$\langle v, w \rangle_x^{\mathrm{proj}} = \frac{\langle v, w \rangle}{(1 - \|x\|^2)} + \frac{\langle x, v \rangle \langle x, w \rangle}{(1 - \|x\|^2)^2}$$

4.2 Aires dans le plan hyperbolique

Thm: Gauss sur l'aire des triangles

Soit $\triangle \subset \mathbb{H}^2$ un triangle hyperbolique d'angles α, β, γ. Alors

$$\mathrm{Aire}(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Note: L'angle du sommet A est égal à $0 \iff A \in \partial\mathbb{H}^2$.
L'aire d'un triangle avec tous ses sommets sur le bord est toujours égale à π.

La fonction de Labetchevski

Soit $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\theta \mapsto L(\theta) := -\int_0^\theta \log|2\sin t| \, dt$$

Propriétés:

- L est continue.
- L est impaire.
- $L'(\theta) = -\log|2\sin\theta| \implies L'(\theta) = 0 \iff \theta = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}$.
- $L(\pi) = 0$, L est π-périodique.
- $L\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
- $L(2\theta) = 2L(\theta) + 2 \cdot L\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Aire d'un tétraèdre idéal dans $\mathbb{H}^3$

Soit T un tétraèdre idéal dans $\mathbb{H}^3$ d'angles diédraux α, β, γ. Alors

$$\mathrm{Vol}(T) = L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma)$$

Rappel: Si $x_0 = \infty$ alors la somme des angles diédraux: $\sum$ angles diédral en $[x_0, x_i] = \pi$.
Dans un tétraèdre idéal, les angles diédraux opposés sont égaux.

Déf: Tétraèdre régulier

Un tétraèdre de $\mathbb{H}^3$ est dit régulier, si on peut réaliser toutes les permutations de ses sommets par des isométries.

Corrolaire: Soit $T \subset \mathbb{H}^3$ un tétraèdre. Alors $\mathrm{Vol}(T) \leq \mathrm{Vol}(T_{\mathrm{reg}})$ avec une égalité si et seulement si T est un tétraèdre régulier idéal.

5 Sous-groupes de $\mathrm{Isom}\big(\mathbb{H}^n\big)$ et ensembles limites

Lemme du Ping-Pong

Soit Γ un groupe engendré par $a, b \in \Gamma$. Supposons que $\Gamma \circlearrowright X$ un ensemble et $\exists A^+, A^-, B^+, B^- \subset X$ et $x_0 \in X \setminus (A^- \cup A^+ \cup B^- \cup B^+)$ tq:

$$\begin{aligned} a\big(A^+ \cup B^+ \cup B^- \cup \{x_0\}\big) &\subset A^+ \\ a^{-1}\big(A^- \cup B^+ \cup B^- \cup \{x_0\}\big) &\subset A^- \\ b\big(B^+ \cup A^+ \cup A^- \cup \{x_0\}\big) &\subset B^+ \\ b^{-1}\big(B^- \cup A^+ \cup A^- \cup \{x_0\}\big) &\subset B^- \end{aligned}$$

Alors M est le groupe libre sur a, b.

Proposition: Sous groupe isomorphe à $\mathbb{F}_2$

Soit $\Gamma \subset \mathrm{Isom}\,\mathbb{H}^n$. Supposons que Γ contient γ_1, γ_2 isométries hyperboliques telles que $\mathrm{Fix}(\gamma_1) \cap \mathrm{Fix}(\gamma_2) = \varnothing$. Alors Γ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{F}_2$.

5.1 Ensemble limite

Soit $\Gamma \subset \mathrm{Isom}\mathbb{H}^n$ un sous-groupe. $x \in \mathbb{H}^n$. On définit:

$$\begin{aligned} \Lambda_x(\Gamma) :=& \big\{\xi \in \partial\mathbb{H}^n \mid \xi \quad \text{est un point d'accumulation de} \quad \Gamma_x\big\} \\ =& \overline{\Gamma_x} \cap \partial\mathbb{H}^n \end{aligned}$$

Prop: Ensemble limite

$\Lambda_x(\Gamma)$ est indépendant du choix de $x \in \mathbb{H}^n$. On définit alors l'ensemble limite de Γ comme $\Lambda(\Gamma) := \Lambda_x(\Gamma)$ pour un $x \in \mathbb{H}^n$.

Thm sur Γ

$\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, ou bien $|\Lambda(\Gamma)| \leq 2$, ou bien $|\Lambda(\Gamma)| = \infty$.

Déf: Sous groupe élémentaire

Un sous-groupe $\Gamma < \mathrm{Isom}\mathbb{H}^n$ est dit élémentaire s'il existe un sous-ensemble $X \subset \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ invariant par Γ de cardinalité ≤ 2. Donc $g(X) = X$ $\forall g \in \Gamma$ et $|X| \leq 2$.

6 Exercices

6.1 Série 3

Notons que l'inversion $\iota : B^2 \to \mathcal{U}^2$ envie les cercles Euclidiens centrés en 0 dans B^2 à des cercles Euclidiens centrés en $(0, 1)$ dans $\mathcal{U}^2$.

6.2 Série 5

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ est un sous groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

$PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les triplets de point de $\partial\mathbb{H}^2$.

En prenant $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, on mesure facilement la distance:

$$d_{\mathcal{U}^2}(i, ia) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{\|i - ia\|^2}{2i \cdot ia}\right) = \log(a)$$

On peut définir le birapport pour un quadruplet de points (z_1, z_2, z_3, z_4) dans $\mathbb{C}$

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Et de manière pratique la distance dans $\mathcal{U}^2$ est donnée par

$$d_{\mathcal{U}^2}(z, w) = -\log[z, w, z_\infty, w_\infty]$$

Plus deux identités:

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

6.3 Série 6

On peut classifier la composition de deux reflexion $r_{H_1} \circ r_{H_2} := g$.

- $g = Id \iff H_1 = H_2$.
- Si H_1 et H_2 ne s'intersectent ni dans $\mathbb{H}^n$ ni dans $\partial\mathbb{H}^n$. Alors g est hyperbolique.
- Si H_1 et H_2 s'intersectent juste sur $\partial\mathbb{H}^n$. Alors g est elliptique (c'est une translation quand on voit ça dans le modèle $\mathcal{U}^n$).
- Si H_1 et H_2 s'intersectent dans $\mathbb{H}^n$, alors g est elliptique (et est une rotation).

6.4 Série 7

Pour $n \geq 2$, Isom($\mathbb{H}^n$) agit 3-transitivement sur $\partial\mathbb{H}^n$ mais <u>pas 4-transitivement</u> !

Autres

Notons certaines représentations utiles pour les isométries:

- Représente une translation $z \mapsto z + b$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

- Représente une homotétie $z \mapsto a^2 z$
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*$$

- Représente beaucoup de choses (inversion + conjuguaison + homotétie par -1) $z \mapsto \frac{-1}{z}$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Notons que pour
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

  Alors f_A fixe:

  - $\star$ $0 \iff b = 0$
  - $\star$ $+\infty \iff c = 0$