

Homologies:1) Topologies, recolléments, Homéo:Rappels:

Déf: Soit X un ensemble, une topologie sur cet ensemble est une collection $\mathcal{T}$ de sous-ensemble de X .

i) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$

ii) Si U et V sont dans $\mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

iii) Si $U_i, i \in I$ sont dans $\mathcal{T}$ alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

les éléments de $\mathcal{T}$ sont des ouverts.

Si $U \subset X$ est ouvert, $X \setminus U$ est fermé (complémentaire d'un ouvert)

Ex: i) Topo. grossière: $X, \mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

outil grossier

ii) Topo. discrète: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ tout sous-ensemble est ouvert.

outil précis

iii) Soit (X, d) espace métrique ($X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$)

outil intermédiaire

alors $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0$ tq $\forall y \in X, d(x, y) < r_x$

est dans U ($y \in U$).

C-à-d: U est ouvert ssi autour de tout point $x \in U$, il est possible de trouver une petite boule $B(x, r_x)$ incluse entièrement dans U .

Dans le cas iii), on dit que $\mathcal{T}$ est induite ou défini par la métrique. (métrisable)

Exo: 1) Vérifier que iii) définit bien une topologie.

2) " la topo discrète est défini par une métrique

3) " la topo grossière ne provient pas d'une métrique. ($|X| > 1$)

4) Soit $(X, \mathcal{T})$ esp. topo. Soit $A \subset X$ un ss-esp. On définit sur A une topologie de la manière suivante:

$$U \subset A \text{ est ouvert} \Leftrightarrow \exists V \subset X \text{ ouvert tq } V \cap A = U$$

Vérifier que c'est bien une topologie.

(la topologie induite par l'inclusion de $A \subset X$)

Déf: Deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont homéomorphes

$\Leftrightarrow$ il existe une bijection $f: X \rightarrow X'$ continue et dont l'inverse est continu.

Une telle application est un homéomorphisme.

Prop: Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{S})$ deux espaces topologiques. Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue si $\forall$ ouvert V de $\mathcal{S}$, $f^{-1}(V)$ est ouvert pour $\mathcal{T}$.

Exo: Si (X, d_x) et (Y, d_y) sont des esp. métriques, alors $f: X \rightarrow Y$ est continue relativement aux topologies sur X et Y définies par d_x et $d_y \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Démontrer l'équivalence des définitions.

Déf: Un espace topo est connexe si les seuls ss-ens. de X à la fois ouverts et fermés sont X et $\emptyset$.

Exo: Soit $f: X \rightarrow Y$ continue entre deux espaces topologiques. Si X est connexe et f surjective alors Y est connexe.

Déf: Un espace topologique est séparé si pour toute paire de points $x \neq y$ de X , il existe U_x et U_y des ouverts tq $U_x \cap U_y = \emptyset$ ($x \in U_x, y \in U_y$)

Déf: Un esp. topologique est compact s'il est séparé et si pour tout recouvrement de X , $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, par des ouverts U_i de X , il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini, $F \subset I$, $|F| < \infty$
$$X = \bigcup_{j \in F} U_j$$

Homologies:

Exo: Soit $f: X \rightarrow Y$ une appl. continue entre deux espaces topo.

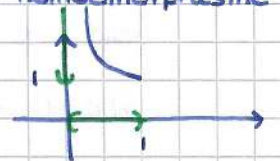
Si X est compact, alors $f(X)$ est compact, avec la topo. induite par l'inclusion.

Rem: Attention, être borné n'est pas invariant sous homéomorphisme

$$(0,1) \longrightarrow (0,\infty)$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

est un homéomorphisme



Par contre, être compact, ou être connexe, est invariant par homéomorphisme.

Sorte de Preuve du non homéomorphisme.

Ex: 1) $[0,1]$, $[0,1)$ ne sont pas homéomorphes car $[0,1]$ est compact et pas $[0,1)$

2) il existe $x, y \in [0,1]$ tq $[0,1] \setminus \{x, y\}$ est connexe ($x \neq y$)
 $([0,1] \setminus \{0,1\} = (0,1) \text{ connexe})$

Par contre, si on retire deux points de $[0,1)$ on obtient un espace pas connexe.

Exo: Prouver que les deux espaces topo. suivant ne sont pas homéo.

• $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ muni de la topo par inclusion dans $\mathbb{C}$ où la topo sur $\mathbb{C}$ est induite par la métrique.

• $[0,1]$

Topologie quotient:

X est un ensemble $\mathcal{Y}$

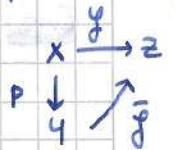
Prop: Soit $p: X \rightarrow \mathcal{Y}$ continue entre un esp. topologique X . On suppose p surjective. Notons $\mathcal{T}$ la topologie sur X . On définit une topologie sur $\mathcal{Y}$ de la manière suivante:

$V \subset \mathcal{Y}$ est ouvert ssi par déf. $p^{-1}(V) \subset X$ est ouvert. qui contient // k + éléments.

C'est la topologie quotient, c'est la plus fine possible

sur $\mathcal{Y}$ qui rend p continue.

de plus, si $f: X \rightarrow Z$ est une appli. continue entre deux esp. topo
 tq $\forall x, x' \in X \quad p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$, alors l'unique
 application $\bar{f}: Y \rightarrow Z$, tq $\bar{f} \circ p = f$, est continue.



Pv: i) Défini bien une topo. (facile)

ii) Vérifions que la topo. quotient est bien la plus fine qui rend p continue.

$W \subset Y$ ouvert d'une topo sur Y qui rend p continue.

Donc $p^{-1}(W)$ est un ouvert de X .

iii) Vérifions que $\bar{f}$ est continue. Soit $W \subset Z$ un ouvert.

But: voir que $(\bar{f})^{-1}(W)$ est ouvert dans Y (c-à-d $p^{-1}((\bar{f})^{-1}(W))$ ouvert),

$$p^{-1}((\bar{f})^{-1}(W)) = (\bar{f} \circ p)^{-1}(W) = f^{-1}(W), \text{ comme } f \text{ continue}$$

$\Rightarrow f^{-1}(W)$ est un ouvert.

Exemples de quotient, recollements:

Soit X esp. topo. Soit R relation d'équivalence sur X

(X est partitionné par ses classes d'équivalences)

Ex: $X = [0, 1]$ avec la topo induite par la métrique euclidienne
 $d(x, y) = |x - y|$. Soit R la relation définie ainsi: $\bar{0} = \bar{1} = \{0, 1\}$
 $\forall x \in [0, 1], x \neq 0, x \neq 1, \bar{x} = \{x\}$.

On considère la projection canonique $p: X \rightarrow X/R, x \mapsto \bar{x}$
 qui est bien surjective. On muni X/R de la topo quotient

Aff: $X/R \cong S^1$ (homéo)

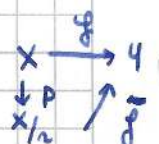
Énoncé général permettant une preuve de l'affirmation:

Prop: $f: X \rightarrow Y$ appli. continue entre esp. topo surjective, X compact.

Soit R la rel. d'équiv. sur X , $x R x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

Soit $\bar{f}$ l'unique appli qui fait commuter le diagramme,

$\bar{f} \circ p = f$. Alors $\bar{f}$ est un homéomorphisme.



Homologies:

Pr: de l'affirmation.

$$\begin{array}{ccc}
 [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & S^1 \\
 \downarrow p & \searrow & \uparrow c \\
 [0,1]/\sim & & \mathbb{C}^{2i\pi t}
 \end{array}$$

$\bar{\gamma}$ est un homéomorphisme.

Pr: de la proposition

il est automatique que $\bar{\gamma}$ est bijective, on a vu qu'elle est continue, il reste à voir $(\bar{\gamma})^{-1}$ continue, ce qui revient à vérifier que si $V \subset X/\sim$ est ouvert alors $\bar{\gamma}(V)$ l'est aussi (donc $\bar{\gamma}$ est ouverte) ce qui équivaut à vérifier que $\bar{\gamma}$ est fermée (image fermé = fermé) car $\bar{\gamma}$ bijective. Si $F \subset X/\sim$ est un fermé, il est compact car $X/\sim$ est compact, car $\text{Im } p = X/\sim$ et p continue et X compact. $X/\sim$ est séparé si γ est propre (c-à-d: $K \subset \mathbb{Z}$ est compact $\Rightarrow \gamma^{-1}(K)$ aussi)

Donc $\bar{\gamma}(F)$ est compact donc fermé

le 24.09.19

Actions de groupes discrets:Soit Γ un groupe qui agit par homéomorphisme sur un esp. topo X On supposera toujours que X est localement compact (ie: $\forall x \in X$ (si U est un voisinage de x), alors $\exists K_x$ compact de X qui est un voisinage de x (K_x contient un ouvert qui contient x))Def: $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \text{Homéo}(X)$ est un homéomorphisme de groupes α de Γ dans $\text{Homéo}(X)$
 $\gamma \mapsto (x \mapsto \alpha(\gamma)(x))$ $\text{Homéo}(X)$ [action de groupe]

Not: $X \xrightarrow{\alpha(y)} X$
 $x \mapsto \alpha(y)(x) = y \cdot x$

Déf: On dit que Γ opère proprement sur X si $\forall K \subset X$ compact, le ss-ensemble $\{y \in \Gamma \mid yK \cap K \neq \emptyset\} \subset \Gamma$ est fini.

Rem: Si une action est propre, alors $\Gamma_x = \{y \in \Gamma \mid y \cdot x = x\}$ est fini car $\{x\}$ compact.

Ex: $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $0 < \lambda < 1$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Homéo}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \quad n \mapsto \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

Cette action n'est pas propre.

Si on restreint cette action à $\mathbb{R}^2 \setminus \text{les 2 axes}$, alors elle devient propre.

[les deux affirmations sont à démontrer]

Not: Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie par l'action.

$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma x = y$. Les classes d'équiv. sont les orbites de l'action. P.ex: l'orbite de x se note $\Gamma x = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$

On note $\Gamma \backslash X$ l'espace des classes $X/\sim$, c-à-d l'esp. quotient défini par $\sim$ muni de la topo quotient.

Ex: $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Homéo}(\mathbb{R})$
 $n \mapsto (x \mapsto x+n)$ est une action propre.

En effet, si $K \subset \mathbb{R}$ est compact. Soit $R \gg 0$ tq $B(0, R) \supset K$

$\{n \in \mathbb{Z} \mid B(0, R) + n \cap B(0, R) \neq \emptyset\}$ est fini

$$\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} \xrightarrow[\text{Homéo}]{\cong} S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad (\text{Exo à faire})$$


on recolle 0 et 1, car ils ont la même classe.

On peut procéder ainsi:
 $\mathbb{R} \rightarrow S^1$
 $t \mapsto e^{2i\pi t}$ est un homom de grp surjectif
le noyau est $\mathbb{Z}$
 $\Rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ isom de grp
note à mtq continu
+ inverse continu

Homologie:

le 24.09.19

Ex: $X = \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \text{Homéo}(X)$ $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$
 $\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2 \cong S^1 \times S^1 = T^2$ Homéo, on fait isom. de grp

Prop: Si Γ opère proprement sur X localement compact et séparé alors $\Gamma \backslash X$ reste séparé.

Preuve: à maîtriser à 100%

$$\gamma K = \{ \gamma \cdot x \mid x \in K \}$$

1^{er} pas: Montrons que si $K \subset X$ est compact alors $\Gamma K = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ est fermé

Pour prouver l'affirmation du 1^{er} pas, on considère $L \subset X$ compact

$$L \cap \Gamma K \text{ est compact car: } L \cap \Gamma K = L \cap \bigcup_{\gamma: \gamma K \cap L \neq \emptyset} \gamma K$$

$$\{ \gamma: \gamma K \cap L \neq \emptyset \} \subset \{ \gamma: \gamma(K \cup L) \cap (K \cup L) \neq \emptyset \} \text{ est fini car}$$

l'action est propre.

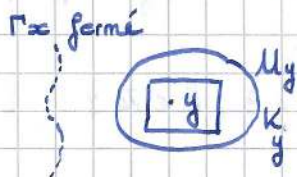
Lemme: X loc. compact, $F \subset X$, F fermé $\Leftrightarrow \forall$ compact L de X $F \cap L$ est compact

[à démontrer en exercice] On applique le lemme et on déduit le 1^{er} pas.

2^{ème} pas: Soit Γx et Γy deux orbites distinctes (donc disjointes)

Γx est fermé, car $\{x\}$ compact (1^{er} pas).

Il donc un voisinage compact K_y de y tq $K_y \cap \Gamma x = \emptyset$



Car $X \setminus \Gamma x$ ouvert, $y \in X \setminus \Gamma x$ et X loc. compact.

$$\text{Donc } \Gamma K_y \cap \Gamma x = \emptyset \quad (\text{si } \gamma \ell_y = \gamma' x \Rightarrow \ell_y = \gamma^{-1} \gamma' x \in \Gamma x \text{ et } K_y \cap \Gamma x \neq \emptyset \text{ ?})$$

D'après le 1^{er} pas, ΓK_y est fermé.

$U_x = X \setminus \Gamma K_y$ est ouvert, contient Γx et est invariant par Γ .

Soit V_y voisinage ouvert de y dans K_y .

Alors ΓV_y est un ouvert (réunion d'ouvert) qui contient Γy p.

Donc $\Gamma U_x \cap \Gamma V_y = \emptyset$ et $\Gamma \backslash X$ est séparé.

Ex:

1) $\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \text{Homéo}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right)$$

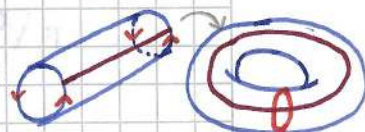
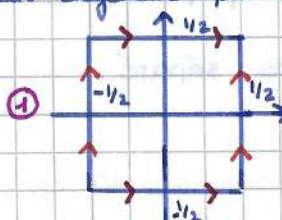
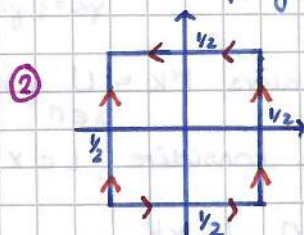
$$\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2 = \mathbb{T}^2$$

2) $\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y+1 \end{pmatrix} \right\rangle$

le ss-groupe des isométries du plan engendré par ces 2 transformations

$$\Gamma \xrightarrow{\alpha} \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$$

$$\gamma \mapsto \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$



bouteille de Klein.

Revêtements:

Déf: un revêtement d'un esp. topo X est un esp. topo Y muni d'une application

$p: Y \longrightarrow X$ surjective, tq $\forall x \in X$, $\exists U_x$ un voisinage ouvert de x

tq $p^{-1}(U_x)$ est réunion disjointe d'ouverts U_i de Y tq $p|_{U_i}$ est un homéo sur U_x .

Ex: 1) $Y = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{p} \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$$

on peut prendre n'importe quel ouvert

$$U_{\alpha\beta} = \{w \in \mathbb{C}^* \mid \alpha < \arg w < \beta, |\alpha - \beta| < 2\pi\} \subset \mathbb{C}^*$$

à vérifier

$$p^{-1}(U_{\alpha\beta}) = \left\{ z = x + iy \mid \alpha < y + 2k\pi < \beta, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[\text{visuellement } \mathbb{C} \text{ recouvre } \mathbb{C}^* \text{ une infinité de fois} \right]$$

2) $\mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un revêtement obtenu en

$$\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$$

restreignant l'ex 1.

Homologie:

le 01.10.19

Prop: Soit X un esp. topo. ^{séparé} V localement compact. Soit Γ un groupe qui opère sur X de manière propre et libre ($\forall x \in X, \Gamma_x = \{ \gamma \in \Gamma : \gamma x = x \} = \{ e \}$).
Alors $p: X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est un revêtement ($\Gamma \backslash X$ est muni de la topo quotient)
 $x \mapsto \Gamma x = \bar{x}$

Preuve: Montrons que chaque point $x \in X$ admet un voisinage ouvert V

t.q si $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq id, \gamma V \cap V = \emptyset$

Pour le prouver, soit K voisinage compact de x (loc. compact)

$\{ \gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset \} = \{ \gamma_1 = id, \gamma_2, \dots, \gamma_n \}$ (propre)

$x_i := \gamma_i x \quad i=1 \dots n$

$x_i = x_j \Rightarrow i=j$ (libre)

Comme X est loc. compact et séparé, $\exists K_i$ voisinage compact de

x_i ($K_i \cap K_j \neq \emptyset \Rightarrow i=j$)

$L := K \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \gamma_i^{-1} K_i \right)$ c'est un voisinage compact de x

($\gamma_i^{-1} K_i$ est homéomorphe à K_i et $x_i = \gamma_i x \in K_i \Rightarrow \gamma_i^{-1} x_i = x$)

Aff: $L \cap \gamma L = \emptyset \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{ e \}$

Pv: 1^{er} cas: $\gamma \notin \{ \gamma_1, \dots, \gamma_n \}$ alors $\gamma K \cap K = \emptyset$

et $\gamma L \cap L \subset \gamma K \cap K = \emptyset \Rightarrow \gamma L \cap L = \emptyset$

2^{ème} cas: $\gamma \in \{ \gamma_1, \dots, \gamma_n \} \setminus \{ \gamma_1 \}, \gamma = \gamma_i \quad i=2 \dots n$

$\gamma_i L \cap L \subset K_i \cap K_1 = \emptyset$ □

On définit $V = \text{intérieur de } L = \overset{\circ}{L}$ c'est bien un vois. ouvert de x

$U = p(V)$ alors $p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma V$ réunion disjointe, donc

$U \subset \Gamma \backslash X$ est ouvert puisque Γ est réunion d'ouverts

la restriction de p à γV , $p|_{\gamma V}: \gamma V \rightarrow U$ est une bijection

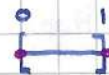
continue, $p|_{\gamma V}$ est ouverte.

Ex: le plus simple avec M infini

$$X = \mathbb{R}, M = \mathbb{Z}, g = n \in \mathbb{Z}, gx = x + n$$

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{g \in \mathbb{Z}} gV$$

$$\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} = S^1$$



Déf: Un tel revêtement (obtenu à l'aide d'une action propre et libre de M un groupe) s'appelle un revêtement galoisien.

Le Groupe Fondamental:

Déf: Soit X un e.t., un chemin de X est une application continue $c: [0,1] \rightarrow X$

Déf: Une homotopie entre deux chemins $c_0: [0,1] \rightarrow X$ et $c_1: [0,1] \rightarrow X$ est une application continue $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ telle que $H(s,t) \mapsto H(s,t) = c_s(t)$ $H(0,t) = c_0(t)$ et $H(1,t) = c_1(t)$.

Supposons que les extrémités des chemins sont fixées,

$$H(s,t) = c_s(t), H(s,0) = x_0, H(s,1) = x_1$$

alors on parle d'homotopie avec extrémités fixes.

Prop: Soit $x, y \in X$ e.t. Sur l'ensemble des chemins tq $c(0) = x$ et $c(1) = y$, on considère la relation $c_0 \sim c_1$ "être homotope relativ. aux extrémités". C'est une relation d'équivalence.

Homologie :

le 01.10.19

Preuve : $C_0 \sim C_0$: réflexif, $C_s(t) = C_0(t) \forall s, \forall t$

$C_0 \sim C_1 \Rightarrow C_1 \sim C_0$: symétrique, $\tilde{H}(s,t) = H(1-s,t)$

$C_0 \sim C_1, C_1 \sim C_2 \Rightarrow C_0 \sim C_2$: transitif,

[voir Al-Géom]

séparé $[0,1]$ de s en 2 et aller 2 fois + vite et composer les homotopies.

Prop : • il existe une opération naturelle de multiplication ou composition des chemins.

• cette opération respecte la relation d'homotopie.

Précisément, soit X un e.t., soit $c, d : [0,1] \rightarrow X$ deux chemins de X tels que $c(1) = d(0)$, on définit la multiplication :

$$(c \cdot d)(t) = \begin{cases} c(2t) & t \in [0, 1/2] \\ d(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Si c_0 et d_0 sont 2 chemins tels que $c_0(1) = d_0(0)$, si $c_0 \sim c_1$,

(c_1 est homotope à c_0 en fixant les extrémités) et si $d_0 \sim d_1$,

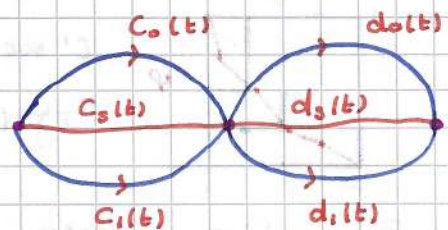
($d_1 \sim d_0$) alors $c_0 d_0 \sim c_1 d_1$ ($c_0 d_0 \sim c_1 d_1$)

Preuve :

$H(s,t) = (c_s \cdot d_s)(t)$ définit

une homotopie entre $c_0 \cdot d_0$ et

$c_1 \cdot d_1$ qui fixe les extrémités.



Def : Soit (X, x_0) un e.t. pointé. Un lacet basé en x_0 est un chemin $c : [0,1] \rightarrow X$ tq $c(0) = x_0 = c(1)$.

On note $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopies des lacets basés en x_0 .

Ainsi un élément $[c] \in \pi_1(X, x_0)$ est une classe d'homotopie, si $c : [0,1] \rightarrow X$ est un lacet en x_0

$$[c] = \{ \gamma : [0,1] \rightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \text{ et } c \sim \gamma \}$$

Prop: Soit X un espace topo c.p.a. Soit $x_0 \in X$.

L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de $\cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

est un groupe, nommé le groupe fondamental de X .

Preuve:

Lemme: Soit $c : [0,1] \rightarrow X$ un chemin et soit $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$ tq $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$ et φ est continue.

Alors $c \circ \varphi$ est homotope à c .

Pv: $\varphi_s(t) = \underbrace{(1-s)\varphi(t) + st}_{\text{paramétrise un segment à } t \text{ fixé entre } \varphi(t) \text{ et } t} \quad 0 \leq s \leq 1$

$s=0 : \varphi_0(t) = \varphi(t)$

$s=1 : \varphi_1(t) = t \quad \text{id}$

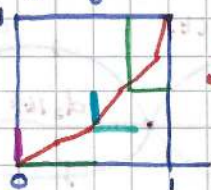
$H(s,t) = (c \circ \varphi_s)(t)$



Morale: on ne change pas la classe d'homot. de c en le reparamétrant.

• Associativité: Soient γ, g, h trois chemins tels que $\gamma(1) = g(0)$ et $g(1) = h(0)$

$\gamma \cdot (g \cdot h)$ est une reparamétrisation de $(\gamma \cdot g) \cdot h$ par φ

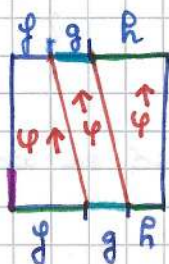


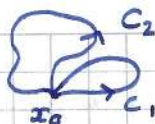
C'est-à-dire :

$$\gamma \cdot (g \cdot h) = [(\gamma \cdot g) \cdot h] \circ \varphi$$

Rem: Si on démontre l'égalité, alors en appliquant le lemme

on obtient l'associativité dans $\pi_1(X, x_0)$



Homologie :

Rappel: On a défini $\pi_1(X, x_0)$

et son opération $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$

$$([c_1], [c_2]) \longmapsto [c_1 \cdot c_2]$$

qui est associative (montrer en série) (Singer-Thorpe: excellent livre de topo élémentaire)

Preuve: (Suite)

- Element neutre: $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ continue, soit $c: [0,1] \rightarrow X$
 $t \mapsto \gamma(t)$

alors $\gamma \circ c = \gamma \circ \varphi$ où



φ envoie $[0, \frac{1}{2}]$

sur $[0,1]$



φ est déterminée par le graphe

De plus, $c: [0,1] \rightarrow X$, alors $c \cdot \gamma = \gamma \circ \varphi$ où φ est donnée



par φ continue et affine par morceaux.



- Conclusion, le lacet constant $c: [0,1] \rightarrow X$, $t \mapsto x_0$

alors $\forall c: [0,1] \rightarrow X$: $c(0) = c(1) = x_0$

$$[c \cdot x_0] \cdot [c] = [c] \cdot [c \cdot x_0] = [c]$$

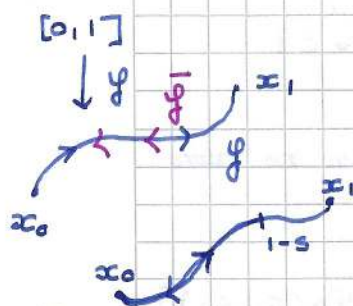
En effet, on a vu que $\gamma \circ \varphi \approx \gamma$

(la reparam par φ ne change pas les classes d'équiv.)

- Inverse: $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ continue, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$

on définit $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$

Affirmation: $\gamma \cdot \bar{\gamma} \sim c_{x_0}$



$$h_s := \gamma_s \cdot \bar{\gamma}_s \text{ où } \gamma_s|_{[0,1-s]} = \gamma|_{[0,1-s]} \text{ et } \gamma_s|_{[1-s,1]} = \gamma(1-s)$$

$$h_s(t) = (\gamma \cdot \bar{\gamma})(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$h_s(t) = x_0 \quad \forall t \in [0,1]$$

Donc si $x_0 = x_1$

$$\rightarrow [\gamma \cdot \bar{\gamma}] = [\bar{\gamma} \cdot \gamma] = [c]_{x_0}$$

Prop: Soit X esp. topo, soit $x_0, x_1 \in X$. Supposons que

$$d: [0,1] \rightarrow X : d(0) = x_0 \text{ et } d(1) = x_1.$$

Supposons que c est un lacet en x_1 .

$$\text{On définit : } C(d) : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[c] \longmapsto [d \cdot c \cdot \bar{d}]$$

: une application bien définie qui est un isomorphisme de groupe.

Corollaire: Si X est c.p.a, le groupe fond. de X est intrinsèquement associé à X : ne dépend pas du choix d'un point base.

Preuve (de la proposition)

L'application est bien définie si c_s est une homotopie de lacets basés en x_1 (i.e: $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ $H(s,t) = c_s(t)$ continue $H(s,0) = H(s,1) = x_1$)
alors $d \cdot c_s \cdot \bar{d}$ est une homotopie de lacets basés en x_0 .

$$\text{C'est un homomorphisme : } C(d)([c_1][c_2]) = C(d)([c_1 c_2]) = [d c_1 c_2 \bar{d}]$$

$$= [d c_1 \bar{d} d c_2 \bar{d}] = [d c_1 \bar{d}] [d c_2 \bar{d}] = C(d)([c_1]) C(d)([c_2])$$

$$C(\bar{d}) \text{ est l'inverse de } C(d) \quad [\text{à vérifier}]$$

□

Prop: Soit $f: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ une application continue entre e.t.

pointés, c-à-d on a choisi $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On demande que

$$f(x_0) = y_0. \text{ Alors } f \text{ définit un homomorphisme:}$$

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad [c] \longmapsto [f \circ c]$$

Preuve: C'est bien défini: si c_s est une homotopie de lacets en x_0 alors

$f \circ c_s$ est une homotopie de lacets en y_0 .

$$\text{C'est un homom. : } f_*([c_1][c_2]) = f_*([c_1 c_2]) = [f \circ (c_1 c_2)]$$

$$= [f \circ c_1 \cdot f \circ c_2] = [f \circ c_1] \cdot [f \circ c_2] = f_*([c_1]) \cdot f_*([c_2])$$

Homologie:

le 08.10.19

Conclusion: π_1 est un foncteur de la catégorie des espaces topo pointés dans la catégorie des groupes.

Cela signifie trois choses:

- à tout esp. topo. pointé, on associe un groupe:

$$(X, x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0)$$

- à toute application continue qui préserve les pts bases correspond un homomorphisme de groupe

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

- Ces associations vérifient:

$$(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

à vérifier

$$\left. \begin{array}{ccccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) & \xrightarrow{g} & (Z, z_0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(Z, z_0) \end{array} \right\} (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

$f(x_0) = y_0$ et $g(y_0) = z_0$

Lemme: pour oublier temporairement les pts bases.

Soit $\varphi: [0,1] \times X \rightarrow Y$ une application continue, $x_0 \in X$
 $(s, x) \mapsto \varphi_s(x)$

Soit $d: [0,1] \rightarrow Y$, Soit $C(d)$ l'isomorphisme de groupe
 $s \mapsto \varphi_s(x_0)$

$$\pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi_0(x_0))$$

$$[c] \mapsto [d \circ c \circ \bar{d}]$$

Alors le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(\varphi_1)_*} & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\ & \searrow (\varphi_0)_* & \\ & & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \end{array}$$

$$C(d) \cdot (\varphi_1)_* = (\varphi_0)_*$$

On remarque que le lemme prouve en particulier

$$(\varphi_0)_* \begin{matrix} \text{inj.} \\ \text{surj.} \\ \text{bij.} \end{matrix} \Leftrightarrow (\varphi_1)_* \begin{matrix} \text{inj.} \\ \text{surj.} \\ \text{bij.} \end{matrix}$$

puisque id est un isomorphisme.

Preuve: du Lemme:

Soit $c: [0,1] \rightarrow X$ lacet tq $c(0) = c(1) = x_0$

on doit prouver que $c(1) \circ (\varphi_1)_* [c] = (\varphi_0)_* [c]$

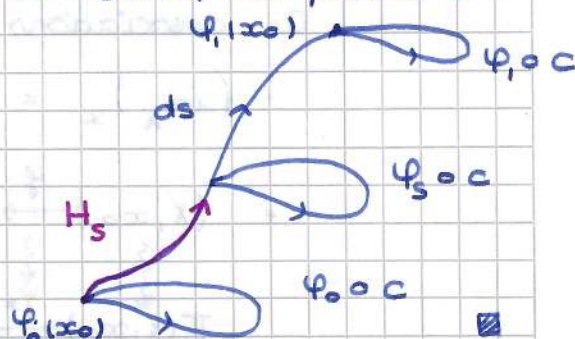
c-à-d: $d(\varphi_1 \circ c) \bar{d} \sim \varphi_0 \circ c$ (homot de lacets en $\varphi_0(x_0)$)

$$(t \mapsto \underbrace{\varphi_{st}(x_0)}_{H_s}) (\varphi_s \circ c) (t \mapsto \varphi_{st}(x_0))$$

est une homotopie de chemins en $\varphi_0(x_0)$ de param. s

si $s=0$, on a $\varphi_0 \circ c$

si $s=1$, on a $d(\varphi_1 \circ c) \bar{d}$



Thm: X et Y esp. top. connexes par arc qui ont le même

type d'homotopie

Soit X et Y deux esp. topo. On dit que X a le même type d'homotopie que Y si

$\exists f: X \rightarrow Y$ continue et $g: Y \rightarrow X$ tq $g \circ f \sim \text{id}_X$ et $f \circ g \sim \text{id}_Y$.

Alors ils ont le même groupe fondamental.

$$\forall x_0 \in X, \forall y_0 \in Y, \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

Déf: $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ appl. entre e.t. alors $f_0 \sim f_1$ (homotopie)

si $\exists H: [0,1] \times X \rightarrow Y$ continue tq $H_0(x) = f_0(x)$
 $(s, x) \mapsto H_s(x)$ et $H_1(x) = f_1(x)$

(relation d'équivalence)

Rap: Lemme: φ_s une homotopie d'applications de X dans Y

$$\pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \xrightarrow[\sim]{C(d)} \pi_1(Y, \varphi_0(x_0))$$

$$[c] \longmapsto [dc\bar{d}] \quad \text{où } d: [0,1] \rightarrow Y \quad s \longmapsto \varphi_s(x_0)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{alors } \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(\varphi_1)_*} & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\ & \searrow (\varphi_0)_* & \downarrow C(d) \\ & & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \end{array}$$

$$\text{En particulier, } (\varphi_1)_* \text{ est } \begin{array}{|l} \text{inj} \\ \text{surj} \\ \text{bij} \end{array} \Leftrightarrow (\varphi_0)_* \text{ est } \begin{array}{|l} \text{inj} \\ \text{surj} \\ \text{bij} \end{array}$$

Conséquence:

Thm: X, Y c.p.a. $\hat{m}$ type d'homotopie $X \sim Y$

$$\Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0) \text{ isom. de groupes.}$$

Preuve: Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Y \rightarrow X$ continues telles que

$$\psi \circ \varphi \sim \text{id}_X \text{ et } \varphi \circ \psi \sim \text{id}_Y \quad (\varphi \text{ et } \psi \text{ existent car } X \sim Y)$$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(\varphi)_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{(\psi)_*} \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0)))$$

(*)

$$\xrightarrow{(\psi \circ \varphi)_*} \pi_1(X, x_0)$$

$$(\psi \circ \varphi)_* \text{ est un isomorphisme, donc } (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

est un isomorphisme, donc φ_* est surjective.

De $\hat{m}$ $(\varphi \circ \psi)_*$ est un isomorphisme (on applique le lemme

$$\text{avec } (\varphi_0)_* = \text{id}_Y \text{ et } (\varphi_1)_* = (\varphi \circ \psi)_*)$$

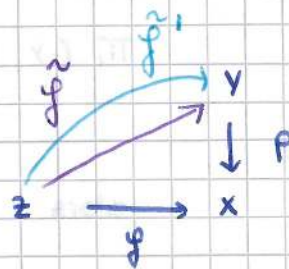
$$\Rightarrow \varphi_* \circ \psi_* \text{ est un isom.} \Rightarrow \psi_* \text{ injective.}$$

□

Revêtements et relevés d'homotopie :

But : Calculer $\pi_1(X, x_0)$

Prop : Unicité du relèvement



Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement.

Soit Z compact, connexe et localement connexe.

Soit $f : Z \rightarrow X$ une application continue.

Soit $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ un relèvement de f .

C'est-à-dire que $\tilde{f}$ est continue et $p \circ \tilde{f} = f$

Soit $\tilde{f}'$ un autre relèvement de f .

Alors :

ou bien, $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z) \quad \forall z \in Z$

ou bien, $\tilde{f}(z) \neq \tilde{f}'(z) \quad \forall z \in Z$

Preuve : $A := \{ z \in Z : \tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z) \}$

Rem : Soit $z \in Z$, soit U vois. ouvert de $f(z)$ dans X ,

$$p^{-1}(U) = \bigcup_i U_i, \quad U_i \text{ disjointes}, \quad p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U \text{ homéo}$$

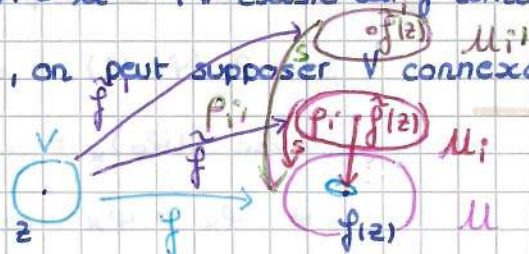
(un tel U existe par hyp. d'un revêtement)

Soit V un vois. de z , $f(V) \subset U$ (V existe car f continue)

Comme Z est loc. connexe, on peut supposer V connexe.

App : A est fermé

Pv : Mtq $Z \setminus A$ est ouvert



Soit $z \notin A$. Alors $\exists i$ tq $\tilde{f}(V) \subset U_i$ et $\exists i'$ tq $\tilde{f}'(V) \subset U_{i'}$

exercice ↓ avec $i \neq i'$

Exc : Soit $\psi : X \rightarrow Y$ application continue. Supposons

X connexe et que $\psi(X) \subset U_1 \cup U_2$ où U_1, U_2 sont

2 ouverts disjoints, alors ou $\psi(X) \subset U_1$ ou $\psi(X) \subset U_2$.

Pv: (Suite)

Comme $[0,1]$ est compact, on peut choisir $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

$$c([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k \text{ où } p^{-1}(U_k) = \bigsqcup_i U_k^i$$

U_k ouvert de X et $p_k^i: U_k^i \xrightarrow{\sim} U_k$ restriction de p à U_k^i
 $y_0 \in U_0^{i_0}$ pour un certain i_0 .

Supposons $\tilde{c}$ déjà construit sur $[0, t_k]$

$$\tilde{c}(t_k) \in U_k^{i_0} \text{ pour } t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \tilde{c}(t) = (p_k^{i_0})^{-1}(c(t))$$

2^{ème} Cas: Soit $z \in Z$

On pose $\tilde{F}(z, t) = \tilde{c}_z(t)$ où $\tilde{c}_z$ est l'unique relèvement du chemin

$c_z(t) = F(z, t)$. (on voit $F: Z \times [0,1] \rightarrow X$ comme une famille de chemins indexée par l'ensemble Z)

$$\text{tq } \tilde{c}_z(0) = \tilde{F}_0(z).$$

$\tilde{F}$ ainsi définie vérifie $p \circ \tilde{F}(z, t) = p(\tilde{c}_z(t)) = c_z(t) = F(z, t)$

$$\tilde{F}(z, 0) = \tilde{c}_z(0) = \tilde{F}_0(z).$$

$\tilde{F}$ ainsi définie est continue (Z compact aide à prouver)

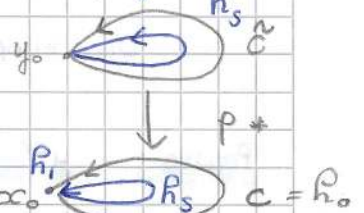
(Pas démontrer au cours)

le 22.10.19

Cor: (du relèvement des homotopies)

Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. Soit $y_0 \in Y$, soit $x_0 := p(y_0) \sim_{h_s} y_0$

Alors $p_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est injectif.



Preuve: On va prouver que $\text{Ker } p_* = \{e\}$.

Soit $\tilde{c}: [0,1] \rightarrow Y$ lacet en y_0 . Donc $c := p \circ \tilde{c}$ est un lacet

de X basé en x_0 . Si $h: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ est une homotopie

entre $c = h_0$ et le lacet constant $c_{x_0} = h_1$, c-à-d si $[c] \in \text{Ker } p_*$,

D'après la proposition sur le relèvement des homotopies, $\exists \tilde{h}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow Y$

un relèvement de h tq $\tilde{h}_0 = \tilde{c}$.

Homologie:

le 22.10.19

Preuve: (Suite)

Pour tout $s \in [0,1]$, $\tilde{h}_s: [0,1] \rightarrow Y$ est un lacet en x_0 ,

Les deux applications

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \rightarrow Y & \text{relèvent} & [0,1] \rightarrow X \\ s \mapsto \tilde{h}_s(0) & \text{respectivement} & s \mapsto \tilde{h}_s(0) \\ s \mapsto \tilde{h}_s(1) & & s \mapsto \tilde{h}_s(1) \end{array}$$

$$\text{de plus } \tilde{h}_0(0) = y_0 = \tilde{h}_0(1)$$

Par unicité du relèvement des chemins : $\tilde{h}_s(0) = y_0 \quad \forall s \in [0,1]$
 $\tilde{h}_s(1) = y_0 \quad \text{--- " ---}$

en effet $c_{y_0} = y_0$ est aussi un relèvement

de $(s \mapsto \tilde{h}_s(0) = x_0)$ et de $(s \mapsto \tilde{h}_s(1) = x_0)$ avec $\hat{m}$ point de départ y_0 . Donc $\{\tilde{h}_s\}_{s \in [0,1]}$ est une famille de lacets basés en y_0 ,

[intuitivement : $p^{-1}(\{x_0\})$ est discret dans Y]

telle que $\tilde{h}_0 = \tilde{c}$ par construction,

$\tilde{h}_1$ relève de $\tilde{h}_1 = c_{x_0} \equiv x_0$ donc $\tilde{h}_1 = c_{y_0} \equiv y_0$.

$$\text{Donc } [\tilde{c}] = [c_{y_0}] = e \in \pi_1(Y, y_0)$$

$$\text{Donc } \text{Ker } p_* = \{e\}$$

□

Cor: (de l'Existence et l'unicité du relèvement)

Supposons que G agit sur Y de manière libre et propre,

Y est loc. compact et c.p.a. Soit $p: Y \rightarrow G/Y = X$ le

revêtement associé. Soit $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $p(y_0) = x_0$.

Il existe un homomorphisme $\phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ et une

suite exacte de groupes : $\{1\} \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\phi} G \rightarrow \{1\}$

[en d'autres termes p_* est injectif, ϕ est surjectif et

$$\text{Im } p_* = \text{Ker } \phi \quad \perp$$

En d'autres termes, si Y est simplement connexe

$(\pi_1(Y, y_0) = \{1\})$ alors on obtient un isomorphisme

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow[\cong]{\phi} G$$

Preuve:

Rem: Dans le cas où $\pi_1(Y, y_0) = \{e\}$, $\text{Im } p_* = \{1\} \subset \pi_1(X, x_0)$ mais $\text{Im } p_* = \text{Ker } \phi$ donc $\text{Ker } \phi = \{1\}$ donc ϕ est injectif, comme ϕ est toujours surjectif, c'est un isomorphisme.

Illustration:

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, en effet $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ où

$G = \mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto [0] = x_0$

$$(n, x) \mapsto n + x$$

$\mathbb{R}$ a le même type d'homotopie qu'un point.

Donc $\pi_1(\mathbb{R}, y_0) = \{1\}$ ($y_0 = 0$) donc le corollaire dit

$$\pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow[\cong]{\phi} \mathbb{Z}$$

la fibre = préimage d'un point

Construisons ϕ . Soit $c: [0,1] \rightarrow X$ un lacet en x_0 , soit $\gamma = [c]$

sa classe d'homotopie $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. D'après la prop. sur les

relevés, $\exists!$ relevé $\tilde{c}: [0,1] \rightarrow Y$ de c tq $\tilde{c}(0) = y_0$.

Comme G opère librement, $\exists!$ $\phi(\gamma) \in G$ tq $\phi(\gamma) \cdot y_0 = \tilde{c}(1)$.

en effet, $p(\tilde{c}(1)) = c(1) = x_0$

$$p(\tilde{c}(0)) = c(0) = x_0$$

Donc $\tilde{c}(1) \in p^{-1}(\{x_0\})$ or $p^{-1}(\{x_0\})$ est la

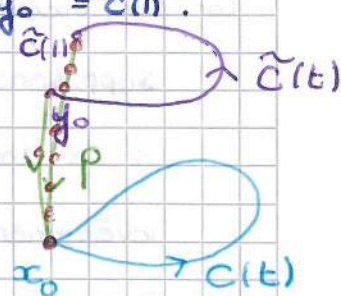
classe d'équivalence de y_0 qui est l'orbite

de y_0 sous l'action de G .

Ainsi, comme $\tilde{c}(1)$ et y_0 sont dans la même orbite, il est bien

correct qu'il existe $g \in G: g \cdot y_0 = \tilde{c}(1)$ de plus ce $g \in G$

est unique, car l'action est libre.



Homologies:Preuve: (Suite)On note cet unique élément de G , $\phi(\gamma)$.Vérifions que la notation $\phi(\gamma)$ est bien justifiée :c-à-d que si c_1 est un lacet en x_0 homotope à c_0 ,alors $\phi(c_0) = \phi(c_1) = \phi(\gamma)$ où $\gamma = [c_0] = [c_1]$.

$$[c] = \gamma \in \pi_1(X, x_0).$$

Voyons que $\tilde{c}_0(1) = \tilde{c}_1(1)$.Soit $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$ une homotopie de lacets en x_0 t.q

$$h_1 = c_1, \quad h_0 = c_0.$$

 $(s, t) \mapsto \hat{h}(s, t)$ l'unique relèvement de $(s, t) \mapsto h(s, t)$

$$\text{t.q. } \hat{h}(0, t) = \tilde{c}_0(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

$$\text{D'une part, } \boxed{\hat{h}_s(0) = y_0} \quad \forall s \in [0, 1] \quad *$$

en effet : $s \mapsto \hat{h}_s(0)$ relève $h_s(0) \equiv x_0$ et $\hat{h}_0(0) = \tilde{c}_0(0) = y_0$,l'unicité du relèvement permet de déduire $\hat{h}_s(0) = y_0 \quad \forall s \in [0, 1]$

$$\text{et } \boxed{\hat{h}_s(1) = \tilde{c}_0(1)} \quad \forall s \in [0, 1] \quad **$$

en effet : $s \mapsto \hat{h}_s(1)$ relève $h_s(1) = c_s(1) = x_0$ et

$$\hat{h}_0(1) = \tilde{c}_1(1) = \tilde{c}_0(1)$$

Mais $t \mapsto \hat{h}_1(t)$ relève $t \mapsto h_1(t) = c_1(t)$ et $\hat{h}_1(0) = y_0$

$$\text{et } \hat{h}_1(1) = \tilde{c}_0(1) \quad ***$$

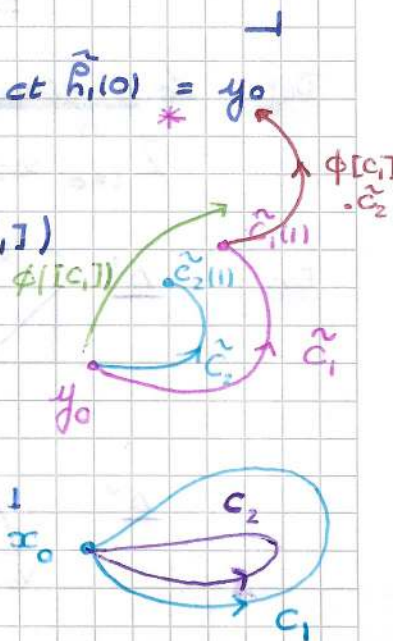
$$\text{Donc } \phi(\gamma) = \phi([c_1]) = \phi([c_0]) = \phi([h_1])$$

 ϕ est un homom, c_1, c_2 des lacets en x_0 .Le relèvement $\tilde{c}_1 \cdot \tilde{c}_2$ de $c_1 \cdot c_2$ partant de y_0

$$\text{est le lacet } \tilde{c}_1 \cdot \tilde{c}_2(t) = \begin{cases} \tilde{c}_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \phi([c_1]) \tilde{c}_2(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{où } \tilde{c}_1 \text{ est le relèvement de } c_1 \text{ partant de } y_0 \\ \text{où } \tilde{c}_2 \text{ " " " " } c_2 \text{ " " " " } \end{array} \right\} *$$

$$* \text{ ceci car } p(\phi([c_1]) \tilde{c}_2) = p(\tilde{c}_2) = c_2$$



Preuve: (Suite)

Ainsi le relevé de c_2 qui part de $\tilde{c}_1(1)$ est $\phi([c_1])\tilde{c}_2$.

$$\text{On a : } \boxed{\phi([c_1][c_2])} \stackrel{\text{mult. des } [..]}{=} \phi([c_1, c_2]) \stackrel{\text{def de } \phi}{=} \tilde{c}_1\tilde{c}_2(1) = (\phi([c_1])\tilde{c}_2)(1) \\ = \phi([c_1])\tilde{c}_2(1) = \boxed{\phi([c_1])\phi([c_2])}$$

ϕ surjective :

Soit $g \in G$, comme Y est c.p.a. $\exists \tilde{c}: [0,1] \rightarrow Y$ tq $\tilde{c}(0) = y_0$

et $\tilde{c}(1) = gy_0$.

$\tilde{c}$ est un relevé de $c = p \circ \tilde{c}$ qui est un lacet en x_0

car $p(gy_0) = p(y_0) = x_0$.

On a donc $\phi([c]) = g$.

Soit $c: [0,1] \rightarrow X$ lacet en x_0 . $\phi([c]) = g$, alors le relèvement

$\tilde{c}$ de c : $\tilde{c}(0) = y_0$ est un lacet en y_0 .

$$p_*[\tilde{c}] = [c]. \quad \text{Ker } \phi \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$$

si $c: [0,1] \rightarrow X$ lacet en x_0 tq $\exists \tilde{c}: [0,1] \rightarrow Y$ lacet en y_0

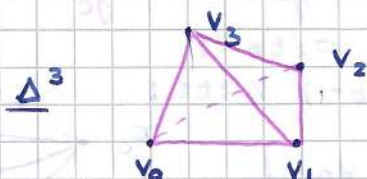
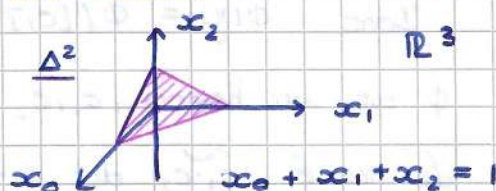
$$p \circ \tilde{c} = c \quad \text{alors} \quad \phi([c])y_0 = \tilde{c}(1) = y_0 \stackrel{\text{action libre}}{\Rightarrow} \phi([c]) = e$$

le 05.11.19

Homologie des Δ -complexes :

Déf: Le n -simplexe standard est $\Delta^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \geq 0, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \}$ vu comme esp. topo où on retient les sommets et leur ordre.

Ex :



Homologies:

Déf: Un n -simplexe est l'enveloppe convexe de $n+1$ vecteurs (ordonnés) (qui sont les sommets du n -simplexe) $v_0, v_1, \dots, v_n$ dans un e.v. V^n de dim n sur $\mathbb{R}$.
On demande que $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ engendrent V^n .
On note $[v_0, \dots, v_n]$ l'enveloppe convexe qui est le simplexe de dim n dont les sommets ordonnés sont $v_0, \dots, v_n$.

Rem: Si $[v_0, \dots, v_n]$ est un n -simplexe, alors

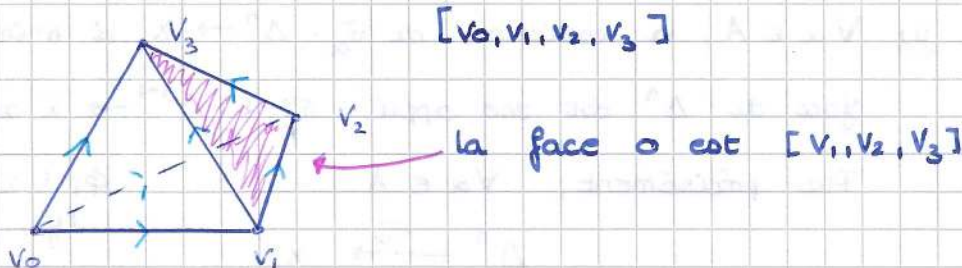
$$\Delta^n \longrightarrow [v_0, \dots, v_n]$$

$$(t_0, \dots, t_n) \longmapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i$$

est (la restriction d') une application linéaire, qui est un homéo entre Δ^n et $[v_0, \dots, v_n]$ et qui préserve l'ordre des sommets.

Déf: La face numéro i de $[v_0, \dots, v_n]$ est le simplexe $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ obtenu à partir de $[v_0, \dots, v_n]$ en retirant le sommet v_i .
 $0 \leq i \leq n$ Il y a $n+1$ faces.

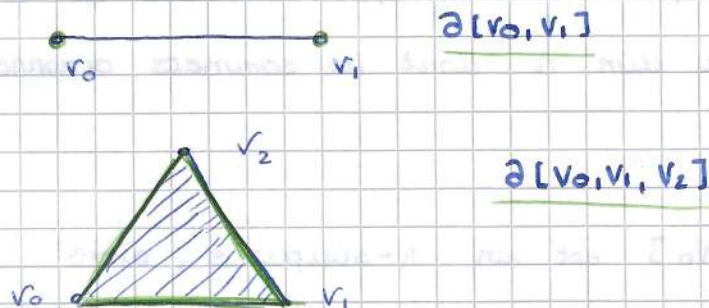
Ex:



Convention: Les sommets de tout ss-simplexe de $[v_0, \dots, v_n]$ engendré par un ss-ensemble de $\{v_0, \dots, v_n\}$ toujours ordonnés selon leur ordre dans le simple $[v_0, \dots, v_n]$.

Déf: Le bord d'un simplexe $[v_0, \dots, v_n]$ est la réunion de ses faces. On le note $\partial[v_0, \dots, v_n]$, c'est à la fois un esp. topo, comme ss-esp de $[v_0, \dots, v_n]$, et une collection de simplexes de dim $n-1$, qui contient $n+1$ éléments. $\{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]\}_{0 \leq i \leq n}$

Ex:



$\Delta^n \setminus \partial\Delta^n = \overset{\circ}{\Delta}^n$ est l'intérieur de Δ^n .

Déf: (Δ -complexes)

Soit X un esp. topo. Une structure de Δ -complexe sur X est une collection d'applications continues $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ où $\alpha \in A$, $n = n(\alpha)$, telles que:

i) $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}^n}$ est injective. De plus tout point de X se trouve dans l'image d'exactly une appli. $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}^n}$

ii) $\forall \alpha \in A$, la restriction de $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ à n'importe quelle face de Δ^n est une appli. $\sigma_\beta: \Delta^{n-1} \rightarrow X$ avec $\beta \in A$.

Plus précisément, $\forall \alpha \in A$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sigma_\alpha} & X \\ \uparrow \phi_i & \nearrow \sigma_\beta & \\ \Delta^{n-1} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \phi_i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n \downarrow i \\ (y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_0, \dots, 0, \dots, y_{n-1}) \end{array}$$

$\exists \beta \in A: \sigma_\alpha \circ \phi_i = \sigma_\beta$

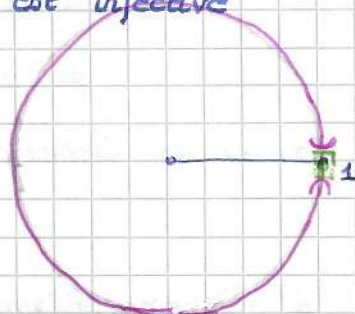
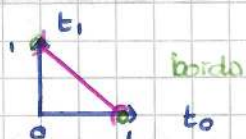
iii) $U \subset X$ est ouvert $\Leftrightarrow \sigma_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert dans $\Delta^n \quad \forall \alpha \in A$.

Homologie :Ex :

1) $X = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$$\alpha = 1 \quad A = \{0, 1\}$$
$$\alpha = 0$$

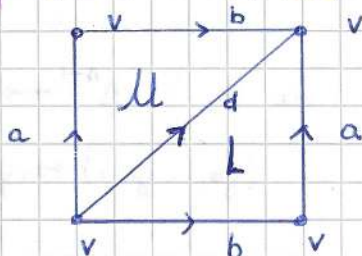
$$\sigma_1: \Delta^1 \longrightarrow S^1$$
$$(t_0, t_1) \longmapsto e^{2i\pi t_1}$$

est bien continu et la restriction à Δ^0 est injective

$$\sigma_0: \Delta^0 \longrightarrow S^1$$
$$1 \longmapsto e^{2i\pi 1} = 1$$

On a bien une structure de Δ -complexe sur le cercle (S^1).

2) $X = T^2$ le tore



$$A = \{v, a, b, d, L\}$$

$$\sigma_v: \Delta^1 \rightarrow T^2$$

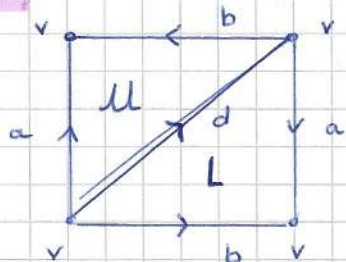
$$\sigma_a: \Delta^1 \rightarrow T^2$$

$$\sigma_b: \Delta^1 \rightarrow T^2$$

$$\sigma_L: \Delta^2 \rightarrow T^2$$

$$\sigma_L: \Delta^2 \rightarrow T^2$$

3) $X = P^2(\mathbb{R})$



[il faut essayer de voir si ça marche]

Homologie simpliciale :

Soit X un espace top. avec une structure de Δ complexe.

Soit $\Delta_n(X)$ le groupe abélien libre engendré librement par

les $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ où $\alpha \in A$ (n est fixé)

$$\Delta_n(X) = \left\{ \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sigma_{\alpha} \text{ où } n_{\alpha} \in \mathbb{Z} \text{ nul sauf pour un nbr fini de } \alpha, \text{ ici on ne prend que les simplexes } \sigma_{\alpha} : \Delta^n \rightarrow X \text{ de dim } n \right\}$$

(*) un tel élément est une n -chaîne du Δ -complexe.

Déf : L'homomorphisme de bord $\partial_n : \Delta_n(X) \longrightarrow \Delta_{n-1}(X)$

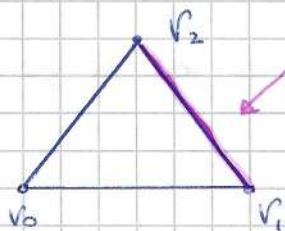
est déterminé par ses valeurs sur les éléments de base

$$\partial_n \sigma_{\alpha} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\alpha} |_{[v_0, \hat{v}_i, v_n]}$$

Rem : $\sigma_{\alpha} |_{[v_0, \hat{v}_i, v_n]}$ signifie $\sigma_{\alpha} \circ \phi_i$ où $\phi_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$
 $(y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{0}, \dots, y_{n-1})$

Donc $\sigma_{\alpha} |_{[v_0, \hat{v}_i, v_n]} \in \Delta^{n-1}(X)$

Ex :



$$[\hat{v}_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2]$$

Lemme : Soit X un ensemble non-vide, soit $z \notin X$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}(X^m)$ le groupe abélien libre engendré par les $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$.

$$Y = X \cup \{z\}, \quad \mathbb{Z}(X^m) \xrightarrow{\mathbb{I}_E^m} \mathbb{Z}(Y^{m+1})$$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (-1)^k (x_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{z}, \dots, x_m)$$

Homologie:2: (Suite)

$$\text{On a : } \sum_{L=1}^{m+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+L} I_L^{m+1} \circ I_k^m = 0$$

Preuve: Soit $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$

$$\{I_L^{m+1} \circ I_k^m(x_1, \dots, x_m)\} \quad 1 \leq L \leq m+1, 1 \leq k \leq m$$

Tout élément de l'ensemble est du type :

$$\pm (x_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{z}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{z}, \dots, x_m)$$

- Si z de la i ème coord a été inséré en premier, alors $I_j^{m+1} I_i^m(x_1, \dots, x_m) = I_j^{m+1} (-1)^i (x_1, z_i, x_m)$
 $= (-1)^{\textcircled{j}} (-1)^i (x_1, z_i, z_j, x_m)$

- Si z de la i ème coord a été insérer en 2ème, alors $I_i^{m+1} I_{j-i}^m((x_1, \dots, x_m)) = I_i^{m+1} (-1)^{j-i} (x_1, z_{j-i}, x_m)$
 $= (-1)^i (-1)^{\textcircled{j-i}} (x_1, z_i, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{z_j}, x_m)$

Lemme: La composition $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ est nulle.

Preuve: Il suffit de vérifier que la composition est nulle sur les générateurs de $\Delta_n(X)$. Soit $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$

$$\partial_n \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha \circ \phi_i$$

$$\partial_{n-1} \partial_n \sigma_\alpha = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1}} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha \circ \phi_i \circ \phi_j \quad \text{s'annule comme dans le lemme}$$

(On insère un 1^{er} zéro à l'aide de ϕ_j , puis un 2nd avec ϕ_i)

Déf: Un complexe de groupes abéliens est une suite de groupes abéliens $\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} 0$ où f_n est un homom tq $f_n \circ f_{n+1} \equiv 0 \quad \forall n$

Déf: Le n-ème groupe d'homologie du complexe $(C_n, f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ est le groupe abélien $H_n = \text{Ker } f_n / \text{Im } f_{n+1}$

Rem: $\text{Ker } f_n$ est un groupe abélien

$\text{Im } f_{n+1} \subset \text{Ker } f_n$ est un ss-groupe
 $\uparrow$
 $f_n \circ f_{n+1} \equiv 0$

Terminologie:

Un élément de $\text{Ker } f_n$ est un n-cycle

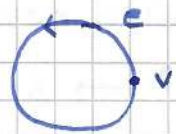
—— " —— $\text{Im } f_{n+1}$ —— " —— n-bord

—— " —— H_n est une classe d'homologie. (de dim n)

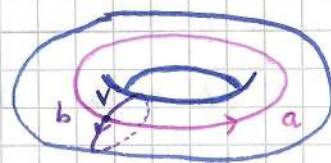
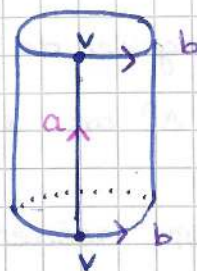
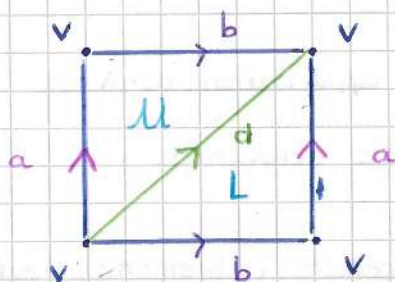
Deux cycles sont dit homologues s'ils sont de la même classe d'homologie. (ie: leur différence est un bord)

On considère X esp topo avec struct. de Δ complexe.

$(C_n, f_n) = (\Delta_n(X), \partial_n)$, on note $H_n^\Delta(X)$ le groupe d'homologie de dim n de X .

Ex: $X = S^1$  $\Delta_1(S^1) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(S^1)$
 $\sigma_1 \mapsto \partial_1 \sigma_1 = v - v = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_0(S^1) &= \langle \sigma_0 \rangle \cong \mathbb{Z} & H_0(S^1) &= \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\Delta_0(S^1)}{\{0\}} \cong \Delta_0(S^1) \cong \mathbb{Z} \\ \Delta_1(S^1) &= \langle \sigma_1 \rangle \cong \mathbb{Z} & H_1(S^1) &= \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\Delta_1(S^1)}{\{0\}} \cong \Delta_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \\ \Delta_n(S^1) &= 0 \quad \text{si } n > 1 & H_n(S^1) &= 0 \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

Homologie:Ex: $X = T^2$ 

$$\begin{aligned}
 & \{0\} \\
 & \uparrow \partial_0 \\
 & \Delta_0(T^2) = \langle v \rangle \cong \mathbb{Z} \\
 & \uparrow \partial_1 \quad \partial_1 \equiv 0 \\
 & \Delta_1(T^2) = \langle a, b, d \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \quad v-v \\
 & \uparrow \partial_2 \quad \partial_2(\mu+L) \stackrel{(*)}{=} 0 \\
 & \Delta_2(T^2) = \langle \mu, L \rangle \cong \mathbb{Z}^2
 \end{aligned}$$

$$(*) d = a + b + \partial_2(\mu)$$

$$(*) \begin{cases} \partial_2(\mu) = d - b - a \\ \partial_2(L) = -d + b + a \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 & -a + b - d \\
 & b + a - d \Rightarrow a = b - d
 \end{aligned}$$

$$H_0^{\Delta}(T^2) \cong \Delta_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1^{\Delta}(T^2) \stackrel{(*)}{=} \langle [a], [b] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_2^{\Delta}(T^2) = \langle \mu + L \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$H_n^{\Delta}(T^2) = 0 \quad n > 2$$

$$= \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}_{a+b-d}} = \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}_{b-d}}$$

Homologie singulière:

Soit X un esp. topo.

Déf: Un n -simplexe singulier de X est une application continue $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ où Δ^n est le n -simplexe standard.

Soit $C_n(X)$ le groupe abélien libre engendré (librement) par les n -simplices singuliers de X .

Une n -chaîne singulière est une combinaison linéaire $\sum_i n_i \sigma_i$ où $n_i \in \mathbb{Z}$ (tous nuls sauf un nbr fini), $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$ continue.

On a un homomorphisme de bord. $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ que l'on définit sur les éléments de base

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \quad \text{où} \quad \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} = \sigma \circ \varphi_i$$

est bien un $n-1$ simplexe singulier.

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\phi_i^n} & \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \\ (y_0 \dots y_{n-1}) & \longmapsto & (y_0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème}}}{0} \dots y_{n-1}) \end{array}$$

et on étend linéairement :

$$\partial_n \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i \partial_n \sigma_i$$

On vérifie que $\partial_n \partial_{n-1} = 0$.

On définit le groupe d'homologie singulière de dim. n de X comme $H_n^{\text{sing}}(X) := \ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ (groupe abélien)

Composantes connexes par arcs:

Soit X un e.t. On définit une relation sur X , $x_1, x_2 \in X$

sont en relation $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists c: [0,1] \rightarrow X : c(0) = x_1$ et $c(1) = x_2$

$\sim$ est une rel. d'équiv.

X est partitionné en classes appelées comp. cpa de X .

Homologie:

Prop: Soit X c.t. et soit $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ sa décomposition en comp. connexes par arco. Alors $\forall n \geq 0$ $H_n^{\text{sing}}(X) = \bigoplus_{\alpha} H_n^{\text{sing}}(X_{\alpha})$

Pv: $C_n(X) = \bigoplus_{\alpha} C_n(X_{\alpha})$ car si $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ est un n -simplexe singulier, comme Δ^n est connexe et σ est continue, $\text{Im } \sigma \subset X_{\alpha}$ pour un unique X_{α} . De plus, si $\text{Im } \sigma \subset X_{\alpha}$ alors $\text{Im}(\sigma|_{[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n]}) \subset X_{\alpha}$.

Donc $\partial_n: C_n(X_{\alpha}) \rightarrow C_{n-1}(X_{\alpha})$ préserve le ss-complexe

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_n(X_{\alpha}) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X_{\alpha}) \end{array}$$

$$\text{de } (\dots C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ker } \partial_n = \bigoplus_{\alpha} \text{Ker } \partial_n|_{C_n(X_{\alpha})} \\ \text{Im } \partial_{n+1} = \bigoplus_{\alpha} \text{Im } \partial_{n+1}|_{C_{n+1}(X_{\alpha})} \end{array} \right\} \Rightarrow \bigoplus_{\alpha} H_n^s(X_{\alpha}) = H_n^s(X)$$

Prop: X c.t., $X \neq \emptyset$, on suppose que X est c.p.a.

Alors $H_0^s(X) \cong \mathbb{Z}$. Donc en général X c.t. (pas c.p.a.)

$H_0^s(X) \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}$ où α compte les comp. connexes.

Pv: On a que $H_0^s(X) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = C_0(X) / \text{Im } \partial_1$,
où $C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$

Soit $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_i n_i \sigma_i \mapsto \varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$
($\sigma_i: \Delta^0 \rightarrow X$, $i \mapsto x_i$)

Alors $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ (Affirmation)

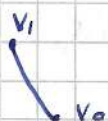
Si l'aff. est vraie alors $H_0^s(X) = C_0(X) / \text{Ker}(\varepsilon) \cong \mathbb{Z}$ car

ε est surjectif puisque $X \neq \emptyset$

ε est surj.
et on quotiente
par le noyau

Pv: de l'affirmation

i) $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \varepsilon$



$$\sigma: \Delta_1 \rightarrow X, \quad \varepsilon(\partial_1 \sigma) = \varepsilon(\sigma|_{v_1} - \sigma|_{v_0}) = 1 - 1 = 0$$

ii) $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im } \partial$

si $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = 0$ (hypothèse), donc on sait que

$$\sum_i n_i = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_i: \Delta^0 &\longrightarrow X \\ 1 &\longmapsto \sigma_i(1) = x_i \end{aligned}$$

On choisit $x_0 \in X$.

Soit $\gamma_i: [0,1] \rightarrow X$ chemin: $\gamma_i(0) = x_0$ et $\gamma_i(1) = x_i = \sigma_i(1)$

(X est cpa donc γ_i existe)

On voit γ_i comme un 1-complexe

l'on identifie $[0,1]$ à Δ^1)

$$\begin{aligned} \partial \gamma_i &= \sigma_i - \sigma_0, \quad \partial(\sum n_i \gamma_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum n_i \sigma_0 \\ &= \sum n_i \sigma_i - (\sum n_i) \sigma_0 = \sum n_i \sigma_i \end{aligned}$$

□

Prop: Si X est un point, $X = \{*\}$, alors $H_n^s(X) = 0$ si $n > 0$ et $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Pv: Comme $X = \{*\}$, il n'existe qu'un seul n-simplexe:

$$\sigma_n: \Delta^n \rightarrow X \quad \text{pour chaque } n. \quad \text{Donc } C_n(X) \cong \mathbb{Z}.$$

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto *$$

$$\partial \sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} \sigma_{n-1} & n \equiv 0 [2] \quad (n \neq 0) \\ 0 & n \equiv 1 [2] \end{cases}$$

la i-ème face est forcément σ_{n-1} !

$$\begin{array}{ccccccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \rightarrow & \dots & C_2(X) & \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \rightarrow \{0\} \\ & & & & & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \partial_2 \\ \text{ss} \\ \mathbb{Z} \end{array} & \begin{array}{c} \partial_1 \\ \text{ss} \\ \mathbb{Z} \end{array} & \begin{array}{c} \partial_0 \\ \text{ss} \\ \mathbb{Z} \end{array} \\ & & & & & \sigma_2 & \longmapsto \sigma_1 & \longmapsto 0 \end{array}$$

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$$

Homologie :

Donc $H_n(X) = 0$ si $n > 0$ car soit $\text{Ker } \partial_{2n+1} = C_{2n+1}(X)$,

mais alors $\text{Im } \partial_{2n+2} = C_{2n+1}(X)$

soit $\text{Ker } \partial_{2n} = 0$



Invariance d'homotopie de $H_n^{\text{sing}}(X)$:

Soit $f: X \rightarrow Y$ une appl. continue entre deux e.t.

Elle induit un homomorphisme $f_*: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ ainsi défini

$$\sigma: \Delta^n \rightarrow X, \quad f_*(\sigma) := f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y$$

sur les éléments de base, on étend linéairement.

$$f_*(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i f_*(\sigma_i)$$

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ f_* \downarrow & \searrow & \downarrow f_* \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Vérifions que ça commute sur les éléments de base.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \sigma: \Delta^n \rightarrow X, \quad f_* \partial_n \sigma &= f_* \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0 \hat{v}_i v_n]} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f_* \sigma|_{[v_0 \hat{v}_i v_n]} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ \phi_i^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \phi_i^n \\ &= \partial_n \circ f_*(\sigma) \end{aligned}$$

Déf : Une suite d'homom entre groupes abéliens $\cdots \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \rightarrow \cdots$

telle que $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} \equiv 0$ s'appelle un complexe noté

$$(A_n, \alpha_n)_n$$

Si (A_n, α_n) et (B_n, β_n) sont deux complexes et si on a une suite d'homom $f_n: A_n \rightarrow B_n$ tels que $\forall n$:

$$f_{n-1} \circ \alpha_n = \beta_n \circ f_n$$

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & A_{n-1} \\ f_n \downarrow & \searrow \beta_n & \downarrow f_{n-1} \\ B_n & \xrightarrow{\beta_n} & B_{n-1} \end{array}$$

Alors on dit que $f = (f_n: A_n \rightarrow B_n)_n$ est un morphisme entre le complexe A et le complexe B.

Prop : Soit $A = (A_n, \alpha_n)_n$ et $B = (B_n, \beta_n)_n$ des complexes de groupes abéliens et soit $f = (f_n: A_n \rightarrow B_n)_n$ un morphisme de complexe alors $\forall n$, f_n induit un homomorphisme $(f_n)_* : H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ entre les n -ème groupes d'homologie de A et B.

Pv : Soit $a_n \in A_n$ tq $\alpha_n(a_n) = 0$.

$$\text{Ker}(A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1}) \xrightarrow{f_n} \text{Ker}(B_n \xrightarrow{\beta_n} B_{n-1})$$

$$a_n \xrightarrow{f_n} f_n(a_n)$$

$\beta_n f_n(a_n) = f_{n-1}(\alpha_n(a_n)) = 0$ donc $f_n(a_n) \in \text{Ker } \beta_n$

$$\text{Ker}(B_n \rightarrow B_{n+1}) / \text{Im}(B_{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} B_n) =: H_n^s(B)$$

$$\text{Ker}(A_n \rightarrow A_{n+1}) / \text{Im}(A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n) =: H_n^s(A)$$

$\uparrow (f_n)_*$

la flèche induite $(f_n)_*$ existe $\Leftrightarrow f_n(\text{Im } \alpha_{n+1}) \subset \text{Im } \beta_{n+1}$
 c'est bien vrai car $\beta_{n+1}(f_{n+1}(a_{n+1})) = f_n(\alpha_{n+1}(a_{n+1})) \checkmark$



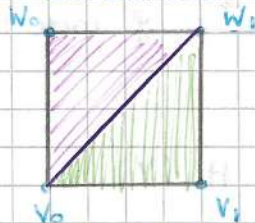
Donc $(f_n)_*$ est surjective, donc $H_n(X) \xrightarrow{(f_n)_*} H_n(Y)$ est un isomorphisme.



Pv: (Thm)

• Premier Pas: subdivision de $\Delta^n \times [0, 1]$

si $n = 1$:



$$[w_0, w_1] = \Delta^1 \times \{1\}$$

$$[v_0, v_1] = \Delta^1 \times \{0\}$$

$$[w_0, w_1]$$

$$[v_0, w_0, w_1]$$

$$[v_0, w_1]$$

$$[v_0, v_1, w_1]$$

$$[v_0, v_1]$$

$\Delta^1 \times [0, 1]$ se décompose en 2 simplexes

de dim 2 ($n+1$ si $n=1$) qui sont $[v_0, w_0, w_1]$ et

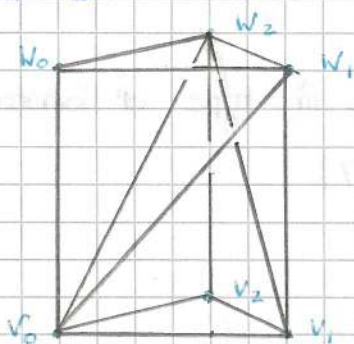
$[v_0, v_1, w_1]$ et qui sont séparés par une face

commune qui est un simplexe de dim $n=1$ qui

est $[v_0, w_1]$

Rem: On alterne entre des simplexes de dim 1 et de dim 2, les v_i apparaissent toujours avant les w_j et l'ordre des v_i et des w_j est présent.

si $n = 2$:



$$[w_0, w_1, w_2] = \Delta^2 \times \{1\}$$

$$[v_0, v_1, v_2] = \Delta^2 \times \{0\}$$

$$\Delta^2 \times [0, 1]$$

on a décomp. $\Delta^2 \times [0, 1]$

en $3 = n+1$ simp. de dim 3

qui sont successivement

séparé par une face

qui est un simp. p. 38

de dim $2 = n$.

$$[w_0, w_1, w_2]$$

$$[v_0, w_0, w_1, w_2]$$

$$[v_0, w_1, w_2]$$

$$[v_0, v_1, w_1, w_2]$$

$$[v_0, v_1, w_2]$$

$$[v_0, v_1, v_2, w_2]$$

$$[v_0, v_1, v_2]$$

Homologie :

• Premier Pas : (Suite)

Subdivision de $\Delta^n \times [0,1]$ en $n+1$ simplexes de dim $n+1$.

Soit $\Delta^n \times \{0\} = [v_0 \dots v_n]$ et $\Delta^n \times \{1\} = [w_0 \dots w_n]$. On choisit

l'ordre des $w_0 \dots w_n$ tq $\Delta^n \times [0,1] \rightarrow \Delta^n$ projette w_i sur v_i
 $(v, s) \mapsto v$

Pour $0 \leq i \leq n-1$.

On peut définir $\varphi_i : \Delta^n \rightarrow [0,1]$ on somme les coordonnées
 $(t_0, \dots, t_n) \mapsto t_{i+1} + \dots + t_n$ en oubliant $t_0, \dots, t_i$

$$\varphi_n \equiv 0, \varphi_{-1} \equiv 1, 0 \equiv \varphi_n \leq \varphi_{n-1} \leq \dots \leq \varphi_0 \leq \varphi_{-1} \equiv 1$$

Donc le graphe de φ_i est sous le graphe de φ_{i-1} .

Le graphe de φ_i est le simplexe $[v_0 \dots v_i, w_{i+1} \dots w_n] \subset \Delta^n \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\text{en effet, } \Gamma(\varphi_i) = \left\{ (t_0 v_0 + \dots + t_n v_n, t_{i+1} + \dots + t_n) \in \Delta^n \times [0,1] \mid \right. \\ \left. t_0, \dots, t_n \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

Ce graphe contient les sommets $(v_0, 0), \dots, (v_i, 0)$ de $\Delta^n \times \{0\}$

(On prend $t_{i+1} = \dots = t_n = 0$) et les sommets $(w_{i+1}, 1) \dots (w_n, 1)$ de

$\Delta^n \times \{1\}$ (on prend $t_0 = \dots = t_i = 0$ et $t_{i+1} + \dots + t_n = 1$)

et $\Gamma(\varphi_i)$ se projette de manière homéomorphe sur $[v_0 \dots v_n]$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n \times [0,1] & \xrightarrow{\quad} & \Delta^n \\ \cup & \sim \text{homéo} & \\ \Gamma(\varphi_i) & \xrightarrow{\quad} & \Delta^n \end{array}$$

$$[v_0 \dots v_{i-1}, w_i \dots w_n] = \Gamma(\varphi_{i-1})$$

$$[v_0 \dots v_{i-1}, v_i, w_i \dots w_n]$$

$$[v_0 \dots v_i, w_{i+1} \dots w_n] = \Gamma(\varphi_i)$$

La région entre le graphe de φ_{i-1} et celui de φ_i est le $n+1$

simplexe $[v_0 \dots v_i, w_i \dots w_n] \subset \Delta^n \times [0,1]$

Ainsi $\Delta^n \times [0,1]$ est décomposé en $n+1$ simplexes de dim $n+1$

• Deuxième Pas :

Donnée : une homotopie (entre f et g) : $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$

$$F_0 = f, F_1 = g.$$

On définit une application linéaire (qui dépend de F)

$P: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ en spécifiant ses valeurs sur les éléments de base.

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots v_i w_i \dots w_n]}$$

$$\sigma \times \mathbb{1} : \Delta^n \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

$$(v, t) \longmapsto (\sigma(v), t)$$

ici $F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots v_i w_i \dots w_n]}$ signifie le $n+1$ simplexe singulier à valeurs dans Y obtenu ainsi :

$$\Delta^{n+1} \xrightarrow{\sim} [v_0 \dots v_i w_i \dots w_n] \xleftarrow{\text{1er pas}} \Delta^n \times [0,1] \xrightarrow{\sigma \times \mathbb{1}} X \times [0,1] \xrightarrow{F} Y$$

$$\text{Calculons } \partial P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial (F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots v_i w_i \dots w_n]})$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\sum_{j \leq i} (-1)^j F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots v_i w_i \dots w_n]} \right. \\ \left. + \sum_{j \geq i} (-1)^{j+1} F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots v_i w_i \dots \hat{w}_j \dots w_n]} \right]$$

les termes avec $i=j$ s'annulent :

$$\begin{pmatrix} [v_0 \dots v_{i-1} w_i \dots w_n] \\ [v_0 \dots v_i w_{i+1} \dots w_n] \end{pmatrix}$$

Sauf dans 2 cas :

$$[\hat{v}_0 w_0 \dots w_n] = [w_0 \dots w_n] \text{ qui est } g \circ \sigma$$

$$[v_0 \dots v_n \hat{w}_n] = [v_0 \dots v_n] \text{ qui est } -f \circ \sigma$$

$$\text{Il reste donc } \partial P(\sigma) = g \circ \sigma - f \circ \sigma + \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots v_i w_i \dots w_n]}$$

$$+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j+1} F_0(\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0 \dots v_i w_i \dots \hat{w}_j \dots w_n]}$$

Homologie:

D'autre part :

P linéaire et dif

$$\partial \sigma = \sum_j (-1)^j \sigma |_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots v_n]}$$

sur $C_{n-1}(X)$, on devrait

$$P(\partial \sigma) = \sum_j (-1)^j P(\sigma |_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots v_n]})$$

écrire P_{n-1}

$$= \sum_j (-1)^j \left[\sum_{i > j} (-1)^{i-1} F \circ (\sigma |_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots v_n]} \times \mathbb{1}) |_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots v_i w_i \dots w_n]} \right. \\ \left. + \sum_{i < j} (-1)^i F \circ (\sigma |_{[v_0 \dots v_j \dots v_n]} \times \mathbb{1}) |_{[v_0 \dots v_i w_i \dots w_j \dots w_n]} \right]$$

$$\text{Donc } \partial P + P \partial_n = g_* - f_*$$

- Troisième Pao : (argument commun à toutes les preuves d'invariance d'homologie ou de cohomologie)

Soit $[\alpha] \in H_n(X)$, but : $(g_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$

$$(f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

$$(g_*)_n [\alpha] = (f_*)_n [\alpha] \quad \text{ou} \quad g_* [\alpha] = f_* [\alpha]$$

On représente $[\alpha]$ par $\alpha \in C_n(X)$ tq $\partial_n \alpha = 0$

$$f_* [\alpha] - g_* [\alpha] = [f_* \alpha - g_* \alpha]$$

dif de $H_n(Y)$

$$f_* \alpha - g_* \alpha = \partial P \alpha - P \partial \alpha = \partial P \alpha$$

$$\text{Donc dans } H_n(Y) \quad [f_* \alpha - g_* \alpha] = 0$$



Groupes d'homologie réduits:

Déf: X esp. topo. Le complexe des chaînes

$$\dots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

lui est associé l'augmentation $C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$

$$\sum_i n_i \sigma_i^{(0)} \mapsto \sum_i n_i$$

Rem: $(\varepsilon \circ \partial_1)(\sigma^{(1)}) = \varepsilon(\sigma_{v_1}^{(1)} - \sigma_{v_0}^{(1)}) = 1 - 1 = 0 \quad (*)$

On note $\tilde{H}_n(X)$ l'homologie de ce complexe. (homologie réduite)

Prop: $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X)$ si $n > 0$

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \quad \text{si } n = 0$$

Pv: Si $n > 0$, il est évident que $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X)$ car le complexe n'a été modifié qu'en $C_0(X)$.

Si $n = 0$: $H_0(X) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{Im} \partial_1} = \frac{C_0(X)}{\operatorname{Im} \partial_1} \quad (\text{on suppose } X \neq \emptyset)$

$(\partial_0 \equiv 0)$ (*)

$$\begin{array}{ccc} \ker \varepsilon & \hookrightarrow & C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker \varepsilon / \operatorname{Im} \partial_1 & \hookrightarrow & C_0(X) / \operatorname{Im} \partial_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \quad (*) \\ \cong & & \cong \\ \tilde{H}_0(X) & & H_0(X) \end{array}$$

SII SII (*)

homologie réduite

On a donc : $\begin{array}{c} \text{exacte} \\ \downarrow \end{array} \Leftrightarrow H_0(X) \hookrightarrow H_0(X) \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} 0$ exacte $\Leftrightarrow H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ surjectif

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et cette suite est exacte.

Se dit d'une suite d'homom. de groupes $\dots \xrightarrow{h_{n+1}} G_{n+1} \xrightarrow{h_n} G_n \xrightarrow{h_{n-1}} \dots$

$$\Leftrightarrow \forall n \quad \operatorname{Im} h_{n+1} = \ker h_n$$

Homologie:

Rechts à voir: $\ker \bar{E} = \check{H}_0(X) \subset H_0(X)$

$$\supset$$

$$\subset$$

Comme $\mathbb{Z}$ est libre $H_0(X) \cong \check{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$

[$\mathbb{Z}$ est libre signifie que si $\sigma \in G$ est un élément fixé dans un groupe donné, $\exists$ alors un unique homom. $f: \mathbb{Z} \xrightarrow{G} G$ tel que $f(1) = \sigma$]

$$f(k) = \sigma^k$$

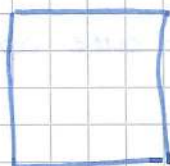
On choisit $\sigma \in H_0(X) : p(\sigma) = 1 \in \mathbb{Z}$, on pose $s(k) = \sigma^k$

Déf: X e.t., soit $A \subset X$, on dit que A est un retract de X par déformation s'il existe

$$F: [0,1] \times X \longrightarrow X \text{ continue tq } F_0 = \text{id}_X$$

$$F_t(x) \in A \quad \forall t \in [0,1] \quad F_t|_A = \text{id}_A$$

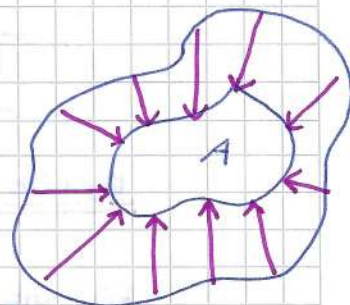
Ex:



$$X = [0,1] \times [0,1]$$

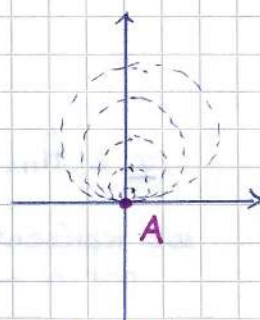
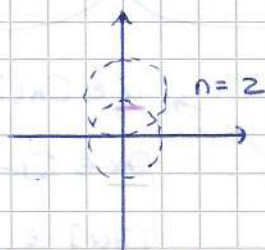
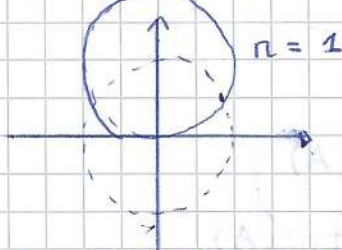
$$A = [0,1] \times \{0\}$$

$$F_t((x,y)) = (x, (1-t)y)$$



Ex: Boucles d'oreilles d'Hawaiï

$$X = \left\{ \frac{1}{n} (i + e^{i\theta}) : n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$



Avec la topo induite par l'inclusion. ($X \subset \mathbb{C}$)

Soit $A = \{0\} \subset X$

Soit U un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ dans X .

Alors $A = \{0\}$ n'est pas un retract par déformation de U dans X .

Déf: Soit $A \subset X$ un ss-ens d'un esp. topo X .

$|A| \geq 2$

On note X/A l'esp. top. quotient

défini par la rel d'équiv : $x \sim x' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } x' \in A \end{cases}$

les classes d'équiv : $[x] = \{x\}$ si $x \notin A$

ou $[x] = A$ si $x \in A$

On note $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A$ l'inclusion et la projection
 $a \mapsto a \mapsto [a]$

Thm: (Suite exacte longueur en homologie associée à un couple (X, A))

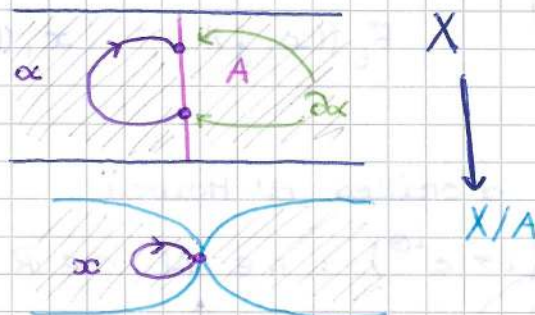
Soit X un e.t. Soit $A \subset X$ un ss-ensemble fermé, non-vide.

On suppose que A admet un voisinage dans X qui se retracte par déformation sur A . Alors il existe une suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \dots \\ &\dots \rightarrow \tilde{H}_0(X/A) \rightarrow \{0\} \end{aligned}$$

Mystère: $\tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A)$ qu'elle est cette application ?

Rép. intuitive:



$\alpha \in \tilde{H}_n(X/A)$

$\alpha \in C_n(X)$

est représenté
par α

$\partial \alpha \in C_{n-1}(A)$

$[\partial \alpha] \in \tilde{H}_{n-1}(A)$

Homologie:

Cor: $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$
 $\tilde{H}_i(S^n) = \{0\}$ si $i \neq n$

Pv: $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$
 $A = \partial D^n = S^{n-1}$
 D^n

$\partial D^n = S^{n-1}$ est bien un retract dans D^n d'un petit voisinage.

$$D^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1\} \supset S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$$

Appliquons le thm au couple (D^n, S^{n-1})

$$X/A = S^n, \text{ on sait que } \tilde{H}_i(D^n) = \{0\} \quad \forall i$$

la suite exacte implique que :

$$\tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow[\text{isom}]{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A)$$

$$\parallel \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$$

$$\text{Donc } \boxed{\tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}}$$

On traite les cas $i > n$ et $i < n$ avec le m^{ême} genre d'idée
 (dans les notes sur moodle)

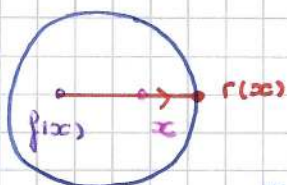
Cor: (Thm de Brouwer en dim n)

Soit $f: D^n \rightarrow D^n$ une appli. continue. Alors $\exists x \in D^n$ tq
 $f(x) = x$.

Pv: Par l'absurde

Si $f: D^n \rightarrow D^n$ est continue sans pt. fixe, alors $\exists r: D^n \rightarrow \partial D^n$
 continue tq $r|_{\partial D^n} = \text{id}_{\partial D^n}$.

En effet :



comme $fix(x) \neq x \quad \forall x \in D^n$, on peut considérer le rayon issu de $fix(x)$, passant par x .

Il intersecte ∂D^n en un point unique que l'on appelle $r(x)$, r ainsi défini est continue.

Si $x \in \partial D^n \Rightarrow r(x) = x$

$$\partial D^n \xrightarrow{i} D^n \xrightarrow{r} \partial D^n \quad r \circ i = id_{\partial D^n}$$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(D^n) & \xrightarrow{r_*} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z} & & \{0\} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

$$r_* \circ i_* = id_{\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)}$$



le 03.12.19

Groupe d'homologie relatifs:

Thm: Soit $(A_n, \partial_n) \xrightarrow{i} (B_n, \partial_n) \xrightarrow{j} (C_n, \partial_n)$ une suite exacte de complexes. Alors il existe une suite exacte longue en homologie:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

Rv:

Rappel:

Une suite exacte de complexes signifie:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow i_{n+1} & & \downarrow i_n & & \downarrow i_{n-1} \\ \dots & \rightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow j_{n+1} & & \downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} \\ \dots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \rightarrow \dots \end{array}$$

$$\text{à } \partial_n \partial_{n+1} = 0$$

Tous les carrés commutent.

Toutes les suites verticales sont exactes

On a vu qu'un morphisme de complexe

induit un homomorphisme entre les groupes

d'homologie des complexes:

$$\begin{array}{c} \{0\} \\ \downarrow \\ A_n \\ \downarrow i_n \\ B_n \\ \downarrow j_n \\ C_n \\ \downarrow \\ \{0\} \end{array}$$

Homologie:

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C)$$

Définition de $H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$:

Attention à ne pas confondre ce ∂ avec d'autres bords !!

$$\begin{array}{ccccc}
 A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & A_{n-2} \\
 \downarrow i_n & & \downarrow i_{n-1} & & \\
 B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & B_{n-2} \\
 \downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} & & \\
 C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & C_{n-2} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \\
 C_n & \xrightarrow{\partial_n} & \partial C_n = 0 & &
 \end{array}$$

Soit $c_n \in C_n$ cycle qui représente $[c_n] \in H_n(C)$.

On a donc $\partial_n c_n = 0$.

Comme j_n est surjective par hypothèse, $\exists b_n \in B_n$

tel que $j_n(b_n) = c_n$.

On a $j_{n-1} \partial_n b_n = \partial_n j_n b_n = \partial_n c_n = 0$.

Comme $\text{Ker } j_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$, $\exists a_{n-1} \in A_{n-1}$ tel que

$i_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n b_n$.

On définit $\partial[c_n] = [a_{n-1}]$

Cette définition a un sens, car $\partial_{n-1} a_{n-1} = 0$

(donc a_{n-1} est un cycle $\checkmark$ son bord = 0) et on peut donc bien

prendre sa classe $[a_{n-1}] \in H_{n-1}(A)$

✓ $\partial_{n-1} a_{n-1} = 0$ est vrai :

$$i_{n-2} \partial_{n-1} a_{n-1} = \partial_{n-1} i_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_{n-1} \partial_n b_n = 0$$

et i_{n-2} est injective.

Problème du choix du représentant :

Voyons que $\partial[c_n]$ ne dépend pas du choix de C_n .

• Comme i est injectif, le choix de a_{n-1} pour $\partial_n b_n$ fixé est unique.

• Si b_n est remplacé par b'_n tel que $j_n b_n = j_n b'_n$

$$\Rightarrow b'_n - b_n \in \text{Ker } j_n = \text{Im } i_n \Rightarrow b'_n - b_n = i_n(a'_n) \text{ où } a'_n \in A_n$$

Donc $b'_n = b_n + i_n(a'_n)$. On obtient $\partial_n b'_n = \partial_n b_n + \partial_n i_n(a'_n)$

$$= \partial_n b_n + i_{n-1} \partial_n a'_n = i_{n-1}(a_{n-1}) + i_{n-1}(\partial_n a'_n)$$

$$= i_{n-1}(a_{n-1} + \partial_n a'_n) \text{ donc on obtient}$$

$a_{n-1} + \partial_n a'_n \in A_{n-1}$ à la place de a_{n-1} , ainsi...

$$[a_{n-1}] = [a_{n-1} + \partial_n a_n'] \in H_{n-1}[A].$$

Si c_n est remplacé par $c_n + \partial_{n+1} c_{n+1}$ où $c_{n+1} \in C_{n+1}$:

$$c_n + \partial_{n+1} c_{n+1} = j_n b_n + \partial_{n+1} j_{n+1} b_{n+1}$$

$$= j_n b_n + j_n \partial_{n+1} b_{n+1}$$

$$= j_n (b_n + \partial_{n+1} b_{n+1})$$

$$\partial_n (b_n + \partial_{n+1} b_{n+1}) = \partial_n b_n + \underbrace{\partial_n \partial_{n+1}}_0 b_{n+1}$$

On a l'existence de la suite :

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Exactitude : Il y a 6 inclusions à vérifier

1. $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$: ($\forall n$, on omet n)

$$\text{comme } j \circ i = 0 \Rightarrow j_* \circ i_* = 0$$

2. $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial$:

$$\text{soit } [c_n] = j_* [b_n] \text{ avec } \partial b_n = 0$$

$$a_{n-1} = 0 \text{ car } i_{n-1} \text{ injectif}$$

$$\text{donc } \partial [c_n] = [a_{n-1}] = 0$$

3. $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i_*$:

$$\text{soit } [c_n] \in H_n(C), \text{ soit } b_n : j_n b_n = c_n, \partial b_n = i a_{n-1},$$

$$\partial [c_n] = [a_{n-1}].$$

$$i_*(\partial [c_n]) = i_*([a_{n-1}]) = [i a_{n-1}] = [\partial b_n] = 0$$

$$\text{dans } H_{n-1}(B).$$

4. $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$:

$$\text{soit } [b_n] \in \text{Ker } j_*, \text{ c-à-d que } b_n \in B_n, \partial b_n = 0, \exists c_{n+1} \in C_{n+1} :$$

$$j b_n = \partial c_{n+1} \text{ puisque } j_* [b_n] = 0.$$

$$\text{comme } j \text{ est surjective, soit } b_{n+1} : j b_{n+1} = c_{n+1}$$

$$\text{On a } j(b_n - \partial b_{n+1}) = j b_n - j \partial b_{n+1} = j b_n - \partial j b_{n+1} = 0$$

$$\text{Donc } \exists a_n : i a_n = b_n - \partial b_{n+1} \text{ (par exactitude)}$$

$$H_n(B) = \frac{\text{Ker}(\partial_n : B_n \rightarrow B_{n-1})}{\text{Im}(\partial_{n+1} : B_{n+1} \rightarrow B_n)}$$

$[b_n]$ où $b_n \in B_n$ et $\partial_n b_n = 0$

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \\ \downarrow j & & \downarrow i \\ C_n & & C_{n-1} \end{array}$$

$\partial b_n = 0$

la classe d'un bord = 0

b_n est un cycle

$$\partial j b_{n+1} = \partial c_{n+1} = j b_n$$

Homologie:

$$\text{On a } i\partial a_n = \partial i a_n = \partial(b_n - \partial b_{n+1}) = \partial b_n = 0^*$$

$$i \text{ injectif} \Rightarrow \partial a_n = 0$$

$$i_*[a_n] = [b_n - \partial b_{n+1}] = [b_n] \text{ donc } [b_n] \in \text{Im } i_*$$

5. $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } j_*$:

soit $[c_n] \in \text{Ker } \partial$, c-a-d, $c_n \in C_n$, $\partial c_n = 0$, et avec toujours les m[^] notations $\partial[c_n] = [a_{n-1}]$.

$$\text{On a donc } 0 = \partial[c_n] = [a_{n-1}], \text{ donc } \exists a_n \in A_n : \partial a_n = a_{n-1}$$

$$\partial(b_n - i a_n) = \partial b_n - \underbrace{i \partial a_n}_{= \partial i a_n} = \partial b_n - i a_{n-1} = \partial b_n - \partial b_n = 0$$

$$j(b_n - i a_n) = j b_n - \underbrace{j i a_n}_{= 0 \text{ suite exacte!}} = j b_n = c_n \quad * \text{ d'après le diagramme.}$$

$$\text{donc } j_*[b_n - i a_n] = [c_n] \in \text{Im } j_*$$

6. $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$:

supposons que $i_*[a_{n-1}] = 0$, c-a-d que $a_{n-1} \in A_{n-1}$ et

$$\partial_{n-1} a_{n-1} = 0 \text{ et } i a_{n-1} = \partial b_n \text{ pour un } b_n \in B_n$$

$$j(b_n) \text{ est un cycle : } \partial_n j(b_n) = j \partial_n b_n = j i a_{n-1} = 0$$

$$\text{On a } \partial[j b_n] = [a_{n-1}] \text{ par définition de } \partial: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

$$\text{donc } [a_{n-1}] \in \text{Im } \partial.$$

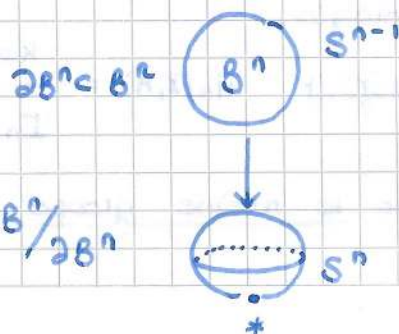


1c 10.12.19

Homologie relative pour les couples (X, A) :

Idée: Calculer l'homologie de X/A à partir de celle de X et celle de A et de "la position de A dans X ".

Ex: $X = B^n$, $A = \partial B^n = S^{n-1}$



Remarque:

Si $\sigma: \Delta^n \rightarrow A$ est un simplexe singulier à valeurs dans A ,
c'est aussi un simplexe singulier à valeurs dans X .

$$C_n(A) \xhookrightarrow{i} C_n(X)$$

Si on définit $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$, on obtient donc une
suite exacte :

$$\{0\} \rightarrow C_n(A) \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{j} C_n(X, A) \rightarrow \{0\}$$

On obtient un opérateur ∂ par passage au quotient :

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ C_n(X)/C_n(A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \end{array}$$

$\bar{\partial}$ est bien défini puisque $\partial(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$.

On obtient 3 complexes et des morphismes de complexes
qui forment une suite exacte de complexes.

$$\begin{array}{ccccccc} & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1}(A) & \xrightarrow{\partial} & C_n(A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(A) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j & \\ \cdots & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_n(X, A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & \end{array}$$

On a bien $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ par passage au quotient de $\partial\partial = 0$.

D'après le théorème général d'alg. homol. démontré dans
le dernier cours, on va obtenir une suite exacte longue en
homologie.

On définit $H_n(X, A) := \frac{\text{Ker}(C_n(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}} C_{n-1}(X, A))}{\text{Im}(C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}} C_n(X, A))}$

c'est le n-ème groupe d'homologie du couple (X, A) .

Homologie :

Avant d'écrire la suite exacte longue, on remarque que :

Si $A = \emptyset$, on se souvient que le groupe libre engendré par le vide est le groupe trivial $\{e\} = \{0\}$.

Donc $C_n(A) = \{0\}$ et on retrouve l'homologie de X :

$$H_n(X, \emptyset) = H_n(X).$$

Si $A \neq \emptyset$, on définit $\widetilde{H}_n(X, A) := H_n(X, A) \quad \forall n \geq 0$

l'homologie réduite est définie comme étant égale à l'homologie du couple $\downarrow$

Toute classe de $H_n(X, A)$ est représentée par un cycle relatif : $[\alpha] \in H_n(X, A)$, $\alpha \in C_n(X)$: $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$

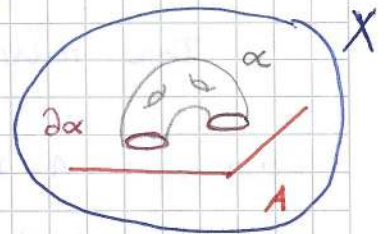
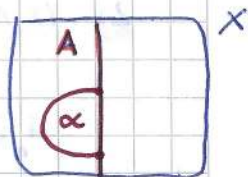
$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow \{0\}$$

Remarque :

On peut visualiser le bord $\partial : H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$

$[\alpha] \in H_n(X, A)$ est représentée par $\alpha \in C_n(X)$:

$\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$, $\partial[\alpha] =$ la classe d'homologie de $\partial\alpha$ dans $H_{n-1}(A)$.



Prop: Soit X c.t., $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, on a une suite

exacte longue en homologie réduite associée au couple (X, A) :

$$\dots \rightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \dots \rightarrow \widetilde{H}_0(X, A) \rightarrow *$$

$$* \rightarrow \{0\} =: \widetilde{H}_{-1}(A)$$

$$\text{car } \widetilde{H}_{-1}(A) = \frac{\text{Ker } *}{\text{Im } \varepsilon} = \{0\} \quad \text{et } \varepsilon \text{ surjectif.}$$

Preuve:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & & & & \{0\} & \xrightarrow{\text{surjectif}} & \{0\} \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_n(A) & \xrightarrow{\partial} & \dots & \rightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \xrightarrow{*} \{0\} \\
 \downarrow i & & & & \downarrow i & & \downarrow \text{id} \\
 C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & \dots & \rightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \rightarrow \{0\} \\
 \downarrow j & & & & \downarrow j & & \downarrow \\
 C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \dots & \rightarrow & C_n(X, A) & \rightarrow & \{0\} \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{0\} & & & & \{0\} & &
 \end{array}$$

Δ suites exactes :
exactitudes portées
sur les verticales Δ

On considère la suite exacte des trois complexes suivants.

On peut appliquer le résultat général d'alg. homologique.

Exemples:

1) $(X, A) = (D^n, \partial D^n) \quad n \geq 1$

$$\dots \rightarrow H_i(D^n) \xrightarrow{i_*} H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} H_{i-1}(D^n) \rightarrow \dots$$

$\parallel$ $\{0\}$ $\parallel$ $\{0\}$ $\Rightarrow$ iso !

Comme la suite est exacte ∂ est un iso

$$\Rightarrow H_i(D^n, \partial D^n) \cong H_{i-1}(\partial D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ \{0\} & i \neq n \end{cases}$$

2) $(X, A) = (X, x_0) \quad A = \{x_0\}$

$$H_n(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\{x_0\})$$

$\parallel$ $\{0\}$ $\parallel$ $\{0\}$

Comme la suite est exacte ∂ est un iso.

Donc $H_n(X) = H_n(X, x_0) \quad \forall n$

Remarques: $A \subset X, B \subset Y, X, Y$ esp. topo

$f: X \rightarrow Y$ continue. On demande que $f(A) \subset B$.

On note $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$

$$C_n(X, A) \xrightarrow{f_*} C_n(Y, B)$$

$$\parallel$$

$$C_n(X)/C_n(A) \xrightarrow{f_*} C_n(Y)/C_n(B)$$

f_* est bien définie par
passage au quotient car

$$C_n(X) \xrightarrow{f_*} C_n(Y) \text{ est tq}$$

$$f_*(C_n(A)) \subset C_n(B)$$

Homologies:

$$\begin{array}{ccccc}
 C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \\
 \downarrow f_* & \searrow i & \downarrow f_* & \searrow i & \\
 C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & & \\
 \downarrow i & \searrow j & \downarrow i & \searrow j & \\
 C_n(X)/C_n(A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) & & \\
 \downarrow j & \searrow f_* & \downarrow j & \searrow f_* & \\
 C_n(Y)/C_n(B) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(Y)/C_{n-1}(B) & &
 \end{array}$$

Le carré sommet du cube commute, les carrés côtés commutent donc le carré du fond commute.

On obtient donc un morphisme de complexes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\
 \dots & \rightarrow & C_n(Y, B) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(Y, B) & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

Donc, on a $H_n(X, A) \xrightarrow{f_*} H_n(Y, B)$ homomorphisme en homologie.

De plus, si $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sont homotopes par

$$\begin{aligned}
 H: [0, 1] \times X &\rightarrow Y \text{ continue} \\
 (t, x) &\longmapsto H(t, x) =: H_t(x)
 \end{aligned}$$

telle que $H_0 = f$, $H_1 = g$, $\forall t$ $H_t(A) \subset B$.

Alors $f_* = g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$

(l'opérateur prisme passe au quotient)

Prop: Suite exacte longue associée à un triple $B \subset A \subset X$.

X esp. topo, A ss-ens de X et B ss-ens de A (topo de l'inclusion)

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots \quad H_0(X, A) \rightarrow \{0\}$$

Preuve:

$$\begin{array}{ccccc}
 \{0\} & & \{0\} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots \rightarrow C_n(A, B) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(A, B) & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow i & & \downarrow i & & \\
 \dots \rightarrow C_n(X, B) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, B) & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots \rightarrow C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, A) & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \{0\} & & \{0\} & &
 \end{array}$$

est une suite exacte de complexes.

On n'a pas à utiliser ce qui est fait aujourd'hui

le 17.12.19

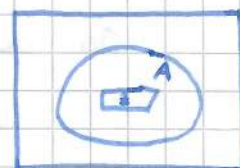
Thm: (Excision)

Soit X un e.t. $Z \subset A \subset X$ tq $\bar{Z} \subset \overset{\circ}{A}$, la fermeture de Z est à l'intérieur de A . Alors l'inclusion

$$(X|Z, A|Z) \xrightarrow{i} (X, A) \text{ induit des isomorphismes}$$

$$\forall n \geq 0 \quad H_n(X|Z, A|Z) \xrightarrow[\sim]{i_*} H_n(X, A)$$

$\downarrow$ isom



X

Rem: Si on croit que $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$ alors le résultat n'est pas étonnant car $X/A \cong X/Z / A/Z$

$\downarrow$ homéo

Prop: Soit X e.t. $A \subset X$. On suppose qu'il existe $A \subset V \subset X$

voisinage de A de X tq V se rétracte sur A . On suppose que

$$A \neq \emptyset, A \text{ fermé. } q: X \rightarrow X/A$$

$x \mapsto [x]$

Par tout $n \geq 0$ l'application induite $H_n(X, A) \xrightarrow{q_*} H_n(X/A, A/A)$ est un isomorphisme et on sait que $H_n(X/A, A/A) = H_n(X/A)$

Preuve: Remarquons que $q: X \rightarrow X/A$, $q(A) = A/A \subset X/A$ est un

point de X/A . On peut donc considérer $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$

$$\text{et donc } q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$$

Pour prouver que q_* est bij., on considère $A \subset V \subset X$.

Homologie:

On a : $A/A \subset V/A \subset X/A$ et donc

$$\begin{array}{c} (X, A) \\ \downarrow q \\ (X/A, A/A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (X, V) & \longleftrightarrow & (X/A, V/A) \\ \downarrow q & \curvearrowright & \downarrow q \text{ est un homéo} \\ (X/A, V/A) & \longleftrightarrow & (X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

En homologie, on obtient

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow[\sim]{j_*} & H_n(X, V) & \xleftarrow[\sim]{i_*} & H_n(X/A, V/A) \\ \downarrow q_* & \curvearrowright & \downarrow q_* & \curvearrowright & \downarrow q_* \text{ iso} \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow[\sim]{j_*} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow[\sim]{i_*} & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

Le carré de droite est obtenu par fonctorialité à partir du carré de gauche ensembliste.

Les j_* du carré de gauche sont ceux des suites exactes longues des triples $A \subset V \subset X$ et $A/A \subset V/A \subset X/A$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(V, A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow[\sim]{j_*} & H_n(X, V) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(V, A) \\ \text{is} & & & & & & \text{is} \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array}$$

car $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = \{0\}$ car V se rétracte sur A .

Donc l'exactitude implique que j isom.

Même chose avec $A/A \subset V/A \subset X/A$ car la rétraction de V sur A induit une rétraction de V/A sur A/A .

Le thm d'excision implique que les i_* sont des iso.

Donc $H_n(X, A) \xrightarrow{\text{iso}} H_n(X/A, A/A)$ puisqu'on peut faire le tour des iso.

?

Preuve: du thm p. 89 des notes du prof.

$A \subset X$ avec les hyp. habituelles

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

est exacte.

$A \neq \emptyset$

En effet, d'après la proposition précédente, $\tilde{H}_n(X/A) \stackrel{\sim}{=} H_n(X/A, A/A)$
 $= H_n(X, A) \stackrel{\sim}{=} H_n(X, A)$

et la suite du théorème p. 89 est la suite en homologie relative réduite p. 104 des notes.

□

(Autre preuve:

appliquer la suite exacte longue $\{a\} \subset A \subset X$)

Corollaire:

Soit X_α un c.t., $x_\alpha \in X_\alpha$, $\exists$ un voisinage de $\{x_\alpha\}$ dans X_α qui se rétracte sur $\{x_\alpha\}$.

$$\bigvee_\alpha X_\alpha = \bigcup_\alpha X_\alpha / \bigcup_\alpha \{x_\alpha\} =: X/A \quad . \quad X_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} X/A$$

$$\text{Alors } \forall n \geq 0 \quad \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$$

$$\sum_\alpha [c_\alpha] \longmapsto \sum_\alpha (i_\alpha)_* [c_\alpha] .$$

Preuve: (X, A) la paire ci-dessus.

$$\bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \cong H_n(\bigcup_\alpha X_\alpha, \bigcup_\alpha \{x_\alpha\})$$

$$\cong \tilde{H}_n(X/A) = H_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$$

□

Proposition: (Le générateur de $H_n(D^n, \partial D^n)$)

Soit $n \geq 0$, le groupe $H_n(D^n, \partial D^n) \cong H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n)$ est

cyclique infini, engendré par la classe de $i_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$
 $x \mapsto x$

(ici le but est aussi Δ^n)

Homologie:

Preuve: Remarquons que $\Delta^n \xrightarrow{\text{homéo}} D^n = B^n$ et $\partial\Delta^n \xrightarrow{\text{homéo}} \partial D^n = \partial B^n \cong S^{n-1}$
 $i_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ est bien un cycle dans $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$
 donc on peut considérer $[i_n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Réurrence sur n :

$i_0: \Delta^0 \rightarrow \Delta^0$ est bien un générateur de $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0)$
 $\begin{matrix} x \mapsto x \\ = H_0(\Delta^0, \emptyset) \cong C_0(\Delta^0) \cong \mathbb{Z} \end{matrix}$

Supposons ok pour $n-1$:

Soit $\Lambda \subset \Delta^n$ la réunion de $\forall$ les faces de Δ^n sauf une notée Δ^{n-1} , $\partial\Delta^n = \Lambda \cup \Delta^{n-1}$, $\Delta^{n-1} \cap \Lambda = \partial\Delta^{n-1}$

$$\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial\Delta^n = \Delta^{n-1} \cap \Lambda$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{n-1} / \partial\Delta^{n-1} & \xrightarrow{\sim} & \partial\Delta^n / \Lambda \\ & \searrow \text{homéo} & \end{array}$$

$$H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{i_*} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

$$\begin{array}{ccc} \text{SII prop} & \xrightarrow{\quad} & \text{II5} \\ \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n / \Lambda) & \xrightarrow[\text{iso}]{\cong} & \widetilde{H}_{n-1}(\Delta^{n-1} / \partial\Delta^{n-1}) \end{array}$$

Donc i_* est un iso.

$$\text{D'autre part, } H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$$

dans la suite exacte longue

associée au triple $\Lambda \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$

$$\Delta^n \quad \Lambda \quad \partial\Delta^n$$

Le bord ∂ est un isomorphisme.

En effet,

$$H_n(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda)$$

II5
 $H_n(\Lambda, \Lambda)$ car Δ^n se rétracte par déformation sur Λ .

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\sim} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

$$[i_n] \longleftarrow [i_{n-1}] \longleftarrow \dots \longleftarrow [i_1]$$

Equivalence entre Homologie sing et hom. des Δ complexes:

X Δ -complexe $\alpha: \Delta^k \rightarrow X$ $\alpha \in \mathcal{A}$

Déf: Soit $A \subset X$ un ss-ensemble.

On dit que A est un sous- Δ -complexe de X si la collection des σ_α , $\alpha \in \mathcal{A}$ constituée des $\sigma_\alpha: \sigma_\alpha(\Delta^{k_\alpha}) \subset A$ munis A d'une structure de Δ -complexe.

$$\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X) / \Delta_n(A)$$

$H_n^\Delta(X, A)$ est l'homologie correspondante.

$\Delta_n(X) \rightarrow C_n(X)$ induit $\Delta_n(X, A) \rightarrow C_n(X, A)$ et

$$\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X \mapsto \sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X \quad H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$$

Thm: $\forall n \geq 0$ $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ est un iso.

Preuve: On va se limiter au cas où $A = \emptyset$ et le Δ -complexe est de dim finie.

Induction sur la dim du Δ -complexe. Si la dim du Δ -c est nulle, X est discret et les 2 homol. coïncident.

Supposons ok en dim $k-1$, $X^k \subset X$ est la réunion des images des $\sigma_\alpha: \Delta^{k_\alpha} \rightarrow X$ où $\alpha \in \mathcal{A}$, $k_\alpha \leq k$. On a un diag. commut. de suites exactes.

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_n^\Delta(X^k) & \xrightarrow{j_*} & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \textcircled{1} \downarrow S & & \textcircled{2} \downarrow S & & \textcircled{3} \downarrow & & \textcircled{4} \downarrow S & & \textcircled{5} \downarrow S \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_n(X^{k-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X^k) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

iso par induction

$\textcircled{2}$ et $\textcircled{5}$ sont des iso par inductions. $\textcircled{1}$ et $\textcircled{4}$ sont aussi des iso car [(pas vu pour l'instant) quotient d'une réunion disjointe de complexes on regarde X^k comme quotient de la réunion disj des supports de tous les $\sigma_\alpha: \Delta^{k_\alpha} \rightarrow X$, $k_\alpha \leq k$. + gén. $H_n(D^n, \partial D^n)$]

Par le lemme des 5, on a que $\textcircled{3}$ est un iso.