le 27.02.20

Théorie Géométrique des Groupes :

Introduction :

Théorie. Géom. Grps

- on étudie les groupes par leurs actions sur des espaces avec différentes géométries
- M. Gromov. groupes comme espaces métriques.

1. Groupes Libres :

Rappel : A un alphabet fini, $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

$W(A)$ = "monoïde libre" = {mots en $A \cup A^{-1}$}

muni de la concaténation des mots et l'élément neutre $\emptyset$ mot vide.

$W(A)/\sim$ où $\sim$ est engendrée par les équivalences "élémentaires" suivantes $aa^{-1} \sim \emptyset$, $a^{-1}a \sim \emptyset$ $\forall a \in A$

$w \sim w'$ $\Leftrightarrow$ on obtient w' de w en appliquant # fini d'équiv. élémentaires.

Thm : 1) $W(A)/\sim$ est un groupe, c'est le groupe libre sur A noté $F(A)$. [vide : $e_{F(A)} = [\emptyset]$]

2) $\forall g \in F(A)$ est représenté par l'unique mot $g \longmapsto W_g$ "librement réduit" (sans aa^{-1} ou $a^{-1}a$) dans $W(A)$

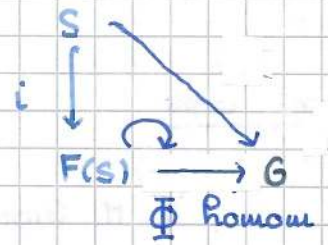
Opération dans $F(A)$: concaténation, réduction libre

$g, g' \in F(A)$, $g \cdot g' = \underbrace{W_g \cdot W_{g'}}_{\in W(A)}$ - un mot libre réduit

Prop Universelle

Thm : Soit S un ensemble, G un groupe. Pour toute fonction $\varphi : S \longrightarrow G$, $\exists!\ \Phi : F(S) \longrightarrow G$ tq : $\varphi = \Phi \circ i$

où $i : S \longrightarrow F(S)$ est l'inclusion.



Déf : G groupe, $S \subset G$ est une famille génératrice si $\forall g \in G$ s'écrit comme produit $g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$ avec $s_{i_j} \in S$ $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$

Déf : Le rang de G est la cardinalité de la plus petite famille génératrice.

Cor : 1. $F(X) \overset{\text{isom}}{\cong} F(Y) \iff X \longrightarrow Y$ bijection.

Cor : 2. Si $F(X)$ est un groupe libre sur X, alors le rang de $F(X) = |X|$ et donc les groupes libres sont déterminés par leurs rangs.

Not : F_n = groupe libre de rang n $n \geq 1$ ou $n = \infty$

$n = 1$, $F_1 = \mathbb{Z}$

$n \geq 1$, F_n grp libre non-abélien.

Rq : (Cor 1)

$\Leftarrow$: $\varphi : X \longrightarrow Y$ bijections entre X et Y

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ F(X) & \xrightarrow{\Phi} & F(Y) \end{array}$$

prop. universelle (thm)

Φ est bij $\Leftrightarrow$ φ est bij et Φ est un homom.

$\Rightarrow$: 2 manières :

(1) $F(X) = \pi_1$(bouquets de n cercles)

Si on a $F(X) \cong F(Y) \Rightarrow B(X) \overset{\text{homéo.}}{\cong} B(Y)$

$\Rightarrow$ le # de pétales est le même

Groupes :

2) L'abélianisé d'un groupe libre $F(X)/F(X)'$ est un grpe abélien libre qui sont classifiés par leur rang.

Cor 3 : Tout groupe est un quotient d'un groupe libre.

Pv : $G = X$, $F(X)$. Alors $G \hookrightarrow F(X)$ et on applique la prop. universelle pour $\varphi = id_G$

$\Rightarrow \Phi : F(G) \twoheadrightarrow G$ (car $\varphi \twoheadrightarrow$) $G = F(G)/\ker \Phi$

Rem : La prop. univ. caractérise les groupes libres.

Déf : G un groupe est dit "de type fini" s'il existe $S \subset G$ une famille génératrice et $|S| < \infty$ [$G = \langle S \rangle$]

Ex : 1) les groupes finis sont de type fini

2) $\mathbb{Z}$ groupe cyclique infini $\langle c \rangle$

3) F_n sont de type fini $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$

En effet, $S \hookrightarrow F(S)$ et $\langle S \rangle = F(S)$ par la partie 2 du 1er thm.

4) $\mathbb{Z}^d$ est engendré par d générateurs

Ex 2) — 4) : groupes infinis de type fini.

Cor 3' : Si G est engendré par n éléments, alors G est un quotient de F_n.

Pv : Soit $G = \langle S \rangle$, $|S| = n$, $S \subset G$, on applique à S la prop. univ. $\Rightarrow F(S) \xrightarrow{\Phi} G$ homom, Φ est surjectif car $\langle S \rangle = G$.

Soit $g \in G$, $G = \langle S \rangle$, donc $\exists\, s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_m}^{\varepsilon_m} = g$ $s_{i_j} \in S$ $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$

$s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_m}^{\varepsilon_m}$ est librement réduit en tant que mot de SUS^{-1}

car si $s \in S \subset G$, $ss^{-1} = e_G$.

Donc on prend ce mot libre réduit comme préimage de

g dans $F(S)$

▨

Rem : La réciproque est aussi vraie.

Si G est un quotient de $F(S)$, avec $\pi : F(S) \longrightarrow G$

alors $\langle \pi(S) \rangle = G$.

(Par abus de notation : $\langle S \rangle = G$)

En effet, $g \in G$, π surj $\Rightarrow$ $g = \pi(w)$ w mot libre réduit

Donc $g = \pi(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots \pi(s_{i_m})^{\varepsilon_m}$ donc $\langle \pi(S) \rangle = G$

$G = \langle S \rangle$, $|S| < \infty$, $F(S) \xrightarrow{\pi} G$, $G = F(S)/N$

où $N = \ker \pi$, $N \trianglelefteq F(S)$

N en tant que ss-grp de $F(S)$ consiste en des mots

librement réduits en SUS^{-1} $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_m}^{\varepsilon_m}$ tq

$\pi(s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_m}^{\varepsilon_m}) = \pi(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots = e_G$

Ces mots-là sont <u>des relations</u> dans G.

Si $R \subset N$ et l'engendre en tant que ss-grp normal

de $F(S)$.

« R » <u>le ss-grp normal eng. par R</u> et le + petit ss-gpe

normal contenant R et c'est aussi le ss-gpe engendré

par $\{ \bar{g}^{-1} r g \mid r \in R, g \in F(S) \}$

$G = \langle S \mid R \rangle$ une <u>présentation de G</u> par générateur

et relations.

$G = F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$, R = ens. de mots réduits en SUS^{-1}.

Groupes :

Déf : G est de présentation finie si G est de type fini avec $G = \langle S \rangle$ et $\exists R$ ens. de rel. en SUS^{-1}, $|S| < \infty$, tq $G = \langle S, R \rangle$

Exs :

1) Les grp libres sont donnés par des présentations $\langle S, \emptyset \rangle$ sans relations

2) $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid [a,b] \rangle = F_{a,b} / \underbrace{F'_{a,b}}_{\ll [a,b] \gg}$

$\mathbb{Z}^2 = \pi_1(T)$

3) Plus généralement,

$\pi_1(\Sigma_g)$ 

$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1,b_1] \cdot [a_2,b_2] \rangle$

4) $\mathbb{Z}^3 = \langle a, b, c \mid [a,b], [b,c], [a,c] \rangle$

Graphes de Cayley :

Déf : $G = \langle S \rangle$, $|S| < \infty$, $(G,S) \rightsquigarrow \underline{Cay(G,S)}$ (connexe car $G = \langle S \rangle$)

$V(Cay(G,S)) = G$ $\quad E(Cay(G,S)) := \{ (g, gs) \mid g \in G, s \in SUS^{-1} \}$

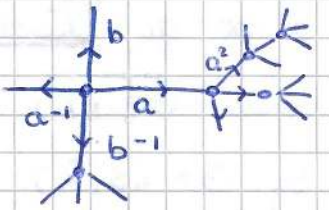
À priori, les arêtes de ce graphe sont orientées et étiquetées par SUS^{-1}, mais on peut les oublier.

Rem : Les circuits dans $Cay(G,S)$ sont les relations dans G par rapport aux générateurs S.

Cor : $F(S)$ grp libre $\quad$ $Cay(F(S), S)$ est un $\underbrace{\text{abre}}_{\text{graphe connexe sans circuit}}$.

Ex : $Cay(F_c, \{c\})$ —•—•—•—•—…

$Cay(F_{a,b}, \{a,b\})$



le 05.03.20

Rem : (G,S), $\langle S \rangle = G$ et $|S| < +\infty$

$Cay(G,S) = (V, E)$

$V = G$, $E = \{(g, gs) \mid g \in G, s \in S\}$ orienté + étiqueté

On peut oublier l'orientation.

Rem : Très important : $G \curvearrowright Cay(G,S)$ $\Leftrightarrow$ $G \curvearrowright V$ les deux actions sont compatibles
$G \curvearrowright E$

$e \in E$, $h \in G$, $h \cdot e = (hg, hgs) = (g, gs)$

$G \curvearrowright V$ est l'action std (régulière) $G \curvearrowright G$ par multiplication à gauche $\left(\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g.h \end{array} \right)$

$G \curvearrowright E$ préserve l'orientation et l'étiquetage

Cette action est libre sur les sommets !

($\Leftrightarrow$ ve $V(Cay(G,S))$; $stab(v) = \{g \in G \mid gv = v\} = \{e_G\}$)

Revenons aux groupes libres :

$F_n = F(a_1, \dots, a_n)$ engendré par $\{a_1, \dots, a_n\} =: A_n$

$Cay(F_n, A_n)$ = Arbre régulier de degré $2n$ =: T_{2n}

Il en découle que F_n agit librement sur T_{2n}

[J.-P. Serre "Trees"]

[W. Magnus "Théorie combinatoire des groupes"]

Groupes :

Thm : (O. Schreier)

Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Déf : (Un graphe par J.-P. Serre)

$G = (V, \mathbb{E})$, $i : \mathbb{E} \to V$, $t : \mathbb{E} \to V$, $\bar{} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$
$\neq \emptyset$

$\bar{e} \neq e$ et $\bar{\bar{e}} = e$ et $i(\bar{e}) = t(e)$ et $i(e) = t(\bar{e})$

$\mathbb{E} = E_+ \sqcup E_-$

Déf : Un arbre est un graphe connexe sans circuit.

[circuit = un chemin fini (ie : une séquence d'arrête $e_1, \dots e_n$ tq $t(e_i) = i(e_{i+1})$ $i = 1 \dots n-1$) tel que de plus $t(e_{n+1}) = i(e_1)$ et le chemin est simple ($e_{i+1} \neq \bar{e_i}$ $\forall i = 1 \dots n$)]

(w/o back-tracking) (sans aller-retour)

impossible dans un arbre !

Thm ① : Dans un arbre, étant donnés deux sommets distincts $\exists !$ chemin réduit (= simple) qui les relie.

Thm ② : Un groupe qui agit librement sur un arbre est un groupe libre

Pv : du thm de Schreier

Soit $H \leq F_n$, $F_n \curvearrowright T_{2n}$ librement car $T_{2n} = Cay(F_n, A_n)$

$H \leq F_n \Rightarrow H \curvearrowright T_{2n}$ avec l'action sur $V(T_{2n})$ = mult. à gauche.

[En général $G \curvearrowright X$ librement et $H \leq G \Rightarrow H \curvearrowright X$ librement]

$\Rightarrow H \curvearrowright T_{2n}$ librement, donc par ② H est un groupe libre. ∎

Rem : Démo géométrique d'un thm algébrique.

↑ topologique

Rq : thm ②

Si G un groupe agit sur un graphe, (sans inversion : $g \cdot e \neq \bar{e}$) on peut définir le graphe quotient.

Dans notre cas $H \curvearrowright T$, $\Gamma := H \backslash T$ le graphe quotient.

$V(\Gamma) = \{H_v\}_{v \in V(T)}$, $E(\Gamma) = \{H_e\}_{e \in E(T)}$

Ça définit bien un graphe vu que $G \curvearrowright E(T)$ et $G \curvearrowright V(T)$ sont compatibles.

Ça veut dire que T est un revêtement de Γ ($T \twoheadrightarrow \Gamma$)

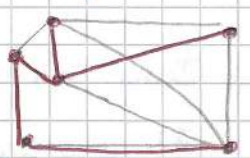
Mais ! ① nous dit que T est un espace simplement connexe.

Donc T est le revêtement **universel**.

Et donc $H = \pi_1(\Gamma)$.

Mais Γ est un graphe et $\pi_1(\Gamma)$ est un groupe libre.

Rap : Γ graphe $\Rightarrow$ $\pi_1(\Gamma)$ groupe libre



Γ fini $\rightsquigarrow$ $\exists$ un arbre maximal $T \subseteq \Gamma$, $V(T) = V(\Gamma)$

T un arbre $\Rightarrow$ T contractible $\Rightarrow$ on contracte T en un sommet

Mais les arrêtes grises ne sont pas contractées.

$\Rightarrow$ $\pi_1(\Gamma)$ est un bouquet de cercles

Rem : Si $\Gamma = (V, E)$ où $|V| = n$ et $|E| = m$ alors

$$\pi_1(\Gamma) \simeq F_{\underbrace{m-n+1}_{\#\text{ arrêtes non-contractées de } \Gamma}}$$

car $|E(T)| = |V(T)| - 1 = n - 1$

$\|$

$|V(\Gamma)| = n$

Rem : $H \leq F_n$ $T_{Cay} = Cay(F_n, A_n)$

$\Gamma = H \backslash T$ $\pi_1(\Gamma) = H$

Groupes :

On a vu que $H \leq F_n$, H est aussi un groupe libre.

On sait que les gps libres sont classifiés par leur rang.

Quel est le rang de H ?

Dans certains cas, on peut le calculer (formule de Schreier)

Ça peut être ∞ !

Donc on peut avoir un ss-groupe d'un groupe de type fini qui n'est pas de type fini.

Exc : $F(a,b)$

Soit $\varphi : F(a,b) \longrightarrow \mathbb{Z} = \langle a \rangle$, $H := \ker(\varphi)$

$$a \longmapsto a$$
$$b \longmapsto e$$

H est en fait le groupe libre sur l'ensemble $A_\infty := \{ a^i b a^{-i} \mid i \in \mathbb{N} \}$

En effet, $w = a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_n} b^{j_n}$

$w \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(w) = e$ [on oublie les b et on $\sum i_k$]

$\Leftrightarrow$ l'exposant total de a est 0.

Il suffit (comme $b \in \ker(\varphi)$) de considérer $w = a^{i_1} b^{j_1} \dots b^{j_{n-1}} a^{i_n}$

$$= \underbrace{a^{i_1} b^{j_1} a^{-i_1}}\ \underbrace{a^{i_1+i_2} b^{j_2} a^{-i_1-i_2}}\ \underbrace{a^{i_1+i_2+i_3} b^{j_3} \dots b^{j_n} a^{-i_1-\dots-i_{n-1}}}\ a^{\overbrace{i_1+\dots+i_n}^{=0}}$$

Donc $H = \langle A_\infty \rangle$.

Reste à voir que H n'est pas généré par un ss-ens fini de A_∞.

Pb exc : $a^{3n} b a^{-3n}$ ne peut pas s'obtenir avec $\{ a^i b a^{-i} \mid i \leq n \}$

$$\begin{cases} a^i b a^{-i} \cdot a^k b a^{-k} = a^i b a^{k-i} b a^{-k} \\ (a^i b a^{-i})^n = a^i b^n a^{-i} \end{cases}$$

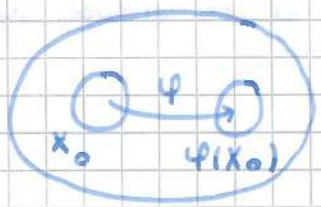
→ et on estime la longueur

Donc $H \cong F_\infty$

Un autre corollaire de cet exemple est un exemple d'un grp de type fini qui n'est pas de présentation finie.

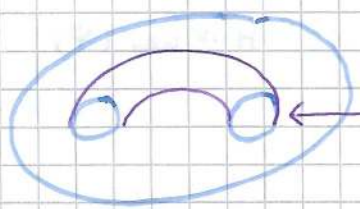
En fait, B. Neumann a montré qu'il existe une infinité non-dénombrable de groupes à 2 générateurs.

Cet exemple est l'extension HNN



X

φ homéo



X' = recollement d'une anse

$X_0 \times [0,1]$, $\pi(X') = \pi(X) *_{\bar{\varphi}: \pi(X_0) \to \pi(\varphi(X_0))}$

Thm: (G. Higman, H. Neumann, B. Neumann)

Si G est un groupe, $G = \langle S \mid R \rangle$ et $A, B \leq G$ tq $\varphi: A \to B$ isom. Alors $\exists$ un groupe $G *_{\varphi: A \to B}$ (extension HNN de G)

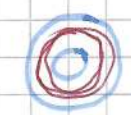
$G *_{\varphi: A \to B} = \langle S, t \mid R, t^{-1} a t = \varphi(a) \ \forall a \in A \rangle$

Ex: (Retour au précédent)

$F(a,b) *_{id: H \to H} = \langle a, b, t \mid t^{-1} w_i t = w_i \ \forall w_i \in A_\infty \rangle$

3 générateurs mais pas de présentation finie.

Ex: Tore = recollement d'une anse à une sphère à 2 trous ou un disque à 1 trou.

$\cong$  $\times$ $\pi_1(X) = \mathbb{Z} = \langle a \rangle$

$\pi_1(\pi^2) = \langle a, t \mid t^{-1} a t = a \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

le 05.03.20

Groupes :

Voici une recette pour trouver des sous-groupes libres dans des groupes qui ne sont pas libres.

(ex : dans des ss-grp de $GL(n,\mathbb{Z})$)

Lemme : de Ping-Pong

Soit G un groupe, X un ens. et $G \curvearrowright X$.

Supposons $g_1, g_2 \in G$ et $\exists X_1, X_2 \subset X$ (ordre $(g_1) \geq 3$)

tq $X_2 \not\subseteq X_1$ et $g_1^k X_2 \subset X_1 \ \forall k \neq 0$ $g_2^m X_1 \subset X_2 \ \forall m \neq 0$

Alors $\Gamma = \langle g_1 \rangle * \langle g_2 \rangle$, si $o(g_1) = o(g_2) = \infty$ $\Gamma = \mathbb{F}_2$.

Pv :

À voir : $\forall$ mot réduit en g_1, g_2 n'est pas un élément trivial.

$w = g_1^{i_1} g_2^{j_1} \dots g_1^{i_n} g_2^{j_n} g_1^{i_{n+1}}$ (il y a d'autres cas analogue à démontrer)

mot réduit

Soit $\gamma_w \in G$, l'élément de G déterminé par le mot w

On regarde $\gamma_w(X_2) \subset g_1^{i_1} g_2^{j_1} \dots g_1^{i_n} g_2^{j_n}(X_1)$

$\subset g_1^{i_1} g_2^{j_1} \dots g_1^{i_n}(X_2)$

$\subset g_1^{i_1}(X_2) \subset X_1$

$\Rightarrow \gamma_w$ n'est pas $= e \in G$

$\Rightarrow w$ pas trivial. ■

2. Groupes de type fini vus comme espace métrique : le 12.03.20

Déf : Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. le 5.03. si $c=0 \Rightarrow$ appli Lipschitzienne.

On dit que (X, d_X) et (Y, d_Y) sont quasi-isométrique si $\exists$ $\exists \lambda \geq 1,\ c \geq 0,\ D \geq 0$

$f : X \to Y$ une application et $c \geq 1$ une cst tq :

distance "préservée" i) $\forall x, x' \in X$, $\frac{d_X(x,x')}{c} - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c\, d_X(x,x') + c$ $\frac{1}{\lambda} d_X(x,x') - c \leq \dots \leq \lambda d_X(x,x') + c$

uniformité ii) $\forall y \in Y, \exists x \in X : d_Y(f(x), y) \leq c$ $d_Y(f(x), y) \leq D$

Exo : Être quasi-isom est une relation d'équiv. sur les E.M. p. 11

Ex : Tout esp. métrique de diam. fini est quasi-isom à un point.

Comment définir une métrique sur un groupe de type fini ?

Soit G un groupe engendré par $S \subset G$ tq $(S = S^{-1})$ et $|S| < \infty$

↳ On peut prendre $S \cup S^{-1}$

Exc :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

groupe discret de Heisenberg des matrices 3×3

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=X} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=Y} \right\}$$

à vérifier : $XYX^{-1}Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

+ Plein d'autres exemples de groupes de type fini qu'on a vu.

Rap : $G = \langle S \rangle \Rightarrow F(S) \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} G$ et tout élément de G s'écrit (de plusieurs manière) comme un mot libr. réduit en S (ou S et S^{-1})

$\{\text{ces mots}\} = \varphi^{-1}(g) \cap F(S)$

On associe à (G, S) deux espaces métriques.

! Très important !

Le premier est (G, d_S) où $d_S(g, h) := \| g^{-1} h \|_S$ et où

$$\| g \|_S := \min \{ N : \exists a_1, \dots, a_N \in S,\ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N \underset{G}{=} g \}$$

* $g \cdot g^{-1} h = h \Rightarrow g^{-1} h$ est ce qui manque à g pour avoir h et c'est donc $d_S(g, h) = \| g^{-1} h \|_S$

Le second est $\mathcal{C}(G, S)$ qui est le graphe de Cayley de G relativement à S muni de la métrique des chemins.

$\mathcal{C}(G, S)$ est ainsi construit :

On commence par considérer G comme un ensemble de sommets, ensuite on relie deux sommets $g, h \in G$ par une copie de l'intervalle $[0, 1]$ muni de la métrique habituelle

$h = g \cdot s$ avec $s \in S$

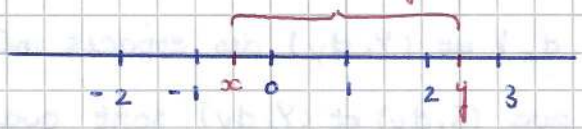
$\Leftrightarrow d_S(g, h) = 1 \Leftrightarrow h = g \cdot s$ avec $s \in S$

L'espace obtenu $\mathcal{C}(G, S)$ est muni de la métrique des chemins :

si $x, y \in \mathcal{C}(G, S)$, on pose $d(x, y)$ = Long. du plus court chemin de x à y.

Exc : $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1\}$

$\mathcal{C}(G, S)$



Rem : un chemin dans $\mathcal{C}(G, S)$ sans allers retours sont en correspondance avec les mots (librement réduits) formés par les étiquettes des arêtes consécutives.

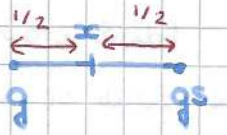
G agit (à gauche) par isométrie sur $\mathcal{C}(G, S)$.

$(G, d_S) \xhookrightarrow{i} \mathcal{C}(G, S)$ est une isométrie sur son image :

$g \longmapsto g$ $\qquad d(i(g), i(h)) = d_S(g, h)$

Groupes :

Tout point de $\mathcal{C}(G,S)$ est à distance au plus $1/2$ d'un point de $i(G) \subset \mathcal{C}(G,S)$.



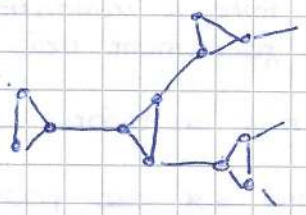
$g \in G$ $s \in S$ $s \neq e$

$d_S(g, gs) = 1$

Ex : • $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = G$; $S = \{\pm 1\}$

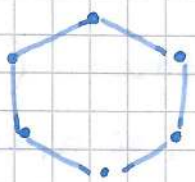
$n = 6$:

• $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:



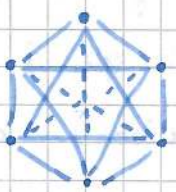
Rem : la définition des deux E.M. (G, d_S) et $(\mathcal{C}(G,S), d)$ dépend beaucoup de S et pas seulement de G.

Ex : • $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} ; \{\pm 1\})$



$= \mathcal{C}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$

• $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$



$= \mathcal{C}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$

• $\mathcal{C}(\mathbb{Z}, \{\pm 2; \pm 3\})$ vu de loin c'est presque une droite

• $\mathcal{C}(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$

Prop: Soit G un groupe de type fini.

i) Soit S un système de générateurs de G ($S = S^{-1}$, $|S| < \infty$)

Alors $(G, d_S) \xhookrightarrow{i} (\mathcal{C}(G,S), d)$ est une quasi-isométrie.
$g \longmapsto i(g)$ (déjà prouvé ci-dessus)

ii) Soit S et T deux systèmes finis et symétriques de générateurs de G. Alors :

a) $(G, d_S) \xrightarrow{id} (G, d_T)$ est une quasi-isométrie. (Pv: p. 15)

b) $(\mathcal{C}(G,S), d)$ et $(\mathcal{C}(G,T), d)$ sont quasi-isométrique
découle du pt a) et du pt i) car quasi-isom est une rel d'équiv
⇒ reste à démontrer a)

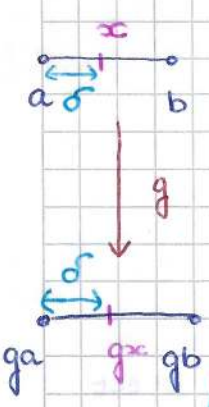
La prop. se prouve facilement mais nous allons la déduire d'un résultat plus général très utile en théorie géom. des Groupes. Avant d'énoncer le résultat insistons sur des points faciles mais importants.

- Prouver que l'action $G \times (G, d_S) \longrightarrow (G, d_S)$, $(g,h) \longmapsto gh$ est isométrique est évident :

$$d_S(gx, gy) = \|(gx)^{-1}gy\|_S = \|x^{-1}g^{-1}gy\|_S = \|x^{-1}y\|_S = d_S(x,y)$$

- G agit bien sur $(\mathcal{C}(G,S), d)$ par isométrie : (déjà discuté dans §1)

D'abord, l'action est bien définie, si $a, b \in G$ et $d_S(a,b) = 1$ et si x se trouve sur l'arrête (de long. 1) reliant a et b à distance $0 \leq \delta \leq 1$ de a, alors gx est par définition l'image point de l'arrête qui relie ga à gb. ($d_S(ga, gb) = 1$ donc cette arrête existe) qui est à distance δ de ga. Il est clair que cette action préserve la métrique des chemins sur $\mathcal{C}(G,S)$.



- L'injection $G \xhookrightarrow{i} \mathcal{C}(G,S)$, $g \longmapsto g$ est G-équivariante : $i(gh) = g\,i(h)$

Groupes :

Pv : ii) a)

$M = \max_{s \in S} \|s\|_T < +\infty$, car S est fini.

Soit $g \in G$, $g = s_1 \dots s_N$ avec $s_i \in S$ et choisissons $N := \|g\|_S$

$\|g\|_T \leq \|s_1\|_T \dots \|s_N\|_T \leq N \cdot M = M \|g\|_S$ donc $d_T(e,g) \leq M d_S(e,g)$

et par invariance des métriques par transl. à gauche

$d_T(g,h) \leq M d_S(g,h) \quad \forall g,h \in G$. $d_T(g,h) = \|g^{-1}h\|_T = d_T(e, g^{-1}h)$

On démontre que $d_S(g,h) \leq M' d_T(g,h)$ pour $M' < \infty$ indép. de g et h de la même manière. où $M = \max_{s \in S} \|s\|_T$ et $M' = \max_{t \in T} \|t\|_S$

on montre que $\max\{M, M'\}$ est λ de la déf de quasi-isom ∎

Thm : Soit X un espace métrique géodésique, propre (les boules fermées sont compactes). Soit Γ un groupe discret opérant proprement par isométries sur X. Si $\Gamma \backslash X$ est compact alors Γ est de type fini et Γ muni de la métrique des mots relative à n'importe quel système fini et symétrique de générateurs est quasi-isométrique à X.

($\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X)$; espace des orbites)

E.M géodésique : $\forall x, y \in X$ $\exists$ un chemin c liant x à y tq $|c| = d(x,y)$ tous 2 points sont liés par une géodésique

Pv : Preuve rédigée en détaille dans le livre de P. de la Harpe. (Gδ)-

Soit $x_0 \in X$.

Comme Γ agit de manière compact, $\exists K \subset X$ compact tq $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$

↳ domaine fondamental de l'action ou une préimage du quotient $\Gamma \backslash X$ ↓ compact

K est borné car compact donc $\exists R \gg 1 : B(x_0, R) \supset K$

On note $B = B(x_0, R) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq R\}$.

Ainsi $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma B \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K = X$.

Soit $S = \{s \in \Gamma : sB(x_0, 2R+1) \cap B(x_0, 2R+1) \neq \emptyset\}$

On a $S = S^{-1}$ et $|S| < \infty$ car $B(x_0, 2R+1)$ est compact,

et fini car Γ agit proprement.

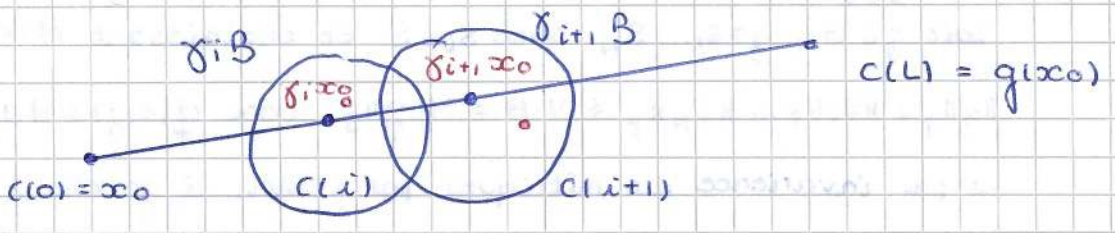
Montrons que $\langle S \rangle = \Gamma$.

* Les orbites de Γ sont discrets dans X (pas de point d'accumulation)

* Brittson - Haefliger : $\Gamma \curvearrowright X$ par isom alors $\Gamma \curvearrowright X$ est propre si $\forall x \in X$ $\exists r > 0$ tq $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma B(x,r) \cap B(x,r) \neq \emptyset\}$ est fini

Soit $g \in \Gamma$. Soit $c : [0, L] \to X$ une géodésique (chemin entre 0 et L tq $\text{long } c = L = d(c(0), c(L))$) reliant x_0 à gx_0.

Pour $0 \le i \le \lfloor L \rfloor$ entier, soit $\gamma_i \in \Gamma$ tq $c(i) \in \gamma_i \cdot B$

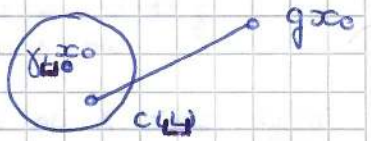


$d(\gamma_i x_0, \gamma_{i+1} x_0) \le R + 1 + R = 2R + 1$

$\Rightarrow d(x_0, \gamma_i^{-1} \gamma_{i+1} x_0) \le 2R + 1$

$\Rightarrow \gamma_i^{-1} \gamma_{i+1} B(x_0, 2R+1) \cap B(x_0, 2R+1) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \gamma_i^{-1} \gamma_{i+1} = s \in S$ et $\gamma_{i+1} = \gamma_i s$



$d(\gamma_{\lfloor L \rfloor} x_0, gx_0) \le R + 1$

$\Rightarrow \gamma_{\lfloor L \rfloor}^{-1} g \in S$ $\quad g = s \gamma_{\lfloor L \rfloor}$ Donc $\langle S \rangle = \Gamma$

$(\Gamma, d_S) \xrightarrow{f} (X, d)$ est une quasi-isométrie.
$\gamma \longmapsto \gamma x_0$

En effet, si $x \in X$ $\exists \gamma \in \Gamma$:

$\gamma B \ni x$ donc $d_X(\gamma x_0, x) \le R$ donc f est presque surjective.

Comme f est Γ équivariante, pour vérifier ses propriétés Lipschitz à grande échelle, il suffit de comparer $d(x_0, gx_0)$ et $\|g\|_S$.

$\left(d(f(g), f(h)) = d(gx_0, hx_0) = d(x_0, g^{-1} h x_0) \text{ et } d_S(g, h) = \|g^{-1} h\|_S \right)$

Mais la preuve que γ est engendré par S a montrer que

$L = d(x_0, gx_0) \ge \|g\|_S - 1$

et si $g = s_1 \dots s_N$ avec $s_i \in S$, alors $x_0, s_1 x_0, s_1 s_2 x_0, \dots, s_1 \dots s_N x_0$ est une suite de points dont les distances successives sont toutes bornées par $d(s_1 \dots s_k x_0, s_1 \dots s_{k+1} x_0) = d(x_0, s_{k+1} x_0)$

$\le \max_{s \in S} d(x_0, sx_0) = M$

$\Rightarrow d(x_0, gx_0) \le \|g\|_S \cdot M$

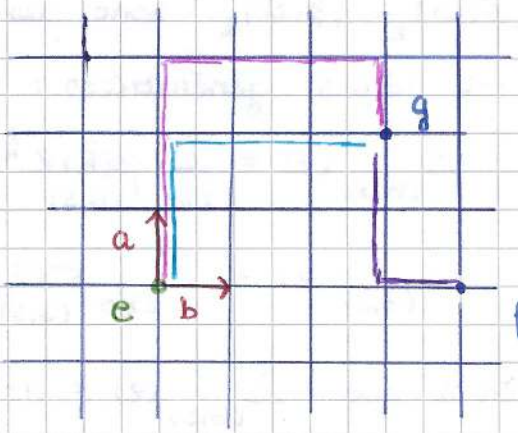
le 19.03.20 (vidéo du cours du 12.03)

Groupes :

Ex : Supplément de p. 12

$\mathcal{C}(\mathbb{Z}^2, \{\overset{a}{(0,1)}; \overset{b}{(1,0)}\})$

- $a^3b^3a^{-1}$ = dans $\mathbb{Z}^2$
- a^2b^3



$\|g\|_S = 5$

- La longueur du chemin est la distance entre g et h ($d(g,h)$)
  $= \|g^{-1}h\|_S$

---

3. Croissance des Groupes : le 26.03.20

Déf : $G = \langle S \rangle$, $|S| < \infty$. La fonction de croissance de G par rapport à S est

$$\beta_{(G,S)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$R \longmapsto \#\{g \in G \mid |g|_S \leq R\}$$

le nbr d'éléments ("le volume") de la boule fermée de rayon R dans l'espace métrique (G, d_S) centrée en e_G (ou dans $Cay(G,S)$)

Déf : fonction de croissance sphérique :

$$\sigma_{(G,S)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$R \longmapsto \#\{g \in G \mid |g|_S = R\}$$

volume de la sphère de rayon R centrée en e_G dans (G, d_S) ou $Cay(G,S)$

On a : $\sigma_{(G,S)}(R) = \beta_{(G,S)}(R) - \beta_{(G,S)}(R-1)$

$\{\sigma(k)\}_k$, $\{\beta(k)\}_k$ sont des suites de nombres

$\rightsquigarrow$ séries génératrices : <u>Séries de croissance de G par rapport à S.</u>

$$\mathcal{B}_{(G,S)}(z) = \sum_{k\geq 0} \beta_{(G,S)}(k) z^k \qquad \text{(voumique)}$$

$$\sum_{(G,S)}(z) = \sum_{k\geq 0} \sigma_{(G,S)}(k) z^k \qquad \text{(sphérique)}$$

On a que $\sum_{(G,S)}(z) = (1-z)\,\mathcal{B}_{(G,S)}(z)$

Exo : Soit G un groupe de type fini. Alors

G fini $\Leftrightarrow$ $\beta(k)$ et $\sigma(k) \equiv 0$ $k \gg 1$

$\Leftrightarrow$ les séries de croissances sont des polynômes

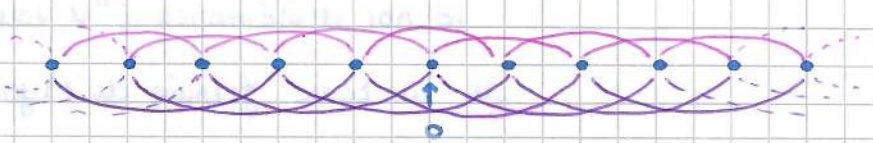
Exo : Calculer le polynôme $\sum(z)$ pour les groupes cycliques finis.

Exo : 1) $\sum_{(\mathbb{Z},\{1\})}(z) = 1 + \sum_{k\geq 1} 2z^k = 1 + 2\sum_{k\geq 1} z^k = 1 + 2\frac{z}{1-z}$

$$= \frac{1+z}{1-z}$$

quasi-isométrique

2) $\sum_{(\mathbb{Z},\{2,3\})}(z) = ?$



$k=0$ $\quad \sigma(k) = 1$ $\quad$ Élément : 0

$k=1$ $\quad \sigma(k) = 2|S| = 4$ $\quad$ Éléments : $2, -2, 3, -3$

$k=2$ $\quad \sigma(k) = 8$ $\quad$ Éléments : $3\overset{6}{+}3,\ 3\overset{5}{+}2,\ 2\overset{4}{+}2,\ -6,\ -5,\ -4,\ 3-2\overset{1}{=}2-3\overset{-1}{=}1$

$k=3$ $\quad \sigma(k) = 6$ $\quad$ Éléments : $9, 8, 7, -9, -8, -7$

$\forall k \geq 3$ $\quad \sigma(k) = 6$ $\quad$ Éléments : $\pm 3\cdot k$; $\pm(3k-1)$; $\pm(3k-2)$

$$\sum_{(\mathbb{Z},\{2,5\})}(z) = 1 + 4z + 8z^2 + 6\underbrace{(z^3 + z^4 + \dots)}_{\sum_{k\geq 0} z^k \,=\, 1/1-z}$$

$$= 1 + 4z + 8z^2 + 6z^3\left(\sum_{k\geq 0} z^k\right)$$

$$= \frac{1 + 3z + 4z^2 - 2z^3}{1-z}$$

le 26.03.20

Groupes :

propriétés des fonctions de croissance

Prop : 1) ce sont des fonctions sous-multiplicatives :

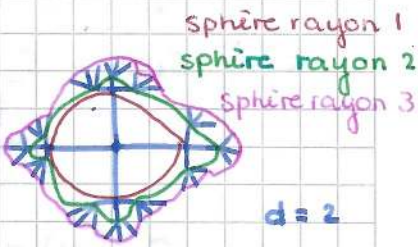
$$\sigma(k_1 + k_2) \leq \sigma(k_1) \cdot \sigma(k_2)$$

En effet, tout mot de longueur $k = k_1 + k_2$, $k_1, k_2 \geq 0$ s'écrit comme le produit d'un mot de long. k_1 et d'un mot de long. k_2.

On a également : $\beta(k_1 + k_2) \leq \beta(k_1) \cdot \beta(k_2)$

2) (Exemple universel)

$$\sigma_{(F_d, \{a_1, \dots a_d\})}(k) = 2d \cdot (2d-1)^{k-1}$$



3) Pour tout G engendré par d éléments, $G = \langle S \rangle$, $|S| = d$,

$$\beta_{(G,S)}(k) \leq \beta_{(F(S),S)}(k) \quad \forall k$$

Cela découle de la prop. universelle des groupes libres

$\Rightarrow F(S) \twoheadrightarrow G$

En particulier, $\forall g \in G$ g est représenté par au moins un mot librement réduit en SUS^{-1} et $\forall$ tel mot w,

$$\underbrace{|g|_S}_{\text{dans } G} \leq L(w) = |w|_{F(S)}$$

4) $G \times H$ produit direct, $G = \langle S \rangle$ et $H = \langle T \rangle$, $\underbrace{S \times \{1\} \cup \{1\} \times T}_{U}$

$$\sum_{(G \times H, U)}(z) = \sum_{(G,S)}(z) \cdot \sum_{(H,T)}(z)$$

En effet, $|(g_1, g_2)|_U = |g_1|_S + |g_2|_T$

Cor : $$\sum_{(\mathbb{Z}^d, \text{base})}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^d \qquad d \geq 1$$

5) $$\frac{1}{\sum_{(G \times H, SUT)}(z)} - 1 = \frac{1}{\sum_{(G,S)}(z)} - 1 + \frac{1}{\sum_{(H,T)}(z)} - 1$$

En effet, $g \in G * H \Rightarrow g = b_0 a_1 b_1 \dots a_n b_n a_{n+1}$

$a_i \in G \setminus \{1\}$ $i = 1 \dots n$, $b_i \in H \setminus \{1\}$ $i = 1 \dots n$

$b_0 \in H$, $a_{n+1} \in G$

$$|g|_{SUT} = |b_0|_T + \sum_{i=1}^{n} |a_i|_S + \sum_{i=1}^{n} |b_i|_T + |a_{n+1}|_S$$

exercice : Faire les calculs pour arriver à la formule.

Exc : Exemple particulier du produit libre : le groupe modulaire

$\Gamma = C_2 * C_3$, $C_2 = \langle a \rangle$, $C_3 = \langle b \rangle$, $S := \{a, b\} \subset C_2 * C_3$ " $\{1, b, b^{-1}\}$

$\sigma(k) = \sigma_a(k) + \sigma_b(k)$

↑ mots finissant par a ; ↖ mots finissant par b ou b^{-1}

$\sigma_a(k+1) = \sigma_b(k)$ $\qquad$ $\sigma_a(1) = 1$

$\sigma_b(k+1) = 2\sigma_a(k)$ $\qquad$ $\sigma_b(1) = 2$

$\Sigma_a(z) = z(1 + \Sigma_b(z))$ $\qquad$ $\Sigma_b(z) = 2z(1 + \Sigma_a(z))$

$$\Rightarrow \sum_{(\Gamma, \{a,b\})}(z) = \frac{1 + 3z + 2z^2}{1 - 2z^2}$$

Déf : Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on dit que f domine g, $f \succcurlyeq g$, si $\exists c > 0$ tq $f(x) \geq c \cdot g(c \cdot x)$.

On dit que $f \sim g$ si $f \succcurlyeq g$ et $g \succcurlyeq f$

Rem : Cette relation définit un ordre partiel sur les fonctions.

Exo : 1) $t^a \preccurlyeq t^b \Leftrightarrow a \leq b$

2) f une fonction polyn. de degré d, alors $f \sim t^a \Leftrightarrow a = d$

3) $e^{at} \sim e^{bt}$ $\forall a, b \in (0, +\infty)$

Prop : Deux fonctions de croissance associées au même groupe avec des familles génératrices différentes sont équivallentes.

Groupes :

Pv : Supposons qu'on a dans G deux système générateur S et S' alors tout mot dans S s'écrit avec des générateurs S' et tout mot dans S' s'écrit avec des générateurs S.
Comme $|S|, |S'| < \infty$, on peut regarder $M := \max |s|_{S'}$ et $M' = \max |s'|_S$.
Alors $\forall g \in G$, $|g|_S \leq M' |g|_{S'} \Rightarrow \forall g$ tq $|g|_{S'} = k$, $|g|_S \leq M' \cdot k$
$\Rightarrow \beta_{(G,S')}(k) \leq \beta_{(G,S)}(M'k)$
Pareil dans l'autre sens !

Rem : En fait, ces fonctions sont équivalentes dans le sens plus fort : $\exists C$ tq $f(x) \leq g(Cx)$ et $g(x) \leq f(Cx)$

Prop : Plus généralement, si G, G' deux groupes de type fini sont quasi-isométriques, alors les fonctions de croissance correspondantes sont équivalentes.

Pv : En exercice.

Rem : C'est aussi vrai pour des espaces métriques satisfaisant $\sup_{x \in X} |B(x,t)| < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Donc les fonctions de croissance à équivalence près fournissent un invariant de quasi-isométries.

Cor : $F_d \underset{q.i.}{\not\sim} \mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{Z}^d \underset{q.i}{\not\sim} \mathbb{Z}^f$ si $d \neq f$

déjà calculer — $\sum_{\mathbb{Z}^d}(t) \sim t^d$

Déf: Si deux groupes de type fini ont des fonctions de croissance équivalentes, on parle des groupes de même type de croissance.

Cor: 1) $\sigma_{F_d}(k) \sim c^k$

2) Un groupe de type fini croit au plus vite exponentiellement.

---

4. Types de Croissance: le 02.04.20

Déf: Soit $\{a_n\}_{n\geq 0}$ une suite croissante de nombres positifs, alors le taux de croissance exponentielle de $\{a_n\}_{n\geq 0}$ est

$$\omega_{\{a_n\}_{n\geq 0}} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0;+\infty]$$

$\left(\omega_{\{a_n\}_{n\geq 0}}\right)^{-1}$ est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$

De plus, pour une suite sous-multiplicative (en particulier, pour les fonctions de croissance des groupes) $\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (limite existe → exo)

Ainsi, étant donné G un groupe de type fini et S une famille génératrice finie, on définit $\omega_{(G,S)} := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_{(G,S)}(n)}$

le taux de croissance exponentielle de G par rapport à S.

$\omega \geq 1$ car $\beta(n) \geq 1 \ \forall n$.

Rem: Si $\{a_n\}_n, \{a'_n\}$ sont telles que $a_n \geq a'_n$, alors on peut affirmer que si $\omega' > 1$ alors $\omega > 1$.

Mais on ne peut rien dire de plus précis.

En particulier, on peut avoir des fonctions de croissance équivalentes avec $\omega \neq \omega'$

(Tous deux > 1)

Groupes :

Ex : Dans le groupe modulaire G.

Nous avons calculé $\Sigma_{(G,\{a,b\})}(z) = \dfrac{1+3z+2z^2}{1-2z^2}$

$\rightsquigarrow \mathcal{B}_{(G,\{a,b\})}(z) \rightsquigarrow \omega_{G,\{a,b\}}$

D'autre part, on peut aussi calculer de manière similaire la série $\Sigma_{G,\{a,t\}}(z)$ où $t = a \cdot b$

$\rightsquigarrow \mathcal{B}_{G,\{a,t\}}(z) \rightsquigarrow \omega_{G,\{a,t\}} \neq \omega_{G,\{a,b\}}$

Rem : D'autre part, nous avons beaucoup de groupe avec $\omega = 1$ qui ne sont pas quasi-isométriques et dont les fonctions de croissance ne sont pas équivalentes.

Ex : $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ $\longrightarrow$ croissance plus tard

Déf : Soit G un groupe de type fini. On dit que :

- G est à <u>croissance exponentielle</u> si $\omega_{G,S} > 1$ pour un (de manière équivalente, $\forall$) système fini de générateurs.
- G est à <u>croissance sous-exponentielle</u> sinon. ($\omega_{G,S} = 1$ pour un ($\forall$) système fini de générateurs)
- G est à <u>croissance polynomiale</u> si $\exists d \geq 0$ tel que $\beta_{G,S}(k) < k^d$
- G est à <u>croissance superpolynomiale</u> sinon.
- G est à <u>croissance intermédiaire</u> s'il est à croissance sous-exponentielle et superpolynomiale.

(**Ex :** $e^{\sqrt{n}}$)

Rem : D'après les exos et les définitions, on constate que être à croissance exp, sous-exp, poly, superpoly ou intermédiaire est un invariant de quasi-isométrie.

Rem : Comme noté la semaine dernière, un groupe de type fini est nécessairement d'un de ces types de croissance

Les groupes finis sont à croiss. polyn.

Les groupes libres F_n, $n \geq 2$, sont à croiss. exp.

La croissance de $G = \langle S \rangle$ est dominée par celle de $F(S)$.

$\Rightarrow$ la croiss. d'un groupe de type fini est au plus exp.

Plus exactement, $1 \leq w_r(G,S) \leq \underbrace{2|S| - 1}_{\text{exp de } F(S)}$ ← taux de croissance

Plus généralement, si G' est un quotient de G et $\pi : G \twoheadrightarrow G'$ et si $S' = \pi(S) \subset G'$, alors $w_r(G',S') \leq w_r(G,S)$.

(le même raisonnement que pour le groupe libre)

On peut aussi noter que si $G' \leq G$ et si on le considère avec générateurs $S' = S \cap G'$, alors $w_r(G',S') \leq w_r(G,S)$

(Évident)

Cor : 1) Si G est un groupe de type fini avec un sous-groupe ou quotient à croissance exp, alors G est à croiss. exp.

2) En particulier, si G contient un ss-groupe libre de rang 2 ($\Leftrightarrow$ non-abélien) alors G est à croiss. exp.

Exc : On a déjà vu beaucoup d'exemples :

produits libres $G * H$ avec $|G| \geq 3$, $SL(2,\mathbb{Z})$, groupe de tresses, groupe de surface $\pi_1(\Sigma_2)$, autres exc. de prod. amalgamé, les extensions HNN des groupes libres, etc.

Groupes :

Rem : ∃ des groupes à croiss. exp. sans ss-groupe libre non-abélien : on verra de tels exemples + tard.

On a vu beaucoup d'exemples de groupe à croiss. exp.

Ex : Si on a calculé $\beta_{(G,S)}(2)$ et que c'est rationel, on trouve $\omega_{(G,S)}$ et si $\omega_{(G,S)} > 1$ alors la croiss. est exp.

Ou si on a un ss-grp libre (Par Ping-Pong) ⇒ croiss. exp.

Q : Comment trouver des exemples de groupes infini à croiss. poly. ?

Prop 1 : Les groupes abéliens de type fini sont à croissance polynomiale.

Dém : Cela découle du calcule pour $\mathbb{Z}^d$ (plus tard)

et du théorème de classification des groupes abéliens de type fini.

Thm de classification :

un groupe abélien de type fini possède un sous-groupe abélien libre de rang d et d'indice fini.

Il suffit donc de déterminer le type de croissance de $\mathbb{Z}^d$ $d \geq 1$.

La semaine dernière, on a vu que $\sigma_{\mathbb{Z},\{1\}}(n) = 2$ pour $n \geq 1$

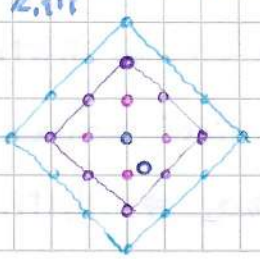
⇒ $\beta(n)$ croit linéairement $\beta(n) \sim n$.

Nous avons aussi calculé $\sum_{G\times H}^{(2)} = \sum_{G}^{(2)} \cdot \sum_{H}^{(2)}$ pour un choix de générateurs dans $G \times H$.

⇒ $\sigma_{G\times H}(n) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_G(i)\,\sigma_H(n-i)$ par rapport au même système de gén

Par ailleurs, $\sigma_{\mathbb{Z},\{1\}}(n) = 2 \Rightarrow \sigma_{\mathbb{Z}^2,\text{base}}(n) = \sum_{i=0}^{n} 4 = 4n$

Cay($\mathbb{Z}^2$)



4 sphère de rayon 1
8 sphère de rayon 2
12 sphère de rayon 3
4n sphère de rayon n

$\Rightarrow \beta_{\mathbb{Z}^2, \text{base}}(n) = \sum_{i=0}^{n} 4i = 2n(n+1) \sim n^2$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^2$ croissance polynomiale de degré 2.

Pareil, on calcule par récurrence $\beta_{\mathbb{Z}^d, \text{base}}(n) \sim n^d$

en utilisant $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}$

∎

Plus généralement, si G est à croiss. polyn., le degré de croissance polynomiale est $\limsup_{n \to \infty} \log \beta(n) / \log(n)$ où β est calculé par rapport à un système quelconque fini de générateurs dans G.

Obs : Si G est à croiss. poly. et $H \leq G$ ou H est un quotient de G, alors H est aussi à croiss. polynomiale.

Q1 : Peut-on caractériser algébriquement des groupes à croissance polynomiale ?

Q2 : (Milnor)

∃ ? des groupes à croissance intermédiaire ?

En général, oui.

Mais dans beaucoup de classe de groupes, la croissance est soit exp. soit, poly.

Par exemple :

les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes.

Ce n'est pas vrai ∀ les groupes fond. des v.r. (pas de tel théorème)

Thm (Milnor 1968) : M variété connexe, compacte, Riemannienne avec courbure sectionelle $< 0 \Rightarrow \pi_1(M)$ a croiss. exp.

Thm (Milnor 1968) : M variété connexe, compacte, Riem. avec courbure moyenne $\geq 0 \Rightarrow \pi_1(M)$ a croiss. poly.

le 02.04.20

Groupes :

les groupes linéaires

Alternative de Tits : Soit G un groupe linéaire de type fini.
(linéaire : isomorphe à un ss-groupe de $GL_n \, k$ avec $n \geq 1$ et k un corps)
Alors G est soit virtuellement résoluble (contient un ss-gpe résoluble d'indice fini), soit G contient un groupe libre non-abélien F_2.

Thm : (Milnor - Wolf) :
Si G est un groupe résoluble alors la croiss. de G est soit exp, soit poly.
De plus elle est poly $\Leftrightarrow$ G est virtuellement nilpotent.

D'autre part, on peut voir que G nilpotent $\Rightarrow$ croiss. poly.

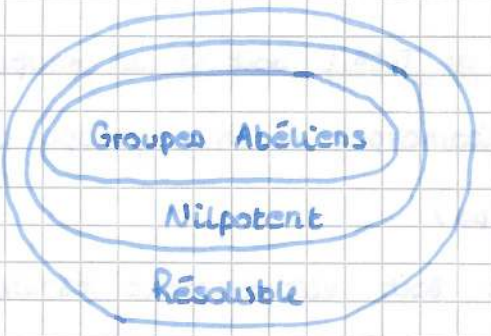
Q : Est-ce que la réciproque est vraie ? (oui)

Thm : Un groupe de type fini est à croissance polynomiale
$\Rightarrow$ G est virtuellement nilpotent.

Déf : Soit G un groupe. On définit par récurrence une suite de sous-groupes appelées la suite centrale descendante de G :
$\gamma_0(G) = G$, $\gamma_1(G) = [G,G]$, ... $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$ $\forall i \geq 0$
On a $\gamma_{i+1}(G) \subset \gamma_i(G)$ et tout $\gamma_i(G)$ est normal dans G (et en particulier dans $\gamma_{i-1}(G)$)
On dit que G est nilpotent si $\exists \, i \geq 0$ tq $\gamma_i(G) = \{1\}$
On définit aussi, à partir d'un groupe G sa série dérivée
$G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = [G,G]$, $G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}]$, ... $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.
On dit que G est résoluble si $\exists \, i \geq 0$ tq $G^{(i)} = \{1\}$

Rem : $\gamma_i(G) \geq G^{(i)} \Rightarrow$ [G nilpotent $\Rightarrow$ résoluble]

$G^{(1)} = \gamma_1(G) = [G,G]$. En particulier G abélien $\Rightarrow$ nilpotent + résoluble



Rap : les groupes résolubles apparaissent en théorie de Galois.

G est résoluble $\Leftrightarrow$ G contient une série de sous-groupes

$G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_n = \{1\}$ tq $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$

et G_i/G_{i+1} est abélien $\forall i$

---

le 09.04.20

5. Les Groupes à croissance polynomiale :

Rem : En fait, $\gamma_n(G)$ est un <u>sous-groupe caractéristique</u> de G

(ie : il est invarient par tous les automorphismes de G)

On vérifie facilement pour $[G,G]$ qu'il est caractéristique :

$x \in [g,h]$, $\alpha \in Aut(G)$, $\alpha(x) = [\alpha(g), \alpha(h)] \in [G,G]$

pareil pour x produit de commutateur.

Être normal est une condition plus faible :

$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow$ H est invarient par les automorphismes

intérieurs $\underbrace{Inn(G)}_{\text{les conjugaisons par les éléments de G.}} \subseteq Aut(G)$

Prop : $\forall n \quad \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{n+1}(G))$ le centre

D'où la terminologie suite centrale.

Groupes :

Pr : Soit $h \in \gamma_n$. Alors $\forall g \in G$, $[h,g] \in \gamma_{n+1}$

$\Rightarrow$ que l'image $\bar{h}$ dans γ_n/γ_{n+1} commute avec $\bar{g}$ l'image de g dans G/γ_{n+1}.

C'est vrai $\forall g \in G$.

Cor : γ_n/γ_{n+1} sont tous abéliens.

Déf : Pour G nilpotent, le plus petit $c \in \mathbb{N}$ tq $\gamma_c(G) = \{1\}$ est la classe de nilpotence de G.

Exe : 1) G abélien $\Leftrightarrow$ G nilpotent de classe 1.

2) Groupe de Heisenberg $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$

$H_3 = \langle s, t \rangle$ $\quad s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [t, s]$

On considère souvent $S = \langle s, t, u \rangle$ dans H_3.

De plus, u est central (commute avec s et t)

NB : $u \neq 1 \Rightarrow$ H_3 pas abélien ! $\Rightarrow \gamma_1(H_3) \neq \{1\}$

$u = [t, s]$

$\gamma_2(H_3) = \{1\}$

Thm : Les groupes nilpotents de type fini sont de présentation finie.

Pr : (idée)

Réduction au cas des groupes abéliens de type fini.

le thm de classification des grp abéliens de type fini nous dit qu'un tel groupe est forcément un prod. direct d'un # fini de facteurs cycliques d'ordre ∞ ou premier.

Les grp cycliques sont de prés. finie et la propriété d'être de prés. finie est préservée par les prod. directs. (Voir lemme)

Le cas nilpotent est réduit au cas abélien par :

Lemme : La propriété d'être de présentation finie est stable par extension de groupes, plus précisément

$1 \longrightarrow N \xhookrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} Q \longrightarrow 1$ avec N et Q de présentation finie $\Rightarrow$ G est de présentation finie

(suite exacte courte)

+ corollaire montré avant.

Rem : Extension d'un groupe nilpotent par un groupe nilpotent n'est pas forcément nilpotent.

Exc : S_3 est une extension de $\mathbb{Z}_3$ par $\mathbb{Z}_2$

↓ pas nilpotent

Rem : Par contre, c'est vrai pour les résolubles.

Pv : du lemme

$1 \longrightarrow N \xhookrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} Q \longrightarrow 1$

Il faut fixer une section de ψ

$\sigma : F(A) \to N$ $\quad \tau : F(B) \to Q$

$N = \langle A \mid \underbrace{v_1, \dots v_k}_{\text{mots librement réduit en } A} \rangle$ $\quad Q = \langle B \mid \underbrace{w_1, \dots, w_l}_{\text{— " — en } B} \rangle$

Posons $S := A \cup B$ $\quad \pi : F(S) \longrightarrow G$

$$s \longmapsto \begin{cases} \varphi(\sigma(s)) & s \in A \\ \text{une préimage de } \tau(s) \text{ par } \psi & s \in B \end{cases}$$

π est surjective :

$g \in G$ tq $\psi(g) = 1 \in Q \Rightarrow g \in N \Rightarrow s \in A$

$g \in G$ tq $\psi(g) \neq 1 \in Q \Rightarrow \exists$ une préimage et $s \in B$

$\Rightarrow G = \langle S \rangle$

Groupes :

Les relations dans G par rapport aux générateurs S seront de 3 types :

- v_j sur A
- w_i sur B
- $b_j'^{-1} a_i b_j'$ où b_j' est une préimage de $\psi(b_j)$ par ψ et $a_i \in A$

$\Rightarrow \ker \pi = \langle\langle v_j, w_i, \underbrace{b_j'^{-1} a_i b_j'}_{N \trianglelefteq G \text{ et } G/N \simeq Q} \rangle\rangle$

On trouve une présentation finie pour G. ∎

Rem : Un groupe de type fini qui est quasi-isométrique à un groupe de présentation finie est lui-même de présentation finie.

Déf : Soit Γ un groupe de préa. finie, $\Gamma = \langle S | R \rangle$.
On lui associe un CW-complexe de dim 2, X
le <u>complexe</u> fondamental ou <u>de présentation</u>,
construit comme suit :

$C^0 = \{\bullet\}$

C^1 = ensemble de $|S|$ arêtes

C^2 = ensemble de $|R|$ 2-cellules ouvertes polygonales

1-squelette (X) est un bouquet de cercle. ($|S|$ cercles)

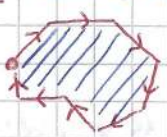
Ensuite, on y colle les 2-cellules

$r \in R$, $r = \underbrace{s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_n}^{\varepsilon_n}}_{w_r(S)}$ mots librement réduit en $S \cup S^{-1}$

La 2-cellule correspondante à r est collée au 1-squelette selon le mot $w_r(S)$

Donc $\Gamma = \langle S \mid R \rangle = \pi_1(X)$ et $\Gamma \curvearrowright$ par isom, proprement, avec quotient compact sur $\tilde{X}$, revêtement universel de X qui est un 2-complexe simplement connexe, appelé le complexe de Cayley de Γ.

(qui peut être obtenu directement depuis $Cay(\Gamma, S)$ en remplissant des circuits simples dans le graphe par des 2-cellules) = relation



$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_n} = 1$ (r)

Si Γ' est quasi-isom à Γ, alors on peut montrer que Γ' "quasi-agit" (agit par q-isom) sur $\tilde{X}$ et à partir de là, on montre que Γ' est de présentation finie.

Thm : La croissance d'un groupe nilpotent de type fini est polynomiale.

Pv : Par récurrence sur la classe de nilpotence.

$C = 1$: groupes abéliens de type fini.

$C = 2$: (Ex : groupe de Heisenberg)

Soit G un groupe de classe 2, $G = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$

$C = 2 \Rightarrow [G', G] = \{1\} \Rightarrow G'$ est abélien

En effet, par la 1ère prop du 09.04.20, $G' \leq Z(G)$

$\Rightarrow G'$ abélien en particulier

$g \in G$, supposons que g est un produit de n générateurs.

Si dans g on a $g = \dots s s' \dots$ et si je veux échanger s et s', le prix à payer sera de rajouter un commutateur à droite. $g = \dots s s' \dots \longrightarrow g = \dots s' s s^{-1} s'^{-1} s s' \dots$

(Commutateur)

Groupes :

Mais car $G' \leq Z(G)$, les commutateurs commutent avec tout le monde, donc on peut les bouger à la fin du mot, à droite.

Ainsi, avec $\leq n^2$ échanges de ce type, on peut écrire $g = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_m^{k_m} \cdot \underbrace{C}_{\text{produit de } \leq n^2 \text{ commutateurs des } s_i}$

$k_i \in \mathbb{N}$

$C \in [G,G]$ qui est abélien, Soit k son degré de croiss. polynomiale.

C est comme n^{2k} et $s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m}$ est comme n^m

$\Rightarrow$ croissance de $G \sim n^{2k+m}$

$\beta_{(G,S)}(n) \leq n^{2k+m}$

Cas Général :

Soit G un groupe nilpotent de classe de nilpotence c engendré par m générateurs $\{s_1, \dots, s_m\}$. Le sous-groupe dérivé $[G,G]$ est alors nilpotent de classe $c-1$. Il est aussi vrai que $[G,G]$ est de type fini

Thm : Tout sous-groupe d'un groupe nilpotent de type fini est de type fini

Pv :

Par récurrence sur la classe de nilpotence en partant du cas des groupes abéliens de type fini. Pour eux, le thm est vrai car tout $H \subseteq G$ abélien libre de type fini est lui aussi abélien libre de type fini et on trouve une base de H à partir d'une base de G.

Pour le cas général d'un groupe abélien A de type fini, on le représente comme quotient d'un groupe abélien libre de type fini et on conclut par le 3e thm d'isomorphisme.

Pour un groupe nilpotent G de classe de nilp. c. Soit $H < G$, alors $H \cap [G,G] < H$ est nilpotent de classe $c-1$ et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, il est donc de type fini. Par ailleurs, $H/(H \cap [G,G]) < G/[G,G]$ qui est bien de type fini comme l'abélianisé d'un groupe de type fini.

Ainsi H est de type fini comme extension d'un groupe de type fini par un groupe de type fini.

∎

Donc, on peut appliquer à $[G,G]$ l'hypothèse de récurrence et affirmer qu'il est à croissance polynomiale. Notons k son degré de croissance.

Soit, comme avant, g un produit de n générateurs. On aimerait de nouveau l'écrire sous forme $g = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_m^{k_m} C$ où $C \in [G,G]$ et estimer la longueur de C. Comme on a déjà vu, échanger 2 générateurs produit un commutateur à droite et il y a au $+ n^2$ tels échanges. La différence du cas $c=2$ est que les commut. ne commutent pas avec les générateurs.

Groupes :

Pour bouger tous les générateurs à gauche, on devra les échanger avec ces commutateurs. Un échange d'un générateur s avec un commut. $[s', s'']$ va produire à droite $[[s', s''], s]^{-1} \in [[G,G],G]$.
Il y aura au + n^3 tels échanges.
Et ainsi de suite.
Puisque G est nilpotent de classe c, ce processus s'arrêtera au niveau c, dans le sens qu'échanger les générateurs avec les commut. d'ordre c ne produira pas de nouveau facteur.
Ainsi, la longueur totale de C est majorée par An^c où A est une cst, et la croissance de G est au + polynomiale du degré $m + ck$.

□

6. Croissance Exponentielle dans des Groupes Résolubles : le 23.04.20

Rap : Gromov :

Si G est à croissance polynômiale, alors G est virtuellement nilpotent. ($G \geq H$, H nilp. $[G:H] < \infty$)

On va montrer que beaucoup de groupes résolubles sont à croiss. exp. De plus, cela nous donnera des exemples de groupes à croiss. exp. sans ss-groupe libre (rang ≥ 2) non-abélien (qui était notre unique condition suffisante)

(1) Rem : Si G est résoluble et $H \leq G$, alors H est résoluble.

Démo: G nilp $\Rightarrow \exists n : G^{(n)} = \{1\}$ $\left(G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \right)$

$H \leq G \Rightarrow H^{(i)} \leq G^{(i)} \forall i$ et donc $H^{(n)} \leq G^{(n)} = \{1\}$

$\Rightarrow H^{(n)} = \{1\}$ ∎

(2) **Rem:** $f : G \to H$ est un homom. surjectif et G résoluble $\Rightarrow H$ résoluble

Démo: $f(G^{(i)}) = [f(G^{(i-1)}), f(G^{(i-1)})]$

$= [(f(G))^{(i-1)}, (f(G))^{(i-1)}] = (f(G))^{(i)}$

$\Rightarrow G^{(n)} = \{1\} \Rightarrow (f(G))^{(n)} = \{1\} \Rightarrow H$ résoluble ∎

($(f(G))^{(n)} = H$)

Rem: On peut aussi démontrer que la résolvabilité est aussi stable par extension des groupes résolubles par des groupes résolubles.

Cor: Un groupe résoluble ne contient pas de ss-groupe libre non-abélien

Dém: Un groupe libre non-abélien ($\forall d \geq 2$) n'est pas rés. par Rem 2 car tout groupe est un quotient d'un groupe libre et on sait qu'il existe des groupes pas résolubles (S_n, $n \geq 5$) $\forall d \geq 2$. D'autre part, par Rem 1, cela mtq un groupe résoluble ne contient pas F_d.

Q: Comment alors pourrait-on avoir la croissance exp. dans un groupe résoluble?

Prop: (1) Un groupe G de type fini contenant un monoïde (semi-groupe) libre sur 2 générateurs est à croiss. exp.

(2 générateurs = non-abélien)

Groupes :

Dém: Rap : $A = \{a_1, a_2\}$ alphabet $\rightsquigarrow$ A^* monoïde libre sur A

$A^* = \{$ tous les mots en lettres $\{a_1, a_2\}\}$

muni de la concaténation des mots

Associatif, neutre = mot vide $\emptyset$

Si G est un groupe, on dit que G contient un ss-monoïde libre si $\exists\, g_1, g_2 \in G$ et $f : A^* \hookrightarrow G$, $a_i \mapsto g_i$ un homom. de monoïde injectif.

Dans ce cas, on dit que <u>G contient un ss-monoïde libre sur $\{g_1, g_2\}$</u>

On peut définir la fonction de croissance pour A^*

$$\beta_{(A^*, A)}(k) = \#\{w \in A^* \mid |w| \leq k\}$$
$$= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Ainsi $\beta_{(A^*, A)}(k) \sim 2^k$

Soit $G = \langle S \rangle$, $|S| < \infty$.

Supposons que G contient un ss-monoïde libre sur $g_1, g_2 \in G$.

Alors définissons $S' = S \cup \{g_1, g_2\}$.

$\beta_{(G, S')}(k) \geq \beta_{(A^*, A)}(k) = 2^{k+1} - 1$

$\Rightarrow$ G est à croiss. exp. ▨

Pour reconnaître un ss-monoïde libre sur 2 générateurs dans un groupe, on peut se servir d'une version du lemme de ping-pong.

Lemme: du Ping-Pong pour semi-groupe.

Soit G un groupe agissant sur un ens. X.

Supposons $\exists g_1, g_2 \in G$ et $X_1, X_2 \subset X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

tel que $g_1(X_1 \cup X_2) \subset X_1$ et $g_2(X_1 \cup X_2) \subset X_2$.

Alors, le semi-groupe engendré par $\{g_1, g_2\}$ dans G est libre et en particulier G est à croiss. exp (par prop (1))

Dém:

Soit A^* le monoïde libre avec $A = \{a_1, a_2\}$, $f : A^* \longrightarrow G$, $a_i \longmapsto g_i$ l'homom de A^* sur le semi-groupe engendré dans G par $\{g_1, g_2\}$.

À voir : f est injectif ($w, w' \in A^*$ tq $f(w) = f(w') \Rightarrow w = w'$)

Si $w = \emptyset$, on vérifie que w' ne peut pas commencer par a_1.

Sinon ↳ commence par g_1 $f(w')(X_2) \subset X_1 \Rightarrow f(w') \neq e_G$ mais $f(\emptyset) = e_G$ et $f(w) = f(w')$.

Pour la même raison, w' ne peut pas commencer par a_2.

Si $w, w' \neq \emptyset$, alors ils sont de la forme $w = sv$ et $w' = s'v'$ avec $s, s' \in \{a_1, a_2\}$.

$f(w) = f(w') \Rightarrow s = s'$ (on regarde comme avant)

$f(w) = f(s)f(v) = f(s')f(v') = f(w') \Rightarrow f(v) = f(v')$

v, v' sont de longueur strictement inférieure à w, w' et donc on peut conclure par réc. sur la longueur des mots que $f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$

Comme $s = s' \Rightarrow w = w'$

Groupes :

Rap : Milnor - Wolf :

Un groupe résoluble de type fini est à croiss. poly
$\Leftrightarrow$ il est virtuellement nilpotent.
Sinon, il est à croiss. exp.

Rosenblat :

Un groupe résoluble de type fini est à croiss. exp
$\Leftrightarrow$ il contient un ss-semi-groupe libre sur 2 générateurs.

Groupes de Baumslag - Solitar :

Def :

$m, n \in \mathbb{Z} \neq 0$. $a^{-1} b^m a = b^n$ représente le même groupe

$BS(m,n) = \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$

Rem : Cas dégénéré $|m|=|n|=1$ $BS(1,1) = \pi_1(\text{tore}) = \mathbb{Z}^2$
groupe abélien $\langle a,b \mid aba^{-1} = b \rangle = \langle a,b \mid ab = ba \rangle$

Les autres cas ne sont pas abéliens.
À part le cas dégénéré, on distingue deux cas différent :

- m ou $n = 1$:
  - $BS(1,n)$ résoluble
- m et $n \neq 1$: (cas $m = n \neq 1$ est spécial)

Exc : ($2^{ème}$ Cas)

$BS(2,3)$ il ne peut pas être approximer par des groupes finis.

Prop : $BS(m,n)$ est résoluble $\Leftrightarrow$ $m=1$ ou $n=1$

Montrons qu'il est à croissance exp (vrai $\forall$ $BS(m,n)$ sauf $|m|=|n|=1$)

On établi un homom $BS(m,n) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R})$

$$b \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: B$$

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} n/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: A$$

Vérifions que c'est un homom en vérifiant que A et B satisfont la relation de $BS(m,n)$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} m/n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB^mA^{-1} = \begin{pmatrix} n/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m/n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^n$$

Il se trouve que cet homom est injectif pour $m=1$ et ne l'est pas pour $m \neq 1$ et $n \neq 1$.

Cela implique que $BS(1,n)$ sont des groupes linéaires et $BS(n,m)$ avec $m,n \neq 1$ ne le sont pas.

En fait, on peut décrire plus précisement la structure algébrique de $BS(1,n)$.

$$\pi : BS(1,n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} = \langle a \rangle \qquad \ker \pi = \langle\langle b \rangle\rangle_{BS(1,n)}$$

$b \longmapsto e$

$a \longmapsto a$

clôture normale / ss-grp normal engendré par b

$$BS(1,n) = \underbrace{\ker \pi}_{=:K} \rtimes \underbrace{H}_{= BS(1,n)/K \simeq \mathbb{Z}}$$

Donc $H \curvearrowright K$ par automorphisme $\Psi : H \longrightarrow Aut(K)$

$\Psi_a(k) = a^{-1}ka$

Le thm de caractérisation des produits semi-directs nous dit que $G = K \rtimes H \Leftrightarrow K \cap H = \{e\}$ et $\underbrace{G = K \cdot H}_{\text{à voir}}$

Groupes :

Grâce à la relation $ab^m a^{-1} = b^n$, on remarque que tout élément de $BS(1,n)$ peut s'écrire comme $a^{-L} b^j a^i$ avec $L, i \geq 0$.

Vérifions sur un exemple dans $BS(1,2)$

$$ab^2a^2b^3a^4 = aaba^{-1}a^2b^3a^4 = a^2bab^3a^4$$
$$= a^2b\underbrace{ab^3a^{-1}}a^5 = a^2b^7a^5$$
$$\underbrace{aba^{-1}}_{b^2}\ \underbrace{aba^{-1}}_{b^2}\ \underbrace{aba^{-1}}_{b^2}$$

Par ailleurs, dans $BS(1,n)$ $ba^{-j} = a^{-j}a^jba^{-j} = a^{-j}b^{n^j}$ (*)

Donc $a^2b^7a^5 = a^2b^3a^{-3}a^8 = a^2a^{-3}b^{7\cdot 2^3}a^8$ (*)

$$= a^{-1}b^{56}a^8$$

Par ailleurs, $\forall$ élément de K, par définition, l'exposant total en a est 0.

Donc $\forall k \in K$ est de la forme $k = a^L b^j a^{-L}$ $L \in \mathbb{Z}$

Par conséquent, $BS(1,n) = K \cdot H$. Donc $BS(1,n) = K \rtimes H$

De plus, on peut voir que $K \overset{\varphi}{\cong} \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ $k = a^Lb^ja^{-L} \overset{\varphi}{\longmapsto} j/n^L$

On calcule alors $\psi_a : H \longrightarrow Aut(K)$, $\psi_a(k) = a^{-1}ka$

$\psi_a(\varphi(k)) = n\,\varphi(k)$.

Donc $BS(1,n) \cong \mathbb{Z}[1/n] \rtimes_\psi \mathbb{Z}$.

Il en découle en particulier que $BS(1,n)$ est linéaire et aussi résoluble de classe 2 (métabélien).

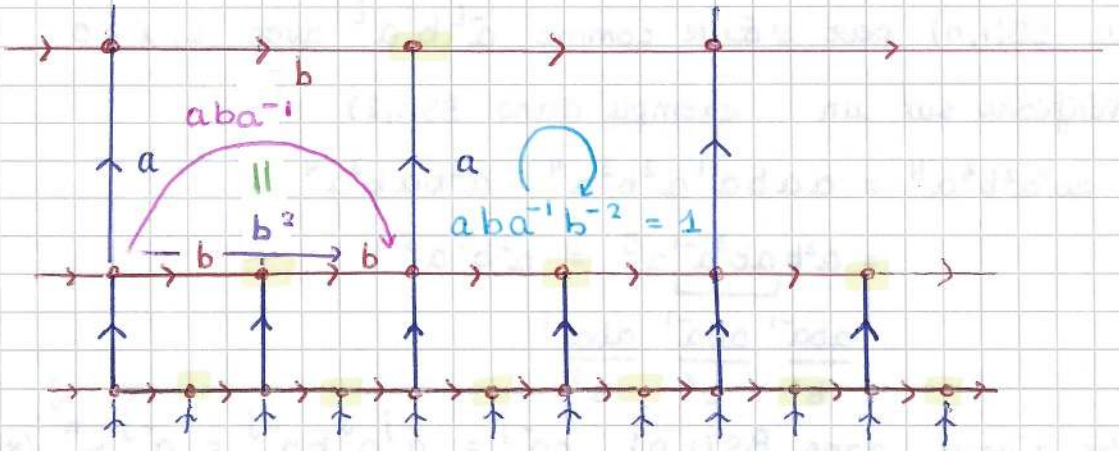
$BS(1,n)$ n'est pas nilpotent.

En effet, $[b^{-1}, a] = b^{-1}aba^{-1} = b^{-1}b^n = b^{n-1} \in \gamma_1(BS(1,n))$

de même $b^{(n-1)^j} = [b^{-(n-1)^j}, a] \in \gamma_j(BS(1,n))$ $\forall j \geq 1$

$\Rightarrow \exists\, \gamma_j(BS(1,n)) \neq \{1\}$ $\forall j \geq 1$ $\Rightarrow$ $BS(1,n)$ pas nilpotent

Ex: Graphe de Cayley de $BS(1,2)$ (une partie)



• : les sommets de cette couleur sont de degré 3, dans le plan, mais dans un autre plan, il y a la 4ème arête. (d'où une partie du graphe)

Deuxième partie à voir dans le cours (Partie 3 : 25:00)

Montrons

Montrons maintenant que $BS(m,n)$ est à croissance exp sauf si $|m| = |n| = 1$.

En particulier, $BS(1,n)$ serait un exemple de groupe résoluble à croiss. exp.

Ex : $BS(1,2)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent un ss-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ isomorphe à $BS(1,2)$.

Quel sous-groupe est-ce ?

Notez :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} x/2 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y-x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc on conclut que le ss-groupe dans $GL(2,\mathbb{R})$ est

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x = 2^k \text{ et } y \in \mathbb{Z}[1/2] \text{ et } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Groupes :

La forme des matrices suggère que $G \curvearrowright \mathbb{R}$ $g \in G$, $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$t \in \mathbb{R}$, $g \cdot t = xt + y$.

Tout $g \in G \setminus \{x = 1\}$ aura un unique point fixe, $p = y/1-x$

Prenons $g_1, g_2 \in G$ avec $x_1, x_2 < 1$ et $p_1 \neq p_2$.

Prenons $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervalles tq $I_1 \ni p_1$ et $I_2 \ni p_2$.

$\forall t \in \mathbb{R}$ $g_1^n t \xrightarrow{n \to \infty} p_1$ et $g_2^n t \xrightarrow{n \to \infty} p_2$.

En particulier, $\exists k_1, k_2$ tq $g_1^{k_1} I_2 \subset I_1$ et $g_2^{k_2}(I_1) \subset I_2$.

Aussi $g_1^{k_1}(I_1 \cup I_2) \subset I_1$ et $g_2^{k_2}(I_1 \cup I_2) \subset I_2$

Par le lemme de ping-pong pour ss-semi-grp,

on conclut que G est à croiss. exp.

$BS(1,n) \cong G$ donc $BS(1,n)$ est à croiss. exp.

Rem : La même preuve de croissance exp. peut être modifiée pour montrer que $BS(m,n)$ est à croiss. exp quand $|m|, |n| \neq 1$

On peut voir que l'image de $BS(m,n)$ dans $GL(2,\mathbb{R})$ est $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x = \left(\frac{n}{m}\right)^k, k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}[1/m] \right\}$

et ce groupe est à croiss. exp. par la même application du lemme de ping-pong pour les sous-semi-groupe.

NB : $BS(m,n) \not\cong G$ mais G est un quotient (et ça marche toujours pour la croiss. exp)

Donc G à croiss. exp $\Rightarrow$ $BS(m,n)$ à croiss. exp.

7. Intermezzo sur les groupes hopfiens :

Soit G un groupe fini.

Tout épimorphisme $G \twoheadrightarrow G$ (morphisme surjectif) est nécessairement un automorphisme.

Tout monomorphisme $G \hookrightarrow G$ (morph. inj.) est nécessairement un automorphisme.

(car pour des ensembles finis, bijection = injection = surjection)

Déf : Un groupe G est hopfien si tout épimorphisme $G \twoheadrightarrow G$ est un automorphisme. ↳ (propriété de finitude des groupes ∞)

De manière équivalente, G est hopfien $\Leftrightarrow$ G n'est isomorphe à aucun de ses quotients propres.

Déf : Un groupe G est co-hopfien si tout monomorphisme $G \hookrightarrow G$ est un automorphisme

De manière équivalente, G est co-hopfien s'il n'est isomorphe à aucun de ses sous-groupes propres.

Ex :
- Les groupes finis sont hopfiens et co-hopfiens.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas co-hopfien : $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}$ est hopfien, tout quotient propre de $\mathbb{Z}$ est fini.
- Les groupes libres F_d sont non co-hopfiens.
  cq : $F(a,b) > \langle a^2, b^2 \rangle \simeq F_2$ ($\neq$)
- F_d sont hopfiens.

Déf : Un groupe G est résiduellement fini (propriété de finitude) si $\forall g \in G$, $g \neq 1_G$, $\exists$ un groupe fini F et un homom $f : G \to F$ tq $f(g) \neq 1_F$

Groupes :

Thm : Mal'cev

Tout groupe de type fini qui est résiduellement fini est hopfien.

Déf : De manière équivalente, G est <u>résid. fini</u> si $\forall g \in G$, $g \neq 1_G$, $\exists N \lhd G$ d'indice fini tq $g \notin N$.

Ou encore, $\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ [G:N] < \infty}} N = \{1_G\}$

Déf : Plus généralement, si C est une classe non-vide de groupes, on dit qu'un groupe G est <u>résiduellement C</u> si $\forall g \neq 1_G \in G$ $\exists N \lhd G$ tq $G/N \in C$ et $g \notin N$

$(\Leftrightarrow \bigcap_{\substack{G/N \in C \\ N \lhd G}} N = \{1_G\})$

Encore une reformulation équivalente : base

Définissons une topologie sur G générée par la ~~v~~ qui consiste en tous les cosets des sous-groupes normaux d'indice fini.

Exo : Vérifier que c'est bien une base d'une topologie sur G.

Cette topologie s'appelle la <u>topologie profinie</u>

D'après la déf que nous avons donnée, G est rés. fini $\Leftrightarrow \{1_G\}$ est fermé dans la topologie profinie.

En effet, les ouverts sont des réunions des éléments de la base. Le complément de $\{1_G\}$ est ouvert par déf du résid. fini.

Exo : Mtq G est rés. fini $\Leftrightarrow$ G munit de ta topo. profinie est séparé.

Prop : F_d, $d \geq 1$, est résiduellement fini

Rq : $F(a_1, \dots, a_d)$

Soit $w = a_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots a_{i_1}^{\varepsilon_1} \neq 1_{F_d}$ un mot librement réduit.

On construit un homom du groupe libre sur le groupe symétrique S_{n+1} tq l'image de $w \neq 1_{S_{n+1}}$.

Par la propriété universelle des groupes libres, il suffit de construire une application $f : \{a_1, \dots, a_d\} \longrightarrow S_{n+1}$

$a_i \longmapsto \sigma_i$

telle que $\sigma_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \neq 1_{S_{n+1}}$

Mettons $\sigma_{i_j}(j+1) = j$ si $\varepsilon_j = -1$

$\sigma_{i_j}(j) = j+1$ si $\varepsilon_j = 1$ $\Big\}$ $i_j \in \{a_{i_1}, \dots a_{i_n}\}$

$\sigma_i = id$ sinon ($i \notin \{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$)

↓ dans w

Alors, $\sigma_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}(1) = n+1$

$\Rightarrow \sigma_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} = \bar{f}(w) \neq 1_{S_{n+1}}$

▨

Rem : M. Hall a montré un thm plus fort.

Tout sous-groupe de type fini dans un groupe libre est fermé dans la topologie profinie.

Cette propriété s'appelle LERF ou être sous-groupe-séparable et c'est beaucoup plus rare que d'être résid. fini.

Exc :

- Groupes nilpotents de type fini sont résid. finis (Exo)
- Groupes de surfaces sont résid. finis.
- Groupes de tresses sont résid. finis.
- $SL_n \mathbb{Z}$ est résid. finis :

$SL_n \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_q} SL_n \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

$A = (a_{ij}) \Rightarrow q > \max_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}$

$\Rightarrow \varphi_q(A) \neq 1_{SL_n \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$

Groupes :

Ex : • G résid. fini et $H \leq G \Rightarrow$ H résid. fini

• Un groupe infini simple n'est pas résid. fini

(de tels groupes existent ...)

Pr : thm de Mal'cev

Soit $\Theta : G \twoheadrightarrow G$ épimorphisme et $K \lhd G$, $K = \ker \Theta$

Lemme : (thm de M. Hall)

G de type fini. Alors le # de ss-groupes d'indice n dans G est fini $\forall n$.

Pr :

$\forall H \leq G$ d'indice n, notons $c_1, \dots, c_n$ les représentants à gauche avec $c_1 = 1_G$.

L'action du groupe sur lui-même par multiplication à gauche permute les classes, ce qui induit un homom. $G \xrightarrow{\psi_H} S_n$

$\psi_H(g)(i) = j$ si $gc_iH = c_jH$

$\psi_H \neq \psi_L$ si $H \neq L$.

En effet, $H \neq L \Rightarrow \exists g \in H \setminus L$. $\psi_H(g)(1) = 1$ car $g \in H$ mais $\psi_L(g)(1) \neq 1$.

Mais comme G est de type fini, $\exists$ qu'un # fini d'homom différents $G \longrightarrow S_n$ car chaque tel homom est déterminé par ses valeurs sur les générateurs.

Donc on a qu'un # fini de ss-groupe d'indice n ▨

G de type fini $\Rightarrow H_1, \dots H_k$ sous-groupes d'indice n.

$H_i \leq \Theta(G) \Rightarrow H_i$ est l'image d'un ss-groupe de G

$H_i = \Theta(L_i)$ et $H_i = L_i/K$

De plus, $[G : H_i] = [\Theta(G) : \Theta(L_i)] = [G : L_i]$

Les $\{H_i\}$ sont tous d'indice n, donc les $\{L_i\}$ aussi.

K est contenu dans tous $L_i \Rightarrow K \subseteq \bigcap_i L_i$

Mais ça s'applique $\forall n \Rightarrow K \subseteq \bigcap_{\substack{H \leq G \\ |G/H| < \infty}} H$

G résid. fini $\Rightarrow \bigcap_{\substack{N \lhd G \\ |G/N| < \infty}} N = \{1_G\}$

$\Rightarrow \bigcap_{\substack{H < G \\ |G/H| < \infty}} H = \{1_G\} \Rightarrow K = \{1_G\} \Rightarrow G$ hopfien

∎

Prop : $BS(2,3) = \langle a, b \mid ab^2a^{-1} = b^3 \rangle$ est non-hopfien.

Cor : $BS(2,3)$ n'est pas résid. fini.

Rem : Plus généralement, $BS(m,n)$ est hopfien

$\Leftrightarrow |m| = 1$ ou $|n| = 1$ ou m et n ont le même ensemble de diviseurs premiers

De plus, $BS(m,n)$ est rés. fini

$\Leftrightarrow |m| = 1$ ou $|n| = 1$ ou $|m| = |n|$

De plus, $BS(m,n)$ est LERF $\Leftrightarrow |m| = |n|$

Pv : (Prop)

Soit $G = BS(2,3)$. On cherche $\Theta : G \twoheadrightarrow G$ surjectif, mais pas injectif (alors G est isom à son propre quotient)

$\Theta(a) := a$, $\Theta(b) := b^2$

Alors $\Theta(ab^2a^{-1}) = ab^4a^{-1} = ab^2a^{-1}ab^2a^{-1} = b^6$

$\Theta(b^3) = b^6$. Donc les images des générateurs par Θ satisfont l'unique relation $\Rightarrow \Theta$ un homom

$\mathrm{Im}\,\Theta \supset \{a, b^2, b^3\} \Rightarrow \mathrm{Im}\,\Theta \supset \{a, b\} \Rightarrow G \simeq \mathrm{Im}\,\Theta$

$b^3 = ab^2a^{-1}$

Groupes :

Donc Θ est un épimorphisme.

Reste à voir : Θ n'est pas injectif.

$\Theta([aba^{-1}, b]) = \Theta(aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}) = \underbrace{ab^2a^{-1}}_{b^3}b^3\underbrace{ab^{-2}a^{-1}}_{b^{-3}}b^{-2}$

$= [b^3, b^2] = 1_G$

Mais $[aba^{-1}, b] = aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1} \neq 1_G$

En effet, $BS(2,3) = \langle a, b \mid ab^2a^{-1} = b^3 \rangle \simeq \mathbb{Z} *_{2\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}}$ extension HNN

D'après la forme normale des éléments dans les extensions HNN (Lemme de Britton)

$w = 1 \Rightarrow w$ contient un sous-mot de la forme ab^2a^{-1} ou $a^{-1}b^3a$

∎

Compléments d'information :

Thm : (Mal'cev)

G groupe linéaire $\Rightarrow$ G résid. fini

Cor : 1) $BS(1,n)$ est rés. fini donc hopfien

2) $BS(2,3)$ n'est pas linéaire. L'homom qu'on a construit dans $GL_2\mathbb{R}$ n'est pas injectif.

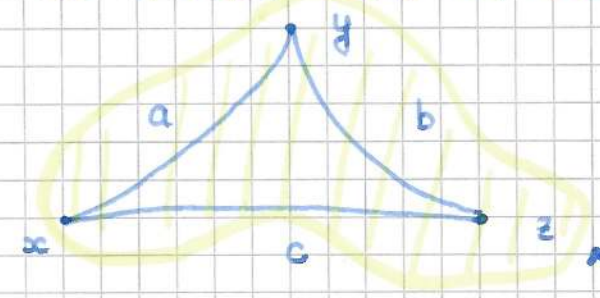
8. Groupes Hyperboliques au sens de Gromov :

Déf : Un espace métrique (X,d) est dit **géodésique** si $\forall x,y \in X$ sont liés par un segment géodésique : $\exists\, c : [0,L] \longrightarrow X$
↳ = plongement isométrique d'un segment
tq $c(0) = x$ et $c(L) = y$, $d(c(t),c(t')) = |t-t'| \quad \forall t,t' \in [0,L]$

Ex : $\mathbb{R}^n$ est géodésique ,
$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ n'est pas géodésique car pas complet ,
Sphère ,
$\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^n \ \forall n$, (*)
Variétés de Rieman complètes et simplement connexes, (*)
+ courbure strict. négative
Espace de Hilbert,
etc ...

Rem : Gromov a généralisé ces exemples (*) d'espaces à courbure strictement négative dans sa notion d'hyperbolicité.

Déf : Soit $\delta \geq 0$. Un espace métrique géodésique (X,d) est **δ-hyperbolique** si $\forall$ **triangle géodésique** dans X est **δ-fin**.
(chacun des 3 côtés est contenu dans le δ-voisinage de l'union des 2 autres côtés du triangle)



a, b, c segments géodésiques

δ-voisinage de $a \cup b \cup c$

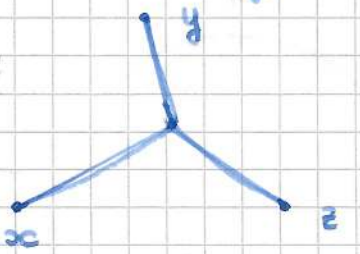
Ex : (X,d) borné , $d(x,y) \leq \beta \quad \forall x,y$
$\rightsquigarrow$ (X,d) est β-hyperbolique.

Graphes :

Exo : Vérifier que $\mathbb{H}^2$ est δ-hyperbolique et trouver δ

[Si on vérifie pour $\mathbb{H}^2$, on aura vérifié pour $\mathbb{H}^n$ à quelques détails près. Car un triangle dans $\mathbb{H}^n$ est contenu dans un plan et on peut donc réduire la question sur le cas de $\mathbb{H}^2$]

Exc : Les arbres sont 0-hyperboliques.



triangle 0-fin
c arbre

Ex : $\mathbb{R}^2$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, n'est pas hyperbolique. (exo)

Déf : (X, d) espace métrique, $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$.

Une (λ, C)-quasi-géodésique est une application

$\sigma : [0, L] \longrightarrow X$ tq $\frac{1}{\lambda}|t-t'| - C \leq d_X(\sigma(t), \sigma(t')) \leq \lambda|t-t'| + C$

$\forall\, t, t' \in [0, L]$

Thm : $\forall\, \delta > 0$, $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$ $\exists\, R = R(\delta, \lambda, C)$ tq si dans un espace δ-hyperbolique X, σ est une (λ, C)-quasi-géod. entre x et y et C est un segment géodésique entre x et y, alors l'un est dans le R-voisinage de l'autre.

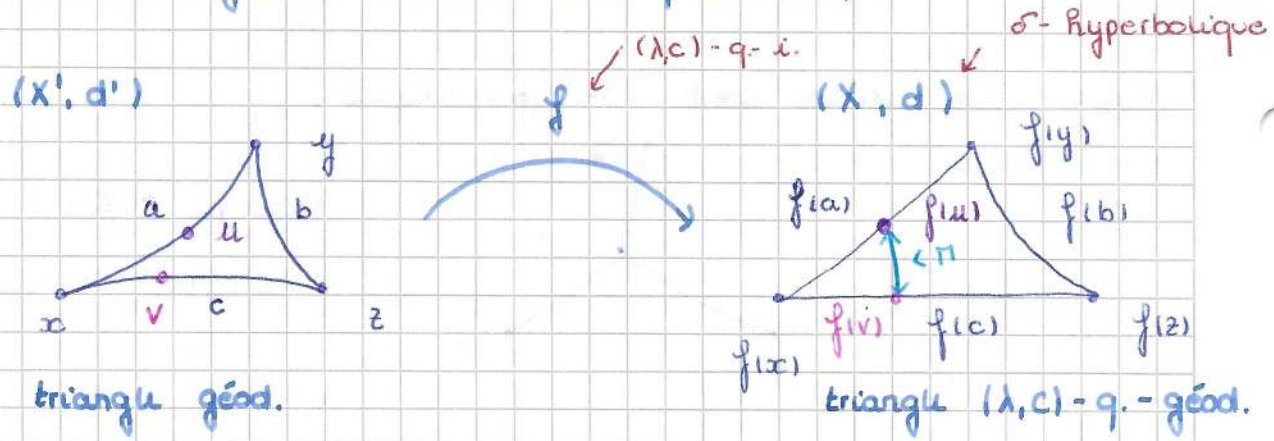
C ou σ — σ ou C

[sans preuve] Les quasi-géodésiques restent proches des géodésiques.

Cor : Si X est δ- hyperbolique, alors $\exists M$ tq $\forall$ triangle (λ, C) - quasi - géodésique est M - fin.
$M = M(\delta, \lambda, C)$

Thm : Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques géodésiques, $f : X' \longrightarrow X$ une (λ, c) - quasi - isométrie. Alors, si X est δ- hyperbolique $\Rightarrow \exists \delta'$ tq X' est δ' - hyperbolique

Pv : (déduction finale modulo thm précédent)



Corr.
$\Rightarrow$ triangle M - fin

f q.-isom $\Rightarrow d_X(f(v), f(u)) \geq \frac{1}{\lambda} d_{X'}(u, v) - c$

$\Rightarrow d(u, v) \leq \lambda\, d_X(f(v), f(u)) + \lambda c \leq \underbrace{\lambda M + \lambda c}_{=: \delta'}$

∎

Déf : Un groupe de type fini est <u>hyperbolique au sens de Gromov</u> si un ($\Leftrightarrow$ tout) graphe de Cayley du groupe est un espace δ- hyperbolique pour un certain δ.

Exc :
1) Groupes finis
2) Groupes libres
3) Groupes virtuellement libres
4) $\pi_1(\Sigma_g)$ et autres groupes qui agissent proprement et avec quotient compact sur $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{H}^n$.

Graphes :

5) $\mathbb{Z}^2$ n'est pas hyperbolique !

6) $BS(m,n)$ ne sont pas hyperbolique
(il suffit de regarder le graphe de Cayley)

Terminologie :

Tout groupe hyperbolique au sens de Gromov qui n'est pas fini ou virtuellement $\mathbb{Z}$ (contenir $\mathbb{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini) est dit <u>non-élémentaire</u>.

Thm : Tout groupe hyperbolique est de présentation finie.

Rq : Groupe δ-hyperbolique, $G = \langle S \rangle$, $|S| < \infty$

$X_n := \{ g \in G \mid |g|_S \leq n \} = B_{d_S}(e,n)$

$R_n := \{ xyz \mid x,y,z \in X_n \text{ et } xyz = 1_G \} \cup \{ xx^{-1} \mid x \in X_n \} \subset X$

$X_1 \subset X_2 \subset \dots$, $R_1 \subset R_2 \subset \dots$

$G_i := \langle X_i \mid R_i \rangle$

$G_1 \twoheadrightarrow G_2 \twoheadrightarrow G_3 \twoheadrightarrow \dots$ suite d'homom surjectifs.

En effet, $X_1 \hookrightarrow X_2$ s'étend en $F(X_1) \longrightarrow F(X_2)$

$F(X_1)/R_1 \longrightarrow F(X_2)/R_1 \twoheadrightarrow F(X_2)/R_2$.

On va mtq $\exists N$ tq $G_N \longrightarrow G_{N+1}$ est injectif

Cela veut dire que $G_N \cong G_{N+1}$ et donc $G_N \cong G$ car l'introduction de nouvelles relations ne change plus le groupe.

Il suffit de prendre $N > 2 \cdot \delta$.

Soit $xyz \in R_{N+1}$: $x,y,z \in X_{N+1}$ et $xyz = 1_G$

On doit montrer que cette relation n'est pas indépendante, elle peut être déduite des relations dans R_N.

Pour cela, on a besoin d'une observation :

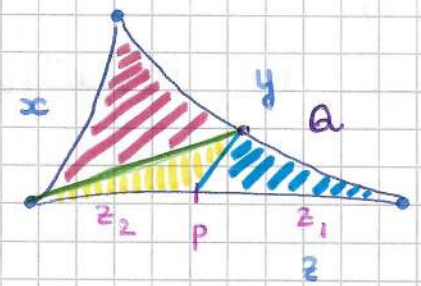
Si $t \in X_{N+1} \setminus X_N$, on peut l'écrire comme $t = t_1 t_2$ avec $|t_1|, |t_2| > \delta$ (car $N > 2\delta$)

$|t| = |t_1| + |t_2|$

$xyz \in R_{N+1}$.

1er cas : $x, y \in X_N$, $z \in X_{N+1} \setminus X_N$ (On fait ce cas, les autres sont analogues)

$\Rightarrow z = z_1 \cdot z_2$



$\exists Q \in x \cup y$ avec $d(p, Q) < \delta$

On a exprimé une relation dans R_{N+1} comme produit de 3 relations dans R_N

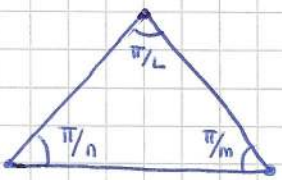
Donc $G = G_N$, ce qui veut dire que G peut être présenté par une présentation avec longueur bornée des relateurs

Graphes :

Groupes de triangles hyperboliques :

Ce sont des cas particuliers des groupes de Coxeter, engendrés par 3 générateurs d'ordre 2.

$M_{l,m,n} = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^l, (bc)^n, (ac)^m \rangle$



(*) Cas hyperbolique : $1/l + 1/m + 1/n < 1$

$\pi/l + \pi/m + \pi/n < \pi$

(# infini, (2,3,n) $n \geq 7$)

(*) Cas sphérique : $1/l + 1/m + 1/n > 1$

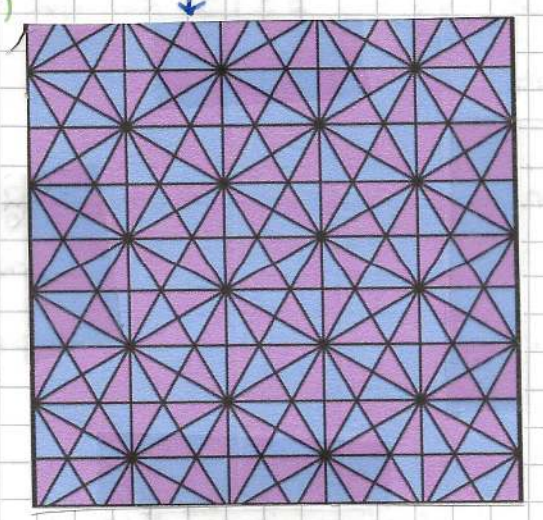
$\pi/l + \pi/m + \pi/n > \pi$ (# infini, (2,2,n))

(*) Cas euclidien : $1/l + 1/m + 1/n = 1$

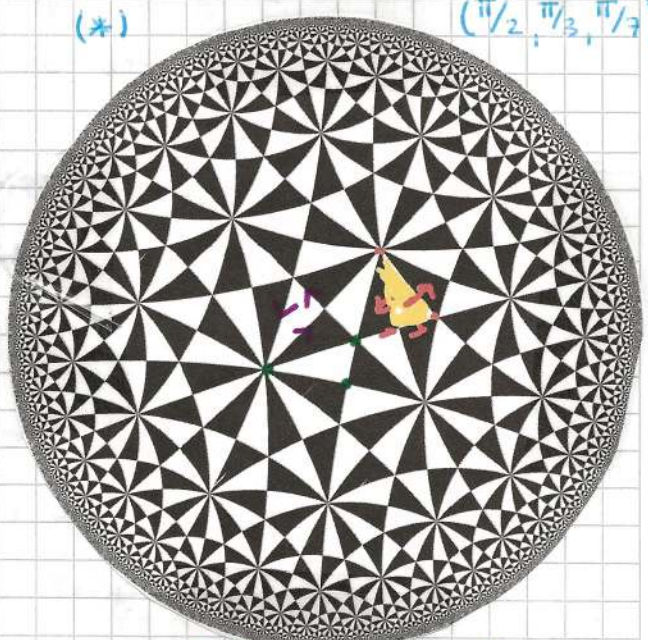
$\pi/l + \pi/m + \pi/n = 1$

((2,3,6), (3,3,3), (2,4,4) pavage du plan)

(*) ($\pi/2, \pi/3, \pi/6$)



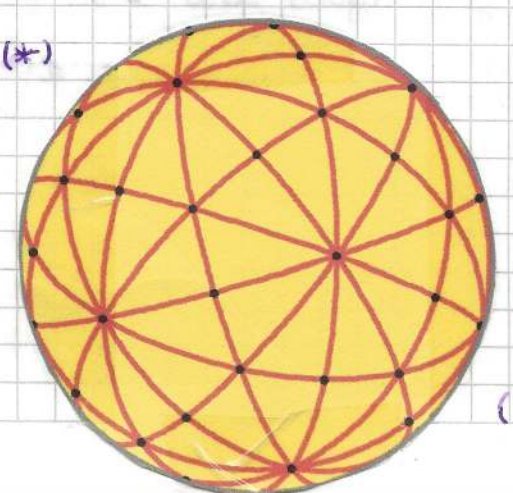
(*) ($\pi/2, \pi/3, \pi/7$)



* générateurs = réflexion par un côté

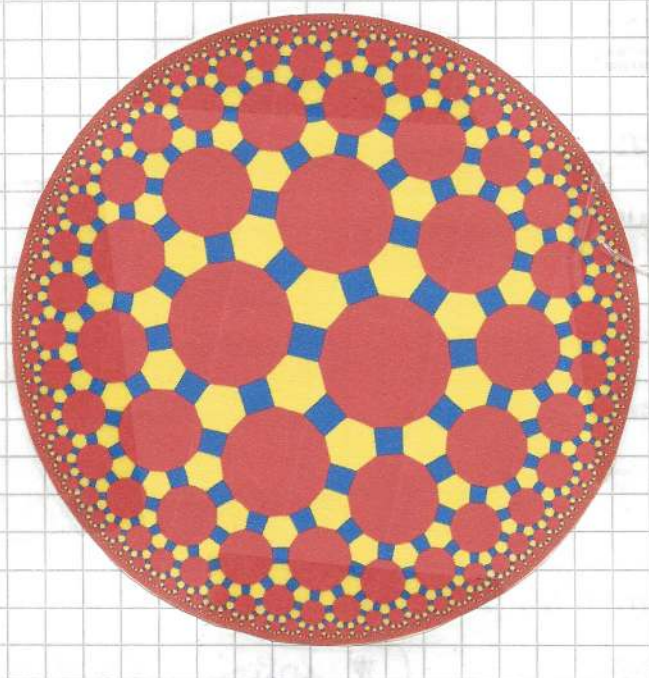
* sommets = relations (rotation autour du sommet)

(*)



($\pi/2, \pi/3, \pi/5$)

Graphe de Cayley du pavage $(\pi/2, \pi/3, \pi/7)$ (*)



Les circuits sont les relations :

- $(ab)^2$
- $(bc)^3$
- $(ac)^7$

Thm : G hyperbolique non-élémentaire $\Rightarrow$ G à croissance exp.

Cela découle de :

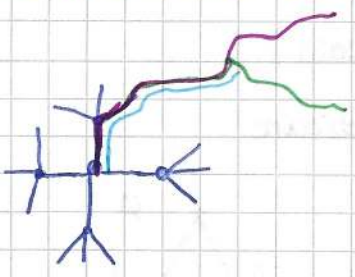
Thm : Soit G un groupe hyperbolique $\forall g, h$ $\exists n > 0$ tel que $H = \langle g^n, h^n \rangle$ est un groupe libre.

Pv : La preuve est une application du lemme de Ping-Pong
Pour faire marcher le lemme, on utilise le bord hyperbolique du graphe de Cayley et l'action du graphe là-dessus.

X un espace géodésique, on peut définir ∂X comme (pas important)
{ classe d'équiv. des rayons géodésiques issus d'un pt base }
où deux rayons géod. sont équivalents s'ils restent à distance bornée.

Graphes :

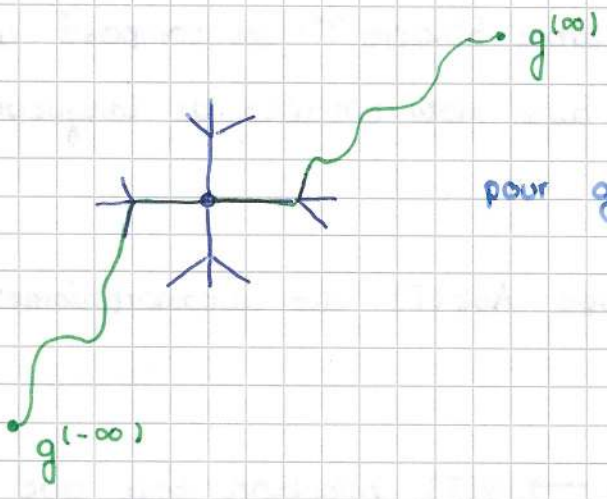
Cas particulier de l'arbre infini : $X = Cay(F(a,b), \{a,b\})$



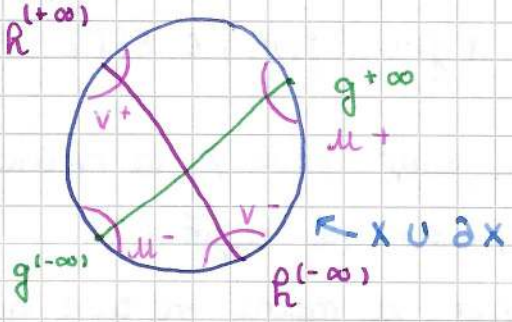
$(\xi_1 | \xi_2)_e$ = longueur du + grand début commun

$d(\xi_1, \xi_2) = e^{-(\xi_1|\xi_2)_e}$

$(X \cup \partial X) = \overline{X}$ compact (∂X est compact)



pour g un élément d'ordre infini



On peut alors appliquer le lemme de la manière suivante :

$g^n((U^-)^c) \subset U^+$

$g^{-n}((U^+)^c) \subset U^-$

$R^n((V^-)^c) \subset V^+$

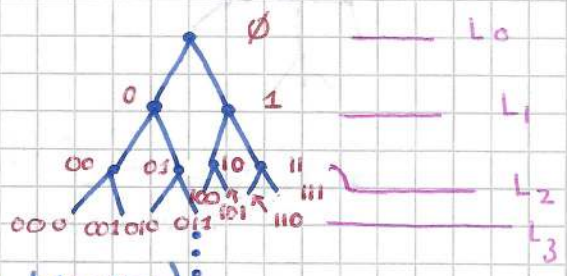
$R^{-n}((V^+)^c) \subset V^-$

9. Groupe de Grigorchuk :

R. Grigorchuk : 1980, 1984 (Prix Américain)

Exemple de groupe à croissance intermédiaire.

Soit T, l'arbre binaire infini,
qui est gradué en niveau,
la racine étant $\emptyset$.



(On est en bijection avec les mots binaires)

Le n-ème niveau de l'arbre binaire T est composé des sommets correspondants aux mots binaires de longueur n
$\Rightarrow |L_n| = 2^n$

On s'intéresse au groupe Aut(T) des automorphismes de T.

$f \in Aut(T)$: $f : V(T) \longrightarrow V(T)$ bijection telle que

$$(v, v') \in E(T) \iff (f(v), f(v')) \in E(T)$$

T est régulier de degré 3, sauf pour $\emptyset$ la racine.
Comme un automorphisme préserve le degré :

$\forall f \in Aut(T)$ doit préserver la racine en tant qu'unique sommet de degré 2.

Mais alors, le niveau des sommets est aussi préservé (car il détermine la distance à la racine)
Donc $\forall f \in Aut(T)$ agit sur chaque niveau en permutant les sommets (préserve les niveaux et sur chaque niveau agit en permutant ses sommets, et les sous arbres qui suivent)

Groupes :

Aut (T) est donc un groupe non-dénombrable (pas de type fini)

$\underset{\text{Aut}T}{\text{Stab}}(1) := \underset{\text{Aut}}{\text{Stab}}(L_1) = \{ f \in \text{Aut} \mid f(01) = 0 \text{ et } f(11) = 1 \}$

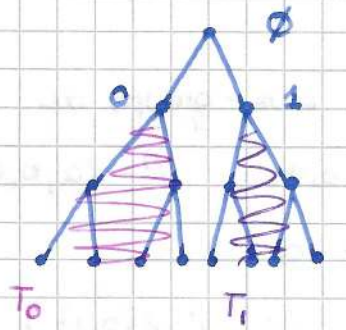
$\trianglelefteq \text{Aut}(T)$ d'indice 2

$\text{Aut}(T) / \underset{\text{Aut}T}{\text{Stab}(1)} = \text{Span}(2) = \{ id, (0,1) \}$

On remarque qu'il existe un homomorphisme :

$\psi : \text{Stab}(1) \longrightarrow \text{Aut}\,T \times \text{Aut}\,T$

$g \longmapsto (g_0, g_1)$



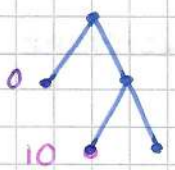
$i = 0,1 \qquad g_i = \delta_i^{-1} g|_{T_i} \delta_i$

$g|_{T_i} \in \text{Aut}\,T_i$

$\delta_i : T \longrightarrow T_i$ isomorphisme

Sous-arbre issu de 0 et 1 $\qquad w \longmapsto iw$

Exc : $0 \in T \xrightarrow{\delta_1} 10$



ce qui fait correspondre 0 à son image dans T_1 : 10

Plus généralement, $\forall k$ on a $\psi_k : \underset{\text{Stab de } L_k}{\text{Stab}(k)} \longrightarrow \text{Aut}(T)^{2^k}$

$g \longmapsto (g_{0\ldots0}, g_{0\ldots1}, \ldots, g_{1\ldots1})$

k mots $\qquad 2^k$

$\psi = (\psi_{0\ldots0}, \ldots, \psi_{1\ldots1})$ a 2^k coordonnées.

$\psi_{i_1 \ldots i_k} = \psi_{i_k} \circ \psi_{i_{k-1}} \circ \ldots \circ \psi_{i_1}$.

un mot binaire de long k.

$\text{Aut}\,T / \underset{\text{Aut}}{\text{Stab}(k)} = \text{Aut}(T^{(k)})$

$T^{(k)}$: arbre binaire fini coupé au k-ème niveau

On arrive immédiatement à :

Prop : $\mathrm{Aut}(T)$ est résiduellement fini.

Pv : En effet, on a $\bigcap_{k=1}^{\infty} \underset{\mathrm{Aut}T}{\mathrm{Stab}}(k) = \{1\}$

et $\underset{\mathrm{Aut}T}{\mathrm{Stab}}(k)$ est d'indice fini car $\mathrm{Aut}T \,/\, \underset{\mathrm{Aut}T}{\mathrm{Stab}}(k) = \mathrm{Aut}(T^{(k)})$

qui est le groupe d'autom. d'un graphe fini donc fini.

□

Cor : Tous les ss-groupes de type fini de $\mathrm{Aut}(T)$ sont résiduellement finis et hopfiens.

Déf : Le groupe de Grigorchuk est défini comme le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$ engendré par les automorphismes suivants : $\Gamma = \langle a, b, c, d \rangle$

a : $a(0) = 1$, $a(1) = 0$, $a_0 = id$, $a_1 = id$

(c-à-d : $\forall w = i_1 \dots i_k \quad a(w) = a(i_1) i_2 \dots i_k \quad i_j \in \{0,1\}$)

On a évidemment $a^2 = 1$.

b, c, d sont définis récursivement :

$b, c, d \in \underset{\mathrm{Aut}(T)}{\mathrm{Stab}}(1)$. En écrivant $g = (g_0, g_1)$ au lieu de $\psi(g) = (g_0, g_1)$

On a $b = (a, c)$; $c = (a, d)$; $d = (1, b)$

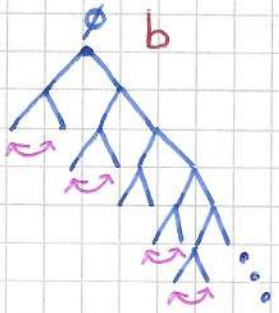
b stabilise le premier niveau et ensuite il agit comme a sur T_0 et comme c sur T_1

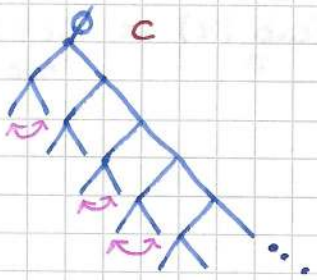
Par exemple, $b(0 i_2 \dots i_k) = 0\, a(i_2)\, i_3 \dots i_k$

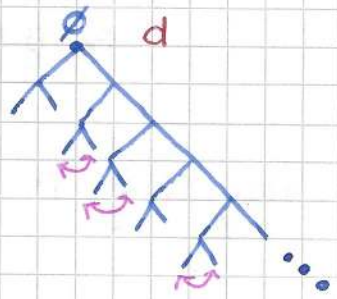
$b(1 i_2 \dots i_k) = 1\, c(i_2 \dots i_k)$ → $1\,0\,a(i_3)\, i_4 i_5 \dots i_k$; $1\,1\,d(i_3 i_4 \dots i_k)$

dépend de la valeur de i_2

Groupes :







$b = (a, c)$ $\quad c = (a, d)$ $\quad d = (1, b)$

$b, c, d \in \underset{\text{Aut}(T)}{\text{Stab}(1)}$

$a^2 = \underbrace{b^2 = c^2 = d^2}_{\text{Comme ils ne font que des "switch"}} = 1$ $\quad \underbrace{bcd}_{\text{et un est toujours trivial}} = 1$

$$\langle b, c, d \mid b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$=: \mathbb{V} \quad \text{Klein viergruppe.}$$

On conclut que Γ est un quotient du produit libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a \rangle$ et $\mathbb{V}$.

$$\underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{V}}_{\downarrow} \twoheadrightarrow \Gamma$$

Rem : C'est le groupe hyperbolique de triangle $\Gamma_{2,\infty,\infty}$

Ainsi $\forall g \in \Gamma$ peut être écrit (de manière non-unique) comme un mot de la forme $u_0 a u_1 a u_2 a \dots u_{l-1} a u_l$ avec $l \geq 0$, $u_1, \dots u_{l-1} \in \{b, c, d\}$ et $u_l, u_0 \in \{\emptyset, b, c, d\}$

NB ! Il y a plein d'autres relations dans Γ

En fait, Γ n'est pas de présentation finie

Rem : La parité du nombre de "a" dans la forme normale qu'on vient de décrire, est un invariant de l'élément.

En effet, $\{g \in \Gamma :$ # a dans un mot qui représente g est pair $\}$

$\Leftrightarrow g \in \underset{\Gamma}{Stab}(1) = \underset{Aut}{St}(1) \cap \Gamma$

Rem : $\underset{\Gamma}{Stab}(1) \underset{2}{\trianglelefteq} \Gamma$

On a que $\underset{\Gamma}{Stab}(1) = \underset{Aut}{Stab}(1) \cap \Gamma$

$g \in \underset{\Gamma}{Stab}(1) \rightsquigarrow g = (g_0, g_1)$ via ψ

$\psi : \underset{Aut}{Stab}(1) \longrightarrow Aut(T) \times Aut(T)$

$\psi|_{\underset{\Gamma}{St}(1)}$? :

$\{b, c, d\} \in \underset{\Gamma}{St}(1)$ $\quad \psi(b) = (a, c)$

conjugaison déguisée par a $\quad \psi(c) = (a, d) \quad \psi(d) = (1, b)$

Notons que $aba, aca, ada \in St_\Gamma(1)$

Plus précisément, $\psi(aba) = (c, a)$, $\psi(aca) = (d, a)$

$\psi(ada) = (b, 1)$

En fait, $\underset{\Gamma}{Stab}(1) = \langle b, c, d, aba, aca, ada \rangle$

On constate que $\psi : \underset{\Gamma}{Stab}(1) \longrightarrow \Gamma \times \Gamma$ est surjectif sur chaque coordonée.

De plus, il est injectif.

En effet, supposons que $\psi(g) = (id, id)$, $g \in St_\Gamma(1) \Rightarrow g = 1_\Gamma$

Ces deux observations mises ensembles nous permettent de démontrer :

Prop : Γ est un groupe non-cohopfien.

Pv : $\underset{\Gamma}{St}(1) \underset{\uparrow \psi \text{ inj}}{\approx} \psi(St_\Gamma(1)) \underset{\uparrow \psi \text{ surj sur 1er coordonnée.}}{\gtrsim} \Gamma \times \{1\} \simeq \Gamma$ et $\underset{\Gamma}{St}(1) \gtrsim \Gamma$

le 14.05.20

Groupes :

Cor : Γ est un groupe infini

---

le 27.05.20

Sur les Problèmes de Burnside :

1902 : William Burnside

obs : Si G est un groupe fini, alors l'ordre de tout élément de G est fini

Q : Est-ce que la réciproque est vraie ?

Non !

Ex : $\forall p$ premier, le p-groupe de Prüfer Pr_p est infini mais l'ordre de tout élément de Pr_p est fini.

$$Pr_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{ p^k\text{-ème racines de l'unité} \}$$

$$= \left\{ e^{\frac{2\pi i m}{p^k}} \;\middle|\; 0 \leq m < p^k,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

avec multiplication des nombres complexes.

$$Pr_p \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$

Il y a un désavantage à ce contre-exemple, c'est que Pr_p n'est pas un groupe de type fini.

Problème de Bursidé :

Soit G un groupe de type fini. Supposons qu'il est de torsion ie : tout élément est d'ordre fini.

Est-ce que cela implique que G est fini ?

La réponse est oui pour les groupes linéaires.

En général, la réponse est non :

1er exemple d'un groupe infini, de type fini et de torsion a été construit par Golod en 1964.

Problème de Burnside "borné" :

Soit G un groupe de type fini. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $g^N = 1_G \ \forall g \in G$. Est-ce que cela implique que G est fini ?

La réponse est oui pour : $N = 2$ (Exo)
$N = 3$ (Burnside)
$N = 4$ (Thm)
$N = 6$ (Thm)

C'est un problème ouvert pour $N = 5$ et d'autres petites valeurs.

Non pour N impair > 665 (P. Novikov, S. Adian 1968)

Pour N pair et assez grand, la réponse est aussi non.

Thm 1 : Soit Γ le groupe de Grigorchuk (vu la semaine dernière)
$\forall g \in \Gamma, \exists n \in \mathbb{N}$ tq $g^{2^n} = 1_\Gamma$

Cor : Ainsi Γ est un groupe infini (par un résultat de la semaine dernière) de type fini et de torsion.

Rem : Γ est un 2-groupe infini de type fini.

Cor : La croissance de Γ est superpolynômiale.

Groupes :

Preuve : (Corollaire)

En effet, si Γ était à croissance polynômiale, il serait virtuellement nilpotent.

Mais on sait qu'un groupe nilpotent de type et de torsion est fini (Exo 2, S.7, partie 1)

Mais Γ est infini et de torsion par thm 1, donc Γ n'est pas virtuellement nilpotent.

□

Preuve : (Thm 1)

Soit $g \in \Gamma$. Soit w un mot réduit qui représente g écrit sous la forme normale des éléments de $\langle a \rangle * \{1, b, c, d\}$ de longueur minimale parmi de tels mots représentants g.

$|w| =: k$

Récurrence sur k :

$k = 0 \Rightarrow g = 1$

$k = 1 \Rightarrow g = a, b, c, d$ et $g^2 = 1$

$k = 2 \Rightarrow$

$g = bc = cb = d$

$g = dc = cd = b$ } et $g^2 = 1$

$g = bd = db = c$

$g = ab$ ou ba → Ordre ≤ 32, $\langle a, b \rangle \simeq D_{32}$

$g = ac$ ou ca ≤ 16 (Exo 3, Série 9)

$g = ad$ ou da ≤ 8

Supposons $k \geq 3$ et supposons que le thm est vrai pour tout g avec longueur minimale des mots réduits qui le représentent $\leq k - 1$

$k = |w|$ peut être pair ou impair : 2 cas à considérer

1) Supposons que $k = |w|$ est impair.

$k = 2n + 1$ (2 cas à considérer)

a) $w = a u_1 a u_2 \dots a u_{n-1} a u_n a$

$w = a g' a$ où $g' \in \Gamma$ représenté par un mot réduit de longueur $\leq k-2$

Par hypothèse de récurrence, $\exists N \in \mathbb{N}$ $(g')^{2^N} = 1_\Gamma$

$g = a g' a \Rightarrow g^{2^N} = (a g' a)^{2^N} = a (g')^{2^N} a = a^2 = 1_\Gamma$

b) $w = u_0 a u_1 a u_2 \dots u_{n-1} a u_n$.

$u_0, u_1, \dots, u_n \in \{b, c, d\}$

Si $u_0 = u_n$, alors l'argument du a) marche aussi.

Si $u_0 \neq u_n$, alors $\exists v \in \{b, c, d\}$ tq $u_n = v \cdot u_0$

Par exc : $u_0 = b$ et $u_n \neq b$

p. ex $u_n = c = db \Rightarrow v = d$.

$w = u_0 a u_1 a \dots u_{n-1} a v u_0$

mot de long. $k-1$

Hypothèse de récurence + arg a)

2) $k = |w|$ est pair, $k = 2n$

On a 2 cas.

a) $w = a u_1 a u_2 \dots a u_n$

b) $w = u_0 a u_1 a \dots u_{n-1} a$ $\quad u_0, u_1, \dots u_n \in \{b, c, d\}$

Dans le cas b) :

$u_0 w u_0 = a u_1 a u_2 \dots u_{n-1} a u_0$ et on se retrouve dans le cas a).

Donc on voit que le cas b) se réduit au cas a) + l'argument comme dans 1) a).

Groupes :

Il suffit donc de considérer le cas a) :

$w = a u_1 a u_2 \dots a u_n$

Deux cas à considérer : n pair et n impair

i) Si n est pair, alors le # de a dans w est pair et alors $g \in St_\Gamma(1)$ (voir cours semaine passée)

$w = a u_1 a u_2 \dots a u_{2m}$ $(n = 2m)$

$= (a u_1 a) u_2 (a u_3 a) u_4 \dots (a u_{2m-1} a) u_{2m}$

$\psi : St_\Gamma(1) \longrightarrow \Gamma \times \Gamma$ homom, injectif et surjectif sur toutes les coordonées.

$\psi(g) = \psi(a u_1 a)\psi(u_2) \dots \psi(a u_{2m-1} a)\psi(u_{2m})$

Nous avons calculé :

$\psi(b) = (a,c)$, $\psi(c) = (a,d)$, $\psi(d) = (1,b)$

$\psi(aba) = (c,a)$, $\psi(aca) = (d,a)$, $\psi(ada) = (b,1)$

$\psi(g) = (g_0, g_1)$, on a alors que g_0 et g_1 sont représentés par des mots réduits de longueur $\leq k/2$

Par hypothèse de récurrence, $\exists L, M > 0$ tq

$g_0^{2^L} = g_1^{2^M} = 1_\Gamma$

Car $\psi : St_\Gamma(1) \longrightarrow \Gamma \times \Gamma$ est injectif, l'ordre d'un $g \in St_\Gamma(1)$ est le plus petit multiplicateur commun (p.p.m.c) des ordres des éléments g_0 et g_1.

Donc c'est aussi une puissance de 2.

ii) n est impair, $n = 2m-1$

$w = a u_1 a u_2 \dots a u_{2m-2} a u_{2m-1}$

$= (a u_1 a) u_2 (\dots) \dots (a u_{2m-3} a) u_{2m-2} a u_{2m-1}$

$k = 4m-2$

$g^2 = ww = (a u_1 a) u_2 \dots (a u_{2m-3} a) u_{2m-2} \cdot$

$(a u_{2m-1} a) u_1 (a u_2 a) \dots a u_{2m-3} (a u_{2m-2} a) u_{2m-1}$

mot réduit de longueur $8m-4$.

$\psi(g^2) = (\alpha, \beta)$ avec long de α et $\beta \leq 4m-2 = k$

Notons que $\forall u_j$ apparaît une fois dans $w \cdot w$ tout seul et une fois dans $a u_j a$.

Si un des $u_j = d$, $\psi(u_j) = \psi(d) = (1, b)$

et $\psi(a u_j a) = \psi(ada) = (b, 1)$

Donc α et β en réalité seront de long. $\leq 4m-3 = k-1$

Et on pourra appliquer la récurrence à α et β ce qui impliquerait que g^2 est d'ordre 2^N pour un certain N, donc g aussi.

Si un des $u_j = c$, $\psi(c) = (a, d)$ et $\psi(aca) = (d, a)$ donc on pourrait appliquer l'argument précédent à α et β.

Si tous les $u_j = b$, $\psi(b) = (a, c)$ et $\psi(aba) = (c, a)$ et donc l'argument précédent s'applique à α et β.

▨

Groupes :

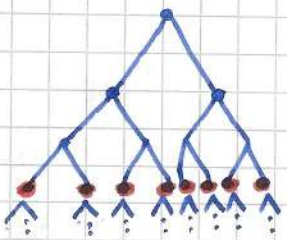
Thm 2 : Γ est à croissance sous-exponentielle

Cor : Γ est un groupe à croissance intermédiaire.

Preuve : (Théorème 2)

Faite en détail dans le dernier chapitre du livre de P. de la Harpe. (Chap. VIII)

Ici on présente l'idée de la preuve.



$\varphi : St_\Gamma(1) \longrightarrow \Gamma \times \Gamma$

$\varphi^{(3)} : St_\Gamma(3) \longrightarrow \underbrace{\Gamma \times \Gamma \times \dots \times \Gamma}_{8 \text{ copies}}$

$\gamma \in St_\Gamma(3)$, $\varphi^{(3)}(\gamma) = (\gamma_{000}, \gamma_{001}, \gamma_{010}, \gamma_{011}, \dots, \gamma_{111})$

$\varphi^{(3)}$ est injectif et surjectif sur chaque coordonnée.

On a aussi : $St_\Gamma(3) \trianglelefteq \Gamma$ d'indice 128.

Lemme : Grigorchuk

$$\forall \gamma \in St_\Gamma(3), \quad 3/4\, |\gamma|_S + 8 \geq \sum_{i_1,i_2,i_3 \in \{a,1\}} |\gamma_{i_1 i_2 i_3}|$$

où $S = \{a, b, c, d\} \subset \Gamma$

La démo de ce lemme procède en gros selon les mêmes lignes que la démo du thm 1, sauf qu'il y a plus de cas à considérer et il faut faire des estimations plus fines. (Détails dans le livre)

En admettant ce lemme et en sachant que $\varphi^{(3)}$ est injectif, on a $\beta_\Gamma^{St(3)}(k) \overset{(*)}{\leq} \sum_{\substack{k_1 \dots k_8 \\ k_1 + \dots + k_8 \leq 3/4\, k + 8}} \beta_\Gamma(k_1) \dots \beta_\Gamma(k_8)$

Maintenant, on estime la fonction de croissance du groupe en terme de la fonction de croissance d'un sous-groupe d'indice fini (dans les même générateurs)

$H \leq_{\text{indice } i} G$, $\beta_G(k) \leq i \cdot \beta_H(k+i-1) \quad \forall k \geq 0$

Donc dans notre cas, nous avons $\beta_\Gamma(k) \leq 128\, \beta_{St_\Gamma(3)}(k+127) \quad \forall k \geq 0$

$$\overset{(*)}{\leq} 128 \sum_{\substack{k_1,\dots k_8 \\ k_1+\dots+k_8 \leq 3/4(k+127)+8}} \beta_\Gamma(k_1) \dots \beta(k_8)$$

Rap : Ex 2, Série 5

$\lim \sqrt[k]{\beta_\Gamma(k)}$ = w le taux de croissance exponentielle.

Cela implique $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0$ tq $\forall k > k_0$, $\beta(k) \leq (w+\varepsilon)^k$

Donc $\forall k$, on a $\beta(k) \leq C \cdot (w+\varepsilon)^k$ ($C \geq \beta(k_0)$)

$$\beta_\Gamma(k) \leq 128 \cdot C^8 \sum_{k_1+\dots+k_8 \leq 3/4(k+127)+8} (w+\varepsilon)^{k_1+\dots+k_8}$$

$$\leq 128\, C^8\, (w+\varepsilon)^{3/4(k+127)+8} \cdot \underbrace{\#\{(k_1,\dots,k_8) : k_1+\dots+k_8 \leq 3/4(k+127)+8\}}_{\leq \text{Poly}(k)}$$

$$\leq P(k) \cdot (w+\varepsilon)^{3/4(k+127)+8}$$

$$w \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{P(k) \cdot (w+\varepsilon)^{3/4(k+127)+8}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(w+\varepsilon)^{3/4\,k}} = (w+\varepsilon)^{3/4}$$

Car c'est vrai $\forall \varepsilon > 0$, on conclut $w \leq w^{3/4}$

$\Rightarrow w = 1$

▨