Exa : Écrit 4h (Juin)

Virginie Bonnier
le 18.02.20

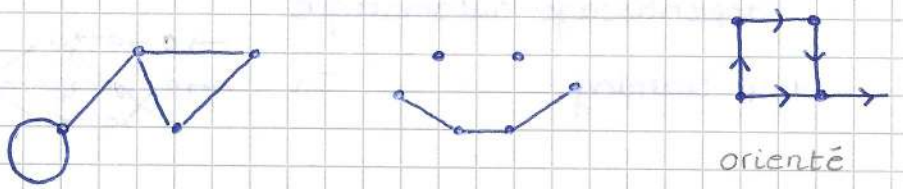
Théorie des Graphes et Réseaux :

Théorie des Graphes et des Réseaux :

I. Introduction :

Rem : réseaux " = " graphes

Ex :



Origine du sujet : Euler 1736 (Königsberg)

⚠ on échange l'ordre (13h-14h) exercices (14h-16h) puis cours après ⚠

Exemples :

Ex : La nature

molécules

cristaux

cerveaux ...

contamination virale

feu de forêt

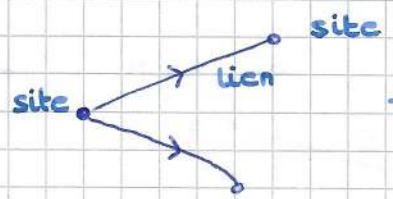
Ex : Les humains

trafic ⟶ paradoxe de Braess

train

internet

facebook



⟶ Page Rank

Ex : Maths

théorie des groupes

théorie des nombres $\longrightarrow$ Maynard (8 avril)

— " — noeuds

Ex : Maths appliqués

A.I. : apprentissage automatique

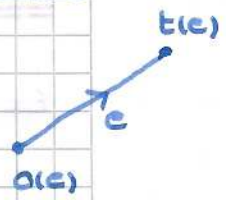
deep learning

II. La définition d'un graphe :

Déf : (Serre)

Un graphe X est un ensemble VX "sommets" et un ensemble EX "arrêtes" avec applications

$$EX \longrightarrow VX \times VX$$
$$e \longmapsto (o(e) ; t(e))$$



et $EX \longrightarrow EX$ telle que :
$$e \longmapsto \bar{e}$$

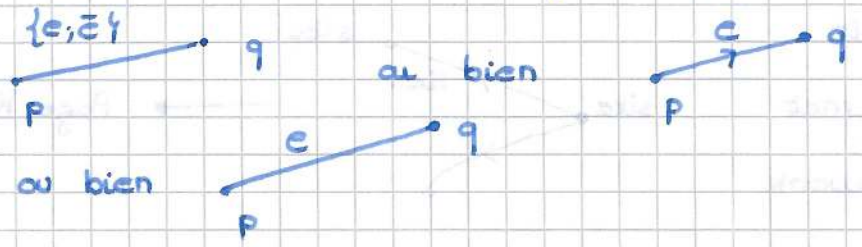
$e \neq \bar{e}$, $\bar{\bar{e}} = e$ et $o(e) = t(\bar{e})$ et $t(e) = o(\bar{e})$

Rem : V = vertices E = edges

Rem : Noter bien que cette définition prend une arrête et son double.

Diagramme de X :

une arrêtes $= \{e, \bar{e}\}$ "arrête géométrique non-orientée"



Graphes et Réseaux :

Réalisation géométrique / topologique de X :

$T := EX \times [0,1] \cup VX$

avec les identifications : $(e,s) \sim (\bar{e}, 1-s) \quad \forall s \in [0,1]$

$(e,0) \sim o(e)$

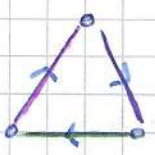
$(e,1) \sim t(e) \qquad \forall e \in EX$

$\mathrm{real}(X) = T/\sim$

Déf : Un graphe orienté de X est un choix de sous-ensemble EX^+ tq $EX = EX^+ \sqcup \overline{EX^+}$

Ex : X

une orientation



$EX^+ = \{ \nearrow ; \nwarrow ; \leftarrow \}$

$\overline{EX^+} = \{ \swarrow ; \nwarrow ; \rightarrow \}$

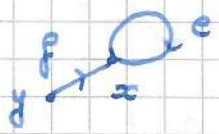
Rem : On dit en anglais digraph (directed graph)

Déf : • Le degré de $x \in VX$ est le nombre d'arrêtes $e \in EX$ tq $o(e) = x$

$\deg(x) = |o^{-1}(x)| = |t^{-1}(x)|$

• X est k-régulier si tout $x \in VX$ a degré k.

Ex : 1)



$\deg x = 3$

les 3 sont $\bar{f}, e, \bar{e}$

2)

2 - régulier

Déf: Un morphisme de graphes $\varphi : X \longrightarrow Y$.

$\varphi : VX \longrightarrow VX$, $\varphi : EX \longrightarrow EX$

qui commutent avec les applications , o, t et $^{-}$.

Déf: Un isomorphisme est un morphisme avec inverse morphisme

Ex : Important

chemin de longueur n =: $Path_n$

$\varphi : Path_n \longrightarrow Y$

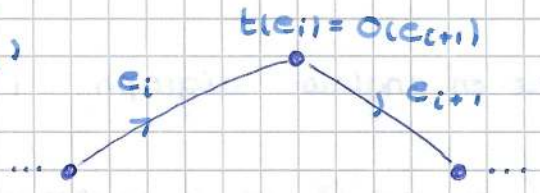
$V(Path_n) = \{0, 1, \dots, n\}$

$E(Path_n) = \{e_{01}, \overline{e_{01}}, e_{12}, \overline{e_{12}}, \dots \overline{e_{n-1n}}\}$

où $o(e_{i,i+1}) = i$ $\quad t(e_{i,i+1}) = i+1$

Un chemin est équivalent à une suite d'arêtes $e_1, e_2, \dots, e_n$

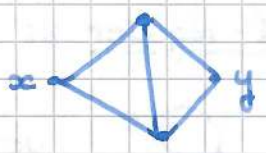
t.q $t(e_i) = o(e_{i+1})$



Déf: X est connexe si $\forall x, y \in VX$ $\exists$ un chemin entre x et y

Ex:

Non ! diam = ∞



oui ! diam = 2

Déf: Le diametre de X est $D = \sup\limits_{x, y \in VX} d(x, y) \in [0, \infty]$

où $d(x, y)$ = min longueur de tous les chemins entre x et y

Rem: Pour l'instant longueur de chaque arête = 1.

Graphes :

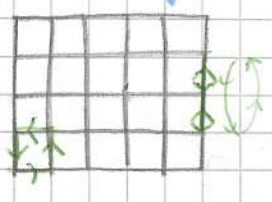
Déf : Un <u>sous-graphe</u> $Y \subset X$ est $VY \subset VX$, $EY \subset EX$ tq Y est un graphe avec les applications o, t et $^-$ de X.

Ex :

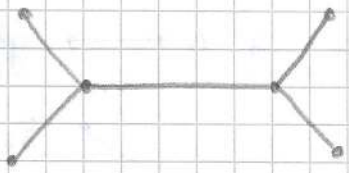
X Y

Déf : X est un <u>arbre</u> si X est connexe et ne contient pas de cycles ($\exists$ pas de chemins fermés de longueur $n \geq 1$ tq si on écrit, on a avant $e_i = \overline{e_{i+1}}$ "aller-retour")

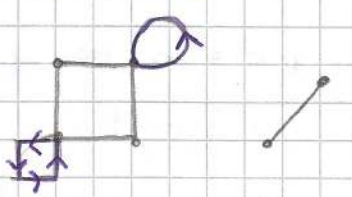
Ex : chemin fermé



arbre



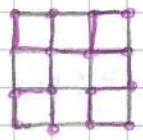
non-arbre



1. pas connexe
2. chemins fermés

Déf : $Y \subset X$ un sous-graphe est <u>un arbre couvrant</u> (ss-arbre maximal) de X si Y est un arbre et $VY = VX$

Ex :

X  Y

$VY = VX$

III. Graphes de Cayley et Schreier :

Une source très importantes de graphes symmétriques
(= groupe d'automorphisme agit transitivement sur VX)

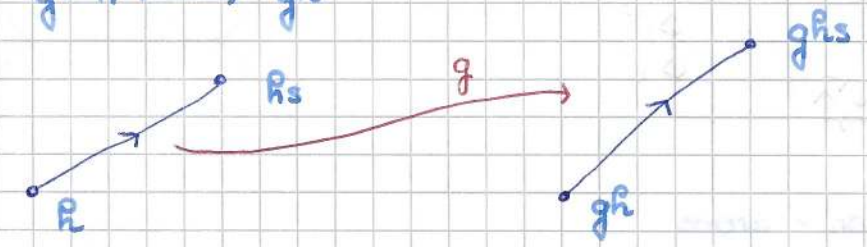
Déf: Soit G un groupe et $S \subset G$ un sous-ensemble. Le graphe associé $X = Cay(G, S)$ graphe de Cayley.

$VX := G$, $EX^+ := G \times S$, $o(g,s) = g$, $t(g,s) = gs$

$EX = EX^+ \sqcup \overline{EX^+}$

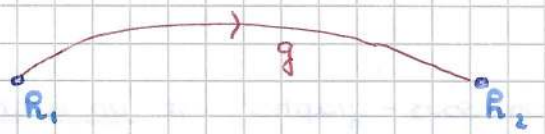
Donc on peut parler d'un graphe orienté ou non-orienté.

Rem: Noter que G agit sur X par automorphisme (de graphe) avec $g : h \longmapsto gh$

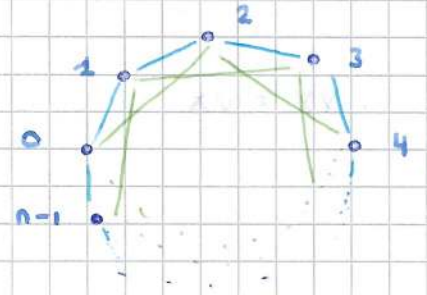


De plus cette action est libre, $g \cdot x = x \Leftrightarrow g = id$,
et transitive, $\forall h_1, h_2 \in VX$ $\boxed{\exists g \in G \text{ tq } h_1 = gh_2}$

$g = h_2 h_1^{-1}$



Ex: $Cay((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +), \{1\}) = Cycle_n$

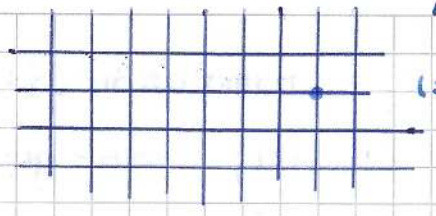


$S = \{1, 2\}$

le 25.02.20

Graphes :

Ex : $\mathrm{Cay}\left(\mathbb{Z}^2, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$



(x, y)

Généralisation : Graphe d'action et de Schreier

Soit G un groupe agissant sur un ensemble Y. Soit $S \subset G$.

Déf : Graphe associé "graphe d'une action"

$VX := Y \qquad EX := Y \times S$

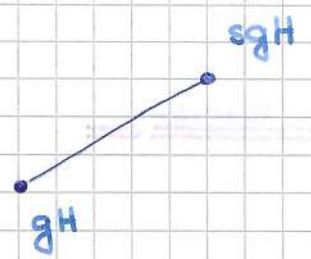
$o((y,s)) = y \qquad t((y,s)) = sy$ ← $\phi(s)(y)$

Ex : Cay où $Y = G$ et l'action = multiplication à gauche.

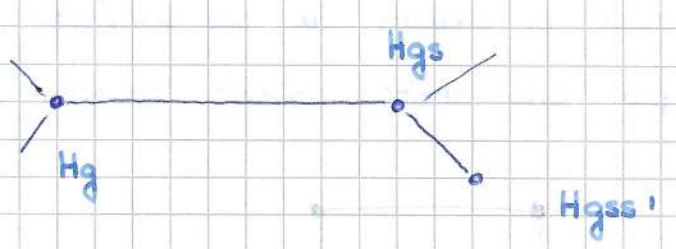
Ex : (Schreier) + Petite Recherche de la déf.

Soit $H < G$ un sous-groupe et $S \subset G$ sous-ensemble

Soit $Y := G/H$



Version alternative : $H < G$, $S \subset G$, $Y = H \backslash G$



Rem : Si H est ss-groupe normale, alors $G/H = \tilde{G}$ un groupe

$\longrightarrow$ Cayley.

Ex: $G = S_3$ = Permutation $(\{1,2,3\})$ $\quad |S_3| = 3! = 6$

$H = \{id, (12)\}$ sous-groupe d'ordre 2

$|H \backslash G| = 3$.

Les classes de H :

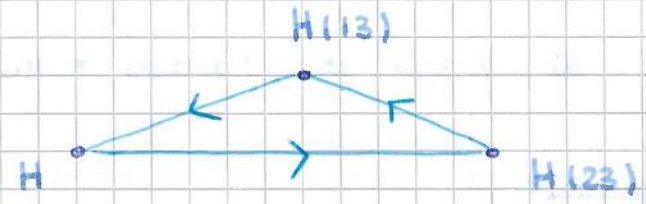
$H = \{id, (12)\}$

$H(13) = \{(13), (132)\}$

$H(23) = \{(23), (123)\}$

Soit $S = \{(123)\}$

Trois sommets :



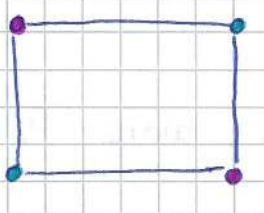
$H\underbrace{(123)}_{S} = H(23)$, $\quad H(23)\underbrace{(123)}_{S} = H(13)$, $\quad H(13)\underbrace{(123)}_{S} = H(12) = H$

IV. Théorème de Ramsey :

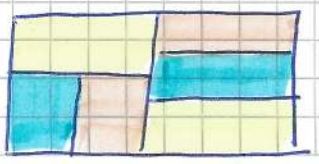
Coloration de Graphe :

Déf: Une coloration de graphe consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets tq deux sommets reliés par une arête soient colorés différement.

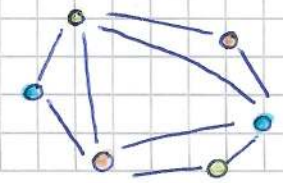
Ex



Ex :



Carte



Graphes :

Déf : Soit G un graphe. Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre minimum de couleurs possibles pour une coloration de G.

Ex :

$\chi($ $) = 2$ $\qquad$ $\chi(\bullet\ \bullet) = 1$

$\chi($ $) = 3$

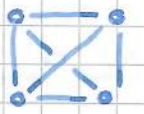
Déf : Le graphe complet sur n sommets, dénotés K_n, est le graphe tel que entre chaque paire de sommets distincts il y a un arrête.

Ex :

K_1 :

K_2 :

K_3 :

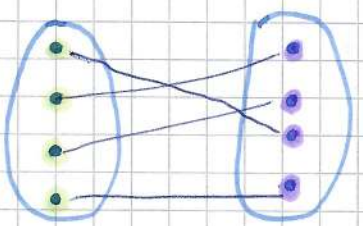
K_4 : 

Rem : $\chi(K_n) = n$

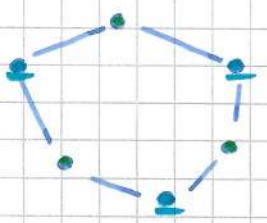
Déf : Un graphe est biparti si $\chi(G) \leq 2$.

[⇒ tout chemin fermé est de longueur paire]

Ex :



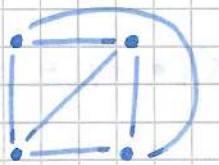
Ex : $Cay(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} ; \{1\})$



Déf: Un graphe est <u>planaire</u> si on peut plonger la réalisation géométrique dans $\mathbb{R}^2$.

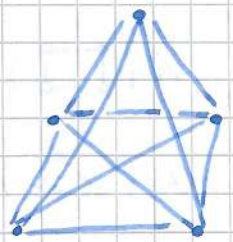
[c-à-d : On peut le dessiner sur papier sans X]

Ex : K_4



Planaire

K_5



Pas Planaire.

Thm : Théorème des 5 couleurs

Si G est planaire, alors $\chi(G) \leq 5$.

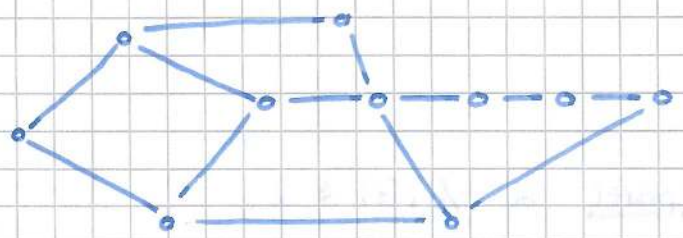
Comment utiliser "planaire" ?

<u>Caractéristique d' Euler</u> : $\chi(\text{Surface comp}) = V - E + F$

genre g $= 2 - 2g$

$\parallel$

nombre de trou



$2 = \chi(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}) = 10 - 13 + 5 = 2$

Thm : (Appel – Haken 1976)

G planaire $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

Rv : Très long, Très compliqué et ordinateur.

le 25.02.20

Graphes :

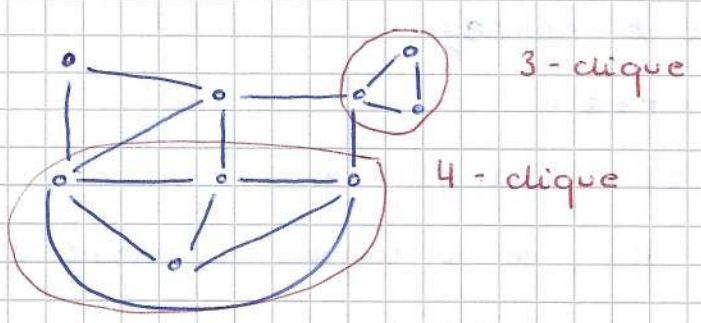
Théorème de Ramsey :

Une philosophie très actuelle : " théorie de Ramsey "

Dans un grand désordre, il y a toujours des parties (relativement grandes) très structurées et régulières.

Déf : Soit X un graphe, un sous-graphe de X isomorphe à un K_n s'appel une clique.

Ex :



Ici, on considère une coloration différente :

- colorier les arrêtes géométriques
- arbitraire

Ex :

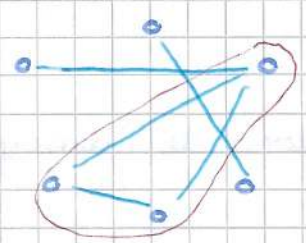
aucune clique

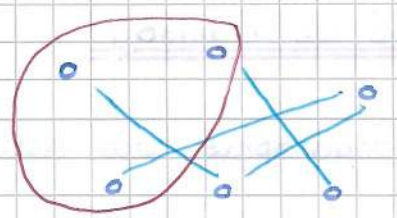
Le jeu est de trouver les cliques monochromatiques (≥ 3) grandes.

Thm : (Preuve à l'examen) (Ramsey 1928)

Soient $r, s \geq 1$. $\exists$ un nombre $R(r,s)$ t.q pour chaque coloration (des arrêtes de K_n, $n \geq R(r,s)$) en 2 couleurs (bleu, rouge), il y a toujours au moins une bleue clique taille r ou une rouge clique taille s.

Ex : $R(3,3) = 6$

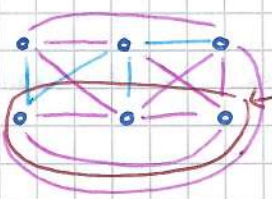




SC II (50) Meyer

Le 03.03.20

Ex :



clique taille 3

Dém : du théorème de Ramsey

Récurrence sur $r+s$:

- $\forall m \quad R(m,1) = R(1,m) = m$

  car dans K_m, on a toujours au moins 1 arrête bleue (resp. rouge), sauf si tout le monde rouge (resp. bleu), c-à-d clique rouge (resp. bleu) taille m.

- Aff : $R(r,s) \leq \underbrace{R(r-1,s)}_{<+\infty} + \underbrace{R(r,s-1)}_{<+\infty}$ par hyp. de récurrence.

  Prend K_n, $n = R(r-1,s) + R(r,s-1)$ coloration bleue et rouge arbitraire.

  Il faut trouver une r-clique bleue et/ou une s-clique rouge.

  Choisir un sommet v et on partitionne les autres sommets

  $M := \{ w \in V(K_n) \mid \text{arrête}(v,w) \text{ est bleue} \}$

  $N := \{ w \in V(K_n) \mid \text{arrête}(v,w) \text{ est rouge} \}$

  $V(K_n) = \{v\} \sqcup M \sqcup N$

  Donc, $R(r-1,s) + R(r,s-1) = n = 1 + |M| + |N|$ (*)

  Donc, on a qu'au moins un entre M et N est tq

  $|M| \geq R(r-1,s)$ et $|N| \geq R(r,s-1)$

Graphes :

Sinon $|M| \leq R(r-1,s)-1$ et $|N| \leq R(r,s-1)-1$

ce qui contredit (*)

- 1er Cas : $|M| \geq R(r-1,s)$

  Si M contient une clique K_s rouge ok

  Sinon, M contient une clique K_{r-1} bleue

  et donc $K_{r-1} \cup \{v\}$ est une r-clique bleue,

  par la déf de M. ok

- 2ème Cas : $|N| \geq R(r,s-1)$

  identique

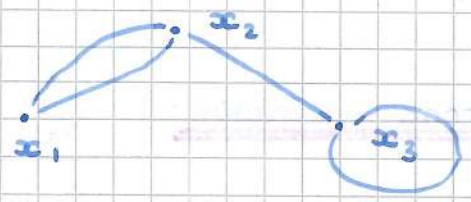
Donc affirmation démontrée et $R(r,s) < +\infty \ \forall r,s \geq 1$ ∎

5. Matrice d'Adjacence :

1. A et A^n :

Déf. : Soit $X = (V(X), E(X))$ un graphe. La matrice d'adjacence est $A = (a_{xy})_{x,y \in V(X)}$ où $a_{xy} = \#$ arrêtes e tq $o(e) = x$, $t(e) = y$.

Ex : X



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rem : Noter que A est toujours symétrique grâce à

$E(X) = E(X)^+ \sqcup \overline{E(X)^+}$

c-à-d $\forall e \in E(X)$ $o(e) = x$, $t(e) = y$, on a $o(\bar{e}) = y$, $t(\bar{e}) = x$

Jusqu'ici, A est un tableau.

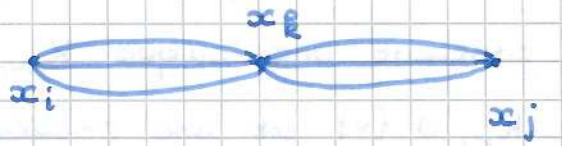
Mais A représente un transformation linéaire.

- Ça a du sens ? oui !

Rem : $A = (a_{ij})$ $\quad a_{ij} = \#\ \underbrace{\text{arrêtes}}_{\text{chemin } L=1}\ i \to j$

$A^2 = A \cdot A = (a_{ij}^{(2)})$ où

$a_{ij}^{(2)} = \sum_k a_{ik} a_{kj}$ $\quad a_{ij}^{(2)} = \#$ chemins de $L=2$ $i \to j$



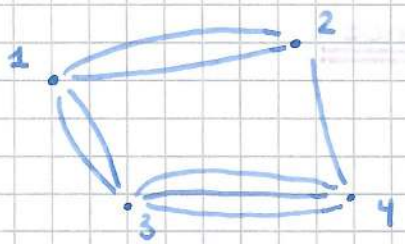
ici $a_{ij}^{(2)} = 3$

Prop : $A^n = (a_{ij}^{(n)})$ $\quad a_{ij}^{(n)} = \#$ chemins $L=n$ $i \to j$

Démo : $(A^{(3)})_{ij} = \sum_k \underset{i \to k}{a_{ik}^{(2)}}\ \underset{k \to j}{a_{kj}}$ ok.

$\blacksquare$

Ex :

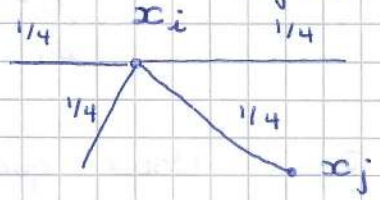


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\#$ chemins $L=2$ $1 \to 4 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ & 5 & 3 & 0 \\ & & 13 & 0 \\ & & & 10 \end{pmatrix}$$

2. Matrice de Markov - marche aléatoire :



Une variante de A.

$P = (p_{ij})$ $\quad p_{ij} = \frac{1}{\deg x_i} a_{ij}$

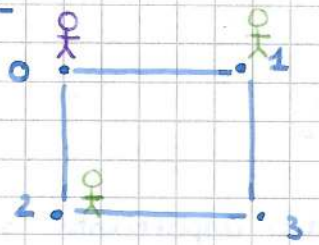
avec ça : $\sum_j p_{ij} = \sum_j 1/\deg x_i\ a_{ij} = 1/\deg x_i \sum_j a_{ij} = 1$

$\Rightarrow$ On peut interpréter p_{ij} comme des probabilités

$(P^2)_{ij} = \sum_k p_{ik} p_{kj} = \mathbb{P}(i \to j$ en 2 pas$)$

Graphes :

Ex :



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

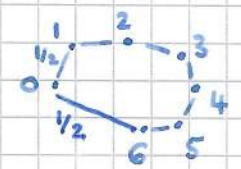
Prop : $P^n = (p_{ij}^{(n)})$

$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(i \to j \text{ en } n \text{ pas})$

Chaîne de Markov.

Thm : Supposons que P est irréductible et apériodique ($\forall i,j\ \exists n$ tq $p_{ij}^{(n)} > 0$), alors $\forall v$, $P^n v \longrightarrow \pi$ distribution équilibrée (mesure) et $P\pi = \pi$. (vecteur propre de val. p. $\lambda = 1$)

Ex :

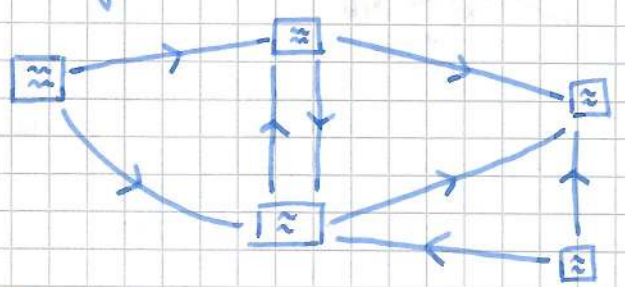


$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

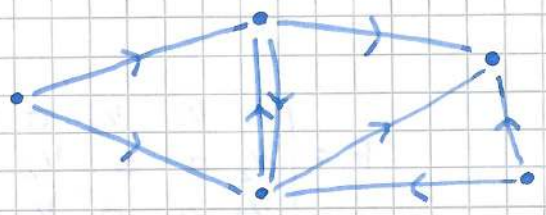
$$P^{1000} v \approx \begin{pmatrix} 1/7 \\ \vdots \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

3. PageRank de Google :

Brin - Page ≈ 1998



Idée : On oublie le contenu de la page, on regarde comme un graphe.

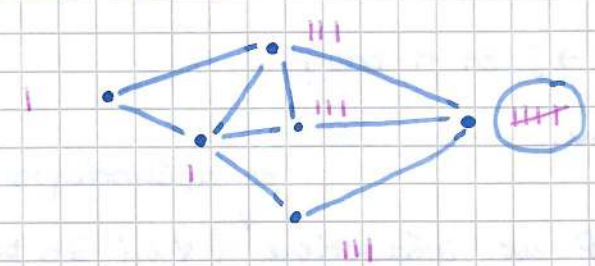


Un site est important si les sites importants ont liens à lui.

Comment calculer l'importance ?

Considérer $P = (p_{ij})$ comme avant sauf graphe orienté.

Calculer $P^{50}{}_v$



important

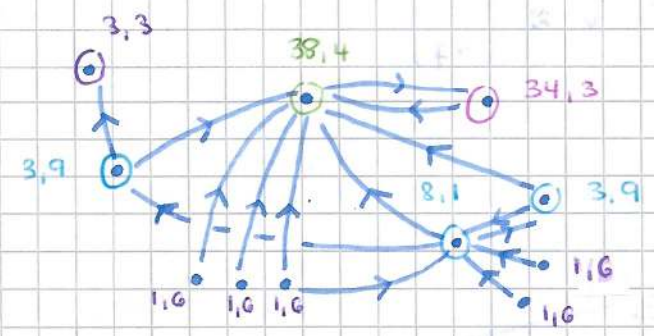
Modification :

$$M = \underbrace{\frac{1-\alpha}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{saut}} + \underbrace{\alpha P}_{\text{surf}}$$

$n = \#$ site web $\qquad \alpha = 0{,}85$

$M^{50}{}_v \longrightarrow \pi =:$ PageRank

Ex :



$n = 11$

$\alpha = 0{,}85$

le 10.03.20

Graphes :

VI La Dérivée et le Laplacien :

Le laplacien est :

- variante de la matrice d'adjacence
- analogue du $-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

Soit $X = (VX, EX)$ un graphe fini ou dénombrable (VX et EX sont finis ou dénomb.).

Supposer que $M := \max_{v \in VX} \deg v < \infty$ "le degré est borné"

Soit $L^2(VX) = L^2(VX, \mathbb{C}) = \{ f : VX \to \mathbb{C} : \sum_{x \in VX} |f(x)|^2 < \infty \}$ avec

Produit scalaire hermitien :

$$(f, g) = \sum_{x \in VX} f(x) \overline{g(x)}$$

Rap : Inégalité de Cauchy-Schwartz

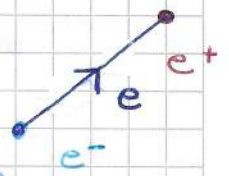
$$|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Soit $L^2_a(EX, \mathbb{C}) = \{ F : EX \to \mathbb{C} \text{ tq } F(\bar{e}) = -F(e) \text{ et } \sum_{e \in EX} |F(e)|^2 < \infty \}$

avec Produit scalaire :

$$(F, G) = \tfrac{1}{2} \sum_{e \in EX} F(e) \overline{G(e)}$$

Déf : La dérivée extérieure (opérateur de différence) est



$$d : L^2(VX) \longrightarrow L^2_a(EX)$$

$$f \longmapsto df \quad \text{où } (df)(e) := f(e^+) - f(e^-)$$

Rem : Analogue en géom. diff :

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(df)(v) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

$v \in T_x M$

$\gamma(0) = x$

Analogue en Analyse Numérique :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_v f(x) \approx \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Prop : d est linéaire et $df \in L^2_a(EX)$

Pv : Linéarité : ✓

$(df)(\bar{e}) = f(e^-) - f(e^+) = -df(e)$ ✓

$v = e_i^+$

Noter d'abord que $\sum_{e \in EX} |f(e^+)|^2 = (*)$

$$(*) \leq M \cdot \underbrace{\sum_{v \in VX} |f(v)|^2}_{\|f\|^2} < +\infty \quad \text{car } f \in L^2(VX)$$

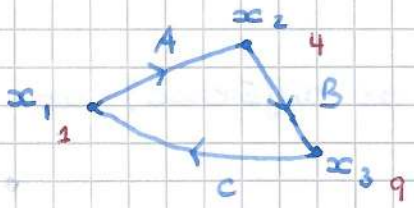
Alors $\frac{1}{2} \sum_{e \in EX} |df(e)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{e \in EX} |f(e^+) - f(e^-)|^2$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_e \Big(\underbrace{|f(e^+)|^2}_{\leq M\|f\|^2} + \underbrace{|f(e^-)|^2}_{\leq M\|f\|^2} + 2 \sum_e \underbrace{|f(e^+) f(e^-)|}_{\text{C.-S. } \leq \left(\sum_e |f(e^+)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_e |f(e^-)|^2\right)^{1/2}} \Big)$$

$$\leq M\|f\|^2 + \sqrt{M}\,\|f\| \sqrt{M}\,\|f\| = 2M\|f\| < \infty$$

■

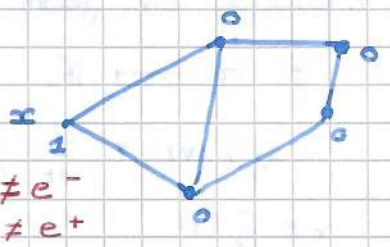
Ex :



$f(x_i) = i^2$

$df(A) = f(x_2) - f(x_1) = 4 - 1 = 3$

Ex : Soit $\delta_x(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$$d\delta_x(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e^+ = x \neq e^- \\ -1 & \text{si } e^- = x \neq e^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Graphes :

Prop : Soit $f \in L^2(VX)$. $df(e) = 0 \ \forall e \in EX \iff f$ est cst sur chaque composante connexe de X.
(localement constante)

Pv : $\Leftarrow$: Si f est cst $\forall$ comp. connexe alors $df(e) = f(e^+) - f(e^-)$
$= c - c = 0$

$\Rightarrow$: $df(e) = 0 \ \forall e \in EX$.

Soient $x, y \in VX$ dans la même comp. connexe

$\Rightarrow \exists$ chemin fini de x à y. $\left[\{e_i\}_{i=1}^n, \ x = e_1^- \text{ et } y = e_n^+\right]$

Alors $f(x) = f(e_1^-) - f(e_1^+) + f(e_2^-) + \dots - f(e_n^+) + f(y)$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n df(e_i) = 0$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

Rem : Le d ne voit pas les loops.

Déf : L'opérateur $\underline{d^*} : L^2_a(EX) \longrightarrow L^2(VX)$ est l'opérateur linéaire définit par $(d^* F, g)_{L^2(VX)} = (F, dg)_{L^2_a(EX)}$
$\forall F \in L^2_a(EX)$ et $\forall g \in L^2(VX)$

[Comme la transposée $(A^t v, u) = (v, Au)$]

Plus concrète :

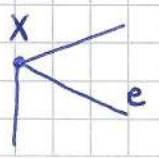
$$d^* F(x) = \sum_{v \in VX} d^* F(v) \, \delta_x(v) = (d^* F, \delta_x)$$

$$= (F, d\delta_x) = \frac{1}{2} \sum_{e \in EX} F(e) \overline{d\delta_x(e)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{e \in EX \\ e^+ = x}} F(e) - \underbrace{\sum_{\substack{e \in EX \\ e^- = x}} F(e)}_{\sum_{\substack{e \in EX \\ \bar{e}^+ = x}} F(\bar{e})} \right)$$

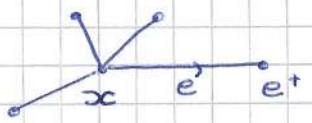
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{\substack{e \in EX \\ e^+ = x}} F(e)$$

$$\boxed{(d^* F)(x) = \sum_{\substack{e \in EX \\ e^+ = x}} F(e)} \quad (*)$$



Déf : <u>Le Laplacien</u> de X est l'opérateur linéaire $\Delta := d^*d : L^2(VX) \longrightarrow L^2(VX)$

Prop : Soit $f : VX \longrightarrow \mathbb{C}$. $(\Delta f)(x) = \sum_{\substack{e \in EX \\ e^- = x}} f(x) - f(e^+)$



Pv : $(\Delta f)(x) = (d^*(df))(x) \overset{(*)}{=} \sum_{\substack{e \in EX \\ e^+ = x}} df(e)$

$$= \sum_{\substack{e \in EX \\ e^+ = x}} f(\underbrace{e^+}_{=x}) - f(e^-)$$

$$= \sum_{\substack{e \in EX \\ e^- = x}} f(x) - f(e^+)$$

$\blacksquare$

Ex : $X = \mathbb{Z}$

$$(\Delta f)(x) = \sum_{\substack{e,\, e^- = x \\ e^+ = y}} f(x) - f(y)$$

$$= f(x) - f(x-1) + f(x) - f(x+1) = 2f(x) - f(x-1) - f(x+1)$$

Comparer Analyse Numérique :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \approx \frac{2f(x) - f(x-h) - f(x+h)}{h}$$

Prop : Δ est symétrique ($(\Delta f, g) = (f, \Delta g)$ $\forall f, g \in L^2(VX)$)

et semi-positif ($(\Delta f, f) \geq 0$ $\forall f$)

Pv : $(\Delta f, g) = (d^*df, g) = (df, dg) = \overline{(dg, df)}$

$$= \overline{(d^*dg, f)} = (f, \Delta g)$$

$$(\Delta f, f) = (d^*df, f) = (df, df) \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\sum_{e \in EX} |df(e)|^2}}{\geq} 0$$

$\blacksquare$

le 10.03.20

Graphes :

le cas X fini : (VX et EX finis)

On a 2 perspectives :

Fonctions	Vecteurs
$f(x)$, $f : VX \to \mathbb{C}$	$v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{C}$

$$f(x_i) = v_i$$

base $\{\delta_x\}_{x \in VX}$	base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$
$\Delta = \sum_{\substack{e \in EX \\ e^- = x}} f(x) - f(e^+)$	Δ = matrice
	$\Delta_{ij} = (\Delta e_i, e_j)$

Aff : Si X est k - régulier, $\Delta = D - A$

où $D = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}$ et A matrice d'adjacence.

Prop : Si X fini, $n = |VX|$, alors Δ a des valeurs propres

$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$

Pv : Δ est symétrique, $\underbrace{\Delta = \Delta^t}_{\text{val. p} \in \mathbb{R}}$, et $\Delta \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

$\lambda = 0$ est une val. p. car $f = c$ constante.

$$\Delta f = d^* \underbrace{df}_{0} = 0 = \lambda_0 \cdot f$$

$\blacksquare$

Rap: Soient X un graphe et $f: VX \to \mathbb{C}$ une fonction.

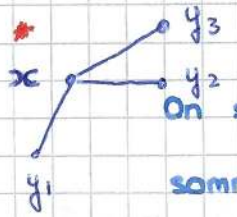
Nous avons vu : la différentielle : $df(e) = f(t(e)) - f(o(e))$

analogue de la dérivée

le laplacien : $\Delta f(x) \overset{*}{=} \sum_{y : o(y) = x} f(x) - f(y)$

sym + semi - positif

voisin de x



On suppose toujours que le degré des sommets est fini et même borné par un nombre M.

pas de convergence

Déf: On dit que $f: VX \to \mathbb{C}$ est harmonique si $\Delta f(x) = 0 \quad \forall x \in VX$

$\Delta f(x) = 0 \Rightarrow \sum_y f(x) - f(y) = 0$

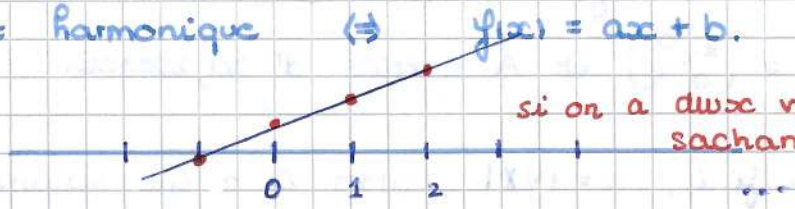
Rem: La définition est équivalente à : $\Rightarrow \deg(x) \cdot f(x) - \sum_y f(y) = 0$

$$f(x) \deg(x) = \sum_{\text{voisin de } x} f(y), \quad f(x) = \frac{1}{\deg x} \sum_{\text{voisin de } x} f(y)$$

c-à-d f satisfait la propriété de la moyenne.

Ex: Sur le graphe $\mathbb{Z}$ graphe fini

f est harmonique $\Leftrightarrow$ $f(x) = ax + b$.



si on a deux valeurs alors sachant que $\Delta f = 0$

$\Rightarrow$ tous les points sont déterminés sur une droite.

Vecteurs vs Fonctions :

même chose, juste notation et point de vu différent (un peu)

$n = |VX|$

Vecteurs		Fonctions
$y = (f_1, \dots, f_n)$	$\xleftrightarrow{\text{même information}}$	$f: VX \to \mathbb{C}$
		$VX = \{1, 2, \dots, n\}$, $f(i) = f_i$

Base

$e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots 0)$ $\qquad$ $\delta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On préfère les fonctions.

Graphes :

On va maintenant trouver le laplacien comme matrice :

le coefficient ij de la matrice se trouve comme d'habitude

prod. scalaire

par $\Delta_{ij} = (\Delta\delta_i, \delta_j) = \Delta\delta_i(j) = \sum_{e:\, e^- = j,\, e^+ = y} \delta_i(j) - \delta_i(y)$ ← voisin de j

$$= \begin{cases} \deg i - 2\#\text{loop en } i & \text{si } i = j \\ -\#\text{ arrêtes de } j \text{ vers } i & \text{si } i \neq j \quad (\delta_i(j) = 0) \end{cases}$$

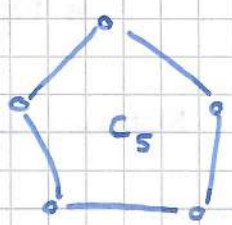
Donc sous forme matricielle :

$$\Delta = D - A$$

où D matrice diagonale avec $D_{ii} = \deg i$ et A matrice d'adjacence.

Ex : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, graphe de Cayley standard ($S = \{1\}$)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



description complète du graphe

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

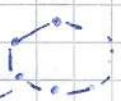
$\text{Dét}(\Delta - \lambda \text{Id}) = 0$ ... ?

Peut être le point de vue de fonctions et dérivées a un avantage :

Rap : $\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

$$\frac{d^2}{dx^2} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\text{fonction}} = \underbrace{\lambda^2}_{\text{valeur propre}} e^{\lambda x}$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



Soit $X_k(x) = e^{\frac{2\pi i k x}{n}}$, notons que $X_k(x) = X_k(x + n\mathbb{Z})$

Donc ces fonctions définissent des fonctions $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$

Notons que $X_k(x+y) = X_k(x) \cdot X_k(y)$

Donc on calcule :

par déf du Laplacien

$$(\Delta X_k)(x) = 2X_k(x) - X_k(x+1) - X_k(x-1)$$
$$= 2X_k(x) - X_k(1)\cdot X_k(x) - X_k(-1)X_k(x)$$
$$= \underbrace{\left(2 - e^{2\pi i k/n} - e^{-2\pi i k/n}\right)}_{\lambda_k} X_k(x).$$

Donc $\Delta X_k = \lambda_k X_k$ et les valeurs propres sont alors

$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ $0 \leq k \leq n-1$ [sans utiliser $\det(\Delta - \lambda Id)$]

$\Downarrow$

utilité du p.d.v des fonctions

En plus, comme nous avons vu dans d'autres cours, les exponentielles forment un système orthogonal.

Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a n sommets, il nous faut n val. propres et n vect / fonctions propres

$\Rightarrow$ Nous les avons toutes trouvées !

Notons que dans cet exemple : $\lambda_k \geq 0$ et $\lambda_0 = 0$

VII Interprétations des valeurs propres :

Composantes Connexes :

Rap : Nous avons presque déjà vu que si f est constante, alors $(\Delta f)(x) = \sum_{\text{voisin de } y} f(x) - f(y) = \sum 0 = 0$

Deuxièmement, supposons que le graphe X a 2 comp. connexes Y et Z. Ça veut dire que aucun sommet Y a voisin dans Z et vice-versa. Ça implique que si f est cst sur Y et aussi sur Z (mais cst diff) alors $(\Delta f)(x) = 0$ $\forall x \in X$

Prop : Soit X un graphe fini, la multiplicité de la valeur propre $\lambda_0 = 0$ est égale au nombre de composantes connexes.

le 17.03.20

$\Delta f = 0 \Rightarrow f$ cst
à voir en série

Graphes :

Dém : On sait déjà que pour X connexe $\Delta f = 0 \Leftrightarrow f$ est cst.

Mais sur 2 comp. connexes, les valeurs sont indépendantes/arbitraires.

Cela donne que la dimension de toute fonction localement constante est égale au nombre de comp. connexe.

$\dim V = \dim \{ f \mid \Delta f = 0 \} = \dim \{ f \mid f$ est cst sur chaque comp. connexe $\} = \#$ comp. connexe

$\dim \{ f \mid f$ est cst sur chaque comp. connexe $\} = \dim \{ f_i$ cst sur un K_i comp connexe $\}$

généré par f_i

$\blacksquare$

La Trace du Laplacien :

Prop : Soit X un graphe fini ($|VX| = n$). Supposons que X n'a pas de boucles, c-à-d $\forall e \in EX \quad o(e) \neq t(e)$. Alors :

$$\operatorname{tr} \Delta = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} = \sum_{v \in VX} \deg v = |EX|$$

Démo : On sait que $\Delta = D - A$

Comme il n'y a pas de boucle $\Rightarrow \operatorname{diag} A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

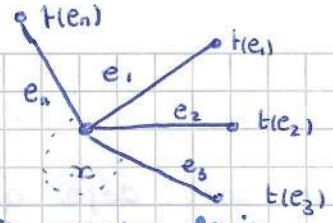
Comme la trace est la somme des coeffs diagonaux, nous avons $\operatorname{tr} \Delta = \operatorname{tr} D = \lambda_0 + \dots + \lambda_{n-1}$.

La somme des degrés comptes chaque arrête 2 fois, mais c'est la définition de EX.

$\blacksquare$

Rem : Comment change la formule si on admet les boucles ?

le 23.03.20



Rap: $\Delta f(x) = \sum_{e : o(e) = x} f(x) - f(t(e))$

Pour l'instant, nous considérons plutôt graphes finis.

Nous avons montré que :

- La multiplicité de 0 dans le spectre est le # de comp. connexe.
- Soit X un graphe fini. Supposer que X n'a pas de boucles.

  Alors $\operatorname{tr} \Delta = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} = \sum_{v \in VX} \deg v = |EX|$

Cor: Toute les valeurs propres sont 0 $\Leftrightarrow$ le graphe n'a pas d'arrêtes
$(0 = |EX|)$

Cor: Soit X un graphe sur n sommets. Soient les valeurs propres du laplacien $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots \leq \lambda_{n-1}$. Alors

$$\lambda_1 \leq \frac{|EX|}{n-1} \quad \text{et} \quad \lambda_{n-1} \geq \frac{|EX|}{n-1}$$

Pv: La proposition dit (comme $\lambda_0 = 0$) $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = |EX|$

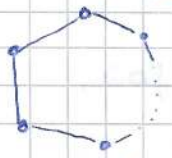
Maintenant, $\lambda_1 \leq \lambda_k \ \forall k > 0$ et $\lambda_{n-1} \geq \lambda_k \ \forall k$ donc

$(n-1)\lambda_{n-1} \geq \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = |EX|$ et $(n-1)\lambda_1 \leq \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = |EX|$ ∎

Ex: Pour le graphe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous avons les val. propres

$\mu_k = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ [Noter que ils ne sont pas ordré de la même manière. La plus petite est $k=1$

$4\sin^2(\pi/n) \approx 4\pi^2/n^2 \approx 36/n^2 < \frac{|EX|}{n-1} = \frac{2n}{n-1} \approx 2$]



Les approximations marchent bien si n est grand.

Pour n petit, on fait un calcul précis pour voir la vérité du corollaire : Soit $n = 3$

6 arrêtes

$\lambda_0 = 0$, $\lambda_i = 4\sin^2(\pi/3) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 = 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $i = 1, 2$

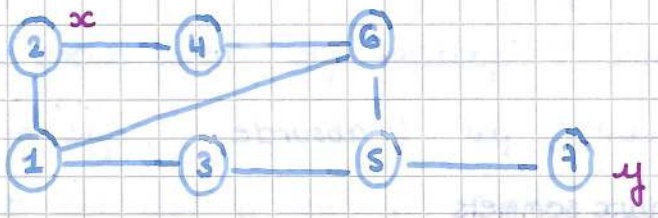
Noter que $\frac{|EX|}{n-1} = \frac{6}{2} = 3$ ok.

Graphes :

Le Diamètre :

Déf : Le diamètre d'un graphe X est $\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in VX} d(x,y)$ où $d(x,y)$ est la longueur minimale sur tous les chemins $x \to y$.

Ex :



diamètre = 4

Rem : Si le graphe n'est pas connexe, alors $\operatorname{diam} X = \infty$

Prop : Supposons que $\operatorname{diam} X = N < \infty$. Alors la matrice A a au moins $N+1$ valeurs propres distinctes.

Cor : Si A a (exactement / au plus) m val. propres distinctes alors $\operatorname{diam} X \leq m-1$ ou $\operatorname{diam} X = \infty$

Rem : Est-ce que nous pouvons trouver ce que cela veut dire pour Δ.

Pv : de la prop.

Soient $c_1, \dots, c_m$ les m val. propres distinctes de A. Alors

$$(A - c_1 I)(A - c_2 I) \dots (A - c_m I) = 0$$

$$= A^m + a_{m-1} A^{m+1} + \dots + a_0$$

Car A est une matrice symétrique, donc on peut la diagonaliser

$A = g \Lambda g^{-1}$ où Λ est diagonal : $\Lambda = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_m \end{pmatrix}$

Ça donne :

$$(A - c_1 I) \dots (A - c_m I) = (g \Lambda g^{-1} - c_1 I) \dots (g \Lambda g^{-1} - c_m I)$$

$$= g(\Lambda - c_1 I) g^{-1} g (\Lambda - c_2 I) g^{-1} \dots g(\Lambda - c_m I) g^{-1}$$

$$= g(\Lambda - c_1 I) \dots (\Lambda - c_m I) g^{-1} = g 0 g^{-1} = 0$$

Pour voir l'égalité pénultième, noter qu'il s'agit d'une multiplication de matrice de bloc, où chaque matrice contribue avec un bloc diagonal de zéro.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ & 0 \end{matrix}} & & \\ & c_2-c_1 & \\ & & c_3-c_1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1-c_2 & & \\ & c_1-c_2 & \\ & & \boxed{0} \\ & & & c_3-c_2 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1-c_3 & & \\ & c_1-c_3 & \\ & & c_2-c_3 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdots = 0 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \boxed{0} & & \\ \hline | & | & | & | & \cdots \end{array}\right)$$

Alors ça implique que A^m est une combinaison linéaire de $I, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ via l'équation que nous avons déduit.

Supposons maintenant, par l'**absurde**, que $m < N+1$.

On peut trouver **deux sommets** x et y tels que $d(x,y) = N$,

il n'y a pas de + court chemin que N

ça veut dire $A^k_{xy} = 0 \ \forall k < N$, mais $A^N_{xy} > 0$. $(*)$

Comme $m \leq N$, on peut multiplier l'égalité obtenue par A^L tel que $L + m = N$. On obtient donc une expression linéaire de A^N avec $A^L, A^{L+1}, \dots A^{N-1}$.

Mais ça contredit $(*)$ $\Rightarrow m > N$

$\blacksquare$

Ex : Supposer que le graphe n'a aucune arrête, donc $A = 0$, donc $\lambda_i = 0 \ \forall i$, donc $m = 0$ et la prop $\Rightarrow$ $\operatorname{diam} X = 0$ $(\forall X = \{x\})$ ou $\operatorname{diam} X = \infty$.

Rem : La même chose est vraie pour le Laplacien.

$\Delta = D - A$ et $\Delta^k = (-1)^k A^k + \dots$

Donc on a $\Delta^N_{xy} \neq 0$ mais $\Delta^k_{xy} = 0 \ \forall k < N$

même argument.

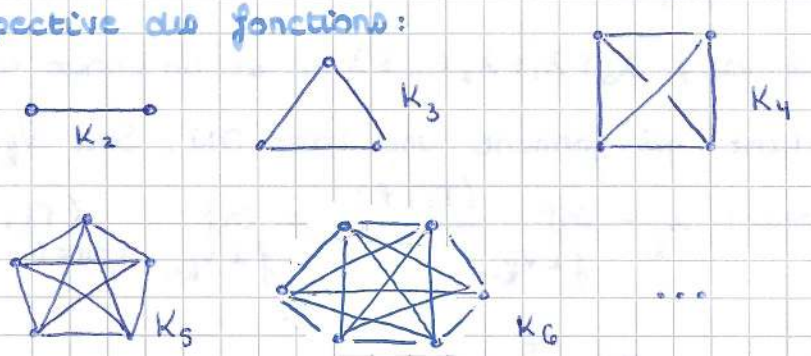
Graphes :

Ex : K_n les graphes complets

Comme tous les sommets sont liés, $\operatorname{diam} K_n = 1$.

Pour comparaison, regardon le spectre du Laplacien.

Perspective des fonctions :



On a

$$\Delta = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & & \\ -1 & & n-1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & n-1 \end{pmatrix}$$

On sait que une val. p. est 0, le vect. p. correspondant est la fonction constante ($L(x) = 1 \quad \forall x \in VK_n$)

Donc on cherche des fonctions propres f qui sont orthogonales à $L(x)$: $\sum_{x \in VK_n} f(x) = 0 = \langle f, L \rangle$

On calcul avec ces f :

$$\Delta f(x) = \overset{\text{degré}}{(n-1)} f(x) - \sum_{w \in VK_n,\, w \neq x} \overset{\text{voisins}}{f(w)} = (n-1) f(x) + f(x) - \sum_{w \in VK_n} f(w)$$

$$= n f(x) - 0 = n f(x).$$

c-à-d : $\Delta f(x) = n f(x)$

$\Rightarrow$ chaque f orthogonalle à $L(x)$ est fonction propre avec valeur propre n.

Donc le spectre de K_n est $\{0, n\}$, donc $m = 2$ et $2 > \operatorname{diam}(K_n) = 1$.

Le diamètre et la première valeur propre :

Fait d'algèbre linéaire, le quotient de Rayleigh.

Si T est une matrice symétrique, nous avons une base ON (orthonormale) de vecteurs propres.

Prop : Soient les val. p. $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ et un choix de vect. p. correspondant qui forment une base ON. Soit $V_k = \text{span}\{v_0, \dots, v_k\}$

Nous avons : $\lambda_k = \inf\limits_{f \perp V_{k-1}} \dfrac{(Tf, f)}{(f, f)} = \inf\limits_{f \perp V_{k-1},\, \|f\| = 1} (Tf, f)$

Pv : $f = \sum_i f_i v_i$ et $Tf = \sum_i \lambda_i f_i v_i$

la condition $f \perp V_{k-1} \Rightarrow f_0 = f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$

Après $\langle Tf, f \rangle = \sum \lambda_i f_i^2 \geq \lambda_k \|f\|^2$ et on peut minimiser avec $f = v_k$ ∎

Thm : Soit X un graphe fini. Soit λ_1 la plus petite val. propre > 0 de Δ. Alors $\lambda_1 \geq \dfrac{1}{\text{diam}\, X \cdot |VX|}$

Ex : $X = K_n$, $\text{diam}\, X = 1$, $\lambda_1 = n$, $|VK_n| = n$ ok $\left(n \geq \frac{1}{n}\right)$

Ex : $X = \text{Cycle}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $|VC_n| = n$, $\text{diam}\, X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ entier

et $\lambda_1 = 4\sin^2 \frac{\pi}{n} \approx 4 \frac{\pi^2}{n^2}$ $\left(\frac{36}{n^2} > \frac{2}{n^2} \right)$

Pv : D'abord, si X n'est pas connexe, $\lambda_1 = 0$ et $\text{diam}\, X = \infty$ ok

Donc on suppose $\text{diam}\, X < \infty$.

Soit $f : VX \to \mathbb{C}$ telle que $(\Delta f, f) = (f, f)$ et $f \perp \text{cst}$.

(c-à-d : $\sum f(v) = 0$)

Soit $v_0 \in VX$ tq $|f(v_0)| = \max\limits_{v \in VX} |f(v)| > 0$

Aff : $\exists\, u_0$ tq $f(u_0) \cdot f(v_0) < 0$. (Signe opposé)

Sinon ce n'est pas possible que $\sum f(v) = 0$.

Graphes :

Soit P le chemin le plus court entre u_0 et v_0

Par définition du diamètre, nous avons $L := d(u_0, v_0) \leq \operatorname{diam} X$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_1 (f, f)}{(f, f)} = \frac{(\lambda_1 f, f)}{(f, f)} = \frac{(\Delta f, f)}{(f, f)} = \frac{(df, df)_{EX}}{(f, f)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_e (f(t(e)) - f(o(e)))^2}{\sum_v f(v)^2} \geq \frac{\sum_{e \in P} (f(t(e)) - f(o(e)))^2}{\sum_v f(v)^2}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k))^2}{\sum_v f(v)^2} \geq \frac{\sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k))^2}{f(v_0)^2 \, |VX|}$$

Maintenant, Cauchy - Schwartz implique que :

$$\left(\sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k)) \cdot 1 \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k))^2 \cdot \sum_{k=1}^{L} 1$$

$$= \sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k))^2 \cdot L \leq \sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k))^2 \cdot \operatorname{diam} X$$

On applique la dernière inégalité à la première et on a :

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{k=1}^{L} (f(e_{k+1}) - f(e_k))^2}{\operatorname{diam} X \; f(v_0)^2 \, |VX|} = \frac{(f(o(e_1)) - f(o(e_2)) + f(o(e_2)) - \dots - f(t(e_L)))^2}{\operatorname{diam} X \; f(v_0)^2 \, |VX|}$$

$$= \frac{(f(u_0) - f(v_0))^2}{\operatorname{diam} X \; f(v_0)^2 \, |VX|} \geq \frac{f(v_0)^2}{f(v_0)^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{diam} X \, |VX|} = \frac{1}{\operatorname{diam} X \cdot |VX|}$$

Noter comme nous avons utiliser que le signe est opposé pour les 2 valeurs de f. ∎

VIII. Lambda 1 et connectivité / expansion :

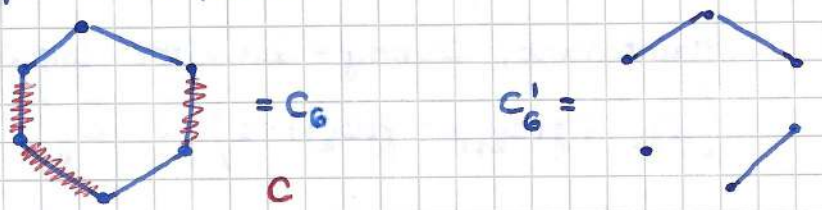
1. Introduction :

Virgile, Énéide, livre 1 : Didon et Carthage

2. Coupes :

Déf : Soit $X = (VX, EX)$ un graphe. Une coupe est un ss-ens C de EX tq $X' = (VX, EX \setminus (C \cup \bar{C}))$ n'est pas connexe.

Ex : C_n graphe cyclique de n points



Noter que dans cet exemple, la taille min de C est 2.

Déf : Coupe(X) = le + petit # arrêtes dans une coupe

Ex : Coupe$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 2$

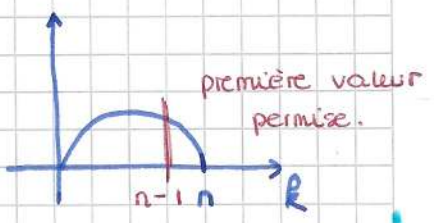
Ex : Coupe$(K_n) = n-1$

Dém : Supposons qu'après une coupe optimale une composante à k éléments et l'autre $n-k$, sans perdre de généralité supposons $k > n/2$

Combien d'arrêtes sont éliminées ?

$k(n-k) = kn - k^2$

Qui est minimal pour $k = n-1$



Graphes :

Rem : C'est clair que pour réseaux de communication X, on aimerait un grand Coupe(X) [K_n a le + grand]

D'autre part, on aimerait ça avec un petit $|EX|$ car c'est cher de construire un lien entre 2 sommets.

⇒ Problème important : (Maths et info)

Donné $\# VX = n$, k-régulier, comment construire X, c-à-d comment choisir EX tq Coupe(X) est grand au le + grand possible ?

- Si on prend EX par hasard, on est pas mal ...
- Cevaux ?
- Margulis 1973 utilise la théorie de représentation des groupes
- Beaucoup de progrès récent.

Noter que c'est relié au problème de Didon.

Déf : Soit $A \subset VX$, la frontière de A est $\partial A = \{ e \in EX \mid o(e) \in A \text{ et } t(e) \in VX \setminus A \}$

Ex :

Déf : Equivalente avec fonctions :

Soit $\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$, alors $d\chi_A(e) = \chi_A(t(e)) - \chi_A(o(e))$.

Donc $\partial A = \{ e \in EX \mid d\chi_A(e) < 0 \}$

Rem : ∂A est une coupe de X

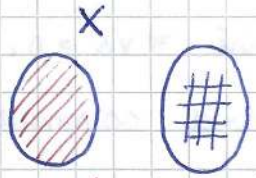
3. La constante de Cheeger :

Déf : Soit X un graphe fini. La cst (isopérimétrique) de Cheeger est

$$h(X) = \inf_{\emptyset \neq A \subset VX} \frac{|\partial A|}{\min\{|A|; |VX \setminus A|\}} \left(= \inf_{0 < |A| \leq \frac{|VX|}{2}} \frac{|\partial A|}{|A|} \right)$$

Objectif : Maximiser h, par exemple pour des graphes n-réguliers sur n sommets.

Rem : $h(X) = 0 \iff X$ pas connexe



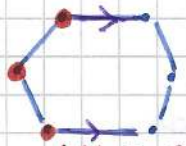
$A \quad \partial A = \emptyset \Rightarrow h(X) = 0$

Donc h est une mesure de connexité.

Ex : $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = C_n \quad n$ pair

$$h(X) = \frac{2}{n/2} = 4/n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

C_6



$\partial A = 2$

$|A| = 3 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Ex : Graphes de Margulis (1973)

$VX_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Les voisins de (x, y) sont : $(x \pm 2y, y)$, $(x \pm (2y+1), y)$

$(x, y \pm 2x)$, $(x, y \pm (2x+1))$

8 - réguliers.

C'est le graphe de Schreier de $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \rtimes SL_2\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \boxed{SL_2} & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déf : Une suite de graphe k-régulier X_n tq $\# VX_n \longrightarrow \infty$ est un graphe expanseur si $\exists c > 0$ tq $h(X_n) > c \quad \forall n \geq 1$

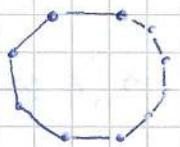
- Existe "par hasard"
- Premier Exemple : Margulis
- Beaucoup travaux, jusqu'à aujourd'hui

Graphes :

Thm : Soient X un graphe fini, $\Theta(A) = \frac{|\partial A|}{|A|}$ et $\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\lambda_0}} \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ les val. p. de Δ. Alors $\forall S \subset VX$ on a $\Theta(S) \geq \lambda_1 \left(1 - \frac{|S|}{|VX|}\right)$

en particulier, $h \geq \frac{\lambda_1}{2}$

Ex :

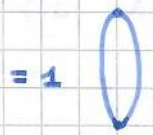


$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n pair.

On a vu $h = 4/n$ et $\lambda_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \approx \frac{4\pi^2}{n^2}$

Ok pour n grand.

$n = 2$: $h = 2$ et $\lambda_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ $\#S = 1$



ok avec théorème ! $\left[2/1 \geq 4(1 - 1/2)\right]$

Dém : On a $\lambda_1 = \min\limits_{f \perp \mathbb{1}} \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\langle f, f \rangle}$ (Rayleigh)

$\longrightarrow$ ss-esp. des fonctions cst.

Donc $\forall f \perp \mathbb{1} : \langle \Delta f, f \rangle \underset{*}{\geq} \lambda_1 \langle f, f \rangle$

Quel f appliquer ? $f(x) := \chi_S(x)$?

$\langle \Delta \chi_S, \chi_S \rangle = \langle d\chi_S, d\chi_S \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in EX} \left(\chi_S(t(e)) - \chi_S(o(e))\right)^2$

$= |\partial S|$.

Mais χ_S n'est pas orthogonale à $\mathbb{1}$, les fonctions constantes

Soit $s = \frac{|S|}{|VX|}$ et soit $f(x) = \chi_S(x) - s$.

Maintenant, $\langle \chi_S(x) - s\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle \chi_S(x), \mathbb{1} \rangle - \langle s\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle$

$= |S| - s \cdot |VX| = |S| - |S| = 0$ ok !

Alors, encore, $\langle \Delta f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in EX} \left(\chi_S(t(e)) - s - (\chi_S(o(e)) - s)\right)^2$

$= |\partial S|$

Et $\langle f, f \rangle = \sum_{v \in VX} (\chi_S(v) - s)^2 = \sum_v \left(\chi_S(v)^2 - 2\chi_S(v) \cdot s + s^2\right)$

$= |S| - \frac{2|S|^2}{|VX|} + \frac{|S|^2}{|VX|^2} |VX| = \underline{|S|(1 - s)}$

Donc $|\partial S| \geq \lambda_1 |S| \left(1 - \frac{|S|}{|VX|}\right) \Leftrightarrow \Theta(S) \geq \lambda_1 \left(1 - \frac{|S|}{|VX|}\right)$

et $h = \inf\limits_{0 < |S| \leq \frac{|VX|}{2}} \Theta(S) \Rightarrow h \geq \lambda_1 (1 - 1/2) = \frac{\lambda_1}{2}$ ∎

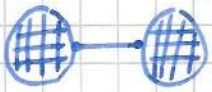
Remarque :

Si λ_1 est grand, alors h aussi, donc X est bien connexe.

Donc λ_1 grand est une bonne chose.

Noter que le thm $\Rightarrow$ (X pas connexe $\Rightarrow h = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$)

ZOOM : (31.03.20)

X  graphe pas très connexe. (seulement 1 coupe)

$L^2 \geq 4\pi \cdot A$

le 07.04.20

Thm : Inégalité de Cheeger (Dodziuk - Alon)

Soit X un graphe fini, avec $m := \max\limits_{x \in VX} \deg x$. Alors

$\lambda_1 \geq h^2/2m$

où λ_1 est la plus petite val. propre non-triviale de Δ

et h est la constante isopérimétrique

Donc h et λ_1 sont équivalent dans un sens, par exemple :

pour une suite de graphe $h \to 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \to 0$

Ex :

$\lambda_1 = 4 \quad h = 2$

$m = 2 \qquad \lambda_1 = 4 \geq \frac{2^2}{2 \cdot 2} = 1$

Graphes :

Dém : Soit $g \in L^2(VX, \mathbb{R})$ t.q. $\sum_{v \in VX} g(v) = 0$ (c-à-d : $g \perp \mathbb{1}$)

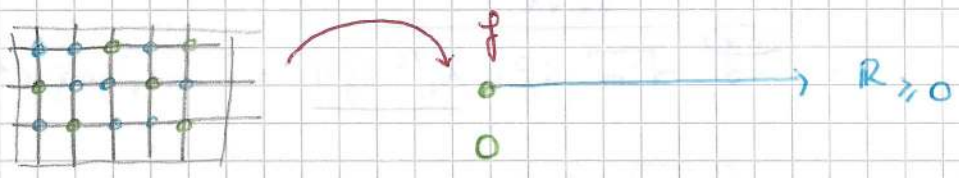
et avec $\Delta g = \lambda_1 g$ et en plus $\|g\| = 1$.

Donc $\lambda_1 = \lambda_1 (g, g) = (\lambda_1 g, g) = (\Delta g, g) = (dg, dg)_{L^2_a(EX)}$

Soit $V^+ = \{ v \in VX \mid g(v) > 0 \}$ et $f(v) := \begin{cases} g(v) & \text{si } v \in V^+ \\ 0 & \text{sinon } (v \in V^- = VX \setminus V^+) \end{cases}$

En vue que on peut toujours remplacer g par $-g$,

on peut supposer que $|V^+| \leq \frac{1}{2} |VX|$.



Alors $(df, df) = (f, \Delta f) = \sum_{v \in VX} \Big(f(v) \cdot \sum_{\substack{e^- = v \\ e^+ = u \\ e \in EX}} f(v) - f(u) \Big)$

$= \sum_{v \in V^+} \Big(g(v) \cdot \sum_{e \in EX, e^- = v, e^+ = u} g(v) - f(u) \Big)$

compense la différence entre $f(u)$ et $g(u)$ si $u \in V^-$

$\star = \sum_{v \in V^+} \Big(g(v) \cdot \sum_{e^- = v, e^+ = u} g(v) - g(u) \Big) + \sum_{v \in V^+} \Big(g(v) \cdot \sum_{e^- = v, e^+ = u, u \in V^-} g(u) \Big)$

Notons que $\sum_{v \in V^+} \Big(\underbrace{g(v)}_{>0} \cdot \underbrace{\sum_{u \in V^-} g(u)}_{<0} \Big) < 0$

Donc $\star \leq \sum_{v \in V^+} \Big(g(v) \cdot \sum_{e^- = v, e^+ = u} g(v) - g(u) \Big) = \sum_{v \in V^+} g(v) \Delta g(v)$

$= \sum_{v \in V^+} g(v) \lambda_1 g(v) = \lambda_1 \sum_{v \in V^+} f(v)^2 = \lambda_1 (f, f)$

Alors $(df, df) \leq \lambda_1 (f, f)$ (**)

Soit $c = \frac{1}{2} \sum_{e \in EX} \underbrace{| f^2(e^+) - f^2(e^-) |}_{| (f(e^+) - f(e^-))(f(e^+) + f(e^-)) |} \leq$

Cauchy-Schwarz

$\leq \Big(\frac{1}{2} \sum_e (f(e^+) + f(e^-))^2 \Big)^{1/2} \cdot \Big(\frac{1}{2} \sum_e (f(e^+) - f(e^-))^2 \Big)^{1/2}$ (***)

Notons que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

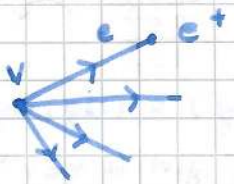
$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

Alors (***) $\leq \left(\frac{1}{2}\sum_e 2\left(f(e^+)^2 + f(e^-)^2\right)\right)^{1/2} \cdot (df, df)^{1/2}$

$$= \underline{\left(\sum_e f(e^+)^2 + f(e^-)^2\right)}^{1/2} \, \|df\|_{L^2(EX)}$$



$\deg v \leq m$

$\forall v \in VX$ v peut paraître au maximum $2m$ fois ($v = e^+$ ou $v = e^-$)

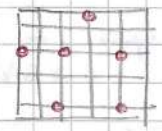
Donc (***) $\leq \underline{\left(2m \sum_{v \in VX} f(v)^2\right)}^{1/2} \underline{\|df\|}_{L^2(EX)}$

(**) $\leq \sqrt{2m}\, \|f\| \underline{\lambda_1^{1/2} \|f\|} = \sqrt{2m\lambda_1}\, \|f\|^2$

Donc $C \leq \sqrt{2m\lambda_1}\, \|f\|^2$

D'autres part, soient $0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n$ les valeurs de f (X est fini).

Définir $L_i = \{x \in VX \mid f(x) \geq \beta_i\}$



L_i

Donc $VX \underset{f \geq 0}{=} L_0 \supset \underset{V^+}{L_1} \supset L_2 \supset \dots \supset L_n$

Comme $|V^+| \leq \frac{1}{2}|VX|$, on a $|L_i| \leq \frac{1}{2}|VX|$ $\forall i \geq 1$

(Donc on peut appliquer la déf de h avec ces ss-ensembles)

Avec ça : $c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in EX,\, f(e^-) \geq \beta_i,\, f(e^+) < \beta_i} f(e^-)^2 - f(e^+)^2$

Notons que $f(e^-)^2 - f(e^+)^2 = \beta_i^2 - f(e^+)^2 > 0$

Les arêtes paraissent que avec une orientation et quand $f(e^-) = f(e^+)$ alors le terme est 0.

télescopique

Si $f(x) = \beta_i$ et $f(y) = \beta_{i-j}$, alors

$$f(x)^2 - f(y)^2 = \beta_i^2 - \beta_{i-j}^2 = (\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2) + (\beta_{i-1}^2 - \beta_{i-2}^2) + \dots + (\beta_{i-j+1}^2 - \beta_{i-j}^2)$$

Graphes :

Du coup, $c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in \partial L_i} \beta_i^2 - \beta_{i-1}^2$. (Affirmation)

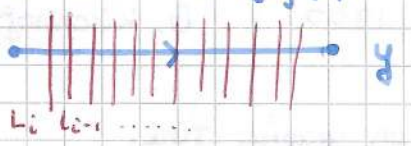
Pour voir ça :

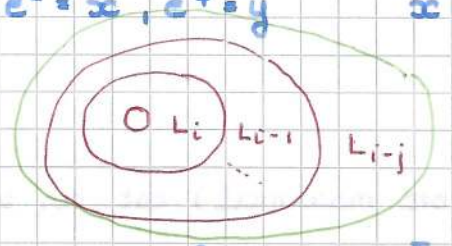
Si $x \longrightarrow y$, $f(x) = \beta_i$, $f(y) = \beta_{i-j}$

Donc $x \in L_{i-k}$ $\forall k \geq 0$, $y \notin L_{i-k}$ $0 \leq k < j$

et alors $e \in \partial L_i \cap \partial L_{i-1} \cap \dots \cap \partial L_{i-j+1}$

$e^- = x$, $e^+ = y$





Donc $f(x)^2 - f(y)^2 = \sum_{k \text{ tq } e \in \partial L_k} \beta_k^2 - \beta_{k-1}^2 =$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{e \in \partial L_k} \beta_k^2 - \beta_{k-1}^2$.

Et donc $c = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{e \in \partial L_k \\ e \in EX}} \beta_k^2 - \beta_{k-1}^2$ déf de h $\leq \frac{|\partial A|}{|A|}$

$= \sum_{k=1}^{n} |\partial L_k| (\beta_k^2 - \beta_{k-1})^2 \geq h \sum_{k=1}^{n} |L_k| (\beta_k^2 - \beta_{k-1}^2)$

$= h \left(|L_n| \beta_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^2 (|L_k| - |L_{k+1}|) \right)$

$= h(f, f)$ car $x \in L_k \setminus L_{k+1} \Leftrightarrow f(x) = \beta_k$

Donc $\sqrt{2m\lambda_1}\,(f, f) \geq c \geq h(f, f)$

$\Rightarrow \lambda_1 \geq \frac{h^2}{2m}$ ∎

Ex : graphes complets K_n

On a vu : $\lambda_1 = n$ et $h = n-1$ et $m = n-1$

K_4

$\lambda_1 = n \geq \frac{(n-1)^2}{2(n-1)} = \frac{n-1}{2}$

$\Leftrightarrow n \geq -1$ ok

IX. Arbres Couvrants et dét(Δ) :

1. Introduction :

Théorie des graphes :

18e : Euler, Ponts de Königsberg

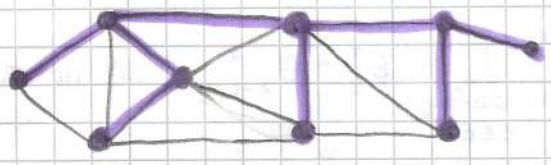
19e : Cayley, Sylvester : Chemistry "graphes"

1850 : G. Kirchhoff électricité

Soit X un graphe fini.

Déf : Un arbre couvrant (ou arbre maximal) est un sous-graphe de X qui est un arbre avec sommets VX en entier.

Ex :

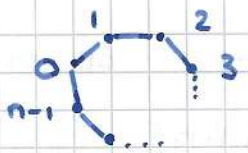


Kirchhoff : Remplacer chaque 1 ohm avec arrête

$$\frac{I_e}{I} = \frac{\#\text{ arbres couvrants contenant } e}{\#\text{ arbres couvrants}}$$

Déf : $\tau(X)$ = # arbres couvrants de X

" Complexité de X " (Nom dans la littérature)

Ex C_n = 

$\tau(C_n) = n$

= # manière d'éliminer 1 arrête.

Ex : (1860 Borchardt)

Cayley $\tau(K_n) = n^{n-2}$

$\tau(K_4) = 4^2 = 16$

= # arbres sur n sommets donnés

Graphes :

Ex : $\tau($ $) \approx 10'000$

Ex : $\tau(K_{50}) >$ # de particules dans l'univers

Problème inconnu :

Soit $k, n > 0$ quel graphe sur n sommets et k arrêtes a le plus d'arbres couvrants ?

Dans la théorie de communication, $\tau(X)$ est une mesure de fiabilité de réseau.

En plus, $\tau(X)$ est interessant pour :

électricité, physique stat., chimie, noeuds ...

Mais comment calculer $\tau(X)$?

2. Matrix-Tree formula, dét(Δ) :

Soit X un graphe fini, sur n sommets avec val. propres de Δ

$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$

Déf : $\text{Dét}'\Delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}$

Nous savons : $\text{dét}'\Delta > 0 \Leftrightarrow X$ connexe

Ex : $X = \bullet \quad \lambda_0 = 0$

$\text{dét}'\Delta_X = \prod_{\text{vide}} \lambda = 1$

Ex : C_n

$$\text{dét}'(\Delta) = 4 \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

Thm : Kirchhoff

On a que $\tau(X) = \dfrac{\det'(\Delta)}{|VX|}$

(déjà vu avec preuve à la série 5)

Ex : C_n, donc $\frac{4}{n}\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n$ Pas Trivial !

Ex : Cayley - Borchardt

$\tau(K_n) = n^{n-2}$

Rappel : $\lambda_0 = 0$ et $\lambda = n$

Donc $\tau(K_n) = \dfrac{n^{n-1}}{n} = n^{n-2}$ ok.

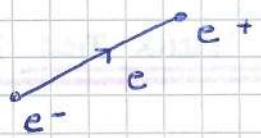
Déf : La matrice d'incidence de X est une matrice de taille $|VX| \cdot \frac{|EX|}{2}$.

$N = \begin{array}{c} \\ VX \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow Ex \\ \left(\quad \right) \end{array}$

On choisit EX^+ une orientation arbitraire. $N := (\delta(x,e))_{\substack{x \in VX \\ e \in EX^+}}$

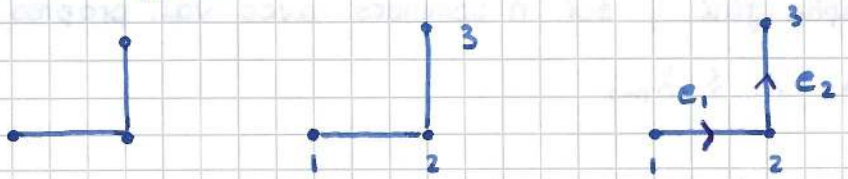
$$\delta(x,e) = \begin{cases} 1 & x = e^+ \\ -1 & x = e^- \\ 0 & \text{sinon } (x = e^- = e^+) \end{cases}$$

$\mathcal{O}^x$ boucle



$N = (d\delta_x(e))$

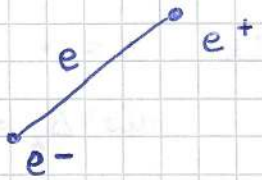
Ex :



$$N = \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Rap : $d : L^2(VX) \longrightarrow L^2_a(EX)$

$f \longmapsto df(e) = f(e^+) - f(e^-)$



Par restriction, on peut considérer $d : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\parallel}{L^2(VX)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\parallel}{L^2(EX^+)}}$

linéaire, donc d est une matrice.

$$\begin{array}{c} \\ Ex^+ \downarrow \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} VX \longrightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}}_{= N^t} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df(e_1) \\ df(e_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Donc $d \leftrightarrow N^t$

$N = (d\delta_x(e))$

Graphes :

Rap : $\Delta = d^* d$

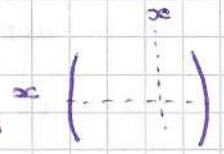
$(d^* F, g) = (F, dg)$ donc $d^* = (N^t)^t = N$

et $\Delta = N N^t$

Pv : On aimerai calculer $\det(\Delta)$. Mais c'est 0.

Il faut enlever $\lambda = 0$

$$\text{Dét}(\Delta - \lambda I) = \lambda^n - \dots - \underbrace{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-1}}_{\text{Dét}'(\Delta)} \lambda + 0$$



On peut voir que : $\det'(\Delta) = \underbrace{n}_{\#\text{ sommets}} \cdot \det \Delta^{\{x\}}$ (*) appendice dans le cours

où $\Delta^{\{x\}}$ est l'élimination du dernier rang et de la dernière colone de Δ dans Δ.

On rappel $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

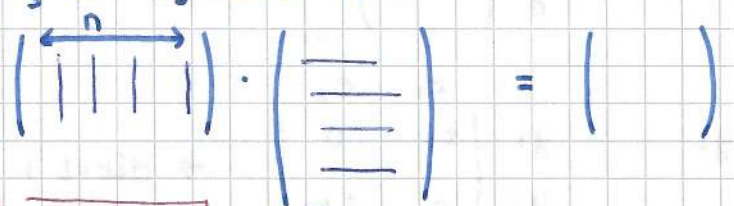
Donc $\det(\Delta^{\{x\}}) = \det(N_x) \det(N_x^t)$? NON

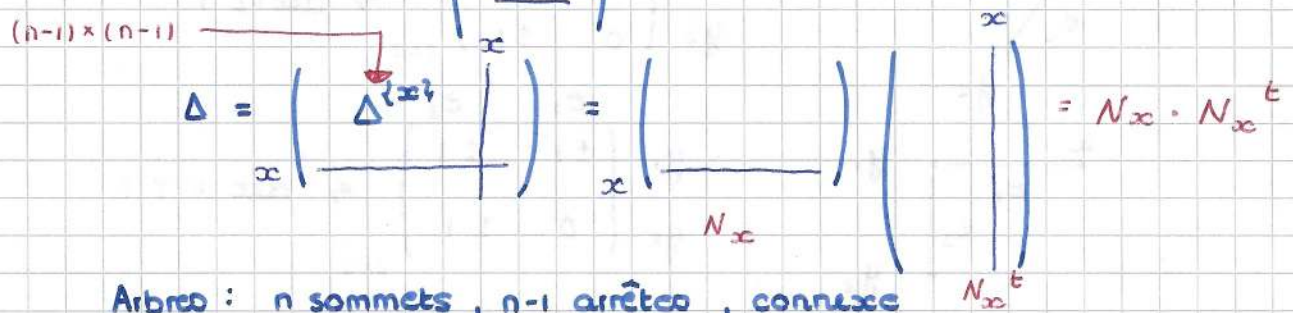
Mais, on a la formule de Cauchy - Binet pour n'importe quel A $n \times m$ et B $m \times n$ avec $m \geq n$ et le produit $A \cdot B$ $n \times n$

on a $\det(AB) = \sum_S \det(A_S) \det(B_S)$

où la somme est sur tous les choix de ss-ensembles rang/colonnes (lignes)

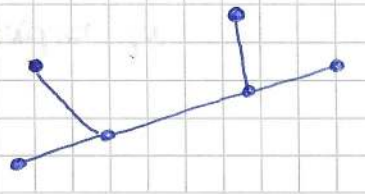
tq A_S et B_S sont $n \times n$





$= N_x \cdot N_x^t$

Arbres : n sommets, n-1 arrêtes, connexe



On va appliquer ça pour notre matrice Δ avec une ligne et une colonne éliminées, associé au sommet $x \in VX$.

$$\text{dét}(\Delta^{\{x\}}) = \sum_{S} \text{dét}(N_{x,S})\,\text{dét}(N^t_{x,S})$$

Choix de n-1 arêtes

$$= \sum_S \overbrace{\text{dét}(N_{x,S})}^{*}{}^2 = \tau(X)$$

dét = 0 $\Leftrightarrow$ pas connexe

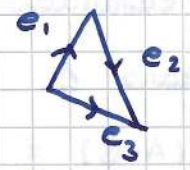
et si connexe = ± 1

$$* = \begin{cases} 0 & S \text{ pas arbre} \\ \pm 1 & S \text{ arbre} \end{cases}$$

On montre que $\text{dét}\, N_{x,S} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } S \text{ est un arbre} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$N_{x,S} = \downarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert & \vert & 1 & -1 & \\ & & & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & -1 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



cycle

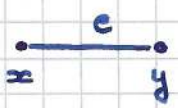
Peut être multiplié avec (-1)

On peut sommer les colonnes correspondant à un cycle

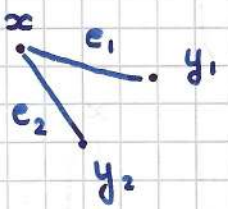
$\Rightarrow$ colonne $= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ le déterminant est 0. [Donc cycle $\Rightarrow$ dét = 0]

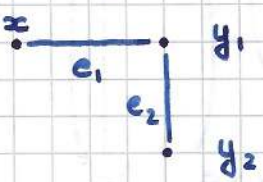
Arbres :



$$\begin{array}{c|c} & e \\ \hline y & \pm 1 \end{array}_{1\times 1} \Rightarrow \text{dét} = \pm 1$$



$$\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline y_1 & \pm 1 & 0 \\ y_2 & 0 & \pm 1 \end{array}_{2\times 2} \Rightarrow \text{dét} = \pm 1$$



$$\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline y_1 & \pm 1 & \pm 1 \\ y_2 & 0 & \pm 1 \end{array}_{2\times 2} \Rightarrow \text{dét} = \pm 1$$

le 20.04.20

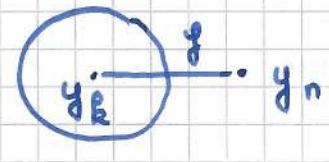
Graphes :

Par récurrence, on suppose ok pour n-1 sommets.

$$\begin{array}{c} y_k \\ \\ y_n \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} A \\ (n-1)\times(n-1) \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 \dots 0 & \pm 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \det\left(\begin{pmatrix} A & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\right) = (\pm 1)^n \det A = \pm 1$$

ok

[Donc arbre $\Rightarrow$ dét $= \pm 1$]



$$\text{Donc dét } N_{x,s} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } S \text{ est un arbre} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \tau(X) = \sum_s (\det N_{xs})^2$$
$$= \det \Delta^{\{x\}} = \frac{\det' \Delta}{|V\times|} = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{n}$$

■

le 28.04.20

X. Le Paradoxe de Braess :

1. Introduction :

Circulation de véhicules :

Il peut arriver que par la fermeture d'une route, la circulation s'améliore.

Ex : New York City, 42nd Street

Seoul, fermeture d'une auto-route

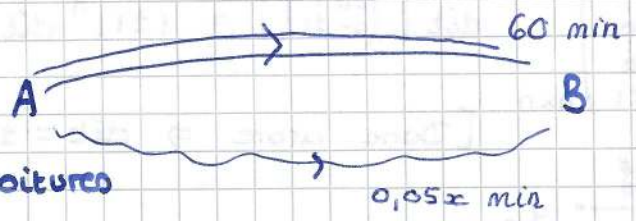
Découvert en 1969 par Braess.

Utile pour d'autres types de traffic :

- Internet
- Communication
- électricité
- ...

2. Égoïste vs social :

A.C. Pigou, économiste 1920 :



1'000 voitures

Auto-route : 60 minutes

Petite route : $0{,}05x$ minutes où x = # voitures sur la route

Comme le temps est au plus $1'000 \cdot 0{,}05 = 50$ min sur la petite route, toutes les voitures vont la prendre.

$\Rightarrow$ temps pour chaque voiture = 50 minutes.

Maintenant, imaginons que certains sont obligés de prendre l'auto-route. P. ex : 500 voitures.

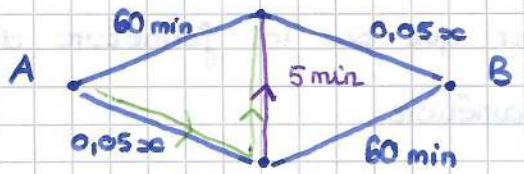
Quel est le temps moyen ?

$$\text{temps moyen} = \frac{500 \cdot 60 + 500 \cdot 0{,}05 \cdot 500}{1000} = 42{,}5 \text{ min}$$

Conclusion : Solution égoïste = 50 min

Solution sociale = 42,5 min

Ex :



Les 2 chemins possibles sont équivalents donc 500 en haut, 500 en bas et le temps = 85 minutes.

On construit • une auto-route connectrice

Noter que le chemin vert (•) est au plus 55 minutes.

Donc tout le monde le prend donc temps = 105 minutes

Paradoxal ? Non, ça montre juste que l'égoïsme est moins bien que le social, car un "dictateur" peut dire à tout le monde de ne pas prendre •

Graphes :

3. Une Analyse :

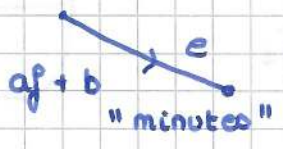
Soit $G = (VG, EG)$ un graphe orienté.

Alors, on a $EG = EG^+ \sqcup EG^-$

Modèle simple de circulation :

Pour chaque route ($\forall e \in EG^+$) le temps d'un véhicule est donné par $af + b$

où $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ cst et f est le flux (= # véhicules)



(équivalent :

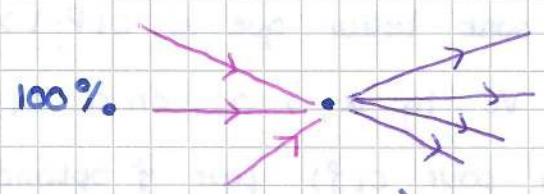
)

Trafique total = 1 (au lieu de 1'000 voitures)

Le coût : $c_e(f) = a_e f(e) + b_e$ (au lieu de minutes)

Flux : $f : EG^+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

Doit respecter la loi de Kirchhoff

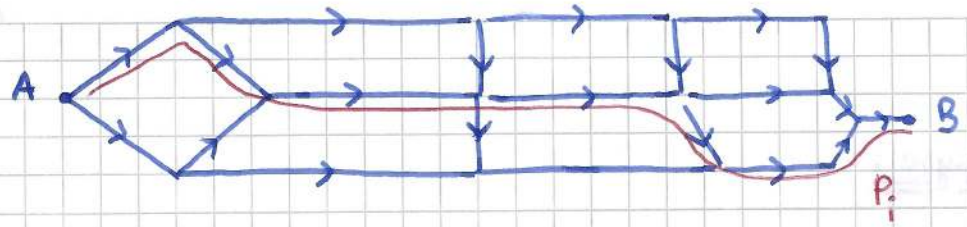


(tout ce qui entre, ressort)

Si on prolonge f a EG, naturellement $f(\bar{e}) = -f(e)$

Noter que Kirchhoff $\Leftrightarrow$ $d^* f(x) = 0 \quad \forall x \in VG$

Rap : $$d^* f(x) = \sum_{\substack{e \in EG \\ e^+ = x}} f(e)$$



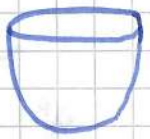
L'ensemble des chemins $A \to B$ est $P_1, P_2, \dots, P_k$ (fini)

Soit α_i, la fraction du trafique sur P_i, donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$

Rem : Ce n'est pas unique, avec f donné

Le coût total est :

$$\sum_{e \in EG^+} c_e(f_e) f_e = \sum_{e \in EG^+} a_e f_e^2 + b_e f_e$$



C'est une fonction convexe dans f_e

avec condition Kirchhoff.

$\Rightarrow \exists$ un minimum global

Pas unique : voir 1er exemple du paradoxe de Braess

On a aussi que min locales sont min globaux

Optimum social = minimum global du coût total

Solutions égoïstes sont telles que si $c(P_j) > c(P_i)$ alors $\alpha_j = 0$

Autrement dit, $\forall i$ tq $\alpha_i > 0$, on a $c(P_i) \leq c(P_j)$ $\forall j$

On note $Opt(G)$ pour $c(f)$ pour f optimal social.

Prop : Soit G graphe orienté avec $c(e) = a_e x + b_e$ et $A \to B$.
Soit $\tilde{G}$ même graphe mais avec $\tilde{c}(e) = 2a_e x + b_e$. Alors
flux f est optimal pour $G \Leftrightarrow f$ est sol. égoïste de $\tilde{G}$

Pv : Soit f un flux pour G. Soient $P_1, P_2, \dots, P_k$ les chemins possibles $A \to B$. Les chemins ont les fractions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (un choix) compatible avec f.

À montrer : $\forall i$ tel que $\alpha_i > 0$, on a $\tilde{c}(P_i) \leq \tilde{c}(P_j)$ $\forall j$

Graphes :

$\{\alpha_i\}$ est optimal $\Leftrightarrow \frac{\partial c}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial c}{\partial \alpha_i} \geq 0 \quad \forall i$ tq $\alpha_i > 0$ et $\forall j$ $\quad (*)$

Intuitivement, si on diminue α_i ($\alpha_i > 0$) et augmente α_j, le coût doit augmenter (ou au moins pas diminuer)

Donc $(*)$, $c = \text{coût}(f) = c(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

On calcule la dérivée :

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha_j} = \sum_e \frac{\partial f(e) c_e(f(e))}{\partial \alpha_j} = \sum_{e \in P_j} \frac{\partial f(e) c_e(f(e))}{\partial \alpha_j}$$

$$= \sum_{e \in P_j} \frac{\partial (a_e f(e)^2 + b_e f(e))}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial f(e)}{\partial f(e)}$$

$$= \sum_{e \in P_j} \frac{\partial (a_e f(e)^2 + b_e f(e))}{\partial f(e)} \cdot \underbrace{\frac{\partial f(e)}{\partial \alpha_j}}_{=1}$$

Car $f(e) = \sum_k \alpha_k$ tq $e \in P_k$

Donc, $\frac{\partial c}{\partial \alpha_j} = \sum_{e \in P_j} 2a_e f(e) + b_e = \tilde{c}(P_j)$

Alors, f est égoïste pour $\tilde{G} \Leftrightarrow \tilde{c}(P_i) \leq \tilde{c}(P_j) \quad \forall i$ tq $\alpha_i > 0$ et $\forall j$

$\Leftrightarrow (*) \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha_j} \geq \frac{\partial c}{\partial \alpha_i} \quad \Leftrightarrow f$ est optimale pour G ∎

Cor : Toutes les solutions égoïstes ont le même coût total.

Pr : Car ils sont tous le min global du même problème ∎

Donc, on peut dénoter ce coût par $ego(G)$

Alors, donne G, avec modèle de circulation de ce type, nous avons $opt(G)$ et $ego(G)$

avec évidemment $opt(G) \leq ego(G)$

Thm : Avec modèle $c_e(x) = a_e x + b_e$.

Alors, $opt(G) \leq ego(G) \leq \frac{4}{3} opt(G)$

Pv : La première inégalité est évidente et on en a déjà discuté

Soit f une solution ego pour G.

On va définir un autre graphe :

Considérer $\hat{G}$ tq $V\hat{G} = VG$ et $E\hat{G}^+ = EG^+ \sqcup \{\hat{e} \mid e \in EG^+\}$

le coût pour $\hat{e}$ est type fixe : $c_{\hat{e}}(x) := c_e(f)$

Noter qu'avec flux $f(e)$ et $f(\hat{e}) = 0$ $\forall \hat{e}$, f reste sol. égoïste pour $\hat{G}$.

Parce que c'est vrai qu'on a plusieurs nouvelles routes possibles, mais aucune n'est mieux que les anciennes, celle de G.

Donc ego ok.

On va construire l'optimum social pour $\hat{G}$.

Soient $g(e) = \frac{1}{2} f(e)$, $g(\hat{e}) = \frac{1}{2} f(\hat{e})$

(Profitant des nouvelles possibilités)

Aff : g est optimal pour $\hat{G}$

Soient $\tilde{G}$ même graphe que $\hat{G}$, mais $\tilde{c}_e(x) = 2a_e x + b_e$, $\hat{c}_{\hat{e}}(x) = c_e(f(e))$.

Par la proposition, g est optimal pour $\hat{G}$ $\Leftrightarrow$ elle est égoïste pour $\tilde{G}$.

Pourquoi égo pour $\tilde{G}$?

Noter que $\tilde{c}_e(g(e)) = 2a_e \frac{f(e)}{2} + b_e = c_e(f(e))$

$\tilde{c}_{\hat{e}}(g(\hat{e})) = c_e(f(e))$

Donc g est égoïste pour $\tilde{G}$, car f est égoïste pour G.

Graphes :

On calcule :

$$\text{égo}(\hat{G}) = \sum_e f(e)\, c_e(f(e)) + \sum_{\hat{e}} \underbrace{f(\hat{e})}_{=0}\, c_{\hat{e}}(f(\hat{e}))$$

$$= \sum_e a_e f(e)^2 + b_e f(e)$$

$$\text{opt}(\hat{G}) = \sum_e g(e)\, c_e(g(e)) + \sum_{\hat{e}} g(\hat{e})\, c_{\hat{e}}(g(\hat{e}))$$

$$= \sum_e \tfrac{1}{2} f(e)\left(a_e \cdot \tfrac{1}{2} f(e) + b_e\right) + \tfrac{1}{2} f(e)\left(a_e f(e) + b_e\right)$$

$$= \sum_e \tfrac{3}{4} a_e f(e)^2 + b_e f(e) \geq \tfrac{3}{4} \sum \underbrace{a_e f(e)^2 + b(e)}_{= \text{égo}(\hat{G})}$$

Donc, $\text{égo}(G) = \text{égo}(\hat{G}) \leq \frac{4}{3}\,\text{opt}(\hat{G}) \leq \frac{4}{3}\,\text{opt}(G)$

car $\hat{G}$ a + de possibilités

$\blacksquare$

Cor : Soit G réseau comme avant. Soit $\overline{G}$ même réseau mais avec des arrêtes en plus. Alors $\text{ego}(\overline{G}) \leq \frac{4}{3}\,\text{ego}(G)$

Pv : $\text{ego}(G) \geq \text{opt}(G) \geq \text{opt}(\overline{G}) \geq \frac{3}{4}\,\text{ego}(\overline{G})$

$\blacksquare$

Donc le corollaire donne la possibilité du paradoxe de Braess qu'ajouter des arrêtes ne produit pas une amélioration.

Dans notre exemple, on avait $\text{ego}(G) = 85$ et $\text{ego}(\overline{G}) = 105$

$$105 = \frac{105}{85} \cdot 85 \simeq 1{,}24 \cdot 85 \leq 4/3 \cdot 85 \qquad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

Des investigations montrent que pour un réseau aléatoire, $\exists$ des arrêtes qu'on peut enlever pour améliorer la circulation.

Aussi dans des villes concrètes.

Q : Si on remplace des égoïstes avec un flux d'eau qui est naturel. Même phénomène, même paradoxe?

[lien à consulter]

La nature est égoïste ?

le 05.05.20

XI. Exemples de Graphes :

Introduction :

Cette semaine, j'ai pensé que ça peut être bien de voir un peu plus de graphes intéressant.

Jusqu'ici, on a souvent vu C_n et K_n et un peu des arbres.

Groupes finis abéliens :

Rap : Soit G un groupe abélien de cardinalité $n < \infty$.

Alors il y a $n < \infty$ caractères distincts (= rép. irréductibles) représentation

$\chi_0, \dots, \chi_{n-1}$.

Ils sont un système ON : $\langle \chi_k, \chi_m \rangle = \delta_{km}$ $\quad \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi_k(x) \overline{\chi_m(x)}$

$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ exponentielles ?

Ils forment une base de $L^2(G, \mathbb{C})$, c-à-d chaque $f : G \to \mathbb{C}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f_k}_{\text{coeff}} \underbrace{\chi_k(x)}_{\text{vecteurs}} \xrightarrow[|G|]{} \text{Fourier !}$$

Noter que $\dim(\overbrace{L^2(G, \mathbb{C})}^{\mathbb{C}}) = n$ (# de chaîne)

Ex : $\chi_0(x) = 1$

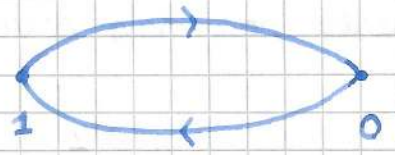
Rap : Si on choisit un ensemble S, on peut définir un graphe de Cayley $X = Cay(G, S)$ associé :

$$VX = G$$

$$EX^+ = \{[g, g+s] \mid g \in G, s \in S\}$$

Graphes :

Ex : $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $S = \{1\}$



Rem : Structure du graphe est la même chose qu'une matrice d'adjacence ou laplacien sur G.

Ces matrices sont symétriques, donc possèdent une base ON de vecteurs propres (dans cette base les matrices sont diagonales)

Caractères vs Vecteurs propres ? Fourier !

Ils sont les mêmes (sauf les caractères sont uniques, pas normalisés)

$$\Delta \underline{\underline{\chi(x)}} = \sum_{s \in S \cup S^{-1}} \chi(x) - \chi(x+s) = \sum \chi(x) - \chi(x)\chi(s)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{s \in S \cup S^{-1}} 1 - \chi(s) \right)}_{\lambda} \underline{\underline{\chi(x)}}$$

Pareil pour A.

Ex : $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

$\chi_k(x) = e^{2\pi i k x/n}$ $\qquad k = 0, 1, \dots, n-1$

Ex : $\chi_0(x) = 1$

Rem : Selon les classifications (Algèbre I) les groupes finis abéliens sont tous produits de groupes cycliques.

Ex : $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $\qquad \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$e^{\frac{2\pi i k_1 x_1}{n}}$ $\qquad e^{\frac{2\pi i k_2 x_2}{m}}$

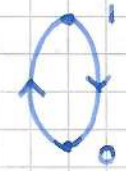
Les caractères sont les produits $\underline{\chi_{k_1}(x_1) \cdot \chi_{k_2}(x_2)}$, $0 \leq k_1 \leq n-1$, $0 \leq k_2 \leq m-1$

ou bien : $e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$ $\qquad y = \begin{pmatrix} k_1/n \\ k_2/m \end{pmatrix}$ $\qquad e^{2\pi i k_1 x_1/n} \cdot e^{2\pi i k_2 x_2/m}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ produit scalaire. $= \frac{k_1 x_1}{n} + \frac{k_2 x_2}{m}$

Rem: Parfois, on a un groupe cyclique mais c'est moins clair comment le representer comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nombres explicites. Par exemple, les éléments non-nuls d'un corps fini.

Ex: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $S = \{1\}$ $\qquad n = 2$



$$\chi_0(x) = 1$$
$$\chi_1(x) = e^{\pi i x} = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\Delta \chi_0 = 0 \cdot \chi_0$$

$$\Delta \chi_1(x) = \sum_{\substack{e,\, e^- = x \\ e^+ = y}} \chi_1(x) - \chi_1(y) = 2\chi_1(x) - \chi_1(x+1) - \chi_1(x-1)$$
$$= (2 - \chi_1(1) - \chi_1(-1))\, \chi_1(x)$$
$$= 4\chi_1(x)$$

$\Rightarrow$ Spect $\Delta = \{0, 4\}$

Une alternative : (dépend de la définition des arêtes)

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x+1)$$
$$\Delta \chi(x) = \chi(x) - \chi(x+1) = (1 - \chi(1))\, \chi(x)$$
$$\Rightarrow \lambda_0 = 0 \text{ et } \lambda_1 = 2$$

Ex:

Coordonées : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$

Vecteurs propres : $\chi_0 \cdot \chi_0$, $\chi_0 \cdot \chi_1$, $\chi_1 \cdot \chi_0$, $\chi_1 \cdot \chi_1$

$$\Delta \chi_i(x)\chi_j(y) = (\chi_i(x)\chi_j(y) - \chi_i(x+1)\chi_j(y)) + (\chi_i(x)\chi_j(y) - \chi_i(x)\chi_j(y+1))$$
$$= (2 - \chi_i(1) - \chi_j(1))\, \chi_i(x) \cdot \chi_j(y)$$

$\Rightarrow \lambda_{0,0} = 0$, $\lambda_{0,1} = 2$, $\lambda_{1,0} = 2$, $\lambda_{1,1} = 4$

le 05.05.20

Graphes :

La distance de Hamming :

Outil pour l'informatique, télécommunication, code correcteur, ...

Ex : La distance entre 0111 et 1011 est égale à 2

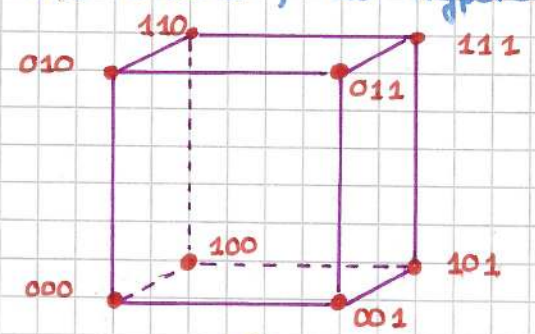
car 0111 vs 1011

Ex : La distance entre anders et andres est aussi 2

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une distance sur tous les mots / data.

Q : Pourquoi on parle de ça ici ?

Car la distance est réalisée par un graphe, dans le cas des 0 et 1, les hypercubes :



(*)

Le spectre de l'hypercube standard de dimension d :

Soit $VX = \{0,1\}^d$

On a une arrête entre 2 sommets $\Leftrightarrow$ distance Hamming = 1

(un bit diffère)

Dans le cas $d = 3$: (*)

Vecteurs propres pour $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

En général, $\chi_y(x) = e^{2\pi i x y / 2} = (-1)^{x \cdot y}$

Valeurs propres pour $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$: 0 et 2

Pour le d-cube, λ correspond à un choix de y

$\Rightarrow \lambda = 2 \cdot i$ avec multiplicité $\binom{d}{i}$

Rap : **Prop :** Supposer que $\operatorname{diam} X = N < \infty$. Alors on a au moins $N+1$ valeurs propres distinctes.

Rem : Ici, le diamètre est d, car il faut changer toutes les coordonées et le nombre de valeurs propres, $0, 2, 4, \dots, 2d$ est bien $d+1$. ok !

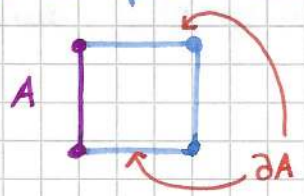
Rem : Autre chose que nous avons montré : $\lambda_1 \geq \dfrac{1}{\operatorname{diam} X \cdot |VX|}$

Ici, dans l'exemple, $2 \geq 1/d \cdot 2^d$ facile ok !

Autre chose : $h := \inf\limits_{0 < |A| < \frac{|VX|}{2}} \dfrac{|\partial A|}{|A|} \geq \dfrac{\lambda_1}{2}$

Donc ici : $h \geq 1$

Est-ce que c'est une bonne estimation ?



$\dfrac{|\partial A|}{|A|} = \dfrac{2}{2} = 1$ oui !

Graphes de Paley :

Déf : Paley 1907 - 1933

Soit p un nombre premier de la forme $p = 4m+1$

Soit $VX_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Il y a une arrête entre x et y $\Leftrightarrow$ $x - y = a^2 \bmod p$ qui est bien défini grâce à $p = 4m+1$ et (-1) est un carré.

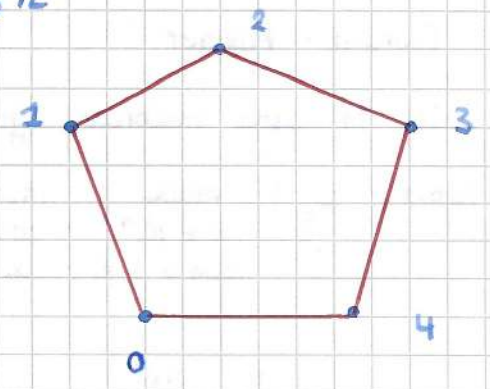
Rem : Sujet très classique, dans la théorie des nombres, quels nombres sont des carrés mod p. (Gauss)

le 05.05.20

Graphes :

Ex : $p = 4 + 1 = 5$ $\qquad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

x	x^2
0	0
1	1
2	4 $(=-1)$
3	4
4	1



$S = 1, 4$

Sommes de Gauss,

$$\sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i a n^2/p} = \begin{cases} \sqrt{p} & a = x^2 \\ -\sqrt{p} & a \neq x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le spectre est $0, \frac{1}{2}(p - \sqrt{p}), \frac{1}{2}(p + \sqrt{p})$

multiplicité $\frac{p-1}{2}$

$\Rightarrow$ diamètre est 2

XII Matrice d'Adjacence :

le 12.05.20

Rappels :

Soit $X = (VX, EX)$ un graphe fini

$A_{xy} = \#$ arrêtes $x \longrightarrow y$

Soit $f : VX \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (Af)(x) = \sum_{e \in EX,\, e^- = x,\, e^+ = y} f(y)$

Si X est simple, $A = D - \Delta$

Donc si X est d-régulier $\mu_i = d - \lambda_i$ $\qquad \lambda_i \in \mathrm{Spec}(\Delta)$

$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$, $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ les val. propres de A

la + grande val. propre de A.

Théorème min-max de Courant-Fischer :

Thm : Courant - Fischer

Soit M une matrice symétrique avec val. p. $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$.

Alors, $$\mu_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim S = k}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T M x}{x^T x}$$

$$= \min_{\substack{T \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim T = n-k+1}} \max_{\substack{x \in T \\ x \neq 0}} \frac{x^T M x}{x^T x}$$

Nous avons déjà discuté cette preuve, surtout dans les séries, quotient de Rayleigh.

C'est une conséquence directe du thm spectral :

$$f : VX \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \phi_i(x)$$

où $M\phi_i = \mu_i \phi_i$

Noter que : $x^T M x = \langle x, Mx \rangle = \langle Mx, x \rangle$

$x^T x = \| x \|^2$

La plus grande valeur propre de A :

Noter que si X est d-régulier, $\mu_0 = d - \lambda_0 = \lambda$.

En effet, $\phi(x) = 1 \ \forall x$ est vecteur propre :

$$(A\phi)(x) = \sum_{e \in EX,\, e^- = x,\, e^+ = y} \phi(y) = \sum_{-\text{"}-} 1 = \deg x = d \cdot 1$$

$$= d \cdot \phi(x)$$

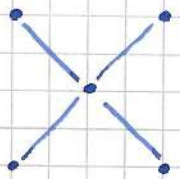
Mais en général, ce n'est pas comme ça, plus intéressant et plus d'informations dans la première valeur propre et le premier vecteur propre.

Graphes :

Soient $d_{max} = \max_{x \in VX} \deg(x)$

$d_{ave} = \frac{1}{|VX|} \sum_{x \in VX} \deg(x)$ (moyenne)

Ex :



$d_{max} = 4$

$d_{ave} = \frac{1}{5}(4+1+1+1+1) = \frac{8}{5}$

X est d-régulier $\Leftrightarrow d_{max} = d_{ave} = d$

Prop : Soit μ_0 la plus grande val. propre de A.

$$d_{ave} \leq \mu_0 \leq d_{max}$$

Rem : Comme déjà noté, si $d_{ave} = d_{max} = d \Rightarrow \mu_0 = d$.

Pv : $\mu_0 = \max_{v \neq 0} \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} \geq \frac{\langle \mathbb{1}, A\mathbb{1} \rangle}{\langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle} = \frac{\langle \mathbb{1}, \deg(x) \rangle}{\langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle}$

$= \frac{\sum \deg(x)}{|VX|} = d_{ave}$

$f(x) = 1 \ \forall x \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

D'autre part :

Soit ϕ fonction propre de A associée à μ_0 : $A\phi(x) = \mu_0 \phi(x)$

Soit $a \in VX$ tq $\phi(a) \geq \phi(b) \ \forall b \in VX$.

On peut supposer que $\phi(a) > 0$ sinon on remplace ϕ par $-\phi$.

$\mu_0 \phi(a) = A\phi(a) = \sum_{e^- = a, e^+ = b} \phi(b) \leq \deg(a) \cdot \phi(a)$

$\Rightarrow \mu_0 \leq \deg(a) \leq d_{max}$

$\blacksquare$

Cor : Si X est connexe et $\mu_0 = d_{max}$, alors X est d_{max}-régulier.

Pv : Dans la preuve précédente pour avoir égalité,
noter que $\deg(a) = d_{max}$ et $\phi(b) \overset{*}{=} \phi(a)$ tous les voisins de a.
Donc, on peut appliquer le même argument pour les voisins
(grâce à $*$).
X connexe $\Rightarrow$ $\phi(x) = \phi(a)$ $\forall x \in VX$
Et même argument pour avoir $=$

$$\deg x = d_{max} \quad \forall x \in VX$$

$\blacksquare$

Entrelacement de Valurs Propres :

Pour une $n \times n$ matrice symétrique A, on va relater les valurs propres pour une ss-matrice principale de taille $(n-1) \times (n-1)$

Thm : Entrelacement de Cauchy.
Soit A une $n \times n$ matrice symétrique et B une ss-matrice principale de A de dimention $n-1$.
(B est obtenu de A en enlevant la même colonne et ligne)
Alors $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n$
où $\alpha_i \in \mathrm{Spect}(A)$ et $\beta_i \in \mathrm{Spect}(B)$ $\forall i$

Graphes :

Pv : Sans perdre de généralité, on peut supposer que B est obtenu en effaçant la 1er ligne et la 1er colonne de A.

Courant - Fischer implique que

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & B & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim S = k}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$$\text{et } \beta_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \\ \dim S = k}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Bx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$$= \underbrace{\max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \\ \dim S = k}}}_{\substack{\text{pour tous les choix} \\ \binom{0}{y} \quad y \in S}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{\left\langle \binom{0}{x}, A\binom{0}{x} \right\rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \alpha_k$$

Pour toutes les autres inégalités, on peut appliquer le même argument avec $-A$ et $-B$ et obtenir

$$-\beta_k \leq -\alpha_{k-1} \iff \beta_k \geq \alpha_{k-1}$$

$\blacksquare$

Déf : Pour $S \subset VX$ ss-ensemble, le graphe induit $X(S)$ a pour sommets S et pour arrêtes tous les $e \in EX$ tq $o(e), t(e) \in S$

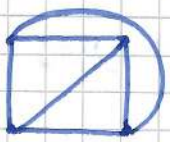
Cor : $\forall S \subset VX$, soit $d_{ave}(S)$ la moyenne des degrés de $X(S)$. Alors $d_{ave}(S) \leq \mu_0$.

Pv : La proposition dit que $d_{ave}(S) \leq \mu_0^S$

Le thm de Cauchy $\Rightarrow \mu_0^S \leq \mu_0$

$\blacksquare$

Ex : $X = K_4$



$S =$

$X(S) =$

$\mu_0 = 3 > 2 = \mu_0(S)$

Application aux colorations de graphe :

Rap : Le nombre chromatique $\chi(X)$ d'un graphe X est le nombre minimum de couleurs pour colorer le graphe.

Ex : $X =$ $\chi(X) = 3$

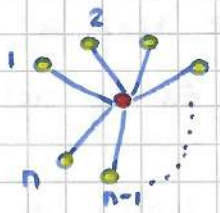
Thm : Wilf

$$\chi(X) \leq \lfloor \mu_0 \rfloor + 1$$

Rem : C'est clair qu'on a pas besoin de plus de couleurs que $d_{max} + 1$ (Série)

Ex : $d_{max} = 2$

mais $\mu_0 < 2$, $\mu_0 = \sqrt{2}$, $\chi(X) = 2$

Ex : 

$d_{max} = n$

$\chi(X) = 2$

$\mu_0 = \sqrt{n-1}$

Pv : Par récurrence sur $|VX|$

$|VX| = 1$: $X = \circ$ $\chi(X) = 1$ $\mu_0 = 0$ ok.

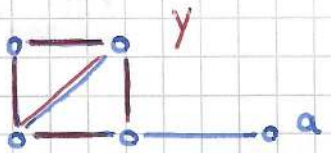
$|VX| = 2$: $X = \circ\!-\!\circ$ $\chi(X) = 2$ $\mu_0 = 1$ ok.

Supposer ok pour $|VX| = n-1$.

Soit X tq $|VX| = n$

Comme $d_{ave} \leq \mu_0$, $\exists\, a \in VX$ tq $\deg a \leq \lfloor \mu_0 \rfloor$

Graphes :

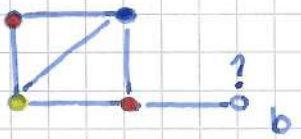
Soit $Y = X(VX - \{a\})$ $\quad X =$ 

Par entrelacement de Cauchy

$\mu_0^Y \leq \mu_0$

Par hyp. de récurrence $\chi(Y) \leq \lfloor \mu_0^Y \rfloor + 1 \leq \lfloor \mu_0 \rfloor + 1$

Pour compléter un coloriage optimal de Y, il faut colorier aussi b, mais b a que $\lfloor \mu_0 \rfloor$ voisins donc $\lfloor \mu_0 \rfloor + 1$ couleurs suffisent.



ok avec ● ou ●

Donc $\chi(X) \leq \lfloor \mu_0 \rfloor + 1$

▨

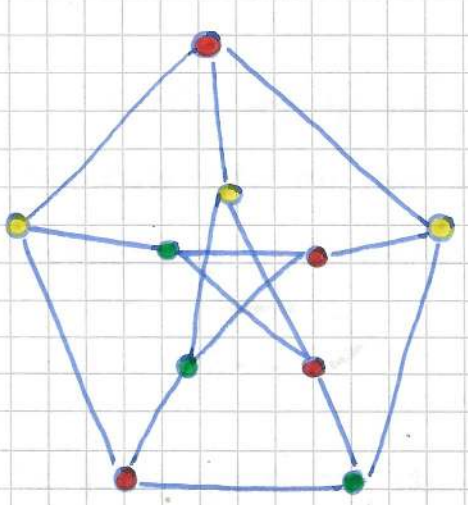
Pour orientation :

Thm : $\chi(G) \geq \dfrac{\mu_1 - \mu_n}{-\mu_n} = 1 + \dfrac{\mu_1}{-\mu_n}$

Exc : Graphe de Petersen

$\chi(X) = 3$ $\qquad$ Spectre $= \{-2, -2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}$

2'000 arbres couvrants



On a :

$$\underbrace{1 + \frac{3}{-(-2)}}_{2,5} \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\chi} \leq \underbrace{3 + 1}_{4}$$

OK !

XIII. Couplages :

Introduction :

Couplage : le thème d'aujourd'hui est encore un type de problème combinatoire très pratique.

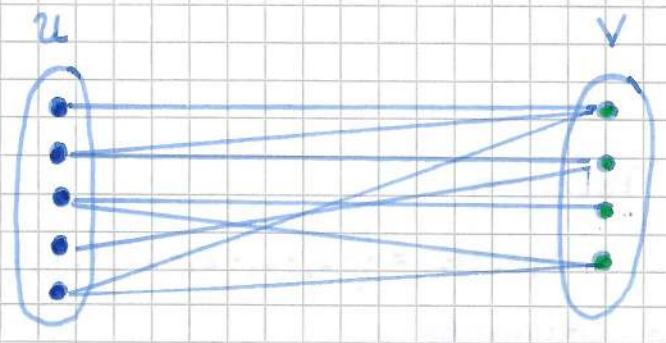
C'est utile pour :

- Publicité
- distribution de jouets
- distribution de tâches
- distribution de chambres et room-mates
- usine - magasin
- etc...

Plus classique : le problème de mariage (stables)

Plus adapté pour les dating apps

Modélisation : Graphes bipartis



Graphes simples avec nombre chromatique égal à 2.

Déf : Soit $X = (VX, EX)$ un graphe simple

Un couplage de X est un sous-ensemble d'arrêtes qui est indépendant. (c-à-d : il n'y a aucun sommet commun)

Un ss-ens. de sommets est indépendant si il y a aucune arrête en commun - allié avec coloration.

(les sommets dans une coloration admissible avec la même couleur forment un ensemble indépendant)

Graphes :

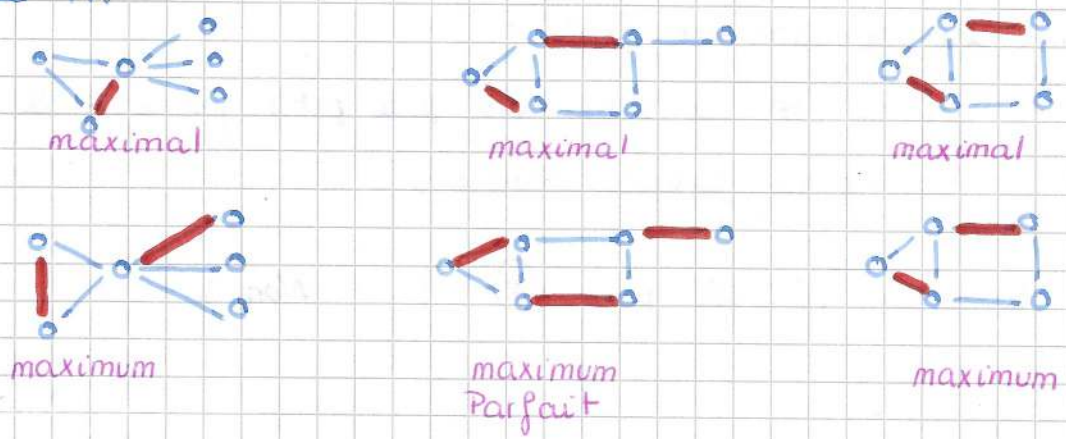
Déf: (Suite)

Autrement dit c'est un sous-graphe tq chaque sommet a degré 1.

Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arrêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximums.

Un couplage maximal est un couplage M du graphe tq toute arrête possède au moins une extrémité commune avec une arrête de M. Ceci équivaut à dire dans l'ensemble des couplages du graphe, M est maximal au sens de l'inclusion ie: $\forall a \in E(A)$ où $A \not\subset M$ n'est plus un couplage.

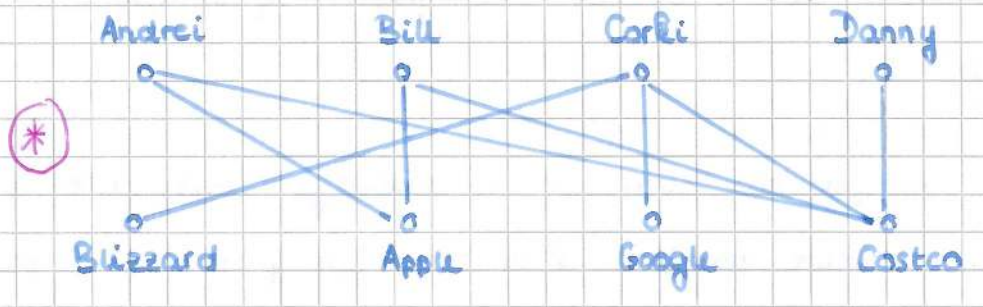
Un couplage parfait ou complet est un couplage M du graphe tel que tout sommet est incident à exactement une arrête de M.



Dimer model : Pour parfait, on va aussi considérer les graphes biparti quand un côté est bien couplé.

Le théorème de Hall :

Est-ce qu'il existe un couplage parfait ?



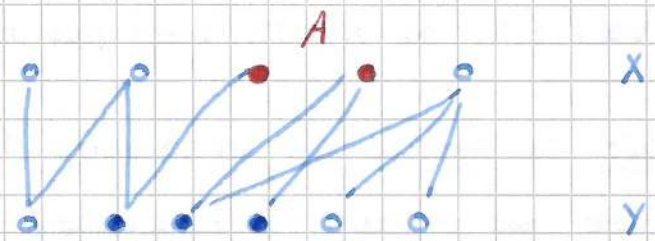
Thm : (Ph. Hall, 1935)

Soit G un graphe fini, simple et biparti : $G = X \sqcup Y$

Il admet un couplage parfait $\iff \forall A \subset V(X)$

$|\{ y \in Y \mid \exists e, \alpha(e) \in A, t(e) = y \}| \geq |A|$ Condition de diversité.

Ex :



Rem : Une direction est facile :

Si le # de bleu est plus petit que le # de rouge, ça ne va jamais marcher.

Condition vérifiée pour (*) ? Non !

le 19.05.20

Graphes :

Pv : Pour simplifier la preuve, on parle de membre de X, candidats, et Y des postes.

Preuve par récurrence sur $n = |X|$ le # de candidats.

$n = 1$:

Un candidat doit être qualifié pour au moins un poste et si c'est le cas, c'est bon.

Hypothèse de récurrence : c'est bon $\forall k < n$

Premier cas :

la condition de diversité est satisfaite avec une marge $\forall k = 1, 2, \dots n-1$, c-à-d pour chaque sous-ens de X de cardinalité k, ils sont qualifiés pour plus de k postes.

Alors on prend madame n et on lui donne un job qui lui convient. Le reste des n-1 personnes satisfait toujours la condition de diversité même avec un poste en moins, vu que la marge était 1.

Deuxième cas :

Il y a un A de taille $k' < n$ tel que les membres de A sont qualifiés ensemble pour k' postes.

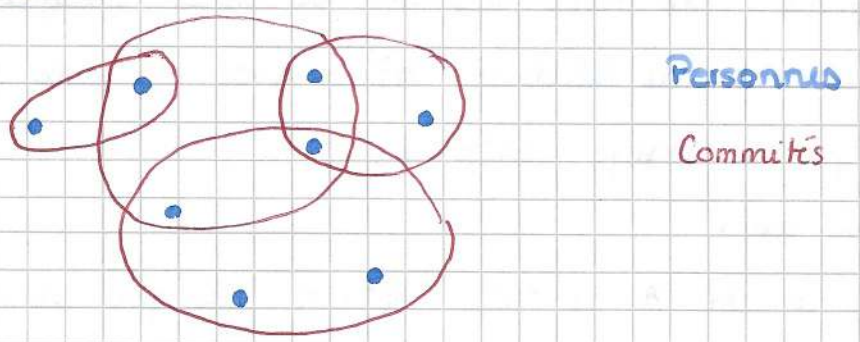
Par l'hypothèse de récurrence, on peut coupler ces k' gens dans A avec les k' postes. (la condition de diversité restreinte à A est satisfaite automatiquement)

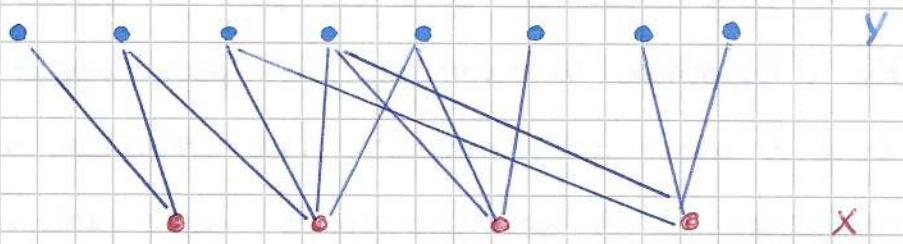
Maintenant, on considère X - A et les postes qui restent. Par récurrence, il faut juste vérifier la condition de diversité.

Pour voir cela, supposer qu'il y a un B de taille k dans $X - A$ tel que parmi les jobs qui restent, ils ne sont qualifiés que pour $k'' < k$ postes.
Mais ça implique que $A \cup B$ sont au début qualifiés que pour $k' + k'' < k' + k$, ce qui contredit la condition de diversité du début. ↯
Donc la condition de diversité est aussi valable dans $X - A$ avec les postes qui restent.
Par récurrence, il y a aussi un couplage parfait.
Donc au total, on a un couplage parfait.

∎

Ex : Nous avons n personnes qui servent dans m commités différents, souvent plusieurs. On doit choisir un président par commité, mais on veut éviter que 1 personne soit 2 fois président. Quand possible ?



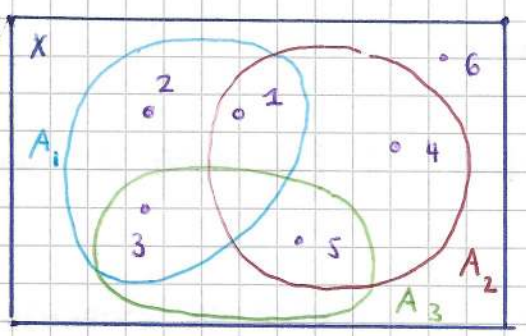


Graphes :

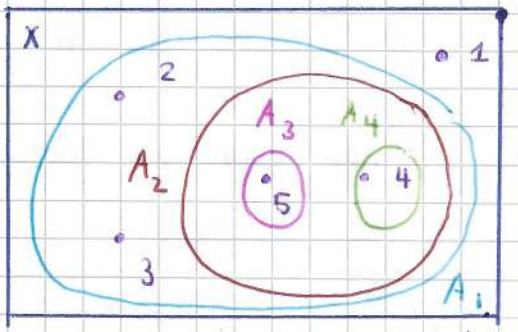
Déf : On appelle <u>système de représentants distincts</u> d'une suite de n ensembles finis $A_1, \dots, A_n$ toute suite de n éléments $x_1, \dots, x_n$ distincts tq $\forall k \quad x_k \in A_k$

Le théorème de Hall dit que ces ensembles possèdent un tel système $\Leftrightarrow$ $\forall$ réunion de k, A_i, contient au moins k éléments. $\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| \geq k$

Exc :



Condition ok



Condition pas ok.

Pour orientation : Pas important

2 collaborateurs

un recoit 5 cartes au hazard parmis 52.

Il choisit une et ordonne les 4 autres.

Les 4 autres sont transmises à son collaborateur dans une autre pièce.

Peut-il trouver quelle carte a été choisie ?

Comment faire ?

Généralisation : Le théorème de Tutte

Couplage peut être défini même sans que les graphes soient bipartis.

Comment peut-on généralisé Hall ?

Thm : (Tutte 1947)

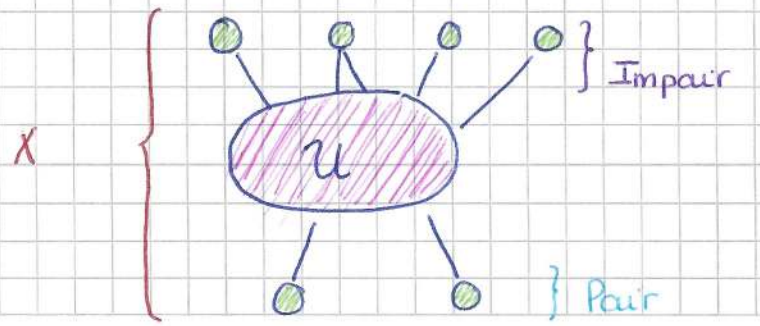
Un graphe $G = (V, E)$ a un couplage parfait $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq V$, le ss-graphe $G(V \setminus U)$ a $\leq |U|$ composantes connexes avec # impairs de nbr de sommets.

Obs :
- Pour avoir un couplage parfait, il faut avoir un nbr pair de sommets.
- Pour le graphe complet K_{2n}, il admet un couplage parfait. C'est juste à décomposer tous les sommets en pairs. Il y a toujours une arête correspondant.

Pv : Condition : $\forall U \subseteq V \quad \underbrace{o(G \setminus U)}_{\text{\# comp. connexes de sommets impairs.}} \leq |U|$

[$\Rightarrow$] Soit G avec couplage parfait.

Soit $U \subset V$ arbitraire. Soit C comp. connexe "impaire" de $G \setminus U$. Comme G a un couplage parfait, chaque composante a au moins un sommet couplé avec un dans U. Donc $o(G \setminus U) \leq |U|$



Graphes :

[⇐] Soit G sans couplage parfait.

On cherche un contre-exemple.

Plus précisément, on va trouver un "mauvais" S,

c-à-d un ss-ens du sommet avec $|S| < o(G \setminus S)$.

On peut supposer que G est "arrête-maximale"

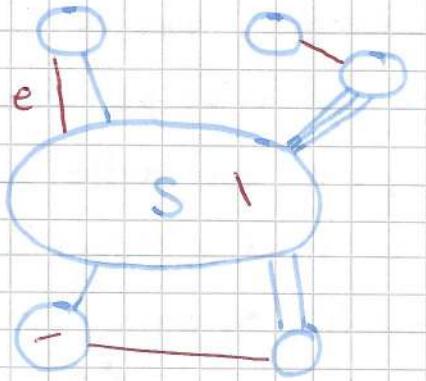
c-à-d on ne peut pas ajouter d'arrête sans avoir un couplage parfait.

Pourquoi peut-on le faire ?

Parce que si G n'est pas maximal, alors on ajoute une arrête.

Noter qu'on n'augmente par le # de comp. impaires.

Donc si on trouve un S pour le graphe maximal, il reste contre-exemple pour le graphe initial.



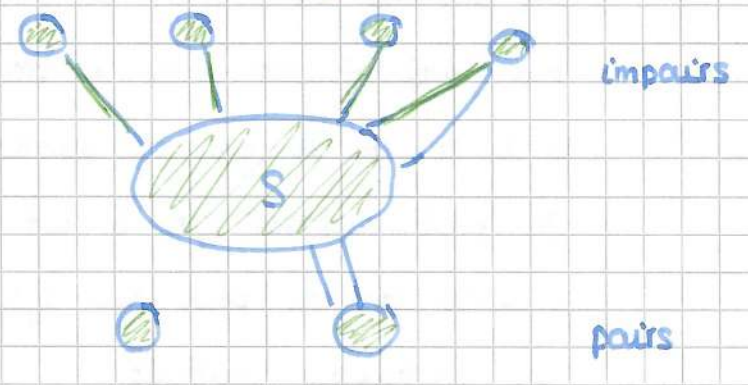
On définit S = tous les sommets de degré $|V|-1$

c-à-d ce sont les sommets qui sont liés avec tous les sommets. En particulier, S est un graphe complet.

(Noter que S est peut-être vide. Dans ce cas, on a le contre exemple si $|V|$ est impair.

$o = |S|$ et $o(G-S) = o(G) = 1$ au + grand si G pas connexe.)

Cas 1 : Toutes les composantes de $G-S$ sont des graphes complets. Alors S doit être mauvais, sinon $|S| \geq o(G-S)$ on peut faire un couplage parfait comme suit :

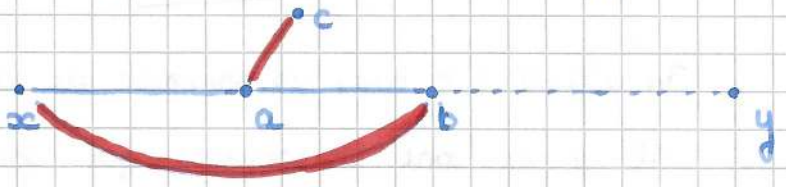


On a assez de sommets dans S pour régler les graphes impairs. Tous les autres sont des graphes complets.

Les sommets qui restent dans S doivent être pairs sinon $|V|$ impair et on a le contre exemple comme ci-dessus.

Cas 2 : Maintenant, supposer que K est une composante de $G-S$ qui n'est pas complète. Donc on peut trouver $x, y \in K$ sans arrête dans K et donc dans $E(G)$

Si on prend le chemin le plus court entre x et y dans K, on trouve les sommets a, b tels que



Donc $[x, b] \notin E(G)$ et comme $a \notin S$, donc $\deg a < |V(G)| - 1$ et donc $\exists\, c$ tq $[a, c] \notin E(G)$

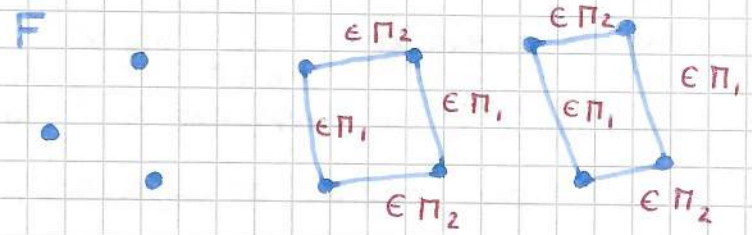
Par l'"arrête maximale", soient M_1 un couplage parfait de $G + xb$ et M_2 un couplage parfait de $G + ac$.

Graphes :

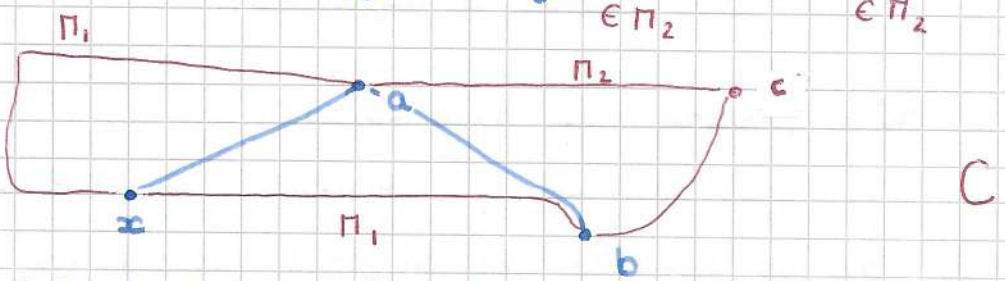
Observer que clairement, ces nouvelles arrêtes xb et ac sont dans ces couplages.

Aff : La différence symmétrique F de M_1 et M_2 contient un couplage parfait qui évite ac et xb, donc un couplage parfait de G ($\longrightarrow$?)
(la diff. symmétrique est $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$)

C'est clair que ac et xb sont dans F.
Chaque sommet de G a degré 1 dans M_1 et dans M_2.
Du coup, chaque sommet de F a degré 0 ou 2.
C-à-d F est composé de points isolés et de cycles pairs.



Cas II :



Soit c le cycle qui contient xb.

Cas I : C ne contient pas ac. Alors on a un couplage parfait de G fait des arrêtes de M_2 dans C et celles de M_1 pas dans C

Cas II : Si C contient ab et ac. On va dans C, on commence à a vers c et on prend les arrêtes M_1 (pour éviter ac) jusqu'à $[x, b]$. Si on arrive à b d'abbord, on prend ab

et continuer de tourner autour de c avec M_1.
Si on arrive d'abbord à x, on prend $[x, a]$
et après celle de M_2 autour de c.

Hors de C, on utilise soit M_1, soit M_2
pour compléter le couplage parfait de G,
qu'on avait supposer inexistant. ↯

$\blacksquare$

3 Généralisations : (Pour orientation)

- Formule de Tutte - Berge :

  $$|\text{Couplage maximum}| = \frac{1}{2} \min_{U \subseteq V} \left(|U| - o(G-U) + |V| \right)$$

- Polynôme de Couplage :

  # de couplages : $\sum_{k \geq 0} m_k x^k$

  où m_k = # de couplages à k arrêtes

  liens avec matrice d'adjacence.

- Même problème mais avec poids :

  Il faut optimiser le couplage. Un côté a des préférences, ou des distances et on doit couper en maximisant la somme des préférences.

Graphes :

XIV. Le Polynôme de Tutte :

Introduction :

Le polynôme de Tutte (et Whitney) est un polynôme en 2 variables, allié à :

- polynôme chromatique
- arbre couvrant
- théorie des noeuds - polynôme de V.F.R. Jones.
- modèl de Potts et Ising
- fiabilité des réseaux
- etc ...

Pour ce chapitre, on va noter E les arrêtes géométriques du graphe G. Alternative : on oriente le graphe et on prend $E = EG^+$.

Polynôme Chromatique :

G.D. Birkhoff, 1912, le problème des 4 couleurs

Déf : $P_G(t) = P(G,t) = \#$ coloriages admissibles avec t couleurs.

Ex : $G = n$ sommets, 0 arrête : $P_G(t) = t^n$

Ex : K_n graphe complet

Tous les sommets sont pareils. On colorie un, on a t choix, pour le suivant $t-1$, ..., pour le dernier $t-n+1$.

$$\Rightarrow P_{K_n}(t) = t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$$

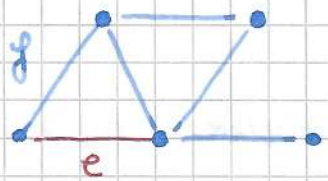
Ex : Un arbre sur n sommets

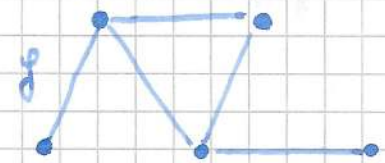
Un sommet, arbitraire couleur, après on peut continuer à colorier mais il faut toujours éviter la couleur précédente.

$\Rightarrow P_G(t) = t\,(t-1)^{n-1}$

Rap : Le nombre chromatique de G est le nombre entier χ le plus petit tq $P_G(\chi) > 0$.

Rap : Suppression - Contraction (Série 2)

$G =$ 

Suppression : $G - e = G \setminus e =$ 

Contraction : $G/e =$

Prop : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et fini. On a que

$P_G(t) = P_{G \setminus e}(t) - P_{G/e}(t)$

où G/e est un graphe simple.

Démo : Regardons $G-e$, les sommets de e sont u et v.

Nous avons 2 types de colorations de $G-e$, celles qui donnent la même couleur à u et v et celles qui donnent des couleurs différentes.

Le 1er type = colorations de G/e et le 2ème type = toutes les colorations de G

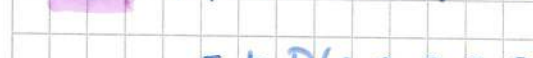
le 26.05.20

Graphes :

Rem : Comme on a que n sommets sans arête $\Rightarrow P(t) = t^n$ est un polynôme, avec la proposition on peut faire n'importe quel graphe et avoir un polynôme.

Noter que comme le nombre de coloration est bien défini, la manière de réduire le graphe par la procédure suppression-contraction ne dépend pas du choix ou de l'ordre des arêtes.

Ex : $P($ $) = P($ $) - P($ $)$

$= t\,P($  $) - P($ $)$

$= (t-1)\,P($ $) = (t-1)\left[P($ $) - P($ $)\right]$

$= (t-1)^2\,P($ $) = (t-1)^5 \cdot P(\bullet) = t(t-1)^5$

ok.

Rem : Noter que nous avons utiliser que $P(G \sqcup \bullet, t) = t\,P(G,t)$ car pour colorier $\bullet$, on a t choix.

Plus général, $P(G \sqcup H, t) = P(H,t) \cdot P(G,t)$

Ex : $P($ $, t) = P($ $, t) - P($ $, t)$

$= t(t-1)^2 - t(t-1) = t(t-1)(t-2)$

$\chi(\Delta) = 3$

Ex : $P(K_4, t) = P($ $, t) - P(\Delta, t)$

$= P(\square, t) - P($ $, t) - P(\Delta, t)$

$= t(t-1)^3 - 2t(t-1)(t-2) - t(t-1)^2$

$= \ldots \quad = t(t-1)(t-2)(t-3)$

ok

Rem: En fait, la proposition marche même avec la première notion de contraction G/e.

D'abord, noter que un graphe avec une loop n'a aucune coloration admissible. Et multiarrête ne change pas.

$P(\triangledown, t) = P(\urcorner, t) - P(\emptyset, t)$

$P(\emptyset, t) = P(\emptyset, t) - \underbrace{P(\emptyset, t)}_{=0}$

ok

En général, $P(\times, t) = 0$ et $P(\emptyset, t) = P(\text{—}, t)$

Arbres Couvrants :

Rap : Pour tout graphe G sans boucle et pour toute arrête $a \in E(G)$ on a $\tau(G) = \tau(G-a) + \tau(G/a)$

Demo : Si on regarde un arbre couvrant de G, soit il ne contient pas e, dans ce cas il définit un arbre couvrant de $G-e$, soit il contient e, dans ce cas il correspond à un arbre couvrant de G/a ∎

Ex : $\tau(\square) = \tau(\sqsubset) - \tau(\triangle) = 1 + \tau(\Gamma) + \tau(\emptyset)$

$= 1 + 1 + 2 = 4$ ok

Généralisation :

Hassler Whitney (1907-1989) dans sa thèse sous G.D. Birkhoff (1932)

W.T. Tutte 1954.

Ils ont cherché des invariants / polynômes qui transforment de manière similaire que polynôme chrom. et arbre couvrant.

$$T(G) = T(G-e) + T(G/e)$$

Graphes :

Déf : Une loop :

Un pont :

Déf : Le polynôme de Tutte (- Whitney)

Il peut être calculé de la manière suivante :

- Si G a que des loops et des ponts, disons i loops et j ponts, et aucune arête. Alors

$$T_G(x,y) = x^i y^j$$

- Si $e \in E(G)$ est une arrête qui n'est ni un pont, ni une loop, alors :

$$T_G = T_{G-e} + T_{G/e}$$

Autres définitions :

- $T_G(x,y) = \sum_{i,j} m_{ij}\, x^i y^j$

  m_{ij} = # arbres couvrants avec i internal et j external arrêtes.

- $T_G(x,y) = \sum_{A \in E} (x-1)^{k(A)-k(E)} \cdot (y-1)^{k(A)+|A|-|V|}$

  $k(B)$ = # de comp. connexe de (V,B)

Rem : Avec la dernière définition, c'est clair que c'est un polynôme bien défini.

Ex : $T(\Delta) = T(\angle) + T(\bigcirc)$

$= x^2 + T(\text{—}) + T(\bigcirc)$

$= x^2 + x + y$

Ex : $T(\bullet) = 1$ $\qquad$ $T(\overset{\bullet}{\vdots}\overset{\bullet}{\vdots}\overset{\bullet}{\vdots}) = 1$

$T(G \sqcup H) = T(H) \cdot T(G)$

Spécialisations :

Nombre d'arbres couvrants :

Supposer que G est connexe.

- $T_G(1,1)$ clair avec la 2ème définition, même si on a pas le donné.
- Avec la 3ème définition $0^k = 0$ sauf quand $k = 0$, donc $T_G(1,1)$ compte les sous-graphes tq $k(A) = k(E) = 1$, donc connexes et $|A| = |V| - 1$.
  - Exactement les arbres couvrants.
- Avec la 1ère définition, avec ponts et loops, on a un unique arbre couvrant.

$T($ $, 1, 1) = 1^i \cdot 1^j = 1$ $\qquad$ pas connexe $\qquad$ ok !

$T(G,1,1) = T(G-e,1,1) + T(G/e,1,1)$ $\qquad$ ok !

Ex : $T(\Delta) = x^2 + x + y$

$T(\Delta,1,1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ $\qquad$ ok !

Polynôme chromatique :

$$P_G(t) = (-1)^{|V| - k(G)} \, t^{k(G)} \, T_G(1-t, 0)$$

Ex : $P(\Delta, t) = (-1)^{3-1} \, t^1 \, \overbrace{T_\Delta(1-t, 0)}^{(1-t)^2 + (1-t) + 0}$

$= t(1-t)(1-t+1) = t(t-1)(t-2)$

Graphes :

Ex : $G =$ $k(G) = |V|$

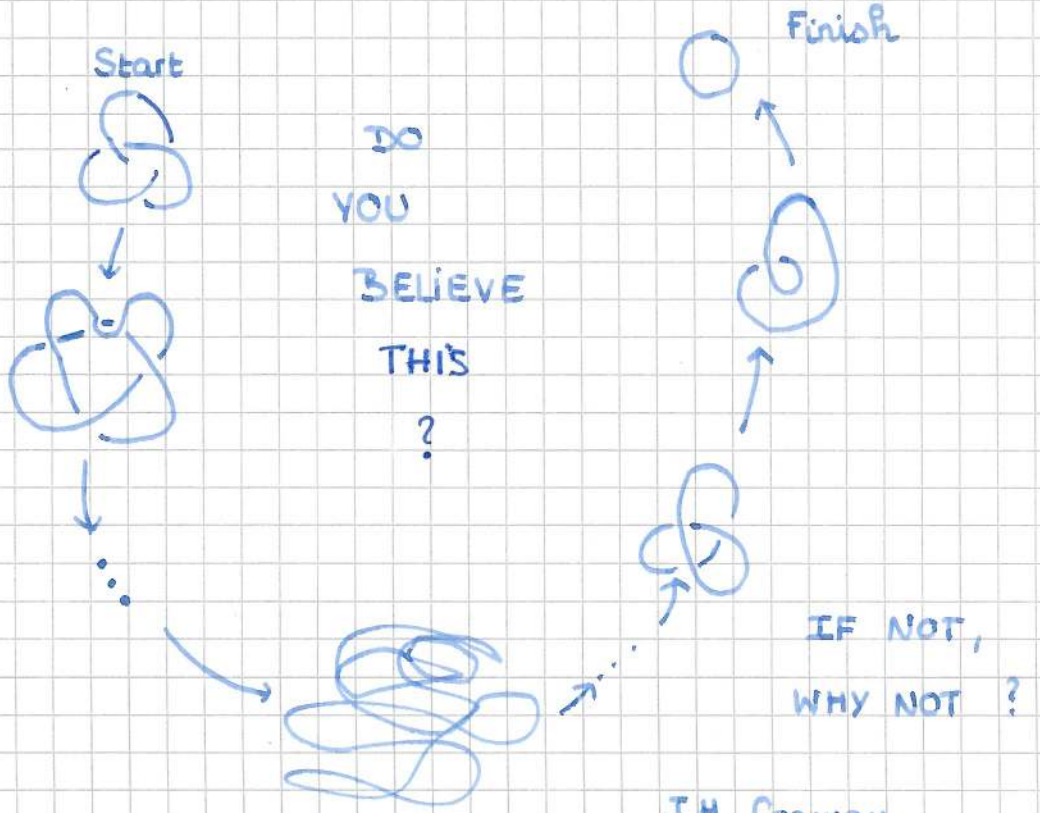
$$P_G(t) = (-1)^{|V| - k(G)} \, t^{k(G)} \, T_G(1-t, 0)$$

$$= 1 \cdot t^{|V|} \cdot (1-t)^0 \cdot 0^0 = t^{|V|} \qquad \text{ok.}$$

Donc pour démontrer que nous avons cette formule, il faut juste vérifier le comportement par rapport aux suppressions - contractions.

Quand e n'est ni un pont, ni une loop, $k(G)$ ne change pas. Donc tout est pareil sauf pour la contraction, on "perd un sommet" donc $|V|$ baisse de 1, ce qui donne un signe et qui montre la formule pour le polynôme chromatique.

Théorie des noeuds : le polynôme de Jones (Genève 1984)



J.H. Conway