

Exercices obligatoires : Au minimum 40%, pour passer l'examen normalement, 1 fois passage au tableau (obligatoire)

Examen : On peut passer l'examen optionnellement et si la note ne convient pas, on passe un seul par la suite.

Exercices : En ligne mercredi, à rendre le mardi pour correction.

Ch 1 : Rappel : les nombres complexes

I. Def :

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Opérations :

$$+ : (u + iv) + (x + iy) = u + x + (v + y)i$$

(même que dans $\mathbb{R}^2$)

$$\cdot : (u + iv) \cdot (x + iy) = (ux - yv) + i(uy + vx)$$

Notation :

z, w sont des complexes
 u, v, x, y sont des réels

Prop 1 :

• $+$, $\cdot$ sont commutatives ($zw = wz$), assoc ($q(zw) = (qz)w$) et distributives

• division : $\forall z, w \neq 0 \exists q$ tq $z = w \cdot q$

Preuve :

(Deuxième partie)

Il nous suffit de donner la formule pour q si $z = 1$, après $z = w \cdot (1/w \cdot z)$

Donc étant donné $w = u + iv$, on cherche $q = a + ib$ tq

$$(a + ib)(u + iv) = 1$$

$$\text{Solution : } (u + iv) \left(\frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2} \right) = 1$$

ici, la division se trouve dans les réels ($\mathbb{R}$).

Notation :

$$z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy \quad \text{le conjugué } [\in \mathbb{C}]$$

$$\rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{le module } [\in \mathbb{R}^+]$$

$$\text{hors } z \cdot \bar{z} = |z|^2, \text{ donc } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Remarque: multiplication par un nombre réel:

$$\lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, z = x + iy \quad \lambda \cdot z = \lambda x + i\lambda y$$

- mm que dans esp. vect $\mathbb{R}^2$
- cas spécial de la multiplication dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

II: Coordonnées polaires:

$$(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$$

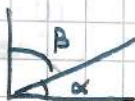
$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta \quad \rightarrow r \geq 0, \theta \text{-angle } [\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]$$

Un angle: nombre réel α tq $\alpha = \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(Parfois, on choisit $0 \leq \alpha < 2\pi$, ce n'est pas pratique)

On va + les angles:



$$\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi$$

Pour chaque $z = x + iy \mapsto (r, \theta)$,

On a $r = |z|$ et θ est l'argument de z

Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
↑ not

Donc, il est évident que $z = r \cdot e^{i\theta}$

Prop 2:

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec coordonnées polaires $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$

Alors, $z_1 \cdot z_2$ a coordonnées polaires $r_1 \cdot r_2$ et $\theta_1 + \theta_2$

En fait, $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
cela revient à

↑ facile par sin et cos

Notation complexe:

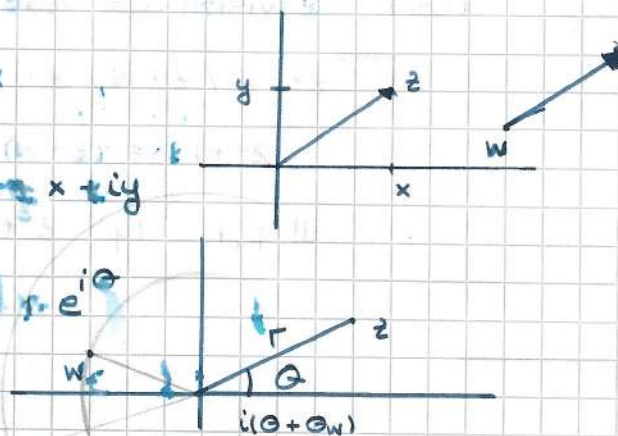
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Géométrie du z et $+$:

$w \mapsto w + z$ où $z = x + iy$

$w \mapsto w \cdot z$ où $z = r \cdot e^{i\theta}$



III Polynômes:

Soit $a_n \neq 0, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, on peut définir le polynôme $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ et on peut le penser comme une fonction $z \mapsto p(z)$

Déf: la racine de $p(z)$ est $w \in \mathbb{C}$ tq $p(w) = 0$

le degré de $p(z)$ est n ($a_n \neq 0$)

Degré 0 : les constantes

Degré 1 : les linéaires Fonction 0 n'a pas de degré.

Ex: $z^2 + 1$ n'a pas de racines réelles, mais a des racines complexes i et $-i$

Thm: (fam de l'algèbre)

Soit p polynômes de degré $n > 0$. Alors p a au moins une racine : $\exists w \in \mathbb{C}$ tq $p(w) = 0$

Cor: Soit $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ une polynôme (monique), alors $\exists w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ tq $p(z) = (z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_n)$ et ils sont uniques.

Ex: $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$

Preuve: (Cor) Division avec reste des polynômes

$$z^3 + 1 / z + w =$$

$$z^3 + 1 = (z + w) p(z) + R \quad R \in \mathbb{C}$$

$$\exists! p, R \text{ tq } z^3 + 1 / z + w = z^2 + zw + w^2 + \frac{1 + w^3}{z + w}$$

Analyse dans le plan:

le 25.09.18

I. Métrique / Topologie: $(\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C})$

Déf: La métrique: $d(z, w) = |z - w|$ $z = x + iy$ et $w = u + iv$
 $= |x + iy - u - iv| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$



• Inégalité Δ: $|z - q| \leq |z - w| + |w - q|$

• $B_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon\}$

• $U \subset \mathbb{C}$ est ouvert si $\forall z \in U \exists \varepsilon > 0$ tq $B_\varepsilon(z) \subset U$

• $Z \subset \mathbb{C}$ est fermé si $\mathbb{C} \setminus Z$ est ouvert

Rem: $\emptyset$ et $\mathbb{C}$ sont ouverts et fermés.

• Réunion ouverts est ouvert

• A, B ouvert $\Rightarrow A \cap B$ ouvert (intersection finie)

• Fermés: intersection quelconque de fermés est fermé
 réunion finie de fermés est fermé

• $A \subset \mathbb{C} \rightsquigarrow \bar{A} = \bigcap \{Z \mid Z \text{ fermé}, A \subset Z\}$ adhérence de A.

• $A \subset \mathbb{C} \rightsquigarrow A^\circ = \bigcup \{U \mid U \subset A, U \text{ ouvert}\}$ intérieur de A.

• $A \subset \mathbb{C} \rightsquigarrow \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ est la frontière de A

Ex: A rectangle fermé



$\bar{A} = A$ donc $\partial A = \text{U 4 intervalles}$.

• $A \subset \mathbb{C}$ borné si $\exists k > 0$ tq $A \subset B_k(0)$

• $A \subset \mathbb{C}$ compact, si A fermé et borné.

II. Limites:

Déf:

• Suites : $z_n \rightarrow z$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$

$$\text{si } \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon |z - z_n| < \varepsilon$$

On dit $\{z_n\}$ est convergente si $\exists z$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$

Thm:

Critère de Cauchy

Suite z_n est convergente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_\varepsilon |z_n - z_m| < \varepsilon$

Déf:

Soit $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ ouvert, $z \in \mathcal{U}$ alors $\lim_{w \rightarrow z} f(w) = q$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ tq pour $|w - z| < \delta_\varepsilon$ on a $|f(w) - q| < \varepsilon$ | pareil pour $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ $\lim_{w \rightarrow z} f(w) = q \Leftrightarrow \lim_{w \rightarrow z} \operatorname{Re}(f(w)) = \operatorname{Re}(q)$ et

$$\lim_{w \rightarrow z} \operatorname{Im}(f(w)) = \operatorname{Im}(q)$$

Thm 1:

$A \subset \mathbb{C}$ est compact, $\forall z_n \in A$ suite, $\exists$ une suite d'entier $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tq la suite z_{n_k} est convergente.

Déf:

 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue si $\forall z \in \mathcal{U} \lim_{w \rightarrow z} f(w) = f(z)$

Thm 2:

Soit $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, $A \subset \mathcal{U}$ compact.Alors, $\exists z \in A$ tq $\forall w \in A |f(w)| \leq |f(z)|$ (Valeur maximale)

Cor:

Dans ce cas f est bornée sur A .

III. Dérivée:

Déf: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

approximation linéaire

f est dérivable au pt x si $\exists J \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - [f(x) + J\Delta x]}{\Delta x} = 0$

meilleure définition que la 1^{ère} (*)

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dérivable au pt (x, y) si $\exists J \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tq $\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta x|} (\vec{F}(x+\Delta x, y+\Delta y) - [\vec{F}(x, y) + J(\Delta x, \Delta y)]) = 0$

Correspondance: on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \leftrightarrow \vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Soit $f(x+iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ et la fonction vectorielle

$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ correspond à f .

Continuité des dérivées: $\vec{F} = (u(x, y), v(x, y))$ est dérivable $\rightarrow J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Thm: $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\vec{F} = (u, v)$

Si u_x, u_y, v_x, v_y existent et sont continues alors $\vec{F}$ est dérivable partout et $J_{\vec{F}}$ est continue.

On va supposer $\vec{F}$ continuellement dérivable ou $\vec{F} \in C^1$

Fonctions linéaires:

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire $\leadsto \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $L(z) = \lambda z$

Avec ces 2 notions, quelles sont les $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui correspondent aux fonctions linéaires complexes?

$$z = x + iy, \quad \lambda = t + is$$

$$L(z) = tx - sy + i(sx + ty) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} tx - sy \\ sx + ty \end{pmatrix}$$

Alors ce sont les fonctions lin. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ avec $a = d$ et $b = -c$

Analyse Complexe:

le 25.09.18

Conclusion: Les fonct. lin. complexes correspondent aux fonct lin. réelles avec $a=d$ et $b=-c$.

Déf: On peut considérer les fonct dérivables complexes (*) tq
 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si $f = u + iv$ alors $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
a des dérivées avec cette propriété partout:

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \leadsto u_x = v_y \text{ et } u_y = -v_x$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

Ex:

• $f(z) = z^2$

$$z = x + iy$$

$$z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + i \underbrace{(2xy)}_v$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$u_x = 2x \quad u_y = -2y \quad v_x = 2y \quad v_y = 2x$$

• Mais $\begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$ ne vérifie pas C-R

Déf: En fait, on peut définir la même (*) comme suivant:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

La limite existe (div. complexe)

$$\text{ou } \exists J \in \mathbb{C} \text{ tq } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} [f(z + \Delta z) - (f(z) + J \Delta z)] = 0$$

Notation: $\Delta z \rightarrow 0, |\Delta z| \rightarrow 0$ sont les $\hat{m}$.

les 2 sont
équivalents et se complètent.

III Fonctions holomorphes

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \xleftrightarrow{\text{Corr}} F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) \iff F(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Énoncé: Sont équivalents:

- $F \in C^1$ et $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ (Cauchy-Riemann)
- (*) • $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (f(z + \Delta z) - f(z)) / \Delta z$ converge $\forall z$ et $f'(z)$ est continue.

Déf: Fonction f satisfaisant (*) est holomorphe

Rem: f pourrait être définie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ ouvert.

Analyse

Alg

hol

Géom

R des abr

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1. Opération:

Déf: Soient f et $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f + \beta g$$

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

$$f \cdot g$$

Sont holomorphes et

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$f \circ g$$

$$(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

Ex: • $f(z) = z$ $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = 1$

• $f(z) = 1/z$ $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2}$ quand $z \neq 0$
 $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

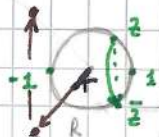
→ (suite de pensées)

Prop: Soit $P(z), Q(z)$ polynômes, alors $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est holomorphe sur le domaine $\{z \mid Q(z) \neq 0\}$

2. Aspects géométriques ...:

Motivation du cours

Inversion : $z \rightarrow 1/\bar{z}$



si $|z|=1$

$r \cdot R = 1$



Application Conforme: les angles sont préservés

$f: U \rightarrow V$ bijections holomorphes



α et β sont les mêmes.

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Jacobien de F , il faut vérifier que A préserve

les angles: $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$ et $\cos(A\vec{v}, A\vec{w}) = \dots$

Fonctions Harmoniques:

Déf: On dit que u, v harmonique si $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Prop: $f(x+iy) = u + iv$ holomorphe $\Rightarrow$ C.R. $\Rightarrow u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$
alors u -harmonique et v -aussi.

3. Exemples de fonct. holomorphes: séries entières

3.1 Interlude: convergence de série de fonction:

Rem: limites des suites et sommes des séries:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ où $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $a_n = A_{n+1} - A_n$

Ex: Exemples exotiques (ordre des sommes)

a) Série numérique : $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ [$\sum a_n$ converge par Alambert]

Prop: $\forall l \in \mathbb{R} \exists J: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijection tq $\sum_{n=1}^{\infty} a_{J(n)} = l$

Thm 1: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ (ie: convergente) alors $\forall J: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijection
alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_{J(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ex: b) $F_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 F_n(x) dx = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 F_n(x) dx = \frac{1}{2} \text{ mais } \Delta$$

$$\int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)) dx = \int_0^1 0 dx = 0. \Delta$$

Thm 2: $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ de manière absolue et uniforme ($\sum \sup_{x \in D} |f_n(x)| < \infty$). Alors $\sum_{n=1}^{\infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f(x) dx$

$$\leadsto \int f+g dx = \int f dx + \int g dx$$

$$\lim \sum = \sum \lim \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

$$\leadsto \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

Cor: (2^{ème} partie du thm)

si $\sum f_n = f$ de manière absolue et uniforme et f_n - cont $\forall n$
alors f est aussi continue.

3.2 Séries entières:

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ suite $\leadsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ et $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $f_n(z) = a_n z^n$

Déf: Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ est
 $R = \sup \{ r > 0 \mid a_n \cdot r^n \rightarrow 0 \}$

Thm: Si $|z| < R$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ converge
si $|z| > R$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ diverge.

Ex: $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\{ r > 0 \mid r^n \rightarrow 0 \} = [0, 1) \quad \sup [0, 1) = 1$$

RM $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge pour $|z| < 1$ (et $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$)

ce qui est ok si $z \neq 1$

Thm: $\sum a_n z^n \rightsquigarrow R = \text{rayon de conv.}$, soit $\hat{R} < R$ tq $\hat{R} > 0$
 alors la convergence de $\sum a_n z^n$ est absolue et uniforme
 sur $\overline{D_{\hat{R}}(0)} = \{z \mid |z| \leq \hat{R}\}$

Cor: $f = \sum a_n z^n$ est continue

En fait, f holomorphe et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ est une
 série entière avec le même rayon de conv. R .

Titre ?

le 09.10.18

IV. Séries entières:

Prop 1: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \leftarrow \text{converge } \forall z \text{ tq } |z| < 1.$

Preuve: $\frac{1}{1-z} - [1 + z + \dots + z^n] = \frac{1 - (1-z)(1 + \dots + z^n)}{1-z} = \frac{z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow{|z| < 1} 0$ $\square$

Rem: Sur le rayon de convergence (RdC)

Lemme: Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ une série entière, soient

- $R_1 = \sup \{r > 0 \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$
- $R = \sup \{r > 0 \mid a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$ RdC
- $R_2 = \sup \{r > 0 \mid \exists B: |a_n| r^n < B \forall n\}$

Alors $R_1 = R_2 = R$

Preuve: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \Rightarrow a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |a_n| r^n \text{ est borné}$

$\rightsquigarrow R_1 \leq R \leq R_2$

On mq si $r < R_2$, $r < R_1$

Soit $r < R_2$ et $\varepsilon > 0$, tq $r + \varepsilon < R_2$. Alors $\exists B$ tq

$$|a_n| (r + \varepsilon)^n < B, \text{ alors } |a_n| r^n = |a_n| \cdot (r + \varepsilon)^n \cdot \left(\frac{r}{r + \varepsilon}\right)^n < B \cdot \left(\frac{r}{r + \varepsilon}\right)^n = B \cdot \left(\frac{1}{1 + \varepsilon/r}\right)^n$$

$$\rightsquigarrow \sum |a_n| r^n \leq \sum B \left(\frac{1}{1 + \varepsilon/r}\right)^n = B \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \varepsilon/r}} = B \cdot \frac{1 + \varepsilon/r}{\varepsilon/r} < \infty$$

Donc $r = R_1$

Preuve (suite): $\Rightarrow R_1 = R_2$

(Preuve à l'examen)

Théorème 5.2
x 6.1

Thm fond sur les s. entière:

Soient $\sum a_n z^n$ s'érie entière avec $RdC = R$, alors

0. $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.

1. $|z| < R \Rightarrow \sum |a_n| z^n$ converge.

pour $\hat{R} < R$ la convergence est absolue et uniforme
sur le disque $\overline{D_{\hat{R}}(0)}$.

2. Notons que $f(z) = \sum a_n z^n$ définie par $D_R(0)$ est holom.

en fait $\sum f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

avec $RdC = R$.

Preuve: 0. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ conv $\Rightarrow a_n z^n \rightarrow 0$.

donc si $|z| > R \Rightarrow a_n z^n \rightarrow 0$
pour déf de RDC.

1. Il faut mq $\sum_n \max_{x \in D_{\hat{R}}(0)} |a_n z^n|$ converge.

le max = $|a_n| \cdot \hat{R}^n$

Alors il faut mq $\sum |a_n| \hat{R}^n$ converge, et fini.

Par lemme 1: (R₁)

On voit que la condition est satisfaite.

$\hat{R} < R \Rightarrow \sum |a_n| \hat{R}^n < \infty$

□

2. Cor: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ est continue

$z \rightarrow z_0$ alors $f(z) \rightarrow f(z_0)$

Conv abs/unif $\Rightarrow \sum \lim$

Preuve: (Suite)

2.



avec $\hat{R} < R$

Cor: $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = ?$ avec $z, z_0 \in D_{\hat{R}}(0)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} \stackrel{\text{abs/unif}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial z^n}{\partial z} \Big|_{z_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z_0^{n-1} \end{aligned}$$

* Il faut mq conv est abs et unif dans $\overline{D_{\hat{R}}(0)}$:

$$\sum \max_{z \in \overline{D_{\hat{R}}(0)}} \left| a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| = \sum \max_{z \in \overline{D_{\hat{R}}(0)}} |a_n (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})|$$

$$\leq \sum n \cdot |a_n| \hat{R}^{n-1}$$

Comme $z, z_0 \in \overline{D_{\hat{R}}(0)} \implies |z^i z_0^{k-1-i}| < \hat{R}^{n-1}$

Mais le Rdc de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ est le m R (que $\sum a_n z^n$)

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{R}^{n-1} < \infty$ pour $\hat{R} < R \implies$ conv abs/unif.

Cor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe, mais en fait $f \in \mathcal{C}^{\infty}$

c.à.d: infiniment dérivable / holomorphe.

f' est aussi donnée par une série entière $\implies$ on peut itérer notre

résultat, f' holo $\rightarrow f''$ holo $\rightarrow \dots \rightarrow f^{(\infty)}$ holo.

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Déf: Les séries entières centrées à $p \in \mathbb{C}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ (*)

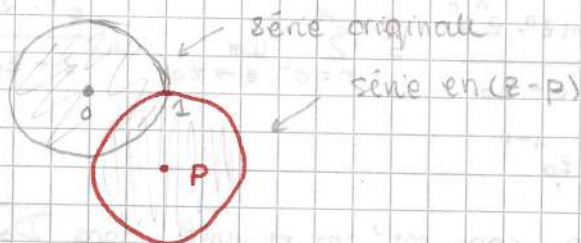
si RdC de $\sum a_n z^n$ est R , alors (*) conv dans $D_R(p)$

(*) Remarque:

Ex: $f(z) = \frac{1}{1-z}$, soit $p \neq 1, p \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-p)-(z-p)} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-p}{1-p}} = \frac{1}{1-p} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-p)^n}{(1-p)^n}$$

Ex: mq $RdC = |1-p|$

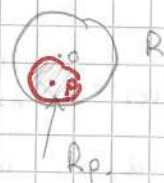


Déf: Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, on dit f est analytique dans U si
 $\forall p \in U \exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ avec $RdC = R_p$ tq $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$
 pour $|z-p| < R_p > 0$



(*) Rem: $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ $f'(0) = a_1$ $f''(0) = 2a_2$... $f^{(n)}(0) = n! a_n$

Thm: $\sum a_n z^n$ s. ent, $RdC = R$, $p \in D_R(0)$
 alors $\exists b_n$ tq $\sum b_n (z-p)^n = f(z)$ pour
 $z \in D_{R_p}(p)$ pour un $R_p > 0$



- Série entière est analytique
- Facile de trouver b_n (ici: $b_n = f^{(n)}(p) / n!$)

Exponentielle, logarithme:

Déf: $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (le $RdC = \infty$, $\exp(z)$ est définie sur le plan complexe en entier.)

$\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$

$\exp(i \cdot \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

$\exp(w+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^k z^{n-k}$
 $\stackrel{\text{abs/unif}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{w^k}{k!} \cdot \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \cdot \frac{z^m}{m!}$
 $\stackrel{\text{abs/unif}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp(w) \cdot \exp(z)$

Géométrie: $\exp(x+iy) = \exp(x) \cdot [\cos y + i \sin y]$

$\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective



On a $|\exp(x+iy)| = \exp(x)$ et $\text{Arg}(\exp(x+iy)) = y$

Conclusion:

$\exp: \{z \mid -\pi < \text{Im } z < \pi\} \rightarrow \{w \mid \text{Re } w > 0\} \cup \{w \mid \text{Im } w \neq 0\}$
 est bijective! alors il y a une applic. inverse qu'on définit comme le $\log w$.

On mq log - série entière:

Prop: $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, holom, bijective et $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{U}$, alors

on définit $g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tq $f(z) = w \Leftrightarrow g(w) = z$

Dans ce cas g est aussi holom et $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$

Preuve:

On soit g - continue : $z \rightarrow z_0 \Leftrightarrow w \rightarrow w_0$

$$w = f(z), w_0 = f(z_0), z = g(w)$$

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = 1/f'(z_0)$$

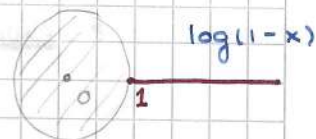
□

Pour $u = \text{---}$ et $v = \text{---}$ et $f(w) = \exp(z)$ les conditions sont

satisfaites, alors $\log: v \rightarrow u$ est holom. $\frac{d}{dz} \log(w) = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$

Le $\log$ est analytique:

- $\frac{d}{dz} \log(1-z) = \frac{-1}{1-z} = -1 \cdot \sum z^n$ pour $|z| < 1$



- Pour $L(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$ a Rdc 1

- $L'(z) = \frac{-1}{1-z}$ et $L(0) = 0$ $\log(1) = 0$ ($\exp(0) = 1$)

Et donc $\frac{d}{dz} [L - \log(1-z)] = 0$

- $\Rightarrow \log(1-z) = L(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$

- $\Rightarrow \log(w) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-w)^n}{(n+1)!}$ où $|w-1| < 1$

V. Intégrales Curvilignes:

Motivation:

$f: u \rightarrow \mathbb{C}$ holom $\xrightarrow{\text{Ex}} \sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^n = f(z)$

But Faith toutes les fct holom sont de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^n = f(z)$

En particulier, une fct holom (qui dit fct $\in C^1$) est C^∞
(infiniment dérivable)

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad f'(x) = |x|$$

La fonction f est C^1 mais f n'est pas C^2

Les courbes dans $\mathbb{C}$:



$\text{Re } \gamma$ $\text{Im } \gamma$
sont C^1

Déf: Un chemin dans $\mathbb{C}$ est une application continue : $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Intuitivement : γ - trajectoire de $p = \gamma(a) \rightsquigarrow q = \gamma(b)$

Terminologie: • Chemin lisse si $\gamma \in C^1$

• Lisse par morceaux si γ peut être subdivisé en $\gamma_0 \dots \gamma_k$ de $[a, b]$ tq $\gamma_i \in C^1$



• fermé : si $\gamma(a) = \gamma(b)$

• simple si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$ sauf $\gamma(a) = \gamma(b)$

Prop: Règle de la chaîne (rappel)

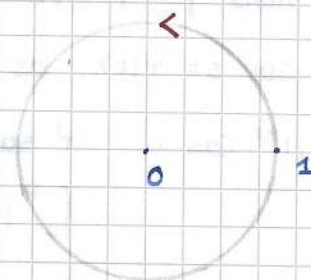
Soient $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hdo, $\gamma, \Upsilon \in C^1$

$$\text{Alors } \frac{d}{dt} [\gamma \circ \Upsilon(t)] = \underbrace{\gamma'(\Upsilon(t))}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\Upsilon'(t)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} [f \circ \gamma(t)] = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{C}}$$

Ex: $\gamma(t) = \cos t + i \sin t \quad t \in [0, 2\pi]$

est un chemin fermé



Ex: $\gamma(t) = t + it \quad t \in [0, 1]$

Déf: Une application $\Upsilon : [c, d] \rightarrow [a, b]$ monotone, C^1 , $\Upsilon'(t) \neq 0 \quad \forall t$ est une reparamétrisation,

si $\Upsilon' > 0$ elle préserve l'orientation

si $\Upsilon' < 0$ elle renverse l'orientation.

Lemme: Soient $\gamma: [c,d] \rightarrow [a,b]$ et $\Delta: [a_1,b_1] \rightarrow [c,d]$ reparamétrisations.
Alors, $\gamma \circ \Delta$ et γ^{-1} sont reparam.

Déf: Une courbe C est une classe d'équiv des chemins (courbes param):

$$\gamma \sim \delta \Leftrightarrow \exists \gamma \text{ reparam tq } \delta = \gamma \circ \gamma$$

C'est une rel. d'équiv:

- $\gamma \sim \gamma$: $\gamma = \gamma \circ \text{id}_{[a,b]}$
- $\gamma \sim \delta \Leftrightarrow \delta \sim \gamma$: $\delta = \gamma \circ \gamma \Rightarrow \gamma = \delta \circ \gamma^{-1} \Rightarrow \delta \sim \gamma$ Lemme: reparam
- $\gamma \sim \delta \wedge \delta \sim \alpha \Rightarrow \gamma \sim \alpha$: $\delta = \gamma \circ \gamma$ et $\alpha = \delta \circ \Phi \Rightarrow \alpha = \gamma \circ \gamma \circ \Phi$

le 23.10.18

Déf: Pour $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$, la longueur de γ est définie tq

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Prop: La longueur d'une courbe param. est indépendante de la paramétrisation et de l'orientation.

Dém: Si on a $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\delta: [c,d] \rightarrow \mathbb{C}$ chemins et

$\Psi: [a,b] \rightarrow [c,d]$ difféomorphisme tq $\gamma = \delta \circ \Psi$.

$$\text{Alors } \gamma' = \Psi' \circ (\delta' \circ \Psi) \Rightarrow \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\Psi'(t)| |\delta'(\Psi(t))| dt$$

$$\text{CDV } s = \Psi(t) \quad ds = \Psi'(t) dt$$

1^{er} Cas : Ψ strictement croissant : $\Psi(a) = c$ et $\Psi(b) = d$

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\Psi'(t)| |\delta'(\Psi(t))| dt = \int_c^d |\delta'(s)| ds$$

2^{ème} Cas : Ψ stric. décroissant : $\Psi(a) = d$ et $\Psi(b) = c$

$$\Rightarrow \int_a^b |\gamma'(t)| dt = - \int_d^c |\delta'(s)| ds = \int_c^d |\delta'(s)| ds$$

$\Rightarrow$ la longueur ne dépend que du chemin.

Intégrales curvilignes:

Déf: Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe paramétrée continuellement différentiable par morceaux. Soit f : une fonction continue sur $\gamma([a, b])$. On définit l'intégrale curviligne comme $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Thm: 1) Soient $\gamma(t)$ et $\sigma(t)$ deux chemins équivalents avec $s = \psi(t)$ où ψ est strictement croissant. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz$
l'intégrale curvi. ne dépend que de la courbe orientée définie par un chemin

2) L'intégrale curvi est linéaire: $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall f, g \in C^0(\gamma[a, b])$

$$\int_{\gamma} (\lambda f + g)(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$$

3) $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$ (chemin renversé)

4) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ (chemins composés)

Preuve: 1) $s = \psi(t), ds = \psi'(t) dt \Rightarrow \int_{\sigma} f(s) ds = \int_c^d f(\sigma(s)) \sigma'(s) ds$
 $= \int_a^b f(\sigma(\psi(t))) \sigma'(\psi(t)) \psi'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$
 $c = \psi(a)$ et $d = \psi(b)$ car ψ strict. croiss.

2) $\int_{\gamma} (\lambda f + g)(z) dz = \int_a^b (\lambda f + g)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$
 $= \int_a^b \lambda f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$

3) $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t) \quad (-\gamma)'(t) = -\gamma'(a+b-t)$
 $\int_{-\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) (-\gamma'(a+b-t)) \cdot dt$ $u = a+b-t$
 $du = -dt$

$\int_{-\gamma} f = \int_b^a f(\gamma(u)) \gamma'(u) du = - \int_a^b f(\gamma(u)) \gamma'(u) du$

Preuve: (Suite)

4) $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tq $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\text{tq } \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right) (f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt)$$

$$\text{Donc } \int_0^{1/2} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{1/2} f(\gamma(2t)) \cdot \gamma'(2t) \cdot 2 dt$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(u)) \gamma'(u) du = \int_{\gamma_1} f$$

$$\text{CDV } \Rightarrow u = 2t$$

$$\text{Et } \int_{1/2}^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{1/2}^1 f(\gamma(2t-1)) \cdot 2 \gamma'(2t-1) dt$$

$$= \int_0^1 f(\gamma_2(u)) \gamma_2'(u) du = \int_{\gamma_2} f$$

$$\text{CDV } u = 2t - 1$$

Ex: $\gamma(t) = c + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$n \in \mathbb{Z}$



$c \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^*$

$$\int_{\gamma} (z-c)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n i r e^{it} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{it(n+1)} dt = \begin{cases} r^{n+1} \left[\frac{i e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq -1 \\ r^{n+1} \cdot 2\pi i = 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$\text{En particulier: } \int_{\gamma} \frac{dz}{z-c} = 2\pi i$$

$$\text{si } c=0 \text{ on obtient } \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$$\text{Plus généralement: } \gamma(t) \mapsto e^{int} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2in\pi$$

Prop: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continument diff par morceaux, f continue sur $\gamma([a, b])$

$$\text{Alors } \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma) \quad \text{si } M = \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))|$$

$$\text{Preuve: Si } \gamma \text{ continument dérivable (diff)} \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \leq M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot L(\gamma)$$

Si γ est C^1 par morceaux alors dem sur chaque segment α
 γ est C^1

Primitives :

Déf : Soit $U \subset \mathbb{C}$, un ouvert, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

Une fonction $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe est une primitive de f si on a $F'(z) = f(z)$ sur tout U .

Condition nécessaire :

Thm 3.2

Prop :

Si f admet une primitive F , alors ^{pour} tout chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow U$

$$\text{on a } \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particulier $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ si $\gamma(a) = \gamma(b)$

Preuve :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt$$

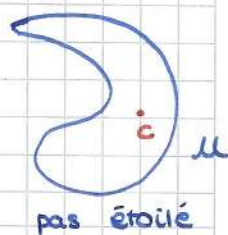
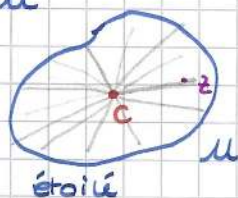
$$= [F \circ \gamma]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Condition suffisante pour l'existence d'une primitive :

Déf : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, U est dit étoilé si $\exists c \in U$ tq $\forall z \in U$

$$[c, z] = \{ tc + (1-t)z \mid t \in [0, 1] \} \subset U$$

c est alors un centre de U .



Thm 3.3

Prop :

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ de centre c

Supposons que $\forall$ triangle $\Delta \subset U$ ayant c comme sommet, on a

$$\int_{\partial \Delta} f(s) ds = 0 \quad \text{où } \partial \Delta \text{ est le bord du } \Delta.$$

Alors f a une primitive F donnée par :

$$F(z) = \int_{[c, z]} f(s) ds \quad \forall z \in U \quad \text{où } [c, z] \text{ est le chemin}$$

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & zt + c(1-t) \end{array}$$

Preuve:

Soit $z_0 \in U$, comme U est un ouvert étoilé pour $z \in U$ assez proche de z_0 , alors le Δ de sommet z, z_0, C est inclus dans U .

Pas d'hypothèse, l'intégrale de f sur le $\partial\Delta$ est 0,

$$\partial\Delta \text{ est } [C, z_0] + [z_0, z] + [z, C] = [C, z_0] + [z_0, z] - [C, z]$$

Donc en définissant F comme dans l'énoncé, et par la formule par les compo. de chemins et le renversement de chemins pour les intégrales curvilignes :

$$F(z_0) + \int_{[z_0, z]} f(\sigma) d\sigma - F(z) = 0$$

$$\text{ie : } F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0, z]} f(\sigma) d\sigma$$

$$\text{On écrit } f(\sigma) = f(z_0) + (f(\sigma) - f(z_0))$$

$$\text{On obtient } F(z) = F(z_0) + f(z_0)(z - z_0) + \int_{[z_0, z]} (f(\sigma) - f(z_0)) dz$$

$$\text{Par une prop. précédente : } \left| \int_{[z_0, z]} f(\sigma) - f(z_0) dz \right| \leq \max_{\sigma \in [z, z_0]} |f(\sigma) - f(z_0)| (z - z_0)$$

$$\xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \quad \text{car } f \text{ est continue.}$$

□

$\Rightarrow F$ est dérivable en z_0 de dérivée $f(z_0)$

0. Motivation:

Analyse réelle : 2 opérations : $\frac{d}{dx} F$, $\int_a^b f dx$

- $F' = f \Rightarrow \int_a^b f dx = F(b) - F(a)$

- Soit $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow f = F'$

↑ suffit si f est continue

Analyse complexe: 2 opérations : $\frac{d}{dz} F$ - holomorphe, $\int_C f dz$ - curviligne

(A) : F - holomorphe sur $U \subset \mathbb{C}$, $C \subset U$, $F' = f$

$\Rightarrow \int_C f dz = F(q) - F(p)$ où $p \xrightarrow{C} q$

En particulier, C - fermée ($p=q$) $\Rightarrow \int_C f dz = 0$

c.v.d: si f a une primitive $\Rightarrow \int_C f dz = 0 \forall C$ fermée

p.ex: $f(z) = \sum_{L=0}^N a_L z^L$ et $F = \sum_{L=0}^N \frac{a_L}{L+1} z^{L+1}$

comme primitive.

Notation: Si U - convexe, on note par ∂U la courbe entière fermée avec l'orientation anti-horaire. (Sens Trigo)

Ex: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\int_{\partial B(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$
 $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive)



centre est p

- $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ Cont, U - étoilé, et $\forall T \subset U$
 $T = \Delta$, $\int_{\partial T} f dz = 0 \Rightarrow F(z) = \int_{[p,z]} f(w) dw$
est une primitive, c.v.d $F' = f$.

Thm: Lemme de Goursat

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom, $T \subset U$ triangle (fermé); alors
 $\int_{\partial T} f dz = 0$

Cor: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom, U - étoilé $\Rightarrow f$ a une primitive

Rappel :

- Estimation Standard : $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C} |f(z)| \cdot L(C)$
- $S \subset \mathbb{C}$, $\text{diam}(S) = \sup_{z, w \in S} |z - w|$
- f - holomorphe $\Rightarrow f(z) = f(p) + f'(p) \cdot (z-p) + \gamma(z)(z-p)$ $p \in U$
où γ est continue sur U et $\gamma(p) = 0$

Observation :

T -triangle $\Rightarrow L(\partial T) \leq 3 \cdot \text{diam}(T)$

Preuve :

(Pas examen) Lemme de Goursat.

Soit $\int_{\partial T} f(z) dz = W$

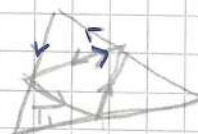
- $\Rightarrow$ on crée $T_1, \dots, T_4$ en divisant T

$$\text{Diam}(T_j) = \frac{1}{2} \text{diam}(T)$$

$$L(\partial T_j) = \frac{1}{2} L(\partial T)$$

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_j} f(z) dz$$

dont 6 s'annulent



$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{\partial T_j} f(z) dz \right|$$

Alors $\exists T^{(1)} \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ tq $\left| \int_{\partial T^{(1)}} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f dz \right|$

- Par induction :

$$T^{(1)} \rightsquigarrow T^{(2)} \quad \left| \int_{\partial T^{(2)}} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T^{(1)}} f dz \right|$$

$T \supset T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \dots \supset T^{(n)} \supset \dots$ Chaque fois il est 2x + petit

$$\text{diam}(T^{(n)}) = \frac{1}{2} \text{diam}(T^{(n-1)}) = \frac{1}{2^n} \text{diam}(T)$$

$$\left| \int_{\partial T^{(n)}} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T^{(n-1)}} f dz \right| \geq \dots \geq \frac{1}{4^n} |W|$$

- $\bigcap_{j=1}^{\infty} T^{(j)} = \{p\}$ ($\exists p$ tq)

• T compact $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} \dots \neq \emptyset$

• $\text{diam} \bigcap = 0$



Analyse Complexe:

le 30.10.18

Preuve: (Suite)

- Estim. locale: $\int_{\partial T^{(n)}} f dz = \int_{\partial T^{(n)}} [f(p) + f'(p) \cdot (z-p)] dz + \int_{\partial T^{(n)}} \gamma(z)(z-p) dz$

Alors $|\int_{\partial T^{(n)}} f dz| \leq \max_{z \in T^{(n)}} |\gamma(z)| \cdot \text{diam } T^{(n)} \cdot L(\partial T^{(n)})$

$$\leq \max_{z \in T^{(n)}} |\gamma(z)| \cdot 3(\text{diam } T^{(n)})^2$$
$$= \max_{z \in T^{(n)}} |\gamma(z)| \cdot \frac{3}{2^{2n}} (\text{diam } T)^2$$

- On combine les 2 estimations:

$$\frac{|W|}{4^n} \leq \frac{3(\text{diam } T)^2}{4^n} \cdot \max_{z \in T^{(n)}} |\gamma(z)|$$

$$\Rightarrow |W| \leq 3 \cdot (\text{diam } T)^2 \cdot \max_{z \in T^{(n)}} |\gamma(z)|$$

$\downarrow$
 $\gamma(p) = 0$

$$\Rightarrow |W| = 0$$

□

Conclusion: Thm B + lemme de Goursat $\rightarrow$ thm de Cauchy

Thm 4.2

Thm: de Cauchy

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom, U -étoilé, alors f a une primitive sur U ($\exists F: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom $F' = f$) et $\int_C f dz = 0 \forall C$ -fermé

Preuve: On utilise Thm A.

Domaines plus généraux:

Déf: $U \subset \mathbb{C}$ ouvert est connexe si $\forall p, q \in U \exists C \subset U$ tq

$p \xrightarrow{C} q$

Ex: $B_1(0) \cup B_1(5)$ pas connexe $\bigcirc \quad \bigcirc$

Prop: $f: U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ holom, U_1, U_2 ouverts avec
 F_1 primitive sur U_1 , F_2 primitive sur U_2
 si $U_1 \cap U_2$ est connexe $\Rightarrow \exists F$ primitive de f sur
 $U_1 \cup U_2$

Ex:



Dans la double croix, U_1, U_2 - étoilé, $U_1 \cup U_2$ - pas étoilé
 mais $U_1 \cap U_2$ connexe

$\Rightarrow$ Thm de Cauchy est valable.

1e 06.11.18

Formule intégrale de Cauchy:

Rappel: Programme

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ holomorphe si $|z-p| < R_d C$
2. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, U - étoilé, alors $\exists F$ tq $F' = f$
3. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $F' = f$ alors $\int_C f(z) dz = 0$ pour C fermé

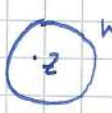
Remarque: 1. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow f$ est C^∞ et $f' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$
 et $\frac{f^{(n)}(p)}{n!} = a_n$

Thm 5.1

Thm: Formule intégrale de Cauchy pour le Cercle

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\bar{D}_r(p) \subset U$, $|z-p| < r$

Alors
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}_r(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Remarque:  les valeurs de f dans $\bar{D}_r(p)$ sont déterminées par
 ses valeurs sur le cercle.

Preuve: (Examen ♥)1. Considérons le cas $z = p$

$$f(p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-p} dw$$

2. On fait un petit calcul:

1 $\rightarrow$ 2
 Δ pas de lien Δ

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(p)}{w-p} dw = \frac{f(p)}{2i\pi} \int_{\partial D_r(p)} \frac{dw}{w-p} = *$$

On paramétrise: $\partial D_r(p): p + r \cdot e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$* = \frac{f(p)}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{it}}{r e^{it}} dt = \frac{f(p)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(p).$$

3. Soit $g(z) = \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$, si $\int_{\partial D_r(p)} g(w) dw = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-p} dw = \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(p)}{w-p} dw$$

Donc si on aq $\int_{\partial D_r(p)} g(w) dw = 0$ alors on montre *4. La fonction $g(z)$ est holomorphe dans $U \setminus \{p\}$, alors

$$\int_{\partial D_r(p)} g(w) dw = \int_{\partial D_{\varepsilon}(p)} g(w) dw$$

Pu égalité: les V_L sont étoilés (pour ε petit)

$$\Rightarrow \textcircled{II} \Rightarrow \int_{V_L} g(w) dw = 0 \quad L = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{L=1}^4 \int_{\partial V_L} g(w) dw = \int_{\partial D_r(p)} g(w) dw - \int_{\partial D_{\varepsilon}(p)} g(w) dw + \sum_{L=1}^4 \int_{C_{mL}} g(w) dw + \sum_{L=1}^4 \int_{-C_{mL}} g(w) dw = 0$$

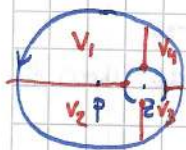
$$\text{Mais } \sum \int_{\partial V_L} = 0 \Rightarrow \square$$

5. f holomorphe $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow p} (g(z)) = f'(p)$ alors g est continue dans U .En particulier, g est continue sur $\overline{D_r(p)}$ qui estcompact $\Rightarrow \exists B > 0$ tq $|g(z)| < B \quad \forall z \in \overline{D_r(p)}$

Preuve: (Suite)

Alors $\left| \int_{\partial D_r(p)} g(w) dw \right| = \left| \int_{\partial D_E(z)} g(w) dw \right| \leq \overset{\text{est. std}}{B \cdot 2\pi E r}$

Conclusion: $\int_{\partial D_r(p)} g(w) dw = 0$



6. $z \neq p$

La fonction $\frac{f(w)}{w-z}$ pour z -fixe et $w \in U \setminus \{z\}$

alors elle est holomorphe en w .

Alors $\int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw \stackrel{\Delta}{=} \int_{\partial D_E(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

si E est petit alors V_1, V_2, V_3, V_4 sont étoilés

Donc l'argument (4) amène:

$$\int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\partial D_E(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Mais $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_E(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$ par la 1^{ère} partie

par Δ on a $f(z) = \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw \cdot \frac{1}{2\pi i} \square$

Domaines plus généraux:

Thm:

Formule intégrale pour ∂ de domaine convexe

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\Omega \subset U$ convexe tq

$\bar{\Omega} \subset U$ et $\partial \Omega$ est fermée et lisse par morceaux. ($\square \Omega$)

Alors $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(w)}{w-z} dw$

Preuve:

si E est petit (rayon), alors $P_1, \dots, P_4$ seront les centres de

$V_1, \dots, V_4$ et on répète l'argument (4) de la preuve



Applications:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

On a $|z-p| < r$ et $|w-p| = r$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-p) - (z-p)} = \frac{1}{w-p} \frac{1}{1 - \frac{z-p}{w-p}} \\ &= \frac{1}{w-p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{w-p} \right)^n \end{aligned} \quad \left| \frac{z-p}{w-p} \right| < 1$$

$$\text{alors } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-p)^n}{(w-p)^{n+1}} dw$$

convergence absolue et uniforme $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)(z-p)^n}{(w-p)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^n \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

qui converge pour $w \in \partial D_r(p)$ et $z \in D_r(p)$

Non ok
Il manque qqch

Thm:

Conclusion

- 1) $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, alors $\forall p \in \mathcal{U} \exists R_p$ tq $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$
- 2) $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} dw$ et donc
 $f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} dw$
- 3) $\mathcal{U}$ Rdc de cette série $\supset \text{dist}(p, \partial \mathcal{U})$

Application de formule intégrale de Cauchy

Rappel: U - ouvert, $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U) = \min_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |z - w|$

propriétés:

- 1) $\text{dist}(\cdot, \mathbb{C} \setminus U) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ est continue
- 2) $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U) > 0 \iff z \in U$

Thm: (Rappel) holom - analytique

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom, $p \in U$

1. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-p)^n$ série entière convergente pour $|z-p| < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U)$
2. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} dw$ où Ω comme dans F.I.C.

Applic. 1: Séries entières.

Ex: Quotient

$f(z) = 1 + \sum a_n z^n$, série $1/f$

$$(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \times (1 + b_1 z + \dots) = 1$$

Récursion $\{a_n\} \rightarrow \{b_n\}$

$$z: a_1 + b_1 = 0 \implies b_1 = -a_1$$

$$z^2: a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0 \implies b_2 = -a_2 - a_1 b_1 = -a_2 + a_1^2$$

$$z^n: a_n + \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j} + b_n = 0 \implies b_n = -a_n - \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j}$$

Question: convergence $\sum b_n z^n$?

Prop: Si $\sum |a_n| \leq 1$ alors $1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ est convergente pour $|z| < 1$
[Rdc ≥ 1]

Analyse Complexe:

le 13.11.18

Preuve:

$$\sum |a_n| \leq 1 \Rightarrow f(z) \text{ est holomorphe pour } |z| < 1$$

$$f(z) \neq 0 \text{ pour } |z| < 1$$

$$\leadsto 1/f(z) \text{ holom pour } |z| < 1$$

Par thm holom-analytique:

$$\text{dist}(0, \mathbb{C} \setminus D_r(0)) = 1$$

$$1/f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n \text{ convergente pour } |z| < 1$$

Mais $f(z) \cdot 1/f(z) = 1$ donc B_n satisfait la m même récursion que b_n .

$$\text{On conclut } B_n = b_n$$

□

Applic. II: thm fond algèbre:

Rappel: Estimation standard

$$\left| \int_C g(z) dz \right| \leq \max_{z \in C} |g(z)| \cdot L(C)$$

Cor: Inégalité de Cauchy

(Partie 2 du thm holom-analytique)

$$\text{Rappel } a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$$

$$\text{Estimation std } \leadsto |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \partial \Omega} \left| \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} \right| L(\partial \Omega)$$

Ex: Considérons $\Omega = D_r(0)$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \partial D_r(0)} \left| \frac{f(w)}{(w-0)^{n+1}} \right| \cdot \overbrace{L(\partial D_r(0))}^{= 2\pi r} = *$$

$$[w-0 = w \text{ et } w \in \partial D_r(0) \Leftrightarrow |w| = r]$$

$$* = \frac{1}{2\pi} \frac{\max |f(w)|}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r$$

Prop: Inégalité de Cauchy: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holom (entière)

$$\text{Alors } f(z) = \sum a_n z^n \text{ avec } |a_n| \leq \frac{\max |f(w)|}{r^n}$$

$$| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |$$

Thm 7.2

Thm:

de Liouville

holomorphe

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et f -bornée $\Rightarrow f$ constante

Preuve:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{Thm Holom} \rightarrow \text{analytique})$$

$$|a_n| \leq \max_{|w|=r} |f(w)| \left(\frac{1}{r^n} \right)$$

f est bornée, $\exists b > 0$ tq $|f(z)| < b \quad \forall z$

$$\rightarrow \max_{|w|=r} |f(w)| < b \Rightarrow |a_n| < \frac{b}{r^n} \quad \forall r$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \quad (\text{si } r \rightarrow \infty \quad \frac{b}{r^n} \rightarrow 0) \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \square$$

Thm 7.3

Thm:

Fondamental de l'Algèbre.

Soit $Q(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ polynôme de degré $N > 0$ ($a_N \neq 0$)

Alors $\exists p \in \mathbb{C}$ tq $Q(p) = 0$

Preuve:

On montre pour $Q(z)$ - monique ($a_N = 1$) [Sinon $Q(z) \sim Q(z)/a_N$]

Par l'absurde:

Supposons $Q(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow 1/Q(z)$ est holom. entière ($\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)

$$1/Q(z) = 1/z^N + a_{N-1}/z^{N-1} + \dots + a_0 = \frac{1}{z^N} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{a_{N-1}}{z} + \frac{a_{N-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^N}}_{=0 \quad z \rightarrow \infty}}$$

$\forall R > 1$ tq $|\dots| \leq 1/2$ pour $|z| \geq R$

$$|1/Q(z)| \leq \frac{1}{|z^N|} \cdot \frac{1}{1-1/2} \quad \text{pour } |z| \geq R \geq 1$$

$$\rightarrow |1/Q(z)| \leq 2 \quad \text{pour } |z| \geq R$$

$1/Q(z) \Big|_{\overline{D_R(0)}}$ est une fct continue sur un compact.

alors $\exists B > 0$ tq $|1/Q(z)| < B$ pour $|z| \leq R$

Conclusion:

$|1/Q(z)| \leq B + 2$ alors $1/Q(z)$ est bornée, entière

Par thm Liouville $1/Q(z) = c \Rightarrow Q(z) = \frac{1}{c}$ alors

$Q(z)$ est de degré 0 ∇

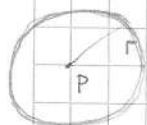
$\square$

Analyse Complexe:

le 13.11.18

Applic III: Principe de moyenne / maximum

A mettre dans le résumé



$$\text{F.I.C. et } \Omega = D_r(p) \quad z = p \quad f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_r(p)} \frac{f(w)}{w-p} dw$$

Paramétrisation de $\partial D_r(p)$:

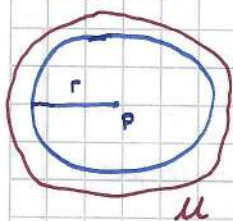
$$\gamma(t) = p + re^{it} \quad \gamma'(t) = ire^{it}$$

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(p + re^{it}) \cdot ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it}) dt$$

Interprétation: la valeur du milieu est la moyenne des valeurs sur le cercle.

Rappel: Principe de moyenne:

le 20.11.18
A mettre dans le résumé



$$\text{F.I.C.} \rightsquigarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it}) dt}_{\text{La moyenne}}$$

$$\text{Si } g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ la moyenne: } \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

Thm: Principe de maximum local

($|w-z| \leq r \Leftrightarrow w \in \overline{D_r(z)}$)

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $z \in U$ et $\overline{D_r(z)} \subset U$

Si $|f(z)| = \max_{|w-z| \leq r} |f(w)|$ [on dit que f a un max local en z]

Alors, $f(w) = f(z) \quad \forall w \in \overline{D_r(z)}$ [alors f est constante]

Preuve: 0. lemme: Princ. max sur $\mathbb{R}$

8.1

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont., $\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \leq \max_{a \leq x \leq b} g(x)$ (*)
si (*) est = alors g est constante

1. On utilise la moyenne:

$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})| dt \quad \text{lemme} \quad \leq$$

$$|g(t)| = |f(z + re^{it})| \leq \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(z + re^{it})| \leq \max_{w \in \overline{D_r(z)}} |f(w)| = |f(z)|$$

Preuve: $\Rightarrow$ tout $\leq$ est $=$

En particulier $\boxed{\leq}$ est $= \leadsto |f(z + re^{it})|$ est constante
 en fait $|f(z + re^{it})| = |f(z)|$

2. $f(z + re^{it}) = f(z) \cdot e^{i\theta(t)} = f(z) [\cos(\theta(t)) + i\sin(\theta(t))]$

Dans la moyenne, $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) [\cos + i\sin] dt$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(\theta(t)) + i\sin(\theta(t))] dt$ $\rightarrow$ s'annule car i n'a pas de partie imaginaire

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta(t)) dt$ on applique le lemme avec $g(t) = \cos \theta(t)$

$g(t) \leq 1$, Mais comme $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt$

$\leadsto \cos \theta(t) = 1$ et $\sin \theta(t) = 0$

Comme $f(z + re^{it}) = f(z) [\cos \theta(t) + i\sin \theta(t)] = f(z)$.

On peut répéter cet argument $\forall r' < r$ et donc $f(z + r'e^{it}) = f(z)$

$\forall 0 \leq r' < r$ et $0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow f(w) = f(z)$ pour $w \in \overline{D_r(z)}$

Thm 8.2

Thm: Principe maximum global



$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom, U -connexe et borné, $f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

Si $\max_{w \in \overline{U}} |f(w)| = |f(z)|$ pour $z \in U$ alors f est constante (cot)

si f n'est pas cst alors la valeur max de $|f(x)|$ va se trouver à la frontière

Preuve:

Problème: Trouver $\max_{|z| \leq 1} |z^2 + z - 1| = ?$

Thm $\leadsto \max_{|z|=1} |z^2 + z - 1|$

$z: z\bar{z} = 1$

On peut maximiser $|z^2 + z - 1|^2 = (z^2 + z - 1)(\bar{z}^2 + \bar{z} - 1) =$

$= 1+1+1+0+0 - (z^2 + \bar{z}^2) = 3 + e^{2it} + e^{-2it} = 3 + \cos 2t$

le max $= 4$. Donc $\max_{|z| \leq 1} |z^2 + z - 1| = 2 \leadsto$ Max loc

$|f(z)|$ max global de $|f(w)|$ sur $w \in \overline{U}$

$\exists R$ tq $f(w)$ est cst sur $\overline{D_R(z)}$

Preuve: (Suite)

Par l'absurde, $\exists \tilde{z} \in U$ tq $f(z) \neq f(\tilde{z})$.

U connexe $\leadsto \exists \gamma: [0,1] \rightarrow U$ $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = \tilde{z}$

$t_{\text{dern}} = \sup \{t \mid f(\gamma(t)) = f(z)\}$ Mais $f(\gamma(t_{\text{dern}})) = f(z)$ donne un max local $\exists D_r(\gamma(t_{\text{dern}}))$.

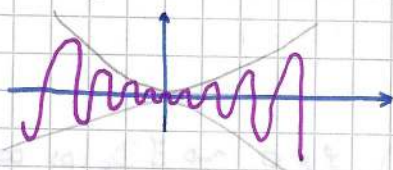
$\exists r'$ tq dans $D_{r'}(\gamma(t_{\text{dern}}))$ $f(w)$ est const = $f(z)$ $\nexists$ (t_{dern} pas dernier)

Prolongement:

La clé: les zéros des fonctions holomorphes sont isolés.

Ex:

Analyse Réelle



$$g(x) = x^2 \sin(1/x)$$

les zéros ne sont pas isolés.

Thm des zéros isolés.

Thm:

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom $\neq 0$ $z \in U$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $f(w) \neq 0$ pour $0 < |w - z| < \varepsilon$

Pr:

• Si $f(z) \neq 0$ comme f est continue $\exists \varepsilon > 0$ tq $f(w) \neq 0$ pour $w \in D_\varepsilon(z)$.

• Si $f(z) = 0$ alors $f(w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (w-z)^j$ avec $a_0 = 0$

soit $k = \min \{j \mid a_j \neq 0\}$

$$f(w) = (w-z)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} (w-z)^n \quad \text{où } a_k \neq 0$$

$$f(w) = \underbrace{(w-z)^k}_{F(w)} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} (w-z)^n}_{G(w)}$$

$G(w) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $G(w) \neq 0$ si $|w-z| < \varepsilon$

$F(w) \neq 0$ pour $w \neq z$

Alors $F(w) \cdot G(w) \neq 0$ pour $0 < |w-z| < \varepsilon$

□

Cor : Unicité locale

$f_1, f_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holom ; $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \longrightarrow z \in \mathcal{U}$ tq $f_1(z_j) = f_2(z_j)$
alors $\forall f_1(w) = f_2(w)$ pour $|w - z| < \varepsilon$

Pr :

$f_1 - f_2$ a des zéros aux points $z_1, \dots, z_n, \dots$ qui ne sont pas isolés
alors $f_1 - f_2 \equiv 0$ selon thm précédent.

Cor :

Unicité globale

$f_1, f_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holom. $\mathcal{U}$ -connexe, $z_j \rightarrow z \in \mathcal{U}$, $f_1(z_j) = f_2(z_j)$
alors $f_1 \equiv f_2$

Prolongement analytique (suite)

le 27.11.18

Rappel :

• Thm (zéro isolé)

f -holom, $f(p) = 0$ $\mathcal{U} \ni p$ $f \neq 0 \leadsto \exists D_\varepsilon(p)$ tq $f(z) \neq 0$
si $z \in D_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$

• Cor (Unicité locale)

$z_j \rightarrow z$ $f(z_j) = g(z_j) \Rightarrow \exists D_\varepsilon(z)$ tq $f(w) = g(w) \forall w \in D_\varepsilon(z)$

• Cor (Unicité globale)

$g, f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holom, $z_j \rightarrow z \in \mathcal{U}$, $f(z_j) = g(z_j)$, $\mathcal{U}$ connexe
alors $f \equiv g$

(Preuve : on utilise l'unicité locale, autour de z et

par l'absurde, on suppose que $f \neq g \Rightarrow \exists \tilde{z}$ tq $f(\tilde{z}) \neq g(\tilde{z})$.

Comme $\mathcal{U}$ connexe on rejoint $\tilde{z}$ et z , mais $\exists$ un dernier
pt où elles sont égales, il existe un petit disque

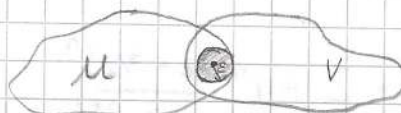
autour $\tilde{z}$ $\tilde{z} \in$ un petit disque $\Rightarrow f \equiv g$)

[Comme thm principe maximum]

Analyse Complexe:

le 27.11.18

Thm: Prolongement

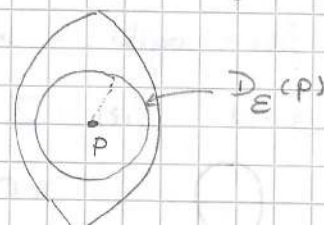


$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ holom, $U \cap V$ connexe

$p \in U \cap V$, et $\exists D_E(p) \subset U \cap V$ tq $f|_{D_E(p)} = g|_{D_E(p)}$

Alors $\exists \tilde{f}: U \cup V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tq

$$\tilde{f}|_U = f \text{ et } \tilde{f}|_V = g$$

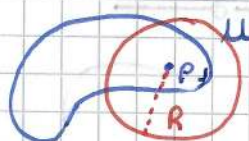


Pv: Corollaire du thm sur l'unicité

$U \cap V$ connexe, $f = g$ sur $D_E(p) \Rightarrow \exists z_j \rightarrow p$ tq $f(z_j) = g(z_j)$

$\leadsto f = g$ sur $U \cap V$. Donc on peut définir $\tilde{f}(w) = \begin{cases} f(w) & \text{si } w \in U \\ g(w) & \text{si } w \in V \end{cases}$
pas de contradiction dans la définition □

Application (prolongement analytique)



$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n, \quad R = \text{RdC}$$

$$R > \text{dist}(p, \partial U)$$

On peut agrandir le domaine $U \leadsto U \cup D_R(p)$ si

$U \cap D_R(p)$ - connexe.

Ex: $f = 1/z$

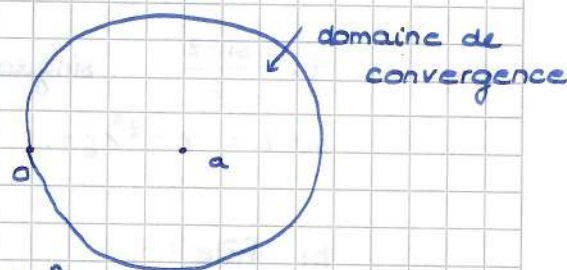
$$1/z = \frac{1}{a + z - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}} (-1)^n$$

$$\bullet a=1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$$

$$z = 1/2 \quad \leadsto 1/(1/2) = \sum (1-1/2)^n = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2$$

$$z = 2 \quad \leadsto 1/2 = \sum (1-2)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$z = 3 \quad \leadsto 1/3 = \sum (-2)^n$$



Prolongement! $f: D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ ha $a \leadsto b \in D_R(a)$

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \cdot (z-b)^n \quad \text{à} \quad f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \binom{k}{n} (b-a)^{k-n}$$

prolongement en b.

est valable dans le prolongement.

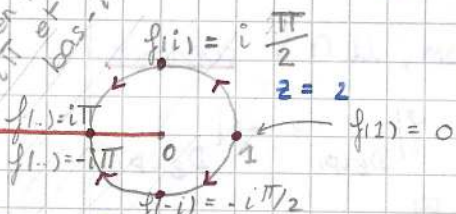
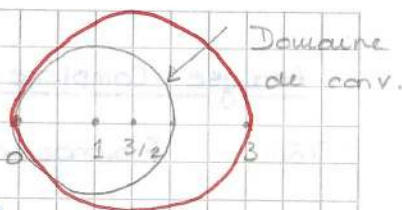


Ex: (Suite)

contradiction
par en fait
bas - iπ

$$b = 3/2$$

$$1/2 = \sum (-1)^n \frac{(z - 3/2)^n}{3/2^{n+1}}$$



$$1/2 = \sum (-1)^n \frac{(1/2 - 3/2)^n}{(3/2)^{n+1}} = 1/2$$

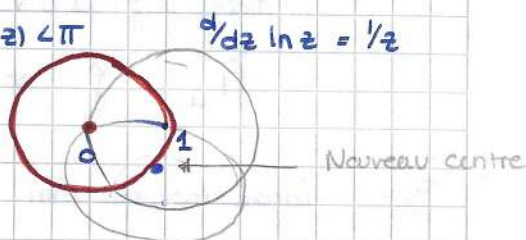
Ex:

$$f(z) = \log(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z) \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$$

$$a = 1 \quad f(z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad \operatorname{RdC} = 1$$



$\forall n \quad U_n$ n'est pas connexe



Singularités isolées:

Notation: $D_r^*(p) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - p| < r\} = D_r(p) \setminus \{p\}$

Déf: Si $f: D_r^*(p) \rightarrow \mathbb{C}$ holom, alors on dit f a une singularité isolée à p .

Classification:

Déf:

a) Singularité supprimable:

$$\exists \tilde{f}: D_r(p) \rightarrow \mathbb{C} \text{ holom tq } \tilde{f}|_{D_r^*(p)} = f$$

Ex:

$$f = \frac{\sin z}{z}$$

singularité à $z = 0 \rightsquigarrow \tilde{f}(0) = 1$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \dots \quad \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \dots = \tilde{f} \quad \operatorname{RdC} = \infty$$

b) Pôle:

La singularité n'est pas supprimable, mais $1/f$ a une singularité supprimable à p .

Ex:

$f(z) = 1/z$ n'est pas supprimable au point $z = 0$

parce que si $\exists \tilde{f}: D_r(p) \rightarrow \mathbb{C}$ holom alors $\tilde{f}$ est bornée dans $D_r^*(p)$ $r' < r$

Pas le cas pour $1/z$, $1/f$ a une singularité suppr. $1/(1/z) = z$.

Déf: c) Singularité essentielle

si elle n'est ni supprimable, ni pôle.

Ex: $f(z) = e^{1/z}$ holom. dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$1/f = e^{-1/z}$$

Il suffit de mq f et $1/f$ ne sont pas bornées dans un voisinage

$$\text{de } 0. \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = \infty$$

le 04.12.18

Rep: $p \in \mathbb{U}$, $f: \mathbb{U} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe

1) p est supprimable: $f(z) = (z-p)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-p)^{n-k}$, $a_k \neq 0$, $k \geq 0$

si $k > 0 \rightarrow f$ a un zéro d'ordre k au point p .

2) p est un pôle: $f(z) = (z-p)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-p)^{n-k}$ $a_k \neq 0$ et $k < 0$

on dit que f a un pôle d'ordre $-k$ à p .

3) p est essentielle:

Ex: TRM Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$

Ex: $\frac{(\sin z)^2}{z}$, $p = 0$

supprimable $z \cdot \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{3} + \dots\right)^2$

c'est un zéro d'ordre 1 (Terminologie: zéro simple)

$\frac{z}{(\sin z)^2}$ a un pôle à $p = 0$

$$1/(z/\sin^2 z) = \frac{(\sin z)^2}{z} = z \cdot \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z^2}{3} + \dots\right)^2$$

c'est un pôle simple (d'ordre 1)

Déf: $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe, si $\exists S \in \mathbb{U}$ discret tq

$f|_{\mathbb{U} \setminus S}$ holomorphe et la singularité de f à $p \in S$ est

pôle ou supprimable.

Exercice: Si $f, g: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 2 fonctions méromorphes, alors $f+g, f \cdot g, f/g$ sont méromorphes.

Ex: $1/\sin z$ - méromorphe

Dans ce cas $S = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

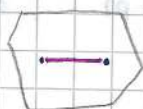
Tous les pôles sont simples.

Ex: $P(z)/Q(z)$ rationnelle $\rightarrow$ méromorphe

II. Généraliser le thm de Cauchy aux fonctions avec singularités isolées:

Rap: Nos domaines:

convexes, Étoilés, connexe



Lemme: (Exercice)

A, B convexes $\Rightarrow A \cap B$ convexe

A, B étoilés $\Rightarrow A \cap B$ étoilé

A, B connexes $\nRightarrow A \cap B$ connexe



Rap: Thm de Cauchy:

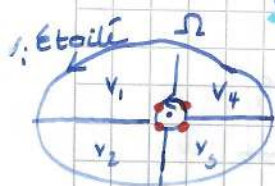
$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{U}$ -étoilé, $\rightarrow \int_c f dz = 0$ ($c \subset \mathcal{U}$ fermée)

F.I.C.:

$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holom, Ω convexe, $\overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$, $z \in \Omega$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(w)}{w-z} = f(z)$$

Partie de la preuve:



$$g = \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

$$= \int_{\partial D_\epsilon(z)} g(w) dw$$

g a une sing. isolée à $z \Rightarrow \int_{\partial \Omega} g(x) dx$

Écrire au propre

Analyse Complexe:

le 04.12.18

Thm: Intégrales curvilignes des fonctions méromorphes (ICM)

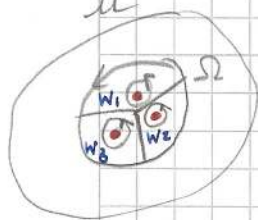
Thm 4.2

$f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ méromorphe, Ω convexe, $\bar{\Omega} \subset U$,

(pas de pôle dans $\partial\Omega$), Ω borné

Alors, l'ensemble S des pôles dans Ω est fini et

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{p \in \Omega} \int_{\partial D_\varepsilon(p)} f(z) dz \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ petit.}$$



pas exigée

Pv: $w_i \cap \Omega$ convexe (w_i et Ω convexe)

rien compris.

$$\int_{\partial(w_i \cap \Omega)} f(z) dz = \int_{\partial D_\varepsilon(p_i)} f(z) dz \text{ où } p_i = S \cap w_i$$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial(\Omega \cap w_i)} f(z) dz$$

III Corollaires:

Thm: $f: D^*(p) \rightarrow \mathbb{C}$ holom et bornée, alors la singularité est supprimable.

Pv: pas exigée

$$\begin{aligned} z \in D^*(p) &, \int_{D^*(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw \stackrel{\text{thm ICM}}{=} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\partial D_\varepsilon(p)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + \underbrace{B \cdot 2\pi \varepsilon}_0 = 2\pi i \cdot f(z) \end{aligned}$$

$f \in C \checkmark \rightsquigarrow$ on peut développer f en série entière

IV Résidus:

Calculons les contributions de $\int_{\partial D_\varepsilon(p)} f(z) dz$ à la somme dans le thm ICM

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-p)^n \quad (k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0) \\ &= (z-p)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$$

$$f^-(z) = \sum_{n=k}^{-1} a_n (z-p)^n$$

$$\text{Alors } f = f^+ + f^- \quad \left(\text{Ex: } \frac{1}{z^2(1-z)} = \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{f^-} + \underbrace{\frac{1}{z} + 1 + z + \dots}_{f^+} \right)$$

$$f^+ \text{ holom} \rightsquigarrow \int_{\partial D_\varepsilon(p)} f^+ dz = 0$$

• $\int_{\partial D_r(p)} \frac{(z-p)^L}{z^L} dz = ?$ deux cas :

1) $L \neq -1 \leadsto \frac{(z-p)^L}{z^L}$ a une mprimitive, $\frac{d}{dz} \frac{z^{L+1}}{L+1} = z^L$, et donc $\int_{\partial D_r(p)} z^L dz = 0$

2) $L = -1 \leadsto \int_{\partial D_r(p)} \frac{dz}{z-p} = 2\pi i$

Conclusion: $\int_{\partial D_\varepsilon(p)} f(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$

Thm: des résidus

Déf: f a un pôle à p , alors $f(z) = \sum_{n=-R}^{\infty} a_n (z-p)^n$ $R < \infty$

on écrit $\text{Res}_{z=p} f(z) = a_{-1}$

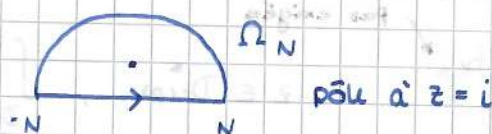
Ex: $\text{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2(1-z)} = 1$

Conditions comme thm ICm

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} f(z) dz = \sum_{p \in S} \text{Res}_{z=p} f(z)$

Application:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{dz}{1+z^2}$



Thm Res $\leadsto \int_{\partial \Omega_N} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi = \pi$

Calcul d'intégrales :

Ingrédients théorique:

Rap: 1. Thm des Résidus

$f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ méromorphe, $S \subset U$ les pôles, Ω - convexe,
 $\bar{\Omega} \subset U$, $S \cap \partial\Omega = \emptyset$. Alors $\int_{\partial\Omega} f dz = 2\pi i \sum_{p \in S \cap \Omega} \text{Res}_{z=p} f(z)$

Rem: Domaines plus généraux

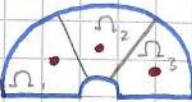
Ex:  convexe

 pas convexe • S , le théorème s'applique

car on prend $\Omega_1 =$  et $\Omega_2 =$ 

$$\int_{\partial\Omega_1} + \int_{\partial\Omega_2} = \int_{\partial\Omega} \text{ car } \leftarrow \text{ et } \rightarrow \text{ s'annulent}$$

car Ω_1 et Ω_2 convexe

Ex:  Ω , la formule est vraie,

$$\sum_i \int_{\partial\Omega_i} = \int_{\partial\Omega}$$

Mais  Ω , pas convexe
 Ω_1 est convexe Ω_2 étoilé

$$\text{Donc } \int_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega_1} + \int_{\partial\Omega_2} = 0 \text{ car } S \notin \Omega_2 \text{ étoilé}$$

$$= \int_{\partial\Omega_1}$$

2. Calcul des résidus:

• Cas du pôle simple: (ordre 1)

$$f(z) = \frac{1}{z-p} \cdot g(z) \text{ où } g(z) \text{ est holom. en } p.$$

Dans ce cas: $\text{Res}_{z=p} f(z) = a_{-1}$, où $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-p)^n$

$$\text{est égale à } g(p) \text{ où } \text{Res}_{z=p} f(z) = \lim_{z \rightarrow p} f(z)(z-p)$$

3. Estimation standard :

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq L(C) \cdot \max_{z \in C} |f(z)|$$

Ex: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \pi$

1) Convertir l'intégral en intégral curviligne

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[-N, N]} \frac{dz}{z^2+1}$$

pour vérifier on paramètre $[-N, N]$: $\gamma(t) = t \quad t \in [-N, N]$

donc $\gamma'(t) = 1$

$$\int_{[-N, N]} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-N}^N \frac{dt}{t^2+1} \quad dz \rightarrow \gamma'(t) dt$$

2) Compléter le contour



$$\partial \Omega_N = [-N, N] + C_N$$

$$\int_{\partial \Omega_N} f dz = \int_{[-N, N]} f dz + \int_{C_N} f dz$$

3) Estimation standard

$$\left| \int_{C_N} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq L(C_N) \cdot \max_{z \in C_N} |f(z)| = \pi N \cdot \max_{z \in C_N} \frac{1}{|z^2+1|}$$

$$|z^2+1| \geq |z^2|-1 \quad z \in C_N \Rightarrow |z| = N \Rightarrow |z^2+1| \geq N^2-1$$

$$\Rightarrow \left| \int_{C_N} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \pi N \cdot \frac{1}{N^2-1} = \frac{\pi N}{N^2-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Conclusion: 1) + 2) + 3) $\leadsto I = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega_N} \frac{dz}{z^2+1}$

4) Théorème des Résidus :

$$f = 1/(z^2+1) \text{ méromorphe} \quad f(z) = 1/(z+i)(z-i) \Rightarrow \text{pôles } S = \{\pm i\}$$

$$\Omega_N \text{ est convexe } \checkmark \quad \text{donc thm} \Rightarrow \int_{\partial \Omega_N} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

$$S \cap \Omega_N = \{i\} \quad \text{--- (ne dépend pas de } N)$$

5) Évaluation des Résidus

Analyse Complexe :

le 11.12.18

Ex: 5) Évaluation des Résidus

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) \cdot (z-i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = 1/2i$$

La limite existe $\rightarrow$ pôle est simple et $\text{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = 1/2i$

6) Fin

$$I = 2\pi i \cdot 1/2i = \pi \quad \checkmark$$

Ex:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \stackrel{1)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{dz}{(z^2+1)^2} \stackrel{2)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_N} + \int_{C_N} \right)$$

$$\stackrel{3)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_N} \frac{dz}{(z^2+1)^2} \stackrel{4)}{=} 2\pi i \text{ Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2} =$$

$$= 2\pi i \text{ Res}_{z=i} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = * \text{ ici le pôle est de degré 2 } \triangle$$

Méthode • $f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-p)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-p)} + a_0 + \dots = 1/(z-p)^2 \cdot g(z)$ où

$$g(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-p) + a_0(z-p)^2 \quad \boxed{a_{-1} = g'(p)}$$

Dans notre cas $g(z) = 1/(z+i)^2$ et $g'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3}$

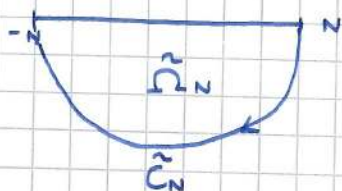
$$\text{et } g'(i) = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{2}{8i} = 1/4i$$

$$\text{Donc } * = 2\pi i \cdot 1/4i = \pi/2$$

Méthode • Développer en série

Méthode: En général, si f a un pôle d'ordre d en $p \rightarrow f = 1/(z-p)^d g(z)$
et $\text{Res}_{z=p} f = g^{(d-1)}(p) / (d-1)!$

Rem: On pourrait prendre $\tilde{\Omega}_N$ à la place de Ω_N (2) étape)



$\triangle$ ici l'orientation est horaire donc

$$\int_{-N}^N \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\tilde{C}_N} \bar{} \int_{\tilde{\Omega}_N}$$

Ex:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} \quad a \in \mathbb{R}$$

obs: Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\operatorname{Re} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx$$

$$\operatorname{Im} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2 + 1} dx$$

$$I \stackrel{!!}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[-N, N]} \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} dz \stackrel{?}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega_N} - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N}$$

Étape 3: $1/|z^2 + 1| < 1/N^2 + 1$ pour $z \in C_N$

ici $|e^{iaz}| = e^{-a \operatorname{Im} z}$ si $a > 0 \Rightarrow |e^{iaz}| \leq 1$ ✓

et donc $\left| \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} \right| < 1/N^2$

si $a < 0$ (il faut choisir le bon entre Ω_N et $\tilde{\Omega}_N$)

Ex:

Intégrale trigonométrique

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{p + \cos x} \quad p > 1$$

$$= \int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{iz(p + \frac{z+z^{-1}}{2})}$$

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dz = \gamma'(t) dt = ie^{it} dt$$

$$\frac{1}{i} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = dt \quad \cos t = \frac{\gamma(t) + \gamma^{-1}(t)}{2}$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2pz + 1} = \frac{1}{i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{(z + p + (p^2 - 1))(z + p - (p^2 - 1))}$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=c} \frac{1}{z^2 + 2pz + 1}$$

c pôle dans $D_1(0)$

la suite de l'exemple est dans le polycopié.

Analyse Complexe:

18.12.18

Rappel: Integrales impropres

Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ fonction rationnelle, tq $\deg(Q(z)) \geq 2 + \deg(P(z))$ et $Q(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Ex: $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = \sum_{\substack{p \in \mathbb{H} \\ z=p}} \text{Res}_{z=p} e^{iax} f(z) \cdot 2\pi i \quad a > 0$$

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$

$\uparrow$
pôle

pour $a \leq 0$: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\substack{p \in \mathbb{H} \\ z=p}} \text{Res}_{z=p} e^{iax} f(z)$

Rem: Intégrale d'Euler

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{!}{=} \pi$$

La fonction rationnel $f(z) = 1/z$ ne satisfait pas $*$
l'argument est plus subtile.

Sommes infinies:

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \stackrel{?}{=} \pi^2/6$

Généralité: $f = P/Q$ rationnelle condition $*$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = ?$$

$n - n'$ est pas un pôle

Lemme: Supposons G, g a un pôle simple en $z=p$, avec $\text{Res}_{z=p} g(z) = 1$ et f est holomorphe à p . Alors $\text{Res}_{z=p} f \cdot g = f(p)$

Preuve: $g(z) = \frac{1}{z-p} + a_0 + a_1(z-p) + \dots$

$$f(z) = b_0 + b_1(z-p) + \dots$$

$$fg(z) = \frac{b_0}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + \dots$$

$$\text{Res}_{z=p} fg = b_0 = f(p)$$

Pour nous $g(z) = \frac{-1}{1-e^z} = \frac{1}{e^z-1}$, 1) g est méromorphe, $(e^z-1) \sim$ entière,

2) $g(z+2\pi i) = g(z)$, 3) g a un pôle simple en 0. $\text{Res}_{z=0} g = 1$

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots)$$

$$1/(e^z - 1) = 1/z(?)$$

$$(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots) \cdot (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = 1$$

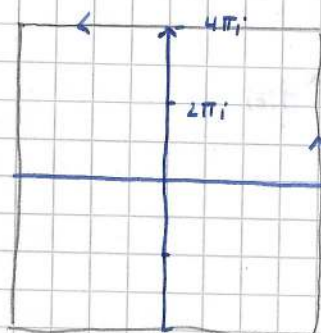
$$\text{Coeff de } z: a_1 + 1/2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1/2$$

$$\text{Coeff de } z^2: a_2 + 1/6 + a_1/2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1/12$$

2) et 3) $\Rightarrow$ pôles de g sont $\{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ avec $\text{Res}_{z=2\pi i n} g(z) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi Lemme } \Rightarrow \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \text{Res}_{z=2\pi i n} \frac{1}{e^z - 1} \cdot \frac{1}{z^2} \\ = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i n)^2} = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$\uparrow$ g choisit



Pour $N \in \mathbb{Z}^{>0}$, $\Pi_N = \{x + iy \mid |x|, |y| < 2\pi(N + 1/2)\}$

$$\text{On estime } \left| \int_{\partial \Pi_N} \frac{1}{e^z - 1} \cdot \frac{1}{z^2} \right| \leq L(\partial \Pi_N) \cdot \max_{z \in \partial \Pi_N} \frac{1}{z^2(e^z - 1)}$$

$$\leq 8 \cdot (N + 1/2) \cdot \frac{1}{(2\pi N)^2} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Calcul: } z \in \partial \Pi_N \Rightarrow |1/(e^z - 1)| \leq 1/2$$

$$\text{Thm des Résidus: } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \text{Res}_{z=2\pi i n} \frac{1}{(e^z - 1)z^2} = 0$$

Conclusion:

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \text{Res}_{z=2\pi i n} (\dots) = -\text{Res}_{z=0} (\dots)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{Res}_{z=0} \frac{1}{(e^z - 1)z^2} = 1/12$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -1/12$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$$