Analyse Complexe : le 19.02.19

Applications d'Analyse Complexe :

Rappel : Théorie

- f holomorphe dans $\mathcal{U}$ - ouvert $\Rightarrow$ si $D_r(z_0) \subset \mathcal{U}$ alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\infty}$ $\quad R \geq r$

- f est méromorphe dans $\mathcal{U}$ si, $\mathrm{Sing}[f] =: S \subset \mathcal{U}$ (Ensemble discret), $f : \mathcal{U} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorphe et $\forall z_0 \in S$, f a un pôle ou une sing. supr. en z_0.

  Plus précisément : $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $[k \in \mathbb{Z}]$, a_k (ou suppose) $\neq 0$

  - si $k \geq 0 \Rightarrow$ sing. suppr
  - si $k < 0 \Rightarrow$ pôle d'ordre $-k$

Notation :

- $\mathrm{ord}[f, z_0] = k$
- $\operatorname{Res}_{z = z_0} f = a_{-1}$
- $\operatorname{PPr}_{z = z_0} f(z) := \sum_{n=k}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ si $k < 0$ (partie principale)

- Pôle simple : $\mathrm{ord}[f, z_0] = -1$

Ex : $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)} := f(z)$, $S = \{1, -2\}$ sont pôles simples

$$\operatorname{Res}_{z=1} f = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z+2)} = 1/3$$

$$\operatorname{PPr}_{z=1} f(z) = \frac{1}{3(z-1)}$$

Rem : Si f est méromorphe dans $\mathcal{U}$ et $S := \mathrm{Sing}[f]$ et $\overline{D_r(w)} \subset \mathcal{U}$

$\Rightarrow S \cap \overline{D_r(w)}$ est fini

1ère application :

Thm : Fractions partielles

$P(z)$ et $Q(z)$ polynômes

Soit $R(z) := P(z)/Q(z)$ fonction rationnelle tq $\deg P < \deg Q \Rightarrow$

R est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et $S = \{w \mid Q(w) = 0\}$

$$\sum_{w \in S} \operatorname*{PPr}_{z=w} R(z) = R(z)$$

Ex : $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ $\deg P = 1$ et $\deg Q = 2$ et $S = \{1; -2\}$

Alors $$\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3(z-1)} + \frac{2}{3(z+2)}$$

⚠ définition complexe ⚠

Pr :

- $\deg P < \deg Q \Rightarrow \lim_{z \to \infty} R(z) = 0$

  cela veut dire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tq $|z| > N \Rightarrow |R(z)| < \varepsilon$

- de même : $\operatorname*{PPr}_{z=w} R(z) \xrightarrow{z \to \infty} 0$

  Alors $\lim_{z \to \infty} \left[R(z) - \sum_{w \in S} \operatorname*{PPr}_{z=w} R(z) \right] = 0$

- $\underbrace{R(z) - \operatorname*{PPr}_{z=w} R(z)}_{g(z).}$ a une singularité supprimable en w.

  Donc $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe (entière) et $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$

  (borné $< \varepsilon$) $\Rightarrow$ g est borné

  $\Rightarrow$ par le thm de Liouville $g(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. ▨

Rap : Thm des Résidus

$f : U \to \mathbb{C}$ méromorphe, Ω - convexe, $\bar{\Omega} \subset U$, $S \cap \partial\Omega = \emptyset$

Alors $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{w \in S \cap \Omega} \operatorname*{Res}_{z=w} f(z)$$

Analyse Complexe:

le 19.02.19

Thm: Somme des valeurs des fonctions rationnelles

Soit $R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$ rationnelles, $\deg P \leq \deg Q - 2$, S - pôles de R,

Alors $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} : \\ 2\pi i n \notin S}} R(2\pi i n) = \sum_{w \in S} \operatorname{Res}_{z=w} \frac{R(z)}{1 - e^z}$

Ex: $R(z) = 1/z^4$, $S = \{0\}$

$$2 \sum_{n=1} \frac{1}{(2\pi)^4 n^4} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^4(1 - e^z)}$$

$n \in \mathbb{Z}$ donc $n \in \mathbb{Z}^+$ et $n \in \mathbb{Z}^-$

$\frac{1}{1 - e^z}$ a des pôles simples en $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$, et $\operatorname{Res}_{z = 2\pi i n} \frac{1}{1 - e^z} = -1$

on a $\frac{1}{1 - e^{z + 2\pi i k}} = \frac{1}{1 - e^z}$

Nombres de Bernoulli : $\frac{z}{1 - e^z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}$ $\quad B_4 = 1/30$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^4(1 - e^z)} = \frac{B_4}{4!} = \frac{1/30}{4!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{(2\pi)^4}{2} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{24} = \frac{\pi^4}{90} \sim \frac{(3.14)^4}{90} \sim 1{,}08$$

$= 1/1 + 1/16 + 1/81 + \dots$

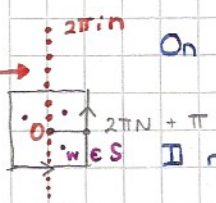
Pr: $f(z) := \frac{R(z)}{1 - e^z}$, $\operatorname{Sing}[f] = S \cup \{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ tq $2\pi i n \notin S$, $\operatorname{Res}_{z = 2\pi i n} f = -R(2\pi i n)$

$$\frac{1}{1 - e^z} = \frac{-1}{z - 2\pi i n} + a_0 + a_1(z - 2\pi i n) + \dots \quad (-1 = a_{-1})$$

$$R(z) = R(2\pi i n) + b_1(z - 2\pi i n) + \dots \quad (R(2\pi i n) = b_0)$$

$$= \frac{-R(2\pi i n)}{(z - 2\pi i n)} + \dots \quad (-R(2\pi i n) = c_{-1})$$



On peut reformuler : Thm : $\sum_{w \in \operatorname{Sing}[f]} \operatorname{Res}_{z=w} f = 0$

Il nous suffit de mq $\square_N := \{z = x + iy \mid |x|, |y| < 2\pi N + \pi\}$

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\partial \square_N} f(z)\, dz = 0$$

Pr : (Suite)

$$\text{Suffit : } \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \square_N} f = \sum_{w \in S} \operatorname*{Res}_{z=w} f - \sum_{\substack{2\pi i n \notin S \\ -N \le n \le N}} \overbrace{\operatorname*{Res}_{z=2\pi i n} f}^{R(2\pi i n)}$$

on est dans $\square_N$



On va estimer $\frac{1}{1-e^z}$ et $R(z)$:

$\frac{1}{1-e^{x+iy}}$: sur —— $y = 2\pi N + \pi \Rightarrow e^{iy} = -1$

$\Rightarrow f = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow |f| < 1$

sur —— $x = 2\pi N + \pi \Rightarrow |e^{iy + 2\pi N + \pi}| < 1/2 \Rightarrow |f| < 2$ ($N < 0$, $-2\pi N - \pi$)

$\Rightarrow |e^{iy + 2\pi N + \pi}| < 1 \Rightarrow |f| < 1$ ($N > 0$, $2\pi N + \pi$)

$|e^{iy}| = 1$, conclusion : $|f| < 2$ sur $\partial \square_N$

$\Rightarrow |R(z)| < C/N^2$ sur $\partial \square_N$

Est Std

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial \square_N} f \right| = \frac{8\pi N \cdot C \cdot 2}{N^2} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

... (Chamilo) ... ∎

---

le 26.02.19

Rap :

- f a un pôle ou sing. supprimable en z_0

$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ où $a_k \neq 0$, on écrit $\operatorname{ordre}_{z=z_0} f = k$

- Si $k < \infty \rightsquigarrow \operatorname*{PPr}_{z=z_0} f(z) = \sum_{n=k}^{-1} a_n (z - z_0)^n$

- Thm : $\deg P < \deg Q - 1$

$R = P/Q \rightsquigarrow \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi i n \notin S}} R(2\pi i n) = \sum_{w \in S} \operatorname*{Res}_{z=w} \frac{R(z)}{1-e^z}$

- Fractions partielles : $\deg P < \deg Q \rightsquigarrow R = P/Q$

$$R(z) = \sum_{w \in S} \operatorname*{PPr}_{z=w} f(z)$$

Q : Fractions partielles pour f méromorphes ?

Analyse Complexe : le 26.02.19

Ex : $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$

Analyse des pôles :

- Fonction périodique : $f(z) = f(z + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Fonction paire : $f(-z) = f(z)$
- Pôle en $z = 0$: $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin^2 z}{z^2} = 1$ est déjà su.

Alors $\dfrac{1}{\sin^2 z}$ a un pôle d'ordre 2 et

$$\underset{z=0}{PPr} \frac{1}{\sin^2(z)} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z}$$

$$a = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1$$

$$f(-z) = f(z) \Rightarrow \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} = \frac{a}{(-z)^2} - \frac{b}{z} \Rightarrow b = 0$$

$$\underset{z=0}{PPr}\ f(z) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \underset{z = \pi k}{PPr}\ f(z) = \frac{1}{(z - k\pi)^2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

et l'ens. des pôles $S = \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \left(\frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}\right)^2$$

Fractions partielles : $\dfrac{1}{\sin^2 z} \overset{?}{=} \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \dfrac{1}{(z - \pi k)^2}$ si $z \notin S$

C'est vrai ? On va calculer la somme.

On va utiliser le thm (somme ~ ftn rationelle)

R - ? : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} R(2\pi i k) = \sum \dfrac{1}{(z - \pi k)^2}$

Là z est fixe et $R(w) = \dfrac{1}{(z - \frac{w}{2i})^2}$ $\begin{cases} R \text{ rationelle} \\ \deg P = 0 \\ \deg Q = 2 \end{cases}$

alors $R(2\pi i k) = \dfrac{1}{(z - \pi k)^2}$

Alors on a : $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \dfrac{1}{(z - \pi k)^2} = \sum\limits_{u \in \text{Pôle}(R)} \underset{w=u}{\text{Res}}\ R(w) \cdot \dfrac{1}{1 - e^w} =$

$R(w) = \dfrac{-4}{(w - 2iz)^2}$ $\quad \text{Pôle}(R) = \{2iz\}$

$= \underset{w = 2iz}{\text{Res}} \dfrac{-4}{(1 - e^w)(w - 2iz)^2}$ (a un pôle d'ordre 2)

Exc: (Suite)

$$\operatorname*{Res}_{w=2iz} \frac{-4}{(1-e^w)(w-2iz)^2} = *$$

$$-\frac{4}{(w-2iz)^2}\underbrace{\left[a_0 \cdot a_1(w-2iz) + a_2(w-2iz)^2 + \dots\right]}_{\text{série entière de } \frac{1}{1-e^w} \text{ en } w = 2iz}$$

$$a_0 = \frac{1}{1-e^{2iz}} \qquad a_1 = \left(\frac{1}{1-e^w}\right)'\Big|_{w=2iz} \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^w}\right)''\Big|_{w=2iz}$$

$$* = -4\left(\frac{1}{1-e^w}\right)'\Big|_{w=2iz} = -4\left(\frac{e^w}{(1-e^w)^2}\right)\Big|_{w=2iz}$$

$$= \frac{-4}{(e^{w/2}-e^{-w/2})^2}\Big|_{w=2iz} = \frac{-4}{(e^{iz}-e^{-iz})^2} = \frac{1}{\sin^2 z}.$$

Analyse de ctg z :

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \text{Pôle}(\operatorname{ctg} z) = \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- $\operatorname{ctg}(-z) = -\operatorname{ctg}(z)$
- pôle en $z=0$ est simple

$$\operatorname*{PPr}_{z=0} \operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z}$$

$$\hookrightarrow \operatorname*{PPr}_{z=k\pi} \operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z-\pi k}$$

$$? \quad \operatorname{ctg}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-\pi k} \quad ?$$

$$R = \frac{1}{z-\frac{w}{2i}} \; ; \qquad \deg P = 0 \quad \deg Q = 1$$

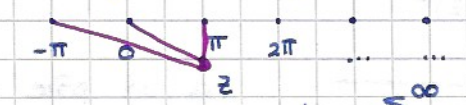
$$\Downarrow$$

à quoi ? $\hookrightarrow = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R(2\pi i k)$ R ne satisfait pas la condition

$$\deg P < \deg Q - 1$$

et la somme ne converge pas absolument.

Alors il faut indiquer l'ordre de sommation.



$$\frac{1}{z-\pi k} + \frac{1}{z+\pi k} = \frac{2z}{z^2-\pi^2k^2}$$

on change l'ordre de sommation $\Rightarrow$ Thm : $\operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-\pi^2k^2}$ conv. absol.

Analyse complexe : le 26.02.19

Principe de l'argument et thm de Rouché :

Rem : f est méromorphe $\rightsquigarrow$ en z_0 on a ($\operatorname{ord}_{z=z_0} f = k$) $f(z) = (z-z_0)^k f_0(z)$

avec $\operatorname{ord}_{z=z_0} f_0 = 0$ ($f_0(z_0) = a_k \neq 0$)

Exc : $\operatorname{ord}_{z=z_0} f = k$, $\operatorname{ord}_{z=z_0} g = L \Rightarrow \operatorname{ord}_{z=z_0} (f \cdot g) = k + L$

et $\operatorname{ord}_{z=z_0} (f/g) = k - L$

Rem : $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n (z-z_0)^{n-1}$

Alors si f a un pôle d'ordre L en z_0, alors f' a un pôle d'ordre $L+1$ en z_0.

En fait, si $\operatorname{ord}_{z=z_0} f \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_{z=z_0} f' = \operatorname{ord}_{z=z_0} f - 1$

plus précisément : $f = a_k (z-z_0)^k + a_{k-1} (z-z_0)^{k+1} + \dots$

$f' = k a_k (z-z_0)^{k-1} + \dots$

Lemme : $\operatorname{Ord}_{z=z_0}(f) = k \neq 0$. Alors $g = \dfrac{f'}{f}$ a un pôle simple en z_0, $\operatorname{ord}_{z=z_0} g = -1$, et $\operatorname{Res}_{z=z_0} g(z) = k$

Cor : Principe de l'argument

f méromorphe dans U, Ω - convexe, $\overline{\Omega} \subset U$, $\partial\Omega \cap S = \emptyset$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{w \in S \cap \Omega} \operatorname{ord}_{z=w} f(z)$$

où $w \in \Omega$ et $f(w) = 0$

Pr : thm résidus + lemme.

Cor : thm de Rouché.

f holomorphe dans Ω convexe, soit g holom. sur Ω et $|f(z)| > |g(z)|$ pour $z \in \partial\Omega$. Alors, le # de zéros de f dans Ω est le même que celui de $f+g$ dans Ω.

Exc: $\underbrace{z^4}_{f} + \underbrace{26z + 2}_{g}$ sur $D_3(0)$

On a $|f| > |g|$ sur $\partial D_3(0)$

$\Rightarrow$ # de zéro de $z^4 + 26z + 2$ est le même que celui de $f = z^4$ qui est 4.

Séries de Fourier:

le 05.03.19

Déf: f fonction est L-périodique si $f(x+L) = f(x)$

Ex: $\sin(x)$, $\cos(x)$ $\longrightarrow$ 2π- périodique

$\sin(kx)$, $\cos(kx)$ $\rightsquigarrow$ $\parallel$ —— $\parallel$ $k \in \mathbb{Z}$

constantes

Prop: Si f et g sont L- périodiques $\Rightarrow$ $f+g$ est L- périod.

Déf: polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx) = p(x)$

ce sont des fonctions à période 2π.

Prop: Par la formule d'Euler:

$\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$

$\sin(kx) = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$

$\Rightarrow$ si $p(x)$ est poly. trigo

$\Rightarrow$ $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ où

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ $k > 0$

$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ $k > 0$

Lemme: Si $p(x)$ est un poly. trigo. $\Rightarrow$ $c_k \overset{①}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x)e^{-ikx}\,dx \overset{②}{=} \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} p(x)e^{-ikx}\,dx$

Preuve: Pour ② via C.D.V

Pour ① $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ixj} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-N}^{N} c_j \int_0^{2\pi} e^{(j-k)ix}\,dx = c_k$

Lemme : $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x)\cos(kx)\,dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x)\sin(kx)\,dx$

Preuve : On utilise les identités de la prop + lemme précédent

Déf : $f(x)$ 2π-périod. intégrable $\Rightarrow$ la série de Fourier associée à $f(x)$ est $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

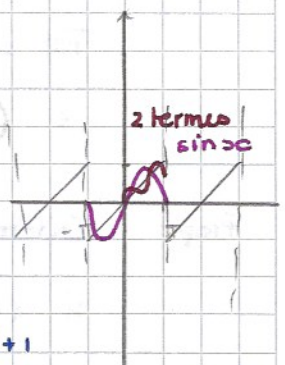
où $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$

Mais aussi $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx) + \frac{a_0}{2}$

où $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

Ex : $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ et on l'étend.



$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = 0$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx \overset{\text{par partie}}{=} \ldots = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\pi + \pi\frac{\cos k\pi}{k\pi}$

$= 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Donc $f(x) \sim 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \ldots\right)$

La série vaut 0 en $k\pi$.

Convergence de suites et séries de fonctions :

Déf : $\{f_n(x)\}$ suite de fonctions

- f_n converge ponctuellement à f si $\forall x$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

  $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}$ tq $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon(x)$

- f_n converge uniformément vers f si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq

  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon$

Lemme : Si f_n est continue et $f_n \longrightarrow f$ uniformém. $\Rightarrow f$ est continue.

Preuve : À voir $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tq $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)|$

$+ |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| = (*)$

Par uniformité, $\exists N_{\varepsilon/3} \in \mathbb{N}$ tq $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ et $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3$

Par continuité, $\exists \delta > 0$ tq $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$

$\Rightarrow (*) < \varepsilon$ ∎

Prop : Critère de Cauchy

si $\{a_n\}$ est une suite de nombres alors $\exists a = \lim_{n \to \infty} a_n$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ tq $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N_\varepsilon$

Thm : Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

$\{f_n\}_n$ suite de fonctions alors $\exists f$ tq $f_n \longrightarrow f$ unif. $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ tq $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ $\forall x$

Prop : $S_n = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)$

Si $\sum_{m=1}^{N} |f_m(x)|$ converge uniformément ($\{S_n\}$ conv abs. et unif)

$\Rightarrow$ S_n converge uniformément.

Preuve : Par le critère de Cauchy, il suffit de voir que $\forall \varepsilon > 0$

$$|S_n - S_m| \underset{n \geq m}{=} \left| \sum_{N=m+1}^{n} f_N(x) \right| \leq \sum_{N=m+1}^{n} |f_N(x)| < \varepsilon$$

par la conv unif de $\sum |f_n(x)|$ ∎

Donc : (séries)

Conv unif + abs $\not\Rightarrow$ conv unif $\not\Rightarrow$ conv ponctuelle

Ex : Contre-Ex de $\Leftarrow$:

- $f_n(x) = e^{-nx} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0, \infty)$

  Par le thm $\Rightarrow$ la limite ne peut pas être uniforme

- $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum f_n(x)$ converge uniform (Car ce sont des fct constantes $\Rightarrow$ lim ponct = lim unif)

  Mais $\sum \frac{1}{n} \longrightarrow \infty \Rightarrow$ pas conv absolue.

Prop : Si $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ alors

conv unif et abs $\leftrightarrow$ conv. abs de $\sum_{k=-n}^{n} c_k$

Déf : On dit que $S_N(x)$ converge absolument si $\sum c_k$ conv. abs.

Thm : Majorant de Weierstrass

si $|f_n(x)| \leq M_n$ tq $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n(x)$ conv uniformément

Rap : Principe de l'argument

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domaine étoilé, $\gamma : [0,1] \longrightarrow \partial\Omega$ positivement orienté.

Si f est méromorphe dans $\Omega \subset \overline{\Omega}$ et $f|_{\gamma([0,1])}$ n'a pas de pôles ou de zéro alors $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \frac{1}{2\pi i} = Z(f) - P(f)$

où $Z(f) = \#$ zéro de f et $P(f) = \#$ pôle de f (+ multip.)

Preuve : $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \left[\log f(\gamma(t))\right]_0^1 = i\left[\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0))\right]$

$= 2\pi i \cdot \#$ tours que $f(z)$ fait le long de $\gamma(t)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z_0 \in P(f'/f)} \operatorname*{Res}_{z=z_0} (f'/f, z_0)$$

$z_0 \in P(f'/f) \iff f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = (z-z_0)^{\operatorname{ord}_{z_0} f} \cdot g(z)$

$\operatorname*{Res}_{z=z_0} (f'/f) = \operatorname{ord}_{z_0} f(z) = \begin{cases} + \text{ multip si } z_0 \text{ est un zéro} \\ - \text{ multipl. si } z_0 \text{ est un pôle} \end{cases}$ ∎

Rap : Thm de Rouché

f, g méromorphes sans pôles sur γ fermée, orientée + tq

γ entoure un domaine étoilé U.

$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad z \in \partial U$

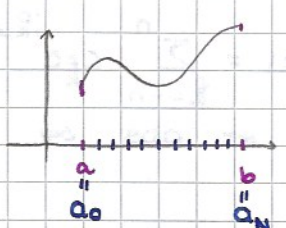
$Z(f) - P(f) = Z(g) - P(g)$ dans γ

en particulier si f, g hdom $\Rightarrow$ elles ont le même nbr de zéros.

Rap : Intégrabilité

le 12.03.19

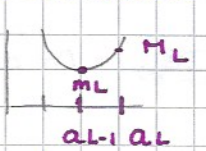
- $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée



$a_L = a + \frac{b-a}{N} L$

$N > 0$ entier

$m_L = \inf_{a_{L-1} \le x \le a_L} f(x) \qquad M_L = \sup_{a_{L-1} \le x \le a_L} f(x)$



On va supposer $\exists x_L \in [a_{L-1}, a_L]$ tq $m_L = f(x_L)$

De même pour M_L

Déf : f intégrable si $\lim \sum_{L=1}^{N} \frac{M_L - m_L}{N} = 0$, dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \sum_{L=1}^{N} \frac{m_L}{N}$$

Prop :

- f, g intégrables $\Rightarrow$ $af + bg$ et $f \cdot g$ intégrables
- f monotone $\Rightarrow$ intégrable
- f continue $\Rightarrow$ intégrable

Prop: (Suite)

- $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ intégrable si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont
- Est. std : $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \cdot (b-a)$

Rap: Séries de Fourier

$[a,b] = [0, 2\pi]$, $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ intégrable

$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx$ coeff de F.

et $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}$ série de F.

- Si $f(x) = \sum_{k=-L}^{L} \alpha_k e^{ikx}$ alors $c_k = \alpha_k$ et $f(x)$ = sa série de F.

Est-ce que c'est vrai pour f générale ?

1) Convergence : $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx}$

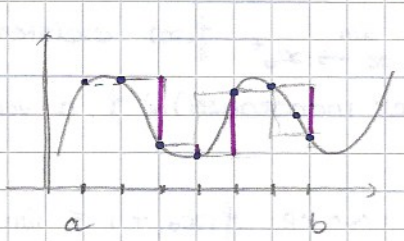
a. $f_n(x)$ converge (simple/uniforme)

b. $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

Ex: $\exists f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue tq sa série de F ne converge pas

Fonctions à variation bornée:

Déf: la variation de f : $\mathrm{Var}_{[a,b]} f = \sup_{a = x_0 < \dots < x_N = b} \sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$



Prop: 1) $\mathrm{Var}_{[a,b]} f \geq 0$ et $\mathrm{Var}_{[a,b]} f = 0$ si f constante

2) Si f est monotone $\mathrm{Var}_{[a,b]} f = |f(b) - f(a)|$

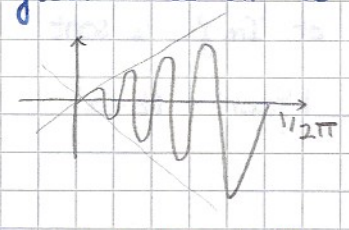
3) $\mathrm{Var}_{[a,b]} f \geq |f(b) - f(a)|$

4) Soit $y \in (a,b)$, $\mathrm{Var}_{[a,b]} f = \mathrm{Var}_{[a,y]} f + \mathrm{Var}_{[y,b]} f$

Déf : $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ à variation bornée si $\mathrm{Var}_{[a,b]} f < \infty$

Ex : $f(x) = x \sin 1/x$

$$\mathrm{Var}_{[1/2\pi k,\, 1/2\pi]} f \geq 1/\pi \sum_{n=1}^{k} 1/n \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$



n'est pas à variation bornée.

Prop : Si $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ est à var. bornée, alors il existe f^+ et f^- monotone croissante tq $f = f^+ - f^-$

Pv : Soit $v(x) = \mathrm{Var}_{[a,x]} f$.

- $v \geq 0$, croissante
- $f^+(x) = v(x) + f(x)$

  $y \geq x \rightsquigarrow f^+(y) - f^+(x) = v(y) - v(x) - f(x) + f(y)$
  (4) p. 13 (2) page 13
  $= \mathrm{Var}_{[x,y]} f + f(y) - f(x) \geq 0$

  $V_{[x,y]} f \geq |f(y) - f(x)| \geq \begin{matrix} f(y) - f(x) \\ f(x) - f(y) \end{matrix}$

  $\Rightarrow f^+$ est monotone
- $f^-(x) = v(x) - f(x)$

  $f^-(x)$ monotone : $y \geq x \rightsquigarrow f^-(y) - f^-(x) = v(y) - v(x) - f(y) + f(x)$

  $= V_{[x,y]} f + f(x) - f(y) \geq 0$
- $2f(x) = f^+ - f^-$

▨

Cor : f à var. bornée $\Rightarrow f$ intégrable

Cor : $\forall x_0 \in [a,b]$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent

(parce qu'ils existent sur les fct monotones) où f à var bornée.

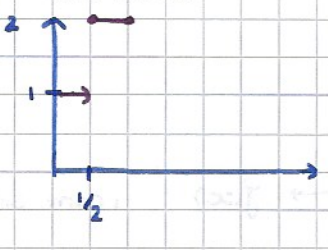
Notation : f à var. bornée, $x_0 \in [a,b] \rightsquigarrow f(x_0,+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$f(x_0,-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Analyse Complexe :

le 12.03.19

Ex :



f n'est pas continue, mais à var. bornée $\quad \mathrm{Var}_{[0,1]} f = 1$

Thm : $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ à var. bornée, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \longrightarrow \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) \quad \forall x \in [0, 2\pi]$

(convergence simple)

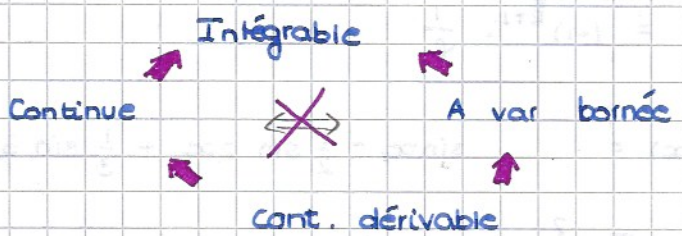
Prop : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, f' continue, alors f à var. bornée

Pv : $\sum_{L=1}^{N} |f(x_L) - f(x_{L-1})|$ par thm $\exists \xi_L \in [x_{L-1}, x_L]$ tq $f(x_L) - f(x_{L-1}) = f'(\xi_L) \cdot (x_L - x_{L-1})$

- f' continue $\Rightarrow$ f' bornée $\exists B > 0$ tq $|f'(x)| \leq B \ \forall x$

$$\sum_{L=1}^{N} |f(x_L) - f(x_{L-1})| = \sum_{L=1}^{N} |f'(\xi_L)| \cdot (x_L - x_{L-1}) \leq B \cdot \sum_{L=1}^{N} x_L - x_{L-1} = B(b-a)$$

Rem :



Thm : $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ à var bornée. Alors $\exists B > 0$ tq $c_k \leq B/k$

Rem : $c_k \leq \frac{B}{|k|^2}$, alors $\sum c_k e^{ikx}$ converge uniformément à une limite continue.

Convergence de séries de Fourier :

le 19.03.19

On a $f(x) \overset{?}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$

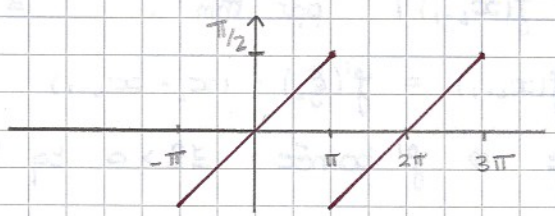
Plus précisément, $\forall x \quad \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \longrightarrow f(x)$ (conv. simple)

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

Hypothèse naturelle :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π- périodique, une telle fonction peut être définie par $f : [a, a+2\pi]$ tq $f(a) = f(a+2\pi)$

Ex : $f(x) = \frac{x}{2}$ pour $|x| < \pi$ et $f(\pm\pi) = 0$



Impaire : $f(-x) = -f(x) \rightsquigarrow f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx$

$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$

$f(x) \overset{?}{=} \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$

si $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{4} \overset{?}{=} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

La convergence ne peut pas être uniforme, car la limite n'est pas continue.

Estimation des coefficients de Fourier :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique et f sur $[0, 2\pi]$ est intégrable.

C-à-d : Soit $N > 0$ entier $x_L = \frac{L \cdot 2\pi}{N}$ | $m_L = \min_{x_{L-1} \le x \le x_L} f(x)$

$M_L = \max_{x_{L-1} \le x \le x_L} f(x)$ et $m_L = f(\xi_L)$

$x_L - x_{L-1} = 2\pi / N$ (rappel de l'intégration)

1. $$\left| \int_{x_{L-1}}^{x_L} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{x_{L-1}}^{x_L} m_L e^{-ikx} dx \right| = (?)$$

- Pour $x_{L-1} \le x \le x_L$ on a $m_L \le f(x) \le M_L$
- Variation sur l'inég. triangulaire : • $|a+b| \le |a| + |b|$
  • $||a|-|b|| \le |a-b|$ • $\left| \int_a^b F(x) dx \right| \le \int_a^b |F(x)| dx$

$$(?) = \left| \int_{x_{L-1}}^{x_L} (f(x) - m_L) e^{-ikx} dx \right| \le \int_{x_{L-1}}^{x_L} |f(x) - m_L| dx$$

$$\le \int_{x_{L-1}}^{x_L} (M_L - m_L) dx = 2\pi \cdot \frac{M_L - m_L}{N}$$

$$\left| \int_{x_{L-1}}^{x_L} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{x_{L-1}}^{x_L} m_L e^{-ikx} dx \right| \le 2\pi \frac{M_L - m_L}{N}$$

$$\left| \sum_{L=1}^{N} \int_{x_{L-1}}^{x_L} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{x_{L-1}}^{x_L} m_L e^{-ikx} dx \right|$$

$$\le \sum_{L=1}^{N} \left| \int_{x_{L-1}}^{x_L} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{x_{L-1}}^{x_L} m_L e^{-ikx} dx \right|$$

$$\le \frac{2\pi}{N} \sum_{L=1}^{N} (M_L - m_L)$$

$$\sum_{L=1}^{N} \int_{x_{L-1}}^{x_L} f(x) e^{-ikx} dx = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$\sum_{L=1}^{N} m_L \int_{x_{L-1}}^{x_L} e^{-ikx} dx = \sum_{L=1}^{N} \frac{m_L}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{x_{L-1}}^{x_L}$$

$$= \frac{i}{k} \sum_{L=1}^{N} m_L \left(e^{-ikx_L} - e^{-ikx_{L-1}} \right)$$

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx - \frac{i}{k} \sum_{L=1}^{N} m_L \left(e^{-ikx_L} - e^{-ikx_{L-1}} \right) \right| \le \frac{2\pi}{N} \sum_{L=1}^{N} M_L - m_L$$

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx \right| - \frac{1}{k} \left| \sum_{L=1}^{N} m_L \left(e^{-ikx_L} - e^{-ikx_{L-1}} \right) \right| \le \frac{2\pi}{N} \sum_{L=1}^{N} M_L - m_L$$

$$|C_k| \le \frac{1}{2\pi k} \left| \sum_{L=1}^{N} m_L \left(e^{-ikx_L} - e^{-ikx_{L-1}} \right) \right| + \frac{1}{N} \sum_{L=1}^{N} M_L - m_L$$

$$\sum_{L=1}^{N} \left(m_L e^{-ikx_L} - m_L e^{-ikx_{L-1}} \right) = \sum_{L=1}^{N-1} e^{-ikx_L} (m_L - m_{L+1}) + m_N - m_1$$

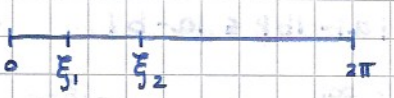
(2) $$|C_k| \le \frac{1}{2\pi k} \left| m_N - m_1 + \sum_{L=1}^{N-1} e^{-ikx_L} (m_L - m_{L+1}) \right| + \frac{1}{N} \sum_{L=1}^{N} M_L - m_L$$

Prop: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, intégrable, $N > 0$, alors

$$|C_k| \le \frac{1}{2\pi k} \left[|m_N - m_1| + \sum_{L=1}^{N-1} |m_L - m_{L+1}| \right] + \frac{1}{N} \sum_{L=1}^{N} (M_L - m_L)$$

Cor: Si f est à var bornée alors $|C_k| < \dfrac{\operatorname{Var}_{[0,2\pi]} f}{2\pi k}$

Pv: $m_L = f(\xi_L)$ $\quad L = 1, \dots, N$



$\xi_0 = 0$ et $\xi_{N+1} = 2\pi$

$\Rightarrow f(\xi_0) = f(\xi_{N+1})$

$$|m_N - m_1| = |m_N - f(2\pi) + f(0) - m_1|$$

$$|C_k| < \frac{1}{2\pi k} \sum_{L=0}^{N} |f(\xi_L) - f(\xi_{L+1})| + \frac{1}{N} \sum_{L=1}^{N} (M_L - m_L)$$

$$\le \frac{\operatorname{Var}_{[0,2\pi]} f}{2\pi k} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{L=1}^{N} (M_L - m_L)}_{\downarrow 0 \text{ si } N \to \infty}$$

Cor (Lemme de Rieman)

Soit f intégrable (pas forcément à var. bornée).

Alors $|C_k| \longrightarrow 0$ si $|k| \longrightarrow \infty$

Pv: $C_k \longrightarrow 0 \iff \forall \varepsilon \ \exists K_\varepsilon > 0$ tq pour $|k| > K_\varepsilon$ on a $|C_k| < \varepsilon$

Soit N (grand) tq $\frac{1}{N} \sum_{L=1}^{N} |M_L - m_L| < \varepsilon/2$

Notons $V_N := |m_N - m_1| + \sum_{L=1}^{N-1} |m_L - m_{L+1}|$

si $\dfrac{V_N}{2\pi |k|} < \varepsilon/2 \iff |k| > \underbrace{\dfrac{V_N}{\pi \varepsilon}}_{K_\varepsilon} \Rightarrow |C_k| < \varepsilon$

Analyse Complexe : le 19.03.19

Convergence :

Soit $f(x)$ continuement dérivable et f' à var bornée.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{f(x)e^{-ikx}}{-ik}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-ik}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}\, dx$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)e^{-ikx}}{-2\pi ik}\Big|_0^{2\pi}}_{0 \text{ (périodique)}} + \frac{1}{2i\pi k^2}\int_0^{2\pi} f'(x)\, e^{-ikx}$$

$$|c_k| \le \frac{1}{k}\,\frac{\mathrm{Var}_{[0,2\pi]} f'}{2\pi k} = \frac{\mathrm{Var}\, f'}{2\pi k^2}$$

Convergence uniforme.

---

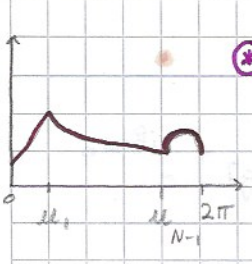
le 26.03.19

Rap : **Thm :** f 2π-périodique, à var bornée, alors

$$|c_k[f]| \le \frac{\mathrm{Var}_{[0,2\pi]} f}{|k|}$$

Thm : f 2π-périodique, intégrable, alors

$$c_k[f] \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$$



(*) Supposons f 2π-périodique, dér. par morceau (continuement) continue, f' à var bornée — **Bonne**

Rem : f' n'est pas parfaitement définie, mais on a $f'(\mu_i+)$ et $f'(\mu_i-)$

Pour une **bonne** fonction f, $k \neq 0$,

$$c_k[f] = \frac{1}{ik}\, c_k[f'] \quad \text{et} \quad c_0[f'] = 0$$

Cor : **Cor :** f bonne, alors $|c_k[f]| \le \dfrac{\mathrm{Var}_{[0,2\pi]} f'}{2\pi |k|^2}$

Alors pour f bonne $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k[f]|$ converge

$\rightsquigarrow$ la série de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k[f]\, e^{ikx} \to \tilde{f}(x)$

où $\tilde{f}$ est continue et la convergence est uniforme

Thm: f 2π- périodique, intégrable, f est dérivable à $x = x_0$

Alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k[f]\, e^{ikx_0} = f(x_0)$

P.V:

- Considérons $g(x) := \dfrac{f(x)}{e^{i(x-x_0)} - 1}$ (On suppose $f(x_0) = 0$)

  - la fonction g est continue en $x = x_0$

    $$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\frac{e^{i(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \right)^{-1}$$

    $$\lim_{x \to x_0} g(x) = \frac{f'(x_0)}{i}.$$

  - $g(x)$ est intégrable (sans preuve)

- Le calcul :

  $$\sum_{k=-n}^{n} c_k[f]\, e^{ikx_0} \overset{?}{=} 0$$

  On a $f(x) = g(x) \cdot (e^{i(x-x_0)} - 1)$ et donc

  $$c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)(e^{i(x-x_0)} - 1) e^{-ikx}\, dx$$

  $$= \frac{1}{2\pi} e^{-ix_0} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-i(k-1)x}\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx$$

  $$= e^{-ix_0} c_{k-1}[g] - c_k[g]$$

  $$\sum_{k=-n}^{n} c_k[f] e^{ikx_0} = \sum_{k=-n}^{n} \left[e^{-ix_0} c_{k-1}[g] - c_k[g] \right] e^{ikx_0}$$

  $$= \sum_{k=-n}^{n} c_{k-1}[g]\, e^{i(k-1)x_0} - c_k[g]\, e^{ikx_0}$$

  $$= c_{-n-1}[g]\, e^{i(-n-1)x_0} - c_n[g]\, e^{inx_0} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

  □

Par la somme de Rieman

Thm : Convergence de séries de Fourier A

Si f bonne, alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k[f]\, e^{ikx} \longrightarrow f(x)$

et la convergence est uniforme

Pv : On a vu :

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k[f]\, e^{ikx_0} \longrightarrow \tilde{f}(x) \quad \text{uniformément}$$

Par le thm précédent, $f(x) = \tilde{f}(x)$ $\forall x$ où $f(x)$ est dérivable

Mais il y a un nbr fini de points $x \in [0, 2\pi]$ où f n'est pas dérivable, f et $\tilde{f}$ sont continues $\rightsquigarrow f = \tilde{f}$ □

Rem : Contre exemple de Fejèr

$\exists$ f 2π - périodique, continue tq $(x = 0)$

$$\sum c_k[f] \longrightarrow f(0)$$

Ex : S - 2π périodique

$$S(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } |x| < \pi \\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

pas continue, mais dérivable par morceaux.

- f' est à var. bornée.

La série de F. de S :

$$S \rightsquigarrow \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \dots$$

- Si $x \in (-\pi, \pi)$, la fct s est dérivable en x et par le thm $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \dots \longrightarrow s(x) = \frac{x}{2}$

  P. ex : $x = \frac{\pi}{2}$, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$

- Si $x = \pi$, alors la série donne 0 et $s(\pi) = 0$

Donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k[s]\, e^{ikx} = s(x)$ $\forall x$

Thm : Soit f 2π- périodique, dérivable par morceaux, f' à var bornée [Mais f pas forcément continue], alors $\forall x$

$$\left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k[f] \underbrace{e^{ikx}}_{\wedge} = \frac{f(x-)+f(x+)}{2} \right\} \text{ (pas uniforme)}$$

Pr :

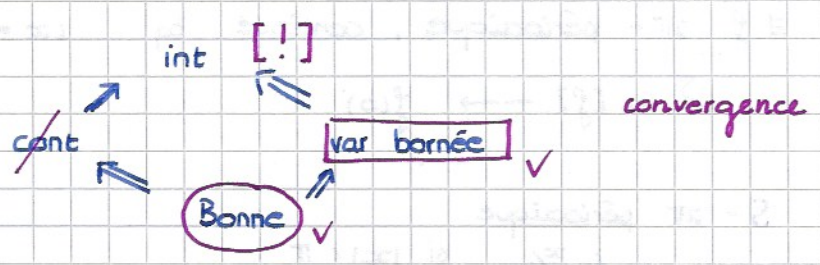
Lemme : Pour telle f, $\exists\, \alpha_L, \beta_L$ (β_L sont les pt où f pas continue) tq $\tilde{f}(x) = f(x) + \sum \alpha_L \cdot S(x-\beta_L)$ est bonne (↳ fct de l'exc)

- ■ est vrai pour $\tilde{f}$ et pour S (et pour $\alpha S(x-\beta)$)

et donc pour f. □

Thm : Convergence de série de F., B

f - 2π- périodique, à var. bornée alors ■ est vrai.



Théorème d'approximation de Weierstrass : le 02.04.19

Rappel : $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrables, alors

- $\| f-g \|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|$
- Si $\| f_n - g \|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$, on dit que $f_n \longrightarrow g$ uniformément

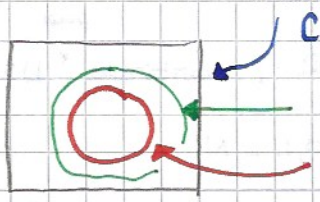
Thm : Weierstrass (Comme approximation / interpolation polynomiale)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $\forall \varepsilon\ \exists$ p- polynôme tq $\| f-p \|_\infty < \varepsilon$

2e forme : $\exists\, p_n$ - suite de polynômes tq $p_n \longrightarrow f$ uniformément

Pr : (Application de nos résultats)

• Statégie :



Lemme :

1) $\forall f$ - cont $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists q \in Int$ tq $\|f - q\|_\infty < \varepsilon$

2) $\forall q \in int \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in Poly$ tq $\|q - p\|_\infty < \varepsilon$

1) + 2) $\Rightarrow \forall f, \forall \varepsilon, \exists p \in Poly$ tq $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$

Raison : Inég. Δ-aire :

$$\|f - p\|_\infty \leq \|f - q\|_\infty + \|q - p\|_\infty$$

Lemme :

Si f et g peuvent être approximées par polynômes, alors $\alpha f + \beta g$ peut aussi l'être ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

1) Soit $[c,d]$ intervalle, alors $\exists L : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijective et linéaire.

$f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R} \longmapsto \tilde{f} = f \circ L : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Évident : bijection : $Cont\,[c,d] \longrightarrow Cont\,[a,b]$

bijection : $Poly\,[c,d] \longrightarrow Poly\,[a,b]$

$\rightsquigarrow$ Thm pour $[a,b] \Leftrightarrow$ Thm pour $[c,d]$

Conclusion : Il suffit de montrer pour n'importe quel intervalle.

2) Par ex : $[a,b] = [\pi, 2\pi]$

Soit $f \in Cont\,[\pi, 2\pi] \rightsquigarrow \tilde{f} \in Cont\,[0, 2\pi]$ et $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$

Conclusion : Il suffit de montrer pour $f \in Cont\,[0, 2\pi]$ tq $f(0) = f(2\pi)$

Pv : (Suite)

3) Continuité uniforme :

Prop : $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, pour $\forall$ $N > 0$ entier ,

$x_L = \frac{2\pi L}{N}$, $L = 0, 1, \dots N$

$f_N(x_L) = f(x_L)$ $L = 0, 1, \dots, N$, f_N - linéaire

sur $[x_L, x_{L+1}]$ $L = 0, 1, \dots, N-1$

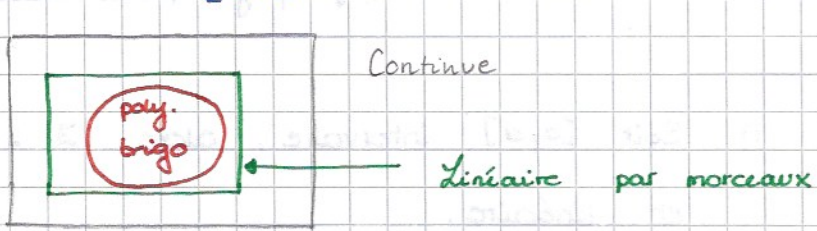
Alors $\| f - f_N \|_\infty \xrightarrow{N \to \infty} 0$

Conclusion : Il suffit de montrer pour $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire par morceaux, continue et $f(0) = f(2\pi)$.

4) De telles fonctions sont bonnes :

- Cont - dérivable p. m. - f' à var bornée

Pour fonctions bonnes : $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ unif.



- $\exists$ f cont : $\sum c_k e^{ikx} \not\longrightarrow f$
- $\exists$ f_N lin. p. m. $f_N \longrightarrow f$
- $\forall$ f_N $\sum c_k e^{ikx} \longrightarrow f_N$

Transitivité $\rightsquigarrow$

Conclusion : Il suffit de montrer pour poly. trigo $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

5) Linéarité $\rightsquigarrow$ Il suffit de montrer pour $f = e^{ikx}$

6) Si $f(x) = e^{ikx}$, e^{ikx} holomorphe

$\sum_{n=0}^{M} \frac{(ikx)^n}{n!} \xrightarrow{\text{unif}} e^{ikx}$ ▨

Analyse Complexe:

le 02.04.19

Systèmes orthogonaux: [alg. lin. dans dim ∞]

Rap: Alg. linéaire

- V - esp vect dim n
- $\langle .,. \rangle$ prod. scalaire hermitien : • $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$
  • $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ex: • $V = \mathbb{C}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \bar{y_j}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Propriétés :

1) Inég. Δ : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2) Cauchy - Schwartz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
3) Thm Pythagore : $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

- Une base orthonormale : $e_1, \dots, e_n$ tq $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

on a $\forall x \quad x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$

Le même dans un espace de fonction.

Déf: • $R[a,b]$ - fonction intégrable

- $\text{Cont}[a,b] = C[a,b]$ = fonction continue (Val. complexe)
- $\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \cdot \bar{g} \, dx$
- $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ $\quad \langle f, f \rangle = 0 \overset{?}{\Rightarrow} f = 0$

pas vrai dans $R[a,b]$

mais vrai dans $C[a,b]$

Déf: $\beta_1, \dots, \beta_n, \dots \in R[a,b]$ est un système orthogonal si

$\langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ et et $\|\beta_j\| > 0 \ \forall j$

et ... orthonormal si $\|\beta_j\| = 1 \ \forall j$

Ce qui nous intéresse : $f \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \beta_n \rangle \cdot \beta_n$

Ex : $[0, 2\pi]$, $\beta_k = e^{ikx}$

$\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ syst. orth. normal

et $c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot e^{-ikx} \, dx = \langle f, \beta_k \rangle$

$\rightsquigarrow f \overset{?}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

Rem : $\forall f \rightsquigarrow \|f\|_\infty$, $\|f\|_2$ $\Rightarrow$ $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$

la conv. en $\|\cdot\|_2$ est moins forte :

$\|f_N - f\|_2 \longrightarrow 0$ $\not\Rightarrow$ $\|f_N - f\|_\infty \longrightarrow 0$

---

le 09.04.11

Systèmes orthogonaux et convergence en moyenne quadratique :

Rap : Structure de l'espace Hermitien sur les espaces de fonctions :

$R^{\mathbb{C}}[a,b]$ - fonctions intégrables à valeurs complexes.

$Cont^{\mathbb{C}}[a,b]$ - " - continues - " - .

On a définit : $\langle f, g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_a^b f \cdot \bar{g} \, dx$ $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Avec les propriétés : 1) $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

2) $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

3) $\langle f, g \rangle = 0 \Rightarrow \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$

4) f continue et $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Dans un espace Hermitien de dimension finie V :

$e_1, \dots, e_n$ - base orthonormale $\Rightarrow \forall f \in V$, $f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$

Si $V = R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$, $e_1, \dots, e_n, \dots$ système ortho-normal

$\Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

? $\lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k\|_2 = 0$?

□

Déf: Si (II) est vrai $\forall f \in R^{\mathbb{C}}[0,2\pi]$, alors on dit que le système ortho. $\{e_k\}_{k=1,\dots}$ est <u>complet</u>.

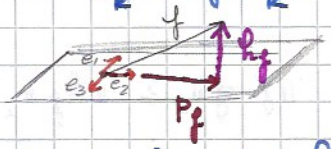
Prop: Inégalité de Bessel

$\{e_k\}_{k=1,2,\dots}$ système orthonormal dans $R^{\mathbb{C}}[a,b]$, alors

$\forall f \in R^{\mathbb{C}}[a,b]$ et n entier > 0, $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$

où $c_k = \langle f, e_k \rangle$

Pv:



On a $f = p_f + h_f$ où $p_f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$ et $h_f = f - p_f$

- $\{e_k\}_{k=1,\dots}$ orth. normal, $\|p_f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$
- Calculons pour $1 \leq j \leq n$

$$\langle h_f, e_j \rangle = \langle f - p_f, e_j \rangle = \underbrace{\langle f, e_j \rangle}_{c_j} - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle$$

$$= c_j - \underbrace{\langle f, e_j \rangle}_{c_j} \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{1} = 0$$

- Et donc $\langle h_f, p_f \rangle = 0$

$$\|h_f\|_2^2 + \|p_f\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|h_f\|_2^2$$

▨

Cor: Parseval

(II) $\Leftrightarrow \|h_{f(n)}\| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$

Cor: Lemme de Rieman

$f \in R^{\mathbb{C}}[a,b]$, $\{e_k\}_{k=1,2,\dots}$ système orth. normal $\Rightarrow$

$c_k \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$ où $c_k = \langle f, e_k \rangle$

Pv: Bessel $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$.

Rem: Là, il y a plus d'info :

p. ex : $c_k = \frac{1}{\sqrt{|k|}}$ impossible

parce qu'on aurait $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \infty$

Thm: Le système orthonormal $\{e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}\}$ dans $R^{\mathbb{C}}[0,2\pi]$ est complet.

Pv : 1) **Prop :** Bessel ②

Conditions comme Bessel ①.

Soit $g = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$, alors $\|f-g\|_2 \geq \|h_f\|_2$

Pv $f-g = f-p_f + p_f - g = h_f + p_f - g$ on a

$\langle h_f, p_f - g\rangle = 0$

$\|f-g\|_2^2 = \|h_f\|_2^2 + \|p_f - g\|_2^2$ ☒

Cor: Pour montrer ① (qui dit $\|h_{f(n)}\|_2 \longrightarrow 0$)

il suffit de mq $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$ et $g = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$

tq $\|f-g\|_2 < \varepsilon$

2) **Lemme:** $\|f\|_\infty \geq \|f\|_2$ (Exercice)

Cor: $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$

Soit $f \in R^{\mathbb{C}}[a,b]$, bonne : 2π - périodique, continue, dérivable par morceaux, f' à var. bornée.

Exc : f_n continue et Lin p.m.

Pour telle f_n on a $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx}\|_2 \longrightarrow 0$

parce qu'on a vu $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx}\|_\infty \longrightarrow 0$

où $c_k = \langle f, e^{ikx}\rangle$

Pv : (Suite)

3) Inégalité Δ + ① + ② :

Lemme : Il nous suffit de mq pour $f \in R^{\mathbb{C}}[0,2\pi]$ et $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \tilde{f}$ bonne tq $\|f - \tilde{f}\|_2 < \varepsilon$

Parce que $f, \varepsilon \rightsquigarrow$

Soit $\tilde{f}$ bonne tq $\|f - \tilde{f}\|_2 < \varepsilon/2$ et n tq

$\|\tilde{f} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k e^{ikx}\|_2 < \varepsilon/2$ où $\tilde{c}_k = \langle \tilde{f}, e^{ikx} \rangle$

$\Rightarrow \|f - \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k e^{ikx}\|_2 < \varepsilon$

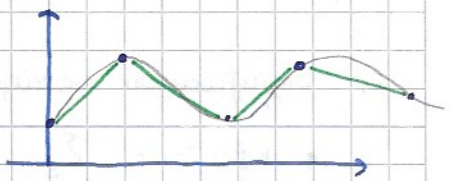
Pv du Lemme :

- On peut supposer $f(2\pi) = f(0)$

Soit $N > 0$ entier, $f_N(x_L) = f(x_L)$

où $x_L := \frac{2\pi}{N} \cdot L$, $L = 0, \dots, N$

et $f_N|_{[x_{L-1}, x_L]}$ linéaire



On a M_L, m_L habituels.

Sur $[x_{L-1}, x_L]$ $m_L < f_N < M_L$

$\|f - f_N\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - f_N|^2 \, dx$. Sur $[x_{L-1}, x_L]$,

on a $|f - f_N| < M_L - m_L$

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - f_N|^2 \, dx \leq \sum_{L=1}^{N} \frac{2\pi}{N} \frac{1}{2\pi} |M_L - m_L|^2 = \sum_{L=1}^{N} \frac{1}{N} |M_L - m_L|^2 = *$

Rappelons nous f bornée, $\exists B$ tq $|f(x)| < B \quad \forall x$

$\Rightarrow |m_L|, |M_L| \leq B$

$* \leq \frac{2B}{N} \sum_{L=1}^{N} (M_L - m_L) \xrightarrow{N \to \infty} 0$ comme f_N bonne ☒

le 16.04.19

Discours : Séries de Fourier

1. $f \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$

$$f \longmapsto c_k[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Inégalité de Bessel : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$
- Si f a variation bornée, alors $\exists C$, $|c_k| < \frac{C}{|k|}$
- $c_k[f] = \frac{1}{ik} c_k[f']$, $k \neq 0$, si f bonne (dérivable par morceaux, continue, f' à var. bornée)
- f' bonne ($\Rightarrow f$ dér 2 fois) $\Rightarrow |c_k[f]| < \frac{C}{|k|^3}$
- Si f pas continue, alors $\sum |c_k| = \infty$

Conclusion : (flou) le plus vite $c_k \to 0$, le plus f est lisse.

Par contre : Q : Quelle condition faut-il imposer sur $c_k[f]$, pour que f soit continue ???

2. Signification métrique

- $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k[f]|^2$ (Parseval)
- $\langle f, g\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k[f]\,\overline{c_k[g]}$

Déf : $\ell^2_{\mathbb{C}} = \left\{ (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \overset{c_k\in\mathbb{C}}{\vee} \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\}$ (Espace de Hilbert)

Prop : $(c_k)., (d_k). \in \ell^2_{\mathbb{C}}$ alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{d_k}$ converge

Pr : Cauchy - Schwartz.

Cela nous donne une structure Hermitienne sur $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

$c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\langle c, d\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{d_k}$

$\rightsquigarrow$ Prop de l'esp. hermitien (comme esp. à dim finie)

Fourier :

$$\mathcal{R}^{\mathbb{C}}[0, 2\pi] \xrightarrow{\mathcal{F}} \ell^2_{\mathbb{C}}$$

$$f \longmapsto (c_k[f])_{k\in\mathbb{Z}}$$

le 16.04.19

Analyse Complexe:

- Parseval : $\mathcal{F}$ est une "isométrie" (Hermitienne)

  ⚠ elle n'est pas bijective ⚠

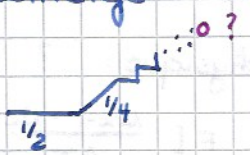
- Idée : $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$ plus "parfait" que $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$

Déf: Un espace métrique est complet, si chaque suite de Cauchy converge

Prop: Dans un esp. métrique linéaire H cela donne :

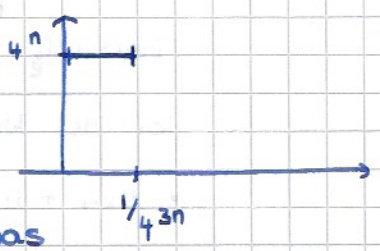
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S_n\| < \infty \Rightarrow \sum S_n \text{ converge}$$

P. exc: Supposons $\|S_n\| = \frac{1}{2^n}$



Thm: $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$ est complet

- Par contre : $f_n(x) = \begin{cases} 4^n & 0 \le x \le \frac{1}{4^{3n}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



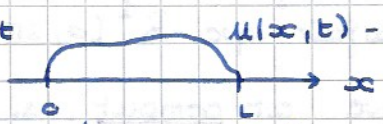
$\|f_n\| = \frac{1}{2^n}$, $\sum \|f_n\|$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$

EDP !

Equation des ondes:

- Le problème:



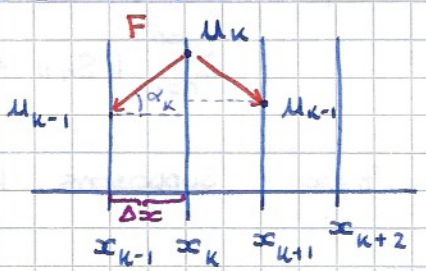
Model math: 

t - temps

Conditions initiales : $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \text{ - donnée} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$ $\left(\frac{d}{dt}(u(x,t)) = u_t(x,t)\right)$

$\longrightarrow u(0,t) = u(L,t) = 0$ (Conditions naturelles)

F - force de tension , ρ - densité



Model physique : ?

$$F_k = F\left[\underbrace{\frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta x}}_{\uparrow} + \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}\right]$$

$F\sin\alpha_k$

mais $|u_k - u_{k-1}| << \Delta x \Rightarrow \sin \sim \tan$

Loi de Newton : $F_k = m \cdot a_k$, $m = \rho \Delta x$, $a_k = u_{tt}(x_k, t)$

$\bullet\ u_{k-1} + u_{k+1} - 2u_k \sim u_{xx}(x_k, t) \cdot \Delta x^2$

$\rightsquigarrow$ Equation des ondes : $\boxed{F u_{xx} = \rho u_{tt}}$

$a^2 = \frac{F}{\rho_{tt}} \rightsquigarrow \boxed{a^2 u_{xx} = u_{tt}}$ (*)

Solution en série de Fourier:

Obs: l'équation est linéaire si u_1 et u_2 satisfont (*)

alors $\alpha u_1 + \beta u_2$ la satisfont aussi.

- Idée géniale: Séparation de variable

On oublie la condition $u(x,0) = f(x)$ et on suppose $u(x,t)$ $= X(x) \cdot T(t)$

$a^2 X''(x) \cdot T(t) = X(x) T''(t) \rightsquigarrow \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$

$\rightsquigarrow$ C' est une constante , $(-\lambda)$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & X(0) = X(L) = 0 \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

le 16.04.19

Analyse Complexe :

On considère : $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

Equation caractéristique : $\gamma^2 + \lambda = 0$

- Si $\lambda < 0 \Rightarrow X = b_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + b_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$

  il n'y a pas de sol $X(0) = \quad , X(L) =$

- Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ pas de sol.

- Si $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

  $\left.\begin{array}{l} X(0) = 0 \rightsquigarrow A = 0 \\ X(L) = 0 \rightsquigarrow B\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X_k = \sin\frac{k\pi x}{L}$

  pour $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k = 1, 2, \ldots$

  $T''(t) + a^2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0$

  $\rightsquigarrow T_k(t) = C_k \cos\frac{ak\pi t}{L} + d_k \sin\frac{ak\pi t}{L}$

  $X_k(x) \cdot T_k(t)$ - sowtions (*) $k = 1, \ldots$, linéarité

  $\longrightarrow \sum \left(C_k \cos\frac{ak\pi t}{L} + d_k \sin\frac{ak\pi t}{L} \right] \sin\frac{k\pi x}{L}$

$u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi x}{L} = f(x)$.

Equation des ondes : le 30.04.19

Rappel : $a = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$,

① $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

② $u(0,t) = u(L,t) = 0$ [corde]

③ $u(x,0) = f(x)$ et $u_t(x,0) = g(x)$ [initiales]

$g(x) = 0$: guitare 

$f(x) = 0$: piano 

Clé : Linéarité !

Séparation de variable : $u(x;t) = X(x)\,T(t)$ $\xrightarrow{①+②}$ $A_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{ak\pi t}{L}$ et $B_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{ak\pi t}{L}$ sont solutions :

Sol. Générale : $u = \sum_{k=1}^{\infty} C_k A_k + d_k B_k$

③ : $u(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{L}$

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

On a f :  et $\tilde{f} : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$

tq $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$ ($\tilde{f}$ - impaire)

→ Série de Fourier = Série de sinus.

et $C_k = \frac{1}{L}\int_0^L \tilde{f}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{L}\cdot d_k \cdot \sin\frac{k\pi x}{L}$$

$$\frac{ak\pi}{L} d_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

$$d_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

ce qui nous emmène à $u = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot A_k + d_k \cdot B_k$

Analyse Complexe : le 30.04.19

Analyse de solutions :

① Solutions sont périodiques, période : $t_{pér} \frac{a\pi}{L} = 2\pi$

$\Rightarrow t_{pér} = 2L \cdot \sqrt{\frac{\rho}{F}}$

hauteur du son : $\sim 1/t_{pér}$ (tension ↑ ⇒ période ↘)

F augmente ⇒ son plus haut.

Corde + longue ⇒ son plus bas.

② Principe : le + vite $c_k[f] \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

le + lisse f est

f est m fois dérivable $\Leftrightarrow \exists B$ tq $|c_k| < \frac{B}{|k|^{m+1}}$

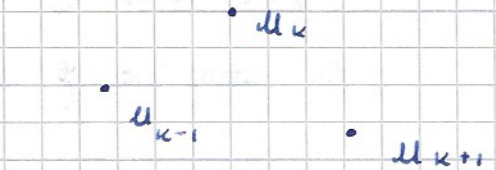
Si f et g sont lisses, alors le son sera pur.

③ Exo : $f(x+at)$ sol. d'équation des ondes (pas cond 2)

Périodicité ⇒ sing. de f et g ne disparaissent pas.

Equation de la chaleur :

Modèle : tige long. L, $u(x,t)$ — température au pt x, $0 \le x \le L$ au temps t.



$u_k \longmapsto u_k + \varepsilon(u_{k-1} - u_k) + \varepsilon(u_{k+1} - u_k)$

① $\Rightarrow \boxed{u_t = a\, u_{xxc}}$

② $u(0,t) = u(L,t) = 0$ [glace]

③ = $u(x,0) = f(x)$ [initiale]

[On suppose $f(0) = f(L) = 0$]

Equ. est linéaire.

Séparation de variables : $\left(\frac{1}{a}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \right)$

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$ ①+② ⇒ $\begin{cases} X(0) = X(L) = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \end{cases}$

pour $k = 1, 2, \ldots$: $\begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \\ X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L} \end{cases}$

$\Rightarrow T'(t) = -\lambda a T \quad \Rightarrow \quad T = C \cdot e^{-\lambda a t}$

$\lambda = \lambda_k \rightsquigarrow T_k(t) = C \cdot e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$

Sol. générale : $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \overbrace{\sin \frac{k\pi x}{L}}^{X_k} \cdot e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}}$

On impose : cond ③ : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{L}$

$$\boxed{C_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx}$$

Analyse qualitative des solutions :

① $u(x,t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

$e^{-bt} \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \quad (b > 0)$

② pour k grand $e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ va à 0 très, très vite.

$k = 1 \rightsquigarrow e^{-bt} \longrightarrow e^{-1} \sim \frac{1}{3}$ ($b = 1$ et $t = 1$)

$k = 4 \rightsquigarrow e^{-16bt} \rightsquigarrow e^{-16} \approx 0$

On retient de f l'info du C_1, C_2, C_3 et c'est tout.

③ La sol. devient lisse avec le passage du temps.

En fait, pour $t > 0$, $\forall m \; \exists B_m$ tq $\left| C_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \right| < \frac{B}{k^{m+1}}$

(C_k : coeff de Fourier de $u(x,t)$)

Cela nous montre :

$u(x,t)$ est infiniement dérivable en x par chaque $t > 0$

$f(x) =$  $\quad u(x, 0,1) =$ 

Analyse Complexe :

le 30.04.19

Conditions (aux bords) initiales générales :

① ! on change cond ②



① $u_t = a\, u_{xx}$

② $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 2$ [$f(0) = 0$ et $f(L) = 2$]

③ $u(x,0) = f(x)$

Solution : Trouver la sol. stable / finale ç-vd : $u_t = 0$

$\Rightarrow u_{xx} = 0$ alors on cherche la sol. de $u_0(x)$ tq

$u_0(0) = 0$, $u_0(L) = 2$, $u_0'' = 0$ (Sol u_0 - linéaire)

Nouveau système : $\tilde{u} = u - u_0$

① $\tilde{u}_t = a\, \tilde{u}_{xx}$

② $\tilde{u}(0,t) = 0 = \tilde{u}(L,t)$

③ $\tilde{u}(x,0) = f(x) - u_0(x)$

A' la place de la glace : Isolateur

② $\rightsquigarrow u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

le 07.05.19

Equation de Laplace :

0. L'équation : h - en 2 variables, 2 fois cont. dérivable

$$\text{Eq. de Laplace : } h_{xx} + h_{yy} = 0$$

Terminologie : Si h satisfait l'équation de Laplace, on dit que h est harmonique.

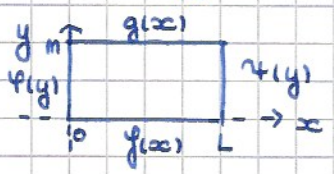
1. Conditions aux bords : (Problème de Dirichlet)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\partial D = C$ courbe lisse par morceaux (ex : $D_{\square}$)

Soit $F : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (continue), le problème :

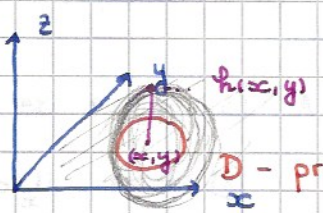
Trouver un $h : \overline{D} = D \cup \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et harmonique dans D tq $h|_{\partial D} = F$.

Ex : D :



$F : [f(x), g(x), \varphi(y), \psi(y)]$

2. Interprétations physiques :

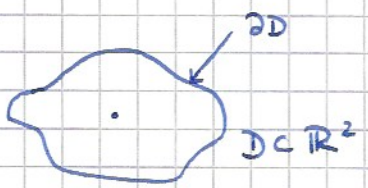


- Bulle de savon : dans $\mathbb{R}^3$

$h : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de la bulle en (x,y)

F décrit le cadre

- Distribution stable de la température :



$h : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ température

on maintient la température $F : \partial D \to \mathbb{R}$ au bord.

? h stable, h - harmonique.

le 07.05.19

Analyse Complexe :

3. Classification des équ. d'ordre 2 dans le plan.

Rem: On a vu : • $u_{yy} = a\, u_{xx}$

$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} = \xi \,,\ \frac{\partial}{\partial y} = \eta}$ $\Rightarrow$ $\xi^2 - a\eta^2 = c$ hyperbolle

équation hyperbolique

• $u_y = a\, u_{xx}$ $\longrightarrow$ $\xi = a\eta^2$ équ. parabolique

• $u_{xx} + a\, u_{yy} = 0$ $\longrightarrow$ $\xi^2 + a\eta^2 = c$ équ. elliptique.

Changement de variable :

$(x,y) \longmapsto (x', y')$ $\qquad x'(x,y)\,,\ y'(x,y)$

p.ex : $x' = ax + by$
$y' = cx + dy$

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y'}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = \dots$

Après changement $\rightsquigarrow$ nouveau système équivalent.

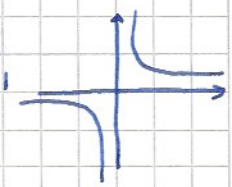
$x, y \longmapsto x', y'$



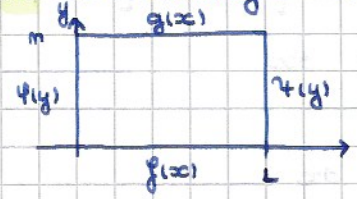
Pb : Est-ce que les conditions aux bords changent ses orientations ?

Exc : $\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\, u = 0$ $\longrightarrow$ $\xi\cdot\eta = c$

hyperbolique $\rightsquigarrow$ $xy = 1$



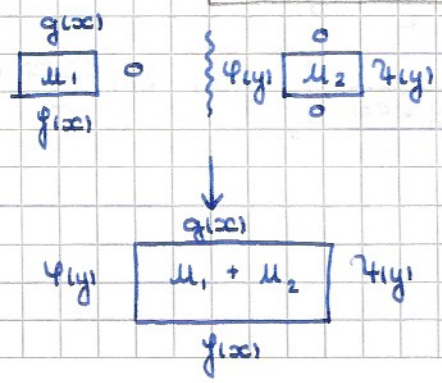
4. D - rectangle : Séparation de variable.



$D = \{\, 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le m \,\}$ $\qquad F : \{ f(x), g(x), \varphi(y), \psi(y) \}$

$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$ $\qquad \boxed{u\big|_{\partial D} = F}$

Linéarité :



Donc on suppose $\varphi(y) = \gamma(y) = 0$

Sép. de var : on oublie f et g et on cherche des sols de la forme $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$\rightsquigarrow X''(x) Y(y) + X(x) Y''(y) = 0$

$\rightsquigarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{cst} = -\lambda$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{vient du dessin})$$

la solution :

$$\begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \\ X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{L} x \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0$

Eq char : $\gamma^2 - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = 0 \Rightarrow \gamma = \pm \frac{k\pi}{L}$ $\quad u_1 = e^{\frac{k\pi}{L} y}$, $u_2 = e^{-\frac{k\pi}{L} y}$

l'espace de solution : $\left\{ \alpha e^{\frac{k\pi}{L} y} + \beta e^{-\frac{k\pi}{L} y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \alpha \cosh \frac{k\pi}{L} y + \beta \sinh \frac{k\pi}{L} y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \alpha \sinh \frac{k\pi}{L} y + \beta \sinh \frac{k\pi}{L} (m - y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

La solution générale :

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{L} x \left[c_k \sinh\left(\frac{k\pi y}{L}\right) + d_k \sinh \frac{k\pi}{L}(m-y) \right]$$

on se rappelle f et g :

$u(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{d_k \sinh \frac{k\pi m}{L}}_{\text{numérique}} \sin \frac{k\pi x}{L}$

$\Rightarrow d_k \sinh \frac{k\pi m}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx$

$y = 0$ $\Rightarrow \boxed{d_k = \frac{2}{L \cdot \sinh \frac{k\pi m}{L}} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx}$

$y = L$ $\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{2}{L \cdot \sinh \frac{k\pi m}{L}} \int_0^L g(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx}$

Analyse Complexe : le 07.05.19

Rem : 1) Ce n'est pas nécessaire que F soit continue

2) Analyse des solutions :

$$|d_k| \leq \underbrace{B}_{\text{borne de } \int f \sin dx} \cdot e^{-\frac{k\pi m}{L}}$$

$c_k, d_k \longrightarrow 0$ exponentiellement

Interprétation : La bulle est lisse (C^∞)

---

le 14.05.19

Fonctions Harmoniques - Fonctions Holomorphes :

Rap : Fonctions Harmoniques :

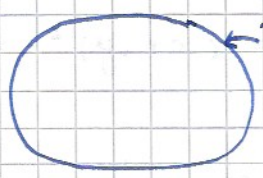
Opérateur de Laplace : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

D - domaine ouvert (étoilé / convexe / connexe)

∂D courbe lisse par morceaux.

$u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique si 2 fois cont. dérivable et

$\Delta u = 0$ ($u_{xx} + u_{yy} = 0$)

D :  ∂D

Pb de Dirichlet :

Trouver $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique dans D et continue sur $\overline{D}$ et $u|_{\partial D} = f$ continue et donnée.

Rap : Fonctions holomorphes :

$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ (cont. dérivable), les 3 conditions sont équivalentes :

① f holomorphe : $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ converge

Rap : (Suite)

② Eq. Cauchy - Rieman : $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

C-R : $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

③ Analytique :

$\forall z_0 \in D$; si $D_r(z_0) \subset D$ alors $\exists a_1, \dots$ tq $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

qui converge pour $z \in D_r(z_0)$

Prop : $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $f(x+iy) = u+iv$ ($u = Re\, f$, $v = Im\, f$)

alors u et v sont harmoniques.

Pv : $u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (v_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y$

$= v_{yx} - v_{xy} = 0$ (thm Young) ∎

Ex :

- $\Delta(x^2+y^2) = 4 \rightsquigarrow x^2+y^2$ pas harmonique.
- $\Delta(x^2-y^2) = 0 \rightsquigarrow x^2-y^2$ harmonique.
- ? f holo tq $Re\, f = x^2-y^2$

En fait, $f(z) = z^2$, $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i\cdot 2xy$

- $u = \ln(x^2+y^2)$

$u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad u_{xx} = \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad u_{yy} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Donc $u_{xx} + u_{yy} = 0$, qui est définie sauf 0

- ? f tq $Re\, f = u$.

"$u = \ln z^2$" alors $f(z) = 2\ln z$

$\ln z = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}\, z$ Arg est défini à multiple de $2/\pi$ près

Conclusion : il n'y a pas de telle f holomorphe mais presque

Analyse Complexe :

le 14.05.19

On va mq si $\mathcal{D}$ est étoilé ($\exists p \in \mathcal{D}$ tq $\forall z \in \mathcal{D}$, $[p,z] \subset \mathcal{D}$)

et $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ harmonique, alors $\exists f$ tq $\mathrm{Re}\, f = u$.

A noter : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pas étoilé.

Thm : $\mathcal{D}$ - étoilé, $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ harmonique, alors il existe $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tq $\mathrm{Re}\, f = u$ et f est unique. (à une cst imaginaire près)

Rq :

- On commence par l'unicité : (f- holom)

  Supposons $f = u + iv$; alors $f'(x+iy) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x + iy) - f(x+iy)}{\Delta x}$

  $= u_x + iv_x \overset{C.R.}{=} u_x - iu_y$

  ç-v-d f' est déterminée par u.

  Alors f est déterminée à une cst près, cette constante peut être un nombre imaginaire arbitraire $u \rightsquigarrow f' \rightsquigarrow f + a + ib$

  a est fixé par $\mathrm{Re}\, f = u$ et b est arbitraire.

- Existence :

  $u \overset{?}{\rightsquigarrow} f$ tq $\mathrm{Re}\, f = u$.

  La construction :

  Soit $g(x+iy) = u_x - iu_y$, on vérifie que g satisfait C.R.

  1) $(\mathrm{Re}\, g)_x = (\mathrm{Im}\, g)_y$ $\quad u_{xx} = -u_{yy}$ ✓ (harmonique)

  2) $(\mathrm{Re}\, g)_y = -(\mathrm{Im}\, g)_x$ $\quad u_{xy} = u_{yx}$ ✓ (Young)

  Alors g est holomorphe, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\mathcal{D}$ est étoilé.

  Et donc g a une primitive $f(z) := \int_p^z g(w)\, dw$

  Alors $f' = g$. Si $f = \hat{u} + i\hat{v} \rightsquigarrow f' = \hat{u}_x - i\hat{u}_y$

  Alors $u_x = \hat{u}_x$ et $u_y = \hat{u}_y$ et alors $\exists c$ tq $\hat{u} = u + c$

Cor : 1) Harmonique ⟶ Analytique

Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique, $z_0 \in D$, $D_r(z_0) \subset D$,

$D_r(z_0)$ - étoilé. le thm $\rightsquigarrow$ $\exists f : D_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ tq

$\mathrm{Re}\, f = u$ et f - holomorphe.

Alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D_r(z_0)$

$\left(\mathrm{Re}\left[(a + ib)^n \right] = \sum_{L=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^L b^{2L} a^{n-2L} \binom{n}{2L} \right)$

$\rightsquigarrow$ $u(x, y) = \sum_{k,L=0}^{\infty} c_{kL} (x - x_0)^k (y - y_0)^L$

Alors u - harmonique $\Rightarrow$ u - lisse (C^∞)

2) Principe de moyenne :

f - holomorphe, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$

Prop : u - harmonique comme 1), alors $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$

---

le 21.05.19

Idée du cours :

EDP : C-R (Cauchy-Rieman), ondes, chaleur, Laplace

↕

Description de fonction par suite de nombre

f_n Holomorphe $\leftrightarrow$ f_n Harmonique

Rappel : Thm

1) $f : u \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Alors u et v sont harmoniques (satisfont éq. Laplace)

2) Soit $u : u \to \mathbb{R}$ harmonique tq u - étoilé.

Alors $\exists f : u \to \mathbb{C}$ holomorphe tq $\mathrm{Re}(f) = u$ et si $\tilde{f}$ est une autre telle fonction, alors $f - \tilde{f} = i \cdot a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Analyse Complexe :

le 21.05.19

Rap : Pb de Dirichlet pour l'équation de Laplace

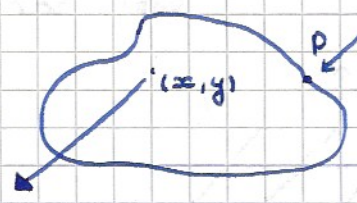
$U \subset \mathbb{R}^2$, ∂U courbe lisse par morceaux.

Étant donnée $H : \partial U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on cherche $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

- $u : U \to \mathbb{R}$ est harmonique (restrict.)
- $u|_{\partial U} = H$

Interprétation :

Objet plat

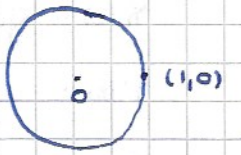


$H(p)$ température maintenue en p

Température

Sol : $u(x,y)$!

On considère $U = D = D_1(0) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$



Solution : $H : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - 2π périodique tq $H(e^{it}) = h(t)$

Ex : $h(t) = \frac{1}{4} t (2\pi - t)$ pour $0 \le t \le 2\pi$



Méthode : On calcule la série de F de h

$h(t) = \sum c_k e^{ikt}$, ? $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holom tq :

$$\boxed{\operatorname{Re} f(e^{it}) = h(t)} \qquad \square$$

Exo : $h(t) = \cos t \rightsquigarrow h(t) = \frac{1}{2}(e^{-it} + e^{it})$

alors $c_1 = c_{-1} = 1/2$ sinon $c_k = 0$

$\rightsquigarrow$ on peut choisir $f(z) = z$

$\operatorname{Re} f(e^{it}) = \operatorname{Re}(e^{it}) = \cos t$

Sol : $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+iy)) = \operatorname{Re}(x+iy)$

Solution générale :

Comme $\varphi(t)$ est réelle alors $c_{-k} = \bar{c}_k$

Soit $f(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, on vérifie la condition $\square$.

1ère forme de solution :

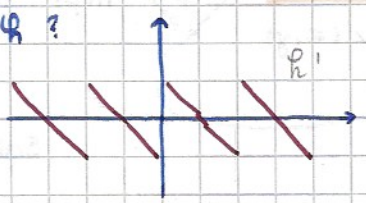
$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \longrightarrow u(x,y) = \mathrm{Re}\left[c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x+iy)^k\right]$$

Ex : $\varphi(t) = \frac{1}{4} t(2\pi - t)$

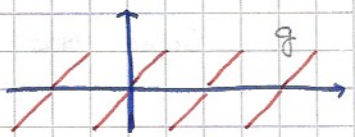
! $u(0, 1/2) = ?$

Série de Fourier de φ ?

$\varphi' = \frac{\pi - t}{2}$



Rap : Soit $g(t) = \frac{t}{2}$ pour $|t| < \pi$



$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt$$

$\varphi'(t) = -g(t - \pi)$

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$

$$\varphi(t) = c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} \qquad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} t(2\pi - t)\,dt = \pi^2/6$$

$$\varphi(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} \qquad f(z) = \frac{\pi^2}{6} - \sum \frac{z^k}{k^2}$$

$$u(x,y) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,\frac{z^k}{k^2}$$

En coordonnées polaires :

$z = r \cdot e^{i\theta} \rightsquigarrow z^k = r^k e^{ik\theta}$, $\mathrm{Re}\, z^k = r^k \cos k\theta$

$$\Rightarrow u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos k\theta}{k^2}$$

Si $r = 0$: $u(0,0) = \frac{\pi^2}{6}$

$r = 1, \theta = 0$: $u(1,0) = 0$

$\varphi \longrightarrow f \longrightarrow u = \mathrm{Re}\, f$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-ikt}\right] z^k =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\left[-1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{e^{ikt}}\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left[-1 + \frac{2}{1 - z/e^{it}}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] dt$$

Exo : (Suite)

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right]dt$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right] = \ldots = \mathrm{Re}\left[\frac{1-r^2+2ir\sin(t-\theta)}{1-r^2+2r\cos(\theta-t)}\right]$$

$$= \frac{1-r^2}{1-r^2+2r\cos(\theta-t)}$$

Thm : Poisson informel

u ? ← $f(t)$

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\underbrace{\frac{1-r^2}{1-r^2+2r\cos(\theta-t)}}_{\text{Noyau de Poisson}}\,dt$$

Analyse Complexe : le 28.05.19

Dernière lesson

Transformation de Fourier :

$$\left[\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right]$$

On définit $R.G(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ f|_{[-n,n]} \in \mathcal{R}([-n,n], \mathbb{C}) \text{ et } \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} |f(x)|\, dx < \infty \}$

On pose $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ pour $f \in RG(\mathbb{R})$

Autre notation $\mathcal{F} f = \hat{f}$

Thm : Formule d'inversion de Fourier.

Soit f continue, à variation bornée sur chaque intervalle compact dans $RG(\mathbb{R})$ et tq $\hat{f} \in RG(\mathbb{R})$.

Alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$

Prop : Soit $f \in RG(\mathbb{R})$ deux fois dérivables tq f' et f'' sont dans $RG(\mathbb{R})$

Alors $\hat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$ et $\hat{f''}(\omega) = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega)$

Pv : On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$

Comme $f' \in RG(\mathbb{R})$, $\int_0^x f'(t)\, dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand $x \to \pm\infty$

Donc $f(x)$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand $x \to \pm\infty$

Or $f \in RG(\mathbb{R})$, donc la limite est 0.

On fait une IPP : $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \underbrace{\left[f(t) e^{i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} i\omega f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ ∎

Déf : Produit de convolution de $f, g \in RG(\mathbb{R})$ bornées :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t)\, dt$$

Prop : $f, g \in RG(\mathbb{R})$ bornées

On a $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$

Pv : $\widehat{(f*g)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt \right) e^{-i\omega x}\,dx$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,e^{-i\omega(x-t)}\,g(t)\,e^{-i\omega t}\,dx\,dt$

$s = x - t$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{-i\omega s}\,g(t)\,e^{-i\omega t}\,ds\,dt$

$= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$ ∎

Equation de la chaleur :

$u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

1) On applique la transformée de Fourier (par rapport à x)

$\hat{u}_t = a^2 (i\omega)^2 \hat{u} = -a^2\omega^2 \hat{u}$

2) On résout par rapport à $\hat{u}$: $\hat{u}(\omega,t) = e^{-a^2\omega^2 t}\,\hat{u}(\omega,0)$

$= e^{-a^2\omega^2 t}\,\hat{f}(\omega)$

3) On applique la transformée de Fourier dans l'autre sens.

$u(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/4a^2t} * f(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\,ds$