Analyse Complexe - Printemps 2020

Andras Szenes

Contents

1 Application: Thm Résidus, Liouville,...

1.1 Rappel/Définitions

Singularité isolée

$$f : D_r(p) \setminus \{p\} \to \mathbb{C} \quad \text{holomorphe a une } \underline{\text{singularité isolée}} \text{ en } p$$

Classification

a) Supprimable:
S'il existe $\tilde{f} : D_r(p) \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\tilde{f}(z) = f(z)$ si $z \neq p$. Par exemple nous avons déjà vu la fonction $\dfrac{e^z - 1}{z}$

b) Pôle:
Si pas supprimable mais si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\dfrac{1}{f} : D_\varepsilon(p) \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ a une singularité supprimable en p.
Par exemple $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en $0 \rightsquigarrow \dfrac{1}{f(z)} = z \quad z \neq 0$.

c) Essentielles:
Le reste, par exemple $\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Fonction Méromorphe

On dit de $f : U \to \mathbb{C}$ qu'elle est méromorphe s'il existe $S \subset U$ fini telle que $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ est holomorphe et toute singularité sont supprimables ou des pôles.

Partie Principale

La partie principale de f en p:

$$\mathrm{Pr}_p f(z) := \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z-p)^n$$

Où $\displaystyle\sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-p)^n$ est la série de Laurent de la fonction f.

Faisons par exemple $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$. Les pôles de la fonctions se trouve en $z \in \pi\mathbb{Z}$, de plus la fonction est périodique ($f(z+\pi) = f(z)$). Aussi $f(z) = f(-z)$. Nous allons donc nous restraindre à l'étude autours de 0 où se trouve un pôle d'ordre 2.
$\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)^2}{z^2} = 1 \implies a_{-2} = 2$. Par parité de la fonction $a_{-1} = 0$. Donc $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0} f = 0 \implies \mathrm{Pr}_0 f(z) = \frac{1}{z^2}$

1.2 Calcul d'intégrales impropres

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{N\to\infty} \int_{[-N,N]} \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

Ce qui nous donne en complétant le demi disque supérieur (noté H_N) (et demi cercle sup noté SC_N):

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\int_{\partial H_N} \frac{dz}{(z^2+1)^2} - \int_{SC_N} \frac{dz}{(z^2+1)^2} \right) = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

Car par l'estimation standard l'intégrale sur SC_N tend à zéro, et aussi par thm résidu sur le contours ∂H_N

En ce qui concerne le calcul du résidu:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2} = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} \overset{w:=z-i}{=} \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{1}{w^2(w+2i)^2}$$

De plus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2}\frac{1}{(w+2i)^2} &= \frac{a_{-2}}{w^2} + \frac{a_{-1}w}{w^2} + \frac{a_0 w^2}{w^2} + \cdots \\ \frac{1}{(w+2i)^2} &= a_{-2} + a_{-1}w + a_0 w^2 + \cdots \end{aligned}$$

On peut obtenir donc: $a_{-2} = \frac{1}{(2i)^2}$ et par calcul $a_{-1} = \frac{1}{4i}$

1.3 Sommes infinies

Essayons de calculer la série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Pour cela commençons par analyser la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1-e^z}$. Les pôles sont: $\{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. De plus on note que: $\frac{1}{1-\exp(z+2\pi i k)} = \frac{1}{1-e^z}$

On sait que $\lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = -1$ et $\frac{1}{1-e^z} = -\frac{1}{(z-2\pi i n)} + \cdots$

f a pôle d'ordre 1 en $2\pi i n$ pour $n \neq 0$: $\operatorname*{Res}_{z=2\pi i n} f = \frac{-1}{(2\pi n)^4}$. On peut aussi noter que f possède un pôle d'ordre 5 en $z = 0$.

Définissons $\square_N$ le rectangle de hauteur $2\pi(N+0.5)$ (allant aussi jusqu'en bas à $-2\pi(N+0.5)$).
On peut motrer:

$$\max_{z\in\partial\square_N} \left| \frac{1}{1-e^z} \right| < 2 \implies \lim_{N\to\infty} \int_{\partial\square_N} f(z) = 0$$

Par les résidus:

$$\int_{\partial\square_N} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\text{pôles dans } \square_N} \operatorname*{Res}_{z=p} f(z)$$

$$\lim_{N\to\infty} \int = 0 = (2\pi i)\frac{-2}{(2\pi)^4} \sum \frac{1}{n^4} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

Théorème: Sommes Infinie

Avec $f = \dfrac{P}{Q}$, $\deg P \leq \deg Q - 2$ et $S = \{z \mid Q(z) = 0\}$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 2\pi i n\notin S}} f(2\pi i n) = \sum_{p\in S} \operatorname*{Res}_{z=p} \frac{f(z)}{1-e^z}$$

Exemple

$f = \dfrac{1}{z^4}$, $S = \{0\}$:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(2\pi i n)^4} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^4(1-e^z)}$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = (2\pi)^4$$

2 Fractions partielles

Rappel

Si $f(z)$ a un pôle en p, alors on défini $\mathrm{Pr}_p f(z) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n(z-p)^n$ où $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-p)^n$

Théorème: Fraction Partielle

$f = \dfrac{P}{Q}$, $\deg P < \deg Q$, et $S = \{z \mid Q(z) = 0\}$ alors:

$$f(z) = \sum_{p \in S} \mathrm{Pr}_p f(z)$$

Exemple

Prenons $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$, $S = \{0, 2\}$ qui sont des pôles simples.

- $\star$ $p = 0$

$$\lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1}{z(z-2)} = \frac{-1}{2}$$

Donc: $\mathrm{Pr}_0 f(z) = \dfrac{-1}{2z}$

- $\star$ $p = 2$

$$\lim_{z \to 2} (z-2) \cdot \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2}$$

Donc: $\mathrm{Pr}_2 f(z) = \dfrac{1}{2(z-2)}$

Par le théorème des fractions partielles nous obtenons donc:

$$\frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)}$$

Preuve: Thm. Fraction Partielle

- Si $g = \dfrac{P_1}{Q_1}$ avec $\deg P_1 < \deg Q_1$, alors $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$ avec la définition:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists R \quad \text{tel que} \quad |z| > R \implies |g(z)| < \varepsilon$$

En fait, on remarque que pour chaque parties principales on se retrouve dans le cas de ce mini-Lemme. Alors:

$$\underbrace{f(z) - \sum_{p \in S} \mathrm{Pr}_p f(z)}_{:= G(z)} \xrightarrow{z \to \infty} 0$$

Et aussi $G(z)$ est entière car holomorphe sur $\mathbb{C}$. Effectivement:

$$f(z) - \mathrm{Pr}_p f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n \quad \text{où} \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-p)^n$$

Comme $G(z) \longrightarrow 0$ elle est bornée, de plus elle est entière. Donc par Liouville la fonction est constante, et nulle car sa limite est zéro.

$\square$

2.1 Fractions Partielles infinies

Peut on dévelloper, par exemple, $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)^2}$ en fraction partielles ?

Notons certains détails:

- $f(z+\pi) = f(z)$
- $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- $f(z) = f(-z)$

Essayons de calculer $\mathrm{Pr}_0 f(z)$. Notons que le pôle en 0 est d'ordre 2 et donc $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(z)} &= \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{a_{-1}}{z} + a_0 + \cdots \\ f(-z) &= \frac{1}{z^2} - \tfrac{a_{-1}}{z} + a_0 + \cdots \end{aligned}\right\} \implies a_{-1} = 0$$

Donc: $\mathrm{Pr}_0 f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, les pôles de $f(z)$ sont $S = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{Pr}_{\pi n} f(z) = \dfrac{1}{(z-\pi n)^2}$.

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\pi n)^2} \quad \text{si} \quad z \neq \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

On calcule le côté droit par le thm des sommes infinies. On fixe x:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\pi n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2\pi i n)$$

Est vrai pour $g(z) = \dfrac{1}{\left(x - \dfrac{z}{2i}\right)^2}$. Les conditions sont remplies et donc:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\pi n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2\pi i n) = \operatorname*{Res}_{z=2ix} \frac{1}{(1-e^z)\left(x - \dfrac{z}{2i}\right)^2}$$

Il ne reste plus qu'à calculer le résidu. Notons que le pôle est d'ordre 2. Déplaçons le pôle en 0 pour plus de simplicité: $w := z - 2ix$

$$\implies \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{(2i)^2}{(1-e^{w+2ix})\, w^2}$$

$$\frac{(2i)^2}{1-e^{w+2ix}} = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$$

On a donc que le résidu en $w = 0$ est égal au coefficient a_1 (diviser par w^2 l'égalité)

$$a_1 = \frac{d}{dw} \left.\frac{(2i)^2}{1-e^{w+2ix}}\right|_{w=0} = \cdots = \left(\frac{2i}{e^{ix} - e^{ix}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

2.2 Principe de l'argument

Le théorème des résidus nous dit:
U-étoilé, $F : U \to \mathbb{C}$ méromorphe avec S les pôles de F:

$$\int_{\partial U} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{p \in S} \operatorname*{Res}_{z=p} F(z)$$

Prenons maintenant une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ méromorphe, et définissons $F := \dfrac{f'}{f}$. Essayons d'appliquer le théorème des résidus à cette fonction F. La première question est: Où sont les pôles de F?:

- Si p n'est pas un pôle de f et $f(p) \neq 0$, alors p n'est pas un pôle de F

- Si $f(p) = 0$, alors on peut représenter f sous forme de série:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad \text{avec} \quad a_k \neq 0 \quad (\text{zéro d'ordre } k)$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot a_n (z-p)^{n-1} \\ F(z) &= \frac{k \cdot a_k (z-p)^{k-1} + (k+1) \cdot a_{k+1}(z-p)^k + \cdots}{a_k(z-p)^k + a_{k+1}(z-p)^{k+1} + \cdots} \\ &= \frac{k}{z-p} \cdot \frac{1 + \frac{k+1}{k} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot (z-p) + \cdots}{1 + \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot (z-p) + \cdots} \end{aligned}$$

  Donc si f à un zéro d'orde k en p, alors F a un pôle simple en p et $\operatorname*{Res}_{z=p} F(z) = k$

- p est un pôle d'ordre k de f. C'est le même principe qu'avant, mais avec une série de Laurent qui commence à $-k$:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad \text{avec} \quad a_{-k} \neq 0$$

  Les calculs sont les mêmes et on arrive à la conclusion que F à un pôle d'ordre simple en p et $\operatorname*{Res}_{z=p} F(z) = -k$

On vient donc de montrer le théorème:

Théorème: Principe de l'Argument

$f : U \to \mathbb{C}$ méromorphe. Alors:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\substack{p\text{-pôle ou} \\ \text{zéro de } f}} \operatorname{ord}_p f(z) \quad \text{où} \quad \operatorname{ord}_p f(z) = \begin{cases} k & \text{si } p \text{ zéro} \\ -k & \text{si } p \text{ pôle} \end{cases}$$

Cas spécial

f a des pôles et zéros simples. Alors:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \#\text{Zéros} - \#\text{Pôles}$$

L'observation importante de cette section est que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in \mathbb{Z}$$

Clairement si $f_t : U \to \mathbb{C}$ une famille continue de fonctions méromorphes. $f : [0,1]\times U \to \mathbb{C}$ est continue et $f_t : U \to \mathbb{C}$ méromorphe. On suppose f_t n'a pas de zéro ou pôles sur ∂U. Alors la fonction:

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz \quad \text{est continue et entière } (\in \mathbb{Z})\text{, donc constante !}$$

Autre cas spécial

$f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphes continues sur $\overline{U}$, U-étoilé (simplement connexe) et $\forall w \in \partial U$ on a $|f(w)| > |g(w)|$. Alors:

$$h_t(z) = f(z) - t\cdot g(z) \qquad t \in [0,1]$$

On a $h_t(w) \neq 0$ pour $w \in \partial U$ et $t \in [0,1]$. Alors $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\,dz$ est constant ce qui implique:

$$t=0\colon \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)-g'(z)}{f(z)-g(z)}\,dz \quad t=1$$

On vient donc de montrer:

Théorème de Rouché

$$\sum_{\substack{p\in U\\ f(p)=0}} \mathrm{ord}_p f(z) = \sum_{\substack{p\in U\\ f(p)-g(p)=0}} \mathrm{ord}_p\big(f(z)-g(z)\big)$$

Exemple

$U = D_1$ et $F(z) = z^7 - 5z^3 + z - 1$ Quel est le nombre de zéros de F dans D_1 (en comptant leur multiplicité) ?

Choisisons les fonctions suivante: $f(z) = -5z^3$, $g(z) = 1 - z - z^7$, donc clairement $F = f - g$. Pour $w \in \partial D_1$ ($|w| = 1$) $|f(w)| = 5$ et $|g(w)| \leq 3$. On a bien $|f(w)| > |g(w)|$ pour $w \in \partial D_1$. On a donc par le théorème précédent que le nombre de zéros (multipicité inclue) de F est égale au nombre de zéro (avec multiplicité) de $-5z^3$ dans D_1. Donc 3.

2.3 Principe de maximum

Rappel

Principe de la moyenne: $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{D_r(p)} \subset U$. Alors:

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(p + r \cdot e^{i\theta}\right) \, d\theta$$

On remarque que:

$$|f(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f\left(p + r \cdot e^{i\theta}\right) \, d\theta \right| \leq \max_{w \in \partial D_r(p)} |f(w)|$$

Théorème: Principe du Maximum

$f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{D_r(p)} \subset U$ et $|f(p)| \geq |f(w)|$ pour $w \in \partial D_r(p)$. Cela implique que f est constant.

Une variante du théorème

U connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe continue sur $\overline{U}$ ($\overline{U}$ compact) et f n'est pas constante. Alors si $|f(p)|$ est maximale pour $\overline{U}$, alors $p \in \partial U$.

3 Séries de Fourier

3.1 Polynômes trigonométriques

Euler trouva les résultats:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{en passant par:} \quad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Définition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaisant: $f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x$, est un polynôme trigonométrique si:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \quad \text{où} \quad c_n \in \mathbb{C}$$

Lemme: Coefficients de Fourier

Soit f un polynôme trigonométrique de la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \quad \text{où} \quad c_n \in \mathbb{C}$

Alors:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

<u>*Preuve:*</u>

Nous avons ($m, n \in \mathbb{Z}$)

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx} = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \right) e^{-inx}\, dx = c_n$$

$\square$

En particulier, un polynôme trigonométrique détermine ses coefficients.

3.2 Espaces Hermitiens

Définition

$(V, <\cdot,\cdot>)$ est un espace Hermitien si:

i) V est un espace vectoriel complexe (sur $\mathbb{C}$).

ii) $(v,w) \mapsto <v,w> \in \mathbb{C}$ est une opération bilinéaire. Mais avec une petite subtilité:

$$<\lambda v, w> = \lambda <v,w> \quad \text{et} \quad <v, \lambda w> = \overline{\lambda} <v,w>$$

Le reste des rêgles suit les mêmes conditions qu'un produit scalaire habituel.

Une base $\{e_i, i \in S\}$ de V est orthonormale si:

$$<e_i, e_j> = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Exemples

1. $\{f$-polynômes trigo.$\}$ forment un espace Hermitien, avec:

$$<f,g> = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx$$

2. Considérons: $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(x) = f(x+2\pi) \quad \forall x, \quad f \text{ continue} \quad \}$ avec le même produit scalaire que dans l'exemple précédant:

$$<f,g> = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx$$

Il est facile de vérifier que $(V, <\cdot,\cdot>)$ est bien un espace Hermitien. V contient tous les polynômes trigonométriques, mais il contient beaucoup plus d'autres fonction (prendre fonctions périodiques non trigonométriques). Une question que nous pouvons nous poser maintenant est: Est ce que V possède une base orthonormale et peut on la trouver ?

3.3 Fonctions intégrables

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si:

- Soit $N \in \mathbb{Z}_{>0}$
  Notons $x_\ell = a + \frac{b-a}{N} \cdot \ell,\ \ell = 0, 1, \ldots, N$ avec $a = x_0,\ b = x_N$

- $m_\ell \le f(x) \le M_\ell$ le minimum et maximum de $f(x)$ dans l'intervalle donné ($x_{\ell-1} \le x \le x_\ell$).

- $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{\ell=1}^{N} (M_\ell - m_\ell) = 0$

Dans ce cas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{\ell=1}^{N} M_\ell$$

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est intégrable si $\Re(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f(x))$ le sont.

Propriétés

- f-intégrable $\implies$ f est bornée.
- f, g intégrables $\implies$ $f + g,\ f \cdot g$ sont intégrables aussi.
- $\displaystyle\int_a^b (zf(x) + wg(x))\,dx = z \cdot \int_a^b f(x)\,dx + w \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

3.4 Les coefficients de Fourier

Définition

Soit $\mathbb{R} : \mathbb{C} \to 2\pi$-périodique, $f\,|_{[0,2\pi]}$ intégrable. Alors pour $n \in \mathbb{Z}$ on définit:

$$c_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-inx}\, dx$$

Nous pouvons maintenant nous poser quelques questions :

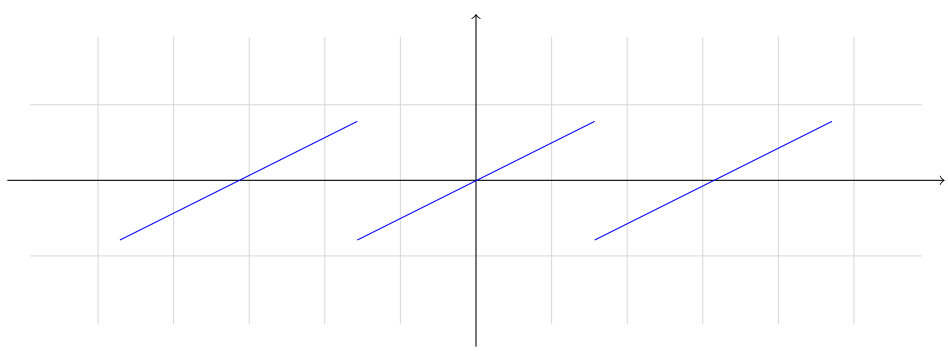
- Est-ce que $c_n[f]$, $n \in \mathbb{Z}$ spécifient la fonction f ? (l'identifie uniquement ?)
- Dans quel sens peut on interpreter: $f(x) \overset{??}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
- Est-ce que cette série converge pour tout x ?

Remarque

Supposons que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n[f]| < \infty$. Dans ce cas $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge de manière absolue et uniforme (car $|e^{inx}| = 1$). Et donc cette série converge vers une fonction $\tilde{f}$ continue (vu premier semestre). Donc la question est: $f \overset{?}{=} \tilde{f}$

Un exemple:

$f(x) = \dfrac{x}{2}$ pour $-\pi < x \leq \pi$ et 2π-périodique.



$$c_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cdot e^{-inx}\, dx$$

On arrive à la série de Fourier suivante:

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \cdots \overset{??}{=} f(x)$$

Nous avons bien l'égalité pour $x = 0$, la parité de la fonction est ok aussi.

Lemme: Estimation Fondamentale

Si en plus, f est réelle, pour k, N fixes on a:

$$2\pi |c_k[f]| \leq \frac{1}{|k|} \left(|m_N - m_1| + \sum_{\ell=1}^{N-1} |m_\ell - m_{\ell+1}| \right) + \frac{2\pi}{N} \sum_{\ell=1}^{N} (M_\ell - m_\ell)$$

Démonstration:

$$2\pi|c_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{N}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{N}\left[\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} m_\ell e^{-ikx}\ dx + \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}(f(x)-m_\ell)e^{-ikx}\ dx\right]\right|$$
$$\leq \left|\frac{i}{k}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell\left(e^{-ikx_\ell}-e^{-ikx_{\ell-1}}\right)\right| + \sum_{\ell=1}^{N}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}\overbrace{(f(x)-m_\ell)}^{\geq 0}\ dx$$

Quand $\ell = N$ l'expression de la somme se simplifie en $m_N - m_1$, de plus on peut majorer l'intégrale $(f(x)-m_\ell)$.

$$\leq \frac{1}{|k|}\left|m_N - m_1 + \sum_{\ell=1}^{N-1} e^{-ikx_\ell}(m_\ell - m_{\ell+1})\right| + \frac{2\pi}{N}\sum_{\ell=1}^{N}(M_\ell - m_\ell)$$
$$\leq \frac{1}{|k|}\left(|m_N - m_1| + \sum_{\ell=1}^{N-1}|m_\ell - m_{\ell-1}|\right) + \frac{2\pi}{N}\sum_{\ell=1}^{N}(M_\ell - m_\ell)$$

□

Corollaire 1

$$\lim_{k\to\pm\infty} c_k = 0$$

Effectivement : Soit $\varepsilon > 0$, f intégrable donc il existe N tel que:

$$\left|\frac{2\pi}{N}\sum_{\ell=1}^{N}(M_\ell - m_\ell)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Notons $A_n = \left(|m_N - m_1| + \sum_{\ell=1}^{N-1}|m_\ell - m_{\ell+1}|\right)$. Alors pour $k \geq \dfrac{2A_N}{\varepsilon}$, on a:

$$2\pi|c_k| \leq \frac{1}{|k|}A_N + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

3.5 Fonctions à variation bornée

Définition

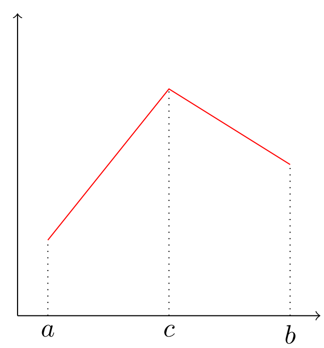
$f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, alors la variation de f sur $[a,b]$ est définie par:

$$Var_{[a,b]}f := \sup\left\{\sum_{\ell=1}^{N}|f(\xi_\ell)-f(\xi_{\ell-1})|\,\middle|\, a=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_N=b\right\}$$

De plus on dit que f est à variation bornée sur $[a,b]$ si $Var_{[a,b]}f<\infty$

Exemples

1. f-croissante monotone, cela implique que $Var_{[a,b]}f = f(b)-f(a)$.
2. Si f est monotone croissante sur $[a,c]$ et monotone décroissante sur $[c,b]$ cela implique que $Var_{[a,b]} = f(c)-f(b)+f(c)-f(a)$.



3. $Var_{[0,\pi]}\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\infty$

Corollaire 2

Si f-2π-périodique est à variation bornée (sur $[0,2\pi]$), alors:

$$|c_k| \leq \frac{Var_{[0,2\pi]}f}{2\pi|k|}$$

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $m_\ell = f(\xi_\ell)$. alors:

$$|m_N-m_1|+\sum_{\ell=1}^{N-1}|m_\ell-m_{\ell+1}| \leq \sum_{\ell=0}^{N}|f(\xi_\ell)-f(\xi_{\ell+1})| \quad \text{où} \quad \xi_0=0 \quad \text{et} \quad \xi_{N+1}=2\pi$$

En effet nous avons l'inégalité suivante: $|m_N-m_1| \leq \underbrace{|m_N-f(2\pi)|}_{\ell=N}+\underbrace{|f(0)-m_1|}_{\ell=0}$

Alors:

$$|m_N-m_1|+\sum_{\ell=1}^{N-1}|m_\ell-m_{\ell+1}| \leq Var_{[0,2\pi]}f \implies 2\pi|c_k| \leq \frac{1}{|k|}\cdot Var_{[0,2\pi]}f+\cancelto{0}{\frac{2\pi}{N}\sum_{\ell=1}^{N}(M_\ell-m_\ell)}$$

$\square$

Proposition: Variation Bornée

Notons $VB_{[a,b]}$ l'ensemble des des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$.

a) $f \in VB_{[a,b]} \implies \exists g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que:

$$f = g - h$$

b) $f \in C^1[a,b]$ et $|f'(x)| \leq M \forall x \in [a,b]$, alors

$$Var_{[a,b]} f \leq M(b-a)$$

<u>*Preuve:*</u>

a) Soit $g(x) := Var_{[a,x]} f$, alors g est monotone croissante. Définissons une autre fonction: $h(x) := Var_{[a,x]} f - f(x)$, est ce que h est croissante ?
Pour $x < y$:

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= Var_{[a,y]} - f(y) - Var_{[a,x]} + f(x) = \big(Var_{[a,y]} f - Var_{[a,x]} f\big) - \big(f(y) - f(x)\big) \\ &= Var_{[x,y]} f - \big(f(y) - f(x)\big) \geq 0 \end{aligned}$$

Nous avons bien $h(y) \geq h(x)$ si $y > x$, donc h est croissante, ok.

b)

$$Var_{[a,b]} f = \sup \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} |f(\xi_\ell) - f(\xi_{\ell-1})| \middle| a = \xi_0 < \cdot < \xi_N = b \right\}$$

Par le théorème des valeurs intérmédiaires nous avons: $f(\xi_\ell) - f(\xi_{\ell-1}) = f'(x_\ell)(\xi_\ell - \xi_{\ell-1})$ pour un certain $\xi_{\ell-1} < x < \xi_\ell$
En prenant le max de ces x_ℓ on définit $M := \max\limits_{0<\ell\leq N} f'(x_\ell)$ et donc $f(\xi_\ell) - f(\xi_{\ell-1}) \leq M \cdot (\xi_\ell - \xi_{\ell-1})$ et donc:

$$\sum_{\ell=1}^{N} |f(\xi_\ell) - f(\xi_{\ell-1})| \leq M \cdot \sum_{\ell=1}^{N} (\xi_\ell - \xi_{\ell-1}) = M(b-a)$$

$\square$

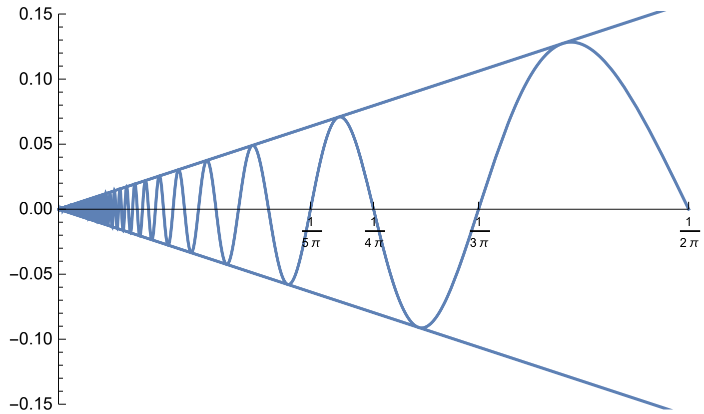
Propriétés des fonctions à variation bornée

a) $f \in VB_{[a,b]} \implies f$ intégrable.

En effet $f \in VB_{[a,b]} \implies f = g - h$ avec g, h monotones croissantes. g monotone implique qu'elle est intégrable, de même pour h (cf exo). Aussi, $a, b \in \mathbb{C}$ et g_1, g_2 intégrable $\implies ag_1 + bg_2$ aussi intégrable.

b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue n'implique pas $f \in VB_{[a,b]}$.

Le contre exemple typique est la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,(2\pi)^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \cdot \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases} \end{array}$. En effet cette fonction est continue mais n'est pas à variation bornée. Observons le graphique de la fonction pour s'en rendre compte:



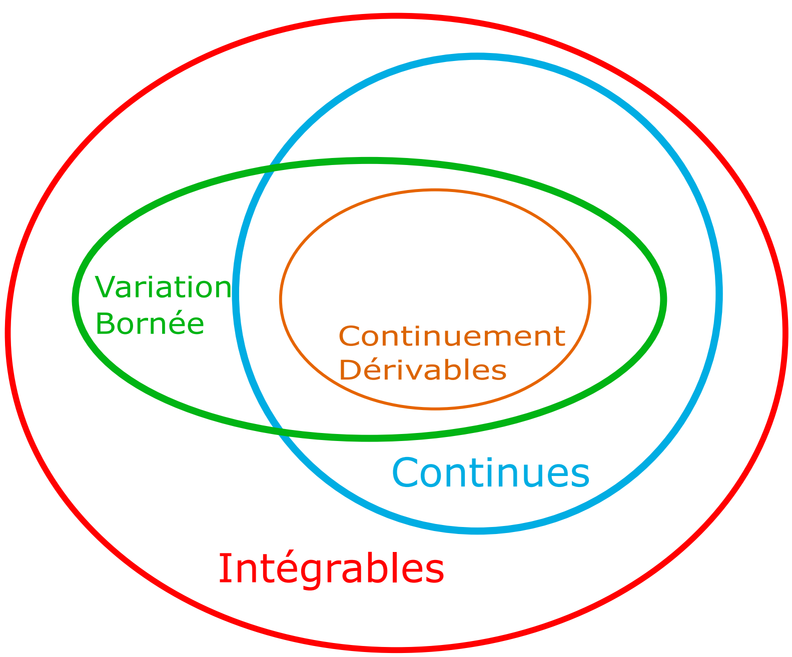
On peut donc remarquer que $Var_{[(3\pi)^{-1},(2\pi)^{-1}]}f = 2 \cdot \dfrac{2}{5\pi}$. De manière plus générale nous avons:

$$Var_{[(n\pi)^{-1},(2\pi)^{-1}]} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

On obtient donc que $Var_{[0,(2\pi)^{-1}]}f = \infty$

c) Rappel: $f \in C^1[a,b] \implies f \in VB_{[a,b]}$

On peut donc considérer le diagramme de Venne suivant qui représente bien où se situent nos différentes classes de fonctions:



Coefficients de Fourier et la dérivée

Notre raisonnement aura comme point de départ un calcul:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continuement dérivable. Alors:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \cancelto{0}{\frac{1}{-2\pi ik} f(x)e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi}} + \frac{1}{2\pi ki}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{ik}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{c_k[f']}{ik}$$

On notera que ce calcul reste valable si f est continue et continuement dérivable par morceaux. (Exercice)

Proposition: Coefficients de Fourier Dérivée

Soit f 2π-périodique, continue, continuement dérivable par morceaux, et telle que $f' \in VB_{[0,2\pi]}$. Alors pour $k \neq 0$:

$$|c_k[f]| \leq \frac{Var_{[0,2\pi]}f'}{2\pi k^2}$$

En particulier, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k[f]e^{ikx}$ converge absoluement et uniformément vers une fonction $\tilde{f}$ continue, 2π-périodique.

Remarque: On ne dit rien sur l'égalité de ces fonctions, $f \overset{??}{=} \tilde{f}$.

Convergence simple des séries de Fourier

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique; on va dire que f-bonne si:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{où} \quad S_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k[f]\cdot e^{ikx}$$

(Convergence simple)

Et si f, g sont bonnes $\implies$ $af + bg$ est bonne aussi.

Théorème: Convergence simple de Fourier

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, intégrable sur $[0, 2\pi]$, dérivable au point $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $S_n(x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

Preuve:
Commençons par normaliser le problème. En effet, supposons que nous avons montré ce résultat pour $f(x_0) = 0$. Alors si $f(x_0') \neq 0$ on peut se ramener au cas initial par : $\tilde{f}(x) = f(x) - f(x_0')$. Supposons donc que $f(x_0) = 0$ et le résultat s'étendra naturellement.

Alors on définit la fonction g suivante:

$$g(x) := \frac{f(x)}{e^{i(x-x_0)} - 1} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot\left(\frac{e^{i(x-x_0)} - 1}{x - x_0}\right)^{-1}$$

Cette forme nous permet de calculer $\lim_{x\to x_0} g(x)$ comme étant $\left(\frac{d}{dx}e^{i(x-x_0)}\Big|_{x=x_0}\right)^{-1}$ et donc $g(x_0) = \frac{1}{i}f'(x_0)$. De plus g est 2π-périodique, intégrable sur $[0, 2\pi]$ (sans preuve). Alors:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\left(e^{i(x-x_0)} - 1\right)\cdot e^{-ikx}\,dx = c_{k-1}[g]e^{-ix_0} - c_k[g]$$

Alors:

$$S_n(x_0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k[f]e^{ikx_0} = \sum_{k=-n}^{n} \left(c_{k-1}[g]e^{i(k-1)x_0} - c_k[g]e^{ikx_0}\right) = c_{-n-1}[g]e^{-i(n+1)x_0} - c_n[g]e^{inx_0} \to 0$$

$\square$

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique continue et continuement dérivable par morceaux avec $f' \in VB_{[0,2\pi]}$.
Soient $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$, ses coefficients de Fourier.
Alors pour tout x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ et la convergence est absolue et uniforme.

<u>*Preuve:*</u>
Selon la proposition sur les coefficients de Fourier (Dérivée):

$$|c_k| \leq \frac{Var_{[0,2\pi]}f'}{2\pi} \cdot \frac{1}{k^2}$$

Étant donné que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ converge cela implique que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ et donc qu'il existe $\tilde{f}(x)$ continue telle que $\sum c_k e^{ikx} \longrightarrow \tilde{f}(x)$, et ce uniformément. Selon le théorème de convergence simple de Fourier, si f est dérivable en x, alors $f(x) = \tilde{f}(x)$. Mais comme f est continue $\implies f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x$.

$\square$

Remarque

Il existe des fonctions 2π-périodiques et continues telles que leur série de Fourier ne converge pas vers f, i.e. $\sum c_k[f]e^{ikx} \not\to f(x)$. On peut trouver ces exemples dans le polycopié de H.W.

Un problème pour nous est maintenant de trouver la classe des bonnes fonctions (qui convergent gentiment).

Corrolaire du Théorème de convergence simple

Notons par $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $s(x) = \dfrac{x}{2}$ pour $|x| < \pi$ et $s(\pi) = 0$. Alors:

$$\forall x \qquad s(x) = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \implies s(x) \quad \text{est bonne}$$

En Exercice: f, g-bonnes $\implies \lambda f + \beta g$ est aussi bonne $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$

Lemme

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone $\implies \forall t \in (a,b)$:

$$f(t-) := \lim_{x\to t^-} f(x) \quad \text{et} \quad f(t+) := \lim_{x\to t^+} f(x) \quad \text{existent.}$$

Remarque: Le lemme reste vrai aussi dans le cas $f \in VB_{[a,b]}$ car $f = g - h$, g, h des fonctions monotones.

Définition

On dira d'une fonction à variation bornée f qu'elle est normalisée si $\forall t$:

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to t^-} f(x) + \lim_{x\to t^+} f(x)\right) = \frac{f(t-)+f(t+)}{2}$$

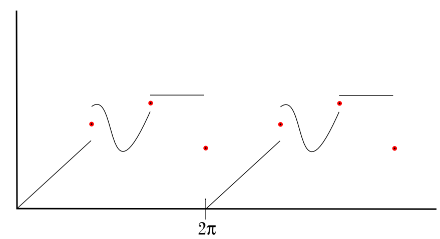
Exemple

$s(x)$ est normalisée:

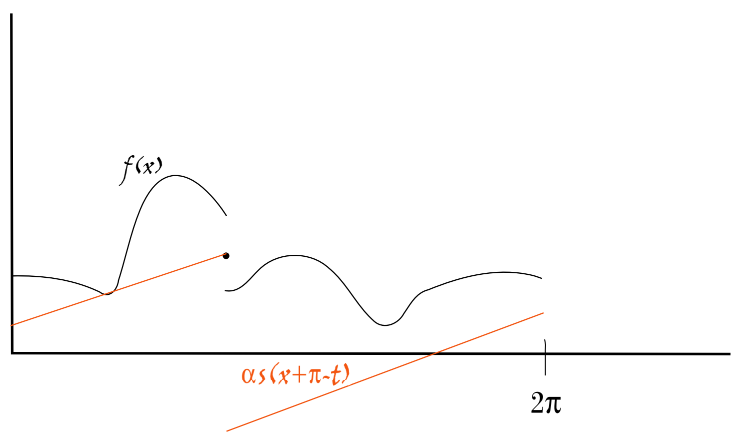
$$s(\pi-) = \frac{\pi}{2},\ s(\pi+) = \frac{-\pi}{2},\ s(\pi) = 0$$

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique continuement dérivable par morceaux avec $f' \in VB_{[0,2\pi]}$ mais seulement continue par morceaux ici et aussi f normalisée. Alors f est bonne.



Preuve:
Supposons que f est continue sur $[0, 2\pi]$ sauf en un point $0 < t < 2\pi$. Définissons $\tilde{f}(x) := \alpha s(x+\pi-t) + f(x)$ en reprenant la fonction s définie précédément. Dessin:



Et donc:

$$\tilde{f}(t-) = \frac{\alpha\pi}{2} + f(t-) \stackrel{?}{=} \tilde{f}(t+) = -\frac{\alpha\pi}{2} + f(t+)$$

Et pour $\alpha := \big(f(t+) - f(t-)\big)\cdot\frac{1}{\pi}$, $\tilde{f}(t)$ est continue et satisfait les conditions du théorème précédent, ce qui implique que $\tilde{f}$ est bonne. Par conséquent, $f(x) = \tilde{f}(x) - \alpha\cdot s(x+\phi-t)$ est bonne aussi.

$\square$

Théorème

Si f est à variation bornée et normalisée, alors f est bonne. (Pas de preuve donnée)

3.6 Applications

Théorème: Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $p_\varepsilon(x)$ un polynôme tel que:

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a,b]$$

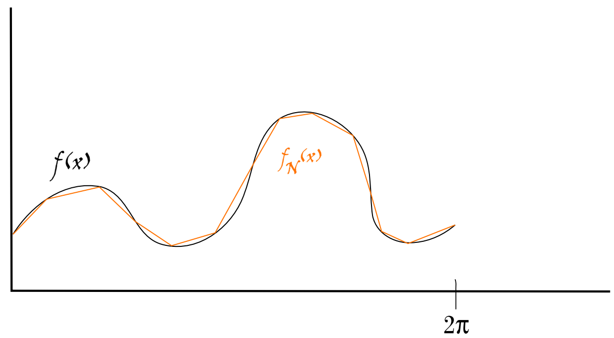
Équivalent à: $\exists p_n(x)$ une suite de polynôme tel que $p_n(x) \to f(x)$ uniformément.

Preuve:

Premièrement, on peut supposer $[a,b] = [0,2\pi]$ et $f(0) = f(2\pi)$ en passant par: $\tilde{f}(x) = f(x) - (ax+b)$.

On peut ensuite aussi supposer que f est linéaire par morceaux:

Soit f_N linéaire entre $\frac{(\ell-1)2\pi}{N}$ et $\frac{\ell 2\pi}{N}$ $\forall \ell$ et $f\left(\frac{\ell 2\pi}{N}\right) = f_N\left(\frac{\ell 2\pi}{N}\right)$ $\forall \ell$.
Alors $\forall \varepsilon$, $\exists N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x$.
Si on sait qu'il existe p tel que $|f_N(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x$. Alors par l'inégalité triangulaire $|f(x) - p(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x$.



Si f est linéaire par morceaux, par le premier théorème, f est bonne et donc:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \quad \text{tel que} \quad |f(x) - S_N(x)| < \varepsilon \quad \forall x \quad \text{où} \quad S_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

Il nous suffit donc de trouver $\forall \delta$ un polynôme p_k tel que $|e^{ikx} - p_k(x)| < \delta$ et ce $\forall x \in [0,2\pi]$.

Dans ce cas $|f(x) - \sum c_k p_k(x)| < \varepsilon + \sum_{k=-N}^{N} |c_k \cdot \delta < 2\varepsilon$ pour un bon δ. Nous avonc donc:

$e^{ikx} = \sum \frac{(ik)^m}{m!} \cdot x^m$ et alors il existe M tel que la convergence est absolue et uniforme sur $[0,2\pi]$ pour la série, ce qui implique:

$$\left| e^{ikx} - \sum_{m=0}^{M} \frac{(ik)^m}{m!} x^m \right| < \delta$$

$\square$

3.7 Séries de Fourier et systèmes orthogonaux

Rappel: Propriétés des espaces Hermitiens

Soit $C^0 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \quad f,\ 2\pi\text{−périodique, continue} \quad \}$ et $\text{Int} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \quad f,\ 2\pi\text{−périodique, intégrable} \quad \}$

Int est munie de $<\cdot,\cdot>$ défini par: $<f,g>= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$. Ce produit satisfait:

- ⋆ $<f+g,h>=<f,g> + <g,h>$, et toutes les autres propriétés usuelles.
- ⋆ $<\lambda f,g>=<f,\overline{\lambda} g>= \lambda <f,g>$
- ⋆ $<f,g>= \overline{<g,f>}$
- ⋆ $<f,f>\geq 0$ et on défini $\|f\|_2 := \sqrt{<f,f>}$. On note que pour $f \in C^0$, $\|f\|_2 = 0 \iff f = 0$

Nous pouvons noter d'autres propriétés intéréssantes:

- $| <f,g> | \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$
- Pythagore: $<f,g>= 0 \implies \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \|f+g\|_2^2$
- Inégalité triangulaire: $\|f\|_2 + \|g\|_2 \geq \|f+g\|_2$

Définition

On dit que $\{\varphi_k \mid k \in I\}$ (I un ensemble) est un système orthonormal si:

$$<\varphi_i,\varphi_j>= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Exemple

$$\left\{\varphi_k(x) = e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{est un système orthonormal.}$$

Pour $f \in Int$, on dit que $c_k[f] =< f,\varphi_k >,\ k \in I$ sont les coefficents de Fourier de f propre à ce système orthonormal.

Théorème: Bessel-Parseval

Soit $f \in Int$, $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ un système orthonormal, $c_k =<f,\varphi_k>$, $k \in \mathbb{Z}$ ses coefficients de Fourier. Alors

$$[\text{Inégalité de Bessel}] \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Et

$$[\text{Parseval}] \quad \|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \iff \|f - S_N\|_2 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{où} \quad S_N := \sum_{k=-N}^{N} c_k\varphi_k$$

<u>*Preuve:*</u>

Rappelons que $<\varphi_i,\varphi_j>= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Donc, pour $|j| \leq N$:

$$<f - S_N,\varphi_j>= \underbrace{<f,\varphi>}_{=c_j} - \underbrace{<c_j\varphi_j,\varphi_j>}_{=c_j} = 0$$

Cela implique donc $<f - S_N, S_N> = 0$ et par pythagore nous obtenons $\|f\|_2^2 = \|S_N\|_2^2 + \|f - S_N\|_2^2$ Et en passant à limite on obtient:

$$\|f\|_2^2 \geq \lim_{N\to\infty} \|S_N\|_2^2 = \lim_{N\to\infty} < \sum_{k=-N}^{N} c_k\varphi_k, \sum_{k=-N}^{N} c_k\varphi_k> = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_k \cdot \overline{c_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

OK pour Bessel, si en plus $\|f - S_N\|_2^2 \to 0$, alors on verifie aussi Perseval. De même si $\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$ alors cela implique forcément que $\|f - S_N\|_2^2 \to 0$ et donc Perseval, OK.

$\square$

Corollaire: Lemme de Riemann

$\lim_{|k|\to\infty} c_k = 0$

Définition

On dit que le système orthogonal $\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ est complet si $\forall f \in Int$ on a $\|f - S_N\|_2 \xrightarrow{N\to\infty} 0$

Remarque: On remarque que si $\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ est complet, alors $<f, \varphi_j> = 0 \iff \|f\| = 0$

Théorème: Système complet

Le système orthogonal $\left\{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ est complet.

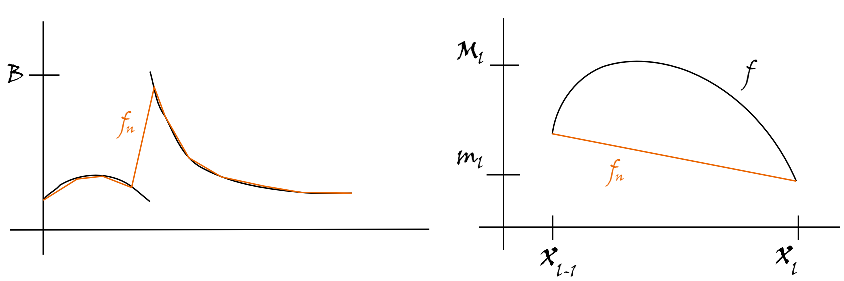
Commençons par montrer quelques résultats intérmédiaires:

Soit $f \in Int$, $n > 0$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Soit f_n linéaire par morceaux, $f_n\left(\frac{\ell 2\pi}{n}\right) = f\left(\frac{\ell 2\pi}{n}\right)$, $\ell = 0, \ldots, n$. Notons $x_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$

Lemme 1

$\|f - f_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Démonstration:
Soit $B > |f(x)| \quad \forall x$. Pour tout $x_{\ell-1} \leq x \leq x_\ell$, nous avons $m_\ell \leq f(x)$ et $f_n(x) \leq M_\ell$:



Alors:

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-f_n(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}|f-f_n|^2\,dx \le \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}(M_\ell-m_\ell)^2\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot\sum_{\ell=1}^{n}(M_\ell-m_\ell)^2\\ &\le \frac{2B}{n}\cdot\sum_{\ell=1}^{n}(M_\ell-m_\ell)\xrightarrow[n\to\infty]{f\in Int}0\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 2

$$\|g\|_2 \le \max_{0\le x\le 2\pi}|g(x)| \quad \left(:= \|g\|_\infty\right)$$

Lemme 3

Soit $\{\varphi_i \mid i\in\mathbb{Z}\}$ un système orthogonal, $f\in Int$, $N>0$ et $S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k[f]\ \varphi_k$ sa somme partielle et encore $Q=\sum_{k=-N}^{N} d_k\cdot\varphi_k$ une combinaison linéaire quelconque. Alors:

$$\|f-S_N\| \le \|f-Q\|$$

<u>*Preuve:*</u>
On peut suivre le même raisonnement que pour la preuve de Bessel:

$$|j|<N \implies <f-S_N,\varphi_j>=0 \implies <f-S_N,Q-S_N>=0 \implies \|f-S_n\|^2=\|f-Q\|^2+\|Q-S_N\|^2$$

$\square$

Nous avons maintenant tous les outils nécéssaire à la démonstration du théorème:

<u>*Preuve du Théorème:*</u>
Soit $\varepsilon>0$. On cherche les N tels que $\|f-S_N\|_2\le\varepsilon$.
Par le Lemme 1: $\exists n$ tel que $\|f-f_n\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$.
Comme f_n est bonne (continue et continuement dérivable par morceaux, f' à Variation bornée), pour le premier théorème nous dit que:

$$\exists N_0 \quad \text{tel que pour } N>N_0 \quad \left|f_n(x)-\sum_{k=-N}^{N}c_k[f_n]e^{ikx}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x$$

Par le Lemme 2: $\left\|f_n-\sum_{k=-N}^{N}c_k[f_n]e^{ikx}\right\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$ nous pouvons ensuite appliquer l'inégalité triangulaire:

$$\left\|f-\sum_{k=-N}^{N}c_k[f_n]e^{ikx}\right\|_2 \le \|f-f_n\|_2+\left\|f_n-\sum_{k=-N}^{N}c_k[f_n]e^{ikx}\right\|_2<\varepsilon$$

Et donc on conclu en utilisant le Lemme 3 où $d_k = c_k[f]$:

$$\Bigg\| f - \underbrace{\sum_{k=-N}^{N} c_k[f] e^{ikx}}_{=S_N} \Bigg\|_2 < \varepsilon$$

$\square$

3.8 Espace de Hilbert

Rappel

Le théorème de Perseval et celui des système complet impliquent: $\forall f \in$ Int (2π-periodiques, intégrables)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k[f]|^2$$

On pourrait interpreter ça comme: $\|f\|_2^2 = \|c[f]\|^2$ où $c[f] = (\dots, c_0[f], c_1[f], \dots)$.

Imaginons $\mathcal{H} = \{a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) \,|?\, \}$ un espace Hermitiens avec $\|a\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2}$ Alors en reprenant l'interpretation nous obtenons la fonction $f \mapsto c[f]$ qui est une isometrie.

Lemme 1

Soit $(V, <,>)$ un espace Hermitien, et $\|w\| := \sqrt{<w,w>}$ pour $w \in V$. Alors:

$$\Re <v,w> = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Corollaire

Comme Im $<v,w> = \Re <v, i\cdot w>$, on a dans un espace Hemitien: $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ détermine $<\cdot,\cdot>: V \times V \to \mathbb{C}$

Théorème $[\ell_2]$

Soit $\ell_2 = \left\{ a = (\dots, a_{-1}, a_0, \dots) \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty \right\}$ Alors ℓ_2 est un espace Hemitien.

1. $a, b \in \ell_2 \implies \lambda a + \mu b \in \ell_2$.
2. Avec le produit Hermitien: $<a,b> := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{b_k}$
3. En plus, comme espace métrique ($\text{dist}(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k - b_k|^2}$), ℓ_2 est complet:

   Si pour une suite $a^{(N)}$, $N = 1, 2, \dots$, $\lim_{n\to\infty} N \max_{n>0} \|a^{(N)} - a^{(N+n)}\| = 0$ alors $\exists c \in \ell_2$ tel que $a^{(N)} \to c$.

Démonstration:

1. Verifions $a, b \in \ell_2 \implies a + b \in \ell_2$:

$$\begin{aligned} |a_k + b_k|^2 &= |a_k|^2 + |b_k|^2 + a_k\overline{b_k} + \overline{a_k}b_k \\ &\leq |a_k|^2 + |b_k|^2 + 2|a_k|\cdot|b_k| \leq 2\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \end{aligned}$$

Et donc:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k + b_k|^2 \leq 2\left(\sum |a_k|^2 + \sum |b_k|^2\right) < \infty$$

2. Vérifions $a, b \in \ell_2 \implies \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{b_k} < \infty$

$$|a_k \overline{b_k}| = |a_k| \cdot |b_k| \leq \frac{1}{2}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$$

   Et donc:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k \overline{b_k}| \leq \frac{1}{2}\left(\sum |a_k|^2 + \sum |b_k|^2\right) < \infty$$

3. La preuve complète est à voir dans le polycopié de H.W., mais on peut noter que cela fonctionne car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, alors que par exemple $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

$\square$

Nous arrivons alors à définir une fonction: $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} Int & \longrightarrow & \ell_2 \\ f & \longmapsto & (\dots, c_{-1}[f], c_0[f], c_1[f], \dots) \end{array}$. Par Perseval $\mathcal{F}$ est une isométrie mais ce n'est pas une bijection !

Corrolaire

$f, g \in$ Int (2π-périodiques et intégrable sur $[0, 2\pi]$)

$$<f, g>:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k[f] \cdot \overline{c_k[g]}$$

4 Équations différentielles partielles

Introduction

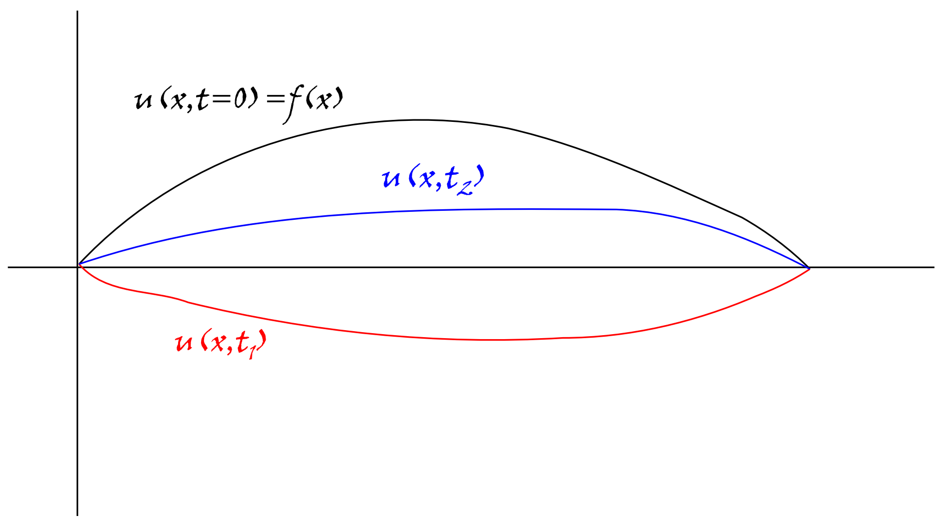
Nous abrégerons souvent par EDP de manière analogue à EDO (équation différentielle ordinaire).
Commençons par donner un exemple d'EDP: (Notons pour $u(x,t)$: $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$)

$$u_x = u_t^2$$

De manière analogue aux EDO nous pouvons ensuite nos demander s'il existe des solutions, de même en imposant des conditions initiales ?

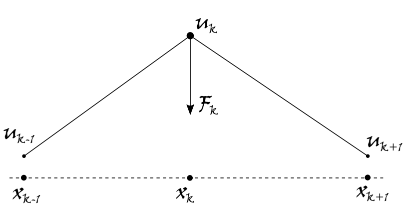
4.1 L'équation des ondes

Un exemple célèbre d'équation différentielle partielle est l'équation des ondes doit décrire l'évolution d'une onde (ou voir ça comme une corde) dans le temps:



Peut on alors trouver une expression générale de $u(x,t)$ étant donné la condition initiale où $u(x,t=0) = f(x)$?

Lançons nous dans un calcul des plus informels qu'il soit donné d'exister, mais avant, petit rappel physique basique.
Première loi du mouvement de Newton: $\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$, qu'on simpliefiera souvent $F = m \cdot a$. Si $y(t)$ donne la position alors $y'(t)$ donnera la vitesse au moment t, et l'accélération est donnée par $y''(t)$.



Découpons alors l'intervale $[0,\ell]$ en N parties égales et posons donc $x_k := \frac{\ell}{N} \cdot k$, $\Delta x = \frac{\ell}{N}$. On peut alors simplifier le problème et zoomer sur un unique intervale $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ (cf. croquis à coté). On peut alors calculer la force résultante pour chaque point u_k en utilisant la loi de Hook: $F = \tau \cdot \Delta$. Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$F_k = \tau \left(\frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta x} + \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x} \right)$$

En notant ρ la densité de la "corde" on obtient: $m_k = \rho \cdot \Delta x \rightsquigarrow F_k = m_k \cdot u_{tt}(x_k, t)$ ($u_{tt}(x,t)$ est la notation de la double dérivée de $u(x,t)$ par rapport à t: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)

Et alors en en égalisant les expressions pour F_k et en divisant par Δx:

$$\tau\left(\frac{u_{k-1}+u_{k+1}-2u_k}{\Delta x^2}\right)=\rho\cdot u_{tt}(x_k,t)$$

On remarque alors que le terme dans la parenthèse à gauche ressemble aux différences finies d'ordre 2 (approximation de la dérivée seconde) par rapport à la variable x d'où:

$$\tau\cdot u_{xx}=\rho\cdot u_{tt}$$

Si en plus on note que $a=\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ (cf. cours de physique) alors on obtient finalement l'EDP suivante:

$$u_{tt}=a^2\cdot u_{xx}$$

Nous pouvons fixer à cette équation les conditions initiales: $u(0,t)=u(\ell,t)=0$, en ce qui concèrne $t=0$ nous avons:

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x)$$

4.2 Équation des ondes: Solution/Remarques

Remarque 1:

Soit $F(x)$ une fonction réelle, alors:

$$u_{tt}=a^2F''(x+at)=a^2\cdot u_{xx}$$

Et donc $u(x,t)=F(x+at)$ et $F(x-at)$ sont des solutions. On peut cependant remarquer que les conditions au bords ne sont pas satisfaites.

Remarque 2: Linéarité

Si u et v sont solutions de $u_{xx}=a^2u_{tt}$, $u(0,t)=u(\ell,t)=0$ alors $w:=\alpha u+\beta v$ l'est aussi. Nous avons dans ce cas les conditions initiales suivantes:

$$w(x,0)=\alpha u(x,0)+\beta v(x,0)$$
$$w_t(x,0)=\alpha u_t(x,0)+\beta v(x,0)$$

4.3 Methode de Fourier

L'idée principale est de trouver un ensemble des solutions explicites de $u_{xx}=a^2u_{tt}$, $u(0,t)=u(\ell,t)=0$ et d'utiliser une combinaison linéaire de ces solutions générale pour satisfaire les conditions initiales.

Séparation de variables: on cherche des solutions de cette EDP de la forme:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

On obtient alors:

$$X(x)\cdot T''(t)=a^2X''(x)\cdot T(t),\quad X(0)=X(\ell)=0\rightsquigarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=:-\lambda$$

Notons alors que l'équation ne dépend plus de x ni de t, d'où l'égalité avec une constante, $-\lambda$.

Problème spectral: On fini alors avec:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

On en tire l'équation charactéristique: $X(x) = e^{\tau x} \implies \tau^2 + \lambda = 0$

$$\tau^2 = -\lambda \implies \tau = \pm i\sqrt{\lambda} \implies X = \gamma e^{i\sqrt{\lambda}\cdot x} + \delta e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot x}$$

a) $\lambda < 0 \implies X(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}$

b) $\lambda = 0 \implies X(x) = \alpha + \beta x$

c) $\lambda > 0 \implies X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot x)$

Les conditions $X(0) = X(\ell) = 0 \implies$ a) et b) sont impossibles. Ne reste plus qu'à explorer la solution c):

$\alpha = 0$, $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \implies \sqrt{\lambda}\cdot\ell = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et alors $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{\ell}$ et notons $\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Nous avons par là les solutions $X_k = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\cdot x\right)$. Alors $T_k''(t) = -\lambda_k a^2 T_k(t)$ implique que

$$T_k(t) = \alpha\cos\left(\frac{ak\pi}{\ell}\cdot t\right) + \beta\sin\left(\frac{ak\pi}{\ell}\cdot t\right)$$

Et $u_k(x,t) = X_k(x)\cdot T_k(t)$ est une solution de l'EDP pour $k = 1, 2, \ldots$.

Série de Fourier: Supposons donc:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0 \qquad (g = 0)$$

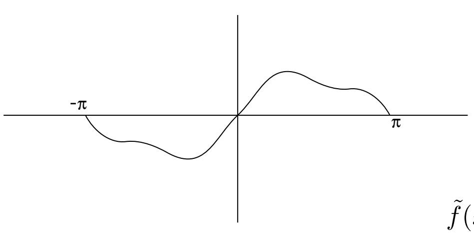
$$u_k(x,t) = \alpha_k\cos\left(\frac{ak\pi}{\ell}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\cdot x\right) \tag{$\star$}$$

Par linéarité des combinaisons linéaires infinies:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\cdot x\right) \tag{A}$$

Il nous faut encore donc trouver α_k.

Petit intérlude: Séries de Fourier impaires



Prenons une fonction $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$, dérivable, alors $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin(k\cdot x)$

Soit $\tilde{f}(x) \in C^1([-\pi,\pi], \mathbb{R})$, 2π-périodique, et ausi $\tilde{f}'$ à variation bornée, alors nous savons que on peut écire:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin(kx)$$

Avec une convergence uniforme et absolue de la série.

Lemme

Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ bonne (C^1 et f' à variation bornée) et $f(0) = f(\pi) = 0$. Alors $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x) & -\pi \le x \le 0 \end{cases} \quad \text{est bonne.}$$

Et comme $\tilde{f}$ est impaire alors $\tilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)$

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$$

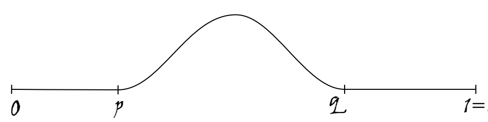
Alors en reprenant (A) du paragraphe précédant:

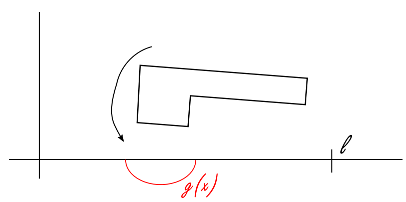
$$\alpha_k[f] := \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right)\, dx$$

Et donc par $(\star)$ on obtient:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k[f] \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell} \cdot t\right)$$

Remarque: $u(x, t + \frac{2\ell}{a}) = u(x,t)$, donc c'est une fonction périodique.

Par exemple pour $0 \le p \le x \le q \le 1$, $(x-p)^2(x-q)^2$:  (c.f: H.W.)

Où encore prenons une corde de piano frapée par son marteau: 

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x)$$

Rappel: Séparation des variables.

Supposons que $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ et que $X(0) = X(\ell) = 0$. Alors: $\exists k \in \mathbb{Z}^{>0}$ tel que $X(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right)$ et comme vu précédemment:

$$T(t) = \alpha \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell} \cdot t\right) + \beta \sin\left(\frac{ak\pi}{\ell} \cdot t\right) \quad \text{avec} \quad T(0) = 0$$

De la on obtient:

$$u_k = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{ak\pi}{\ell} \cdot t\right)$$
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot u_k(x,t) \implies u(x,0) = 0$$

Dans la lancée on développe la dérivée par rapport à t:

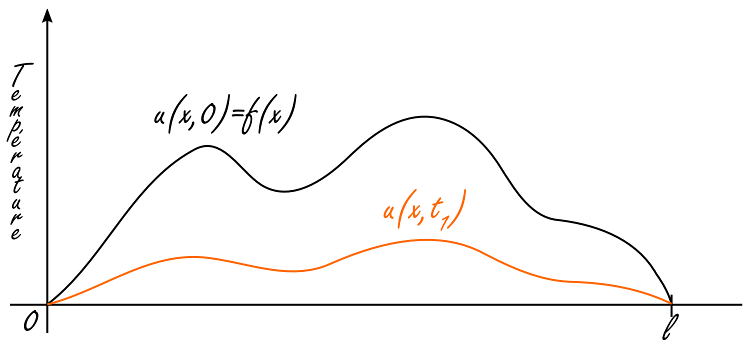
$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{\ell} \cdot \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell} \cdot t\right)$$

En imposant alors $u_t(x,0) = g(x)$:

$$\begin{aligned}
u_t(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{\ell} \cdot \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right) \\
\frac{ak\pi}{\ell} \cdot \beta_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot x\right)\, dx \\
\implies \beta_k &= \frac{2}{ak\pi} \int_0^{\ell} g(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot\right)\, dx
\end{aligned}$$

4.4 Équation de la chaleur (dans une tige)

Considérons une tige métalique de longueur ℓ qui a été chauffée de non-uniforme (La tige n'a pas la même température sur toute sa longueur). Disons alors que $u(x,t)$ est un modèle de la température de la tige, avec comme conditions aux bords $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$. L'évolution de la température pourrait ressembler à quelque chose de ce style:



La condition initiale $u(x,0) = f(x)$ n'est pas forcément continue. En découpant la tige en partie linéaire on peut en extraire, en ayant des bases de calorimétrie l'équation différentielle partielle suivante:

$$u_k(t+\Delta t) - u_k(t) = c\left(\frac{u_{k-1}-u_k}{\Delta x^2} + \frac{u_{k+1}-u_k}{\Delta x^2}\right) \rightsquigarrow u_t(x,t) = a \cdot u_{xx}(x,t)$$

Appliquons alors la méthode de séparation de variable et supposons $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$:

$$T' \cdot X = a \cdot T \cdot X'' \quad \text{avec comme conditions} \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

Nous pouvons réaranger les termes pour obtenir: $\frac{1}{a}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$ ce qui implique que ces équations ne dépende ni de x, ni de t. C'est donc des constantes. D'où: $X'' = -\lambda \cdot X$ et $T' = -a\lambda \cdot T$.
Les différentes solutions sont alors données pour $k \in \mathbb{Z}^{>0}$ par:

$$X_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$$

Donc $T_k' = -a\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \cdot T_k \implies T_k = c \cdot \exp\left[-a\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \cdot t\right]$ et le tout nous mène à poser comme solution générale:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \exp\left[-a\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \cdot t\right]$$

On impose ensuite $u(x,0) = f(x)$ par:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\cdot x\right) \quad \text{où} \quad c_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\cdot f(x)\, dx$$

Remarque: Nous n'obtenons pas quelque chose de périodique, mais on remarque bien que $u(x,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et ce, de manière éxponentielle.

De plus le Lemme de Riemann implique que $c_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors f_n exponentielle implique:

$$\forall m \quad k^m \cdot \exp\left(-bk^2 t\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lemme (exercice)

Soit $h \in \text{Int}$ (2π-périodique) telle que $k^m c_k[h] \to 0 \ \forall m$:
Alors h est infiniment dérivable.

Conclusion: La distribution de température dans la tige devient lisse pour $t > 0$ même si la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ ne l'est pas.

4.5 Équation de Laplace

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles de second ordre. Commençons par définir quelques notions.

Laplacien: Pour une fonction ϕ, on défini formellement son Laplacien comme:

$$\Delta\phi := \text{div}(\text{ grad } \phi)$$

Plus simplement, pour une fonction $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & u(x,y) \end{array}$ alors: $\Delta u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Définition: On dit d'une fonction u qu'elle est harmonique si $\Delta u = 0$. ($u_{xx} + u_{yy} = 0$)

Un question qu'un peut naturellement se poser maintenant est:
Étant donné les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$, $u(x,m) = g(x)$, $u(0,y) = \varphi(y)$ et $u(\ell,y) = \psi(y)$ peut-on trouver une fonction

$$u : \begin{array}{ccc} [0,\ell]\times[0,m] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & u(x,y) \end{array} \quad \text{telle que} \quad \Delta u = 0$$

Commençons par procerder par séparation de variables: Supposons $\varphi = \psi = 0$.

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \quad \text{Comme on veut } u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \rightsquigarrow X''Y = -XY'' \quad \text{avec} \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

Donc $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{-Y''}{Y} = -\lambda \implies X'' + \lambda X = 0 \overset{\lambda>0}{\implies} X = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x$

On fini alors avec $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi}{\ell}x$ pour $k = 1,2,\ldots,$ $\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{\ell}\right)^2$ et $Y_k'' = \left(\dfrac{k\pi}{\ell}\right)^2 Y_k \rightsquigarrow Y_k^+ = \exp\left(\dfrac{k\pi}{\ell}y\right)$, $Y_k^- = \exp\left(\dfrac{-k\pi}{\ell}y\right)$ On pose alors aussi:

$$Y_k^{(0)}(y) = \sinh\left(\frac{k\pi}{\ell}y\right) \qquad Y_k^{(m)} = \sinh\left(\frac{k\pi}{\ell}(m-y)\right)$$

Il faut encore vérifier que

$$\{ae^{\mu y} + be^{-\mu y} \mid a,b\in\mathbb{R}\} = \{c\sinh\mu y + d\cosh\mu y \mid c,d\in\mathbb{R}\} = \{a\sinh\mu y + b\sinh\mu(m-y) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left[c_k Y_k^{(0)}(y) + d_k Y_k^{(m)}(y)\right]$$

Pour cela notons $Y_k^{(0)}(0) = Y_k^{(m)(m)} = 0$. Imposons: $u(x,0) := f(x)$ et alors:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{\ell}x \cdot d_k \cdot \sinh\frac{k\pi m}{\ell} \implies d_k \sinh\frac{k\pi m}{\ell} = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx$$

Ce qui nous dit que $d_k = \dfrac{2}{\ell\cdot\sinh\dfrac{k\pi m}{\ell}}\displaystyle\int_0^\ell f(x)\sin\frac{\pi k}{\ell}x\,dx$. Nous allons ensuite imposer $u(x,m) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{\ell}x \cdot c_k \sinh\frac{k\pi m}{\ell} \rightsquigarrow c_k = \frac{2}{\ell\cdot\sinh\dfrac{k\pi m}{\ell}}\int_0^\ell g(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx$$

Remarque: $\sinh\dfrac{k\pi m}{\ell} > C\cdot e^{kq}$ pour $C,q>0 \implies \forall n \quad k^n\cdot d_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $k^m c_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc on a que $u(x,y)$ est infiniment dérivable et que la solution à ce problème de bulle de savon est lisse !

4.6 Fonctions harmoniques et fonctions holomorphes

Rappel

Pour $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ où $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, par Cauchy-Riemmann:

$$f \quad \text{est holomorphe} \quad \iff u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x$$

Corollaire

Si f est holomorphe, alors u et v sont harmoniques.

$$(u_x)_x = (v_y)_x = v_{xy} = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

Théorème: Holomorphe/Harmonique

Soit $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique sur U simplement connexe. Alors $\exists f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, unique à une constante près, telle que:

$$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) \quad \text{où } v \text{ est aussi harmonique}$$

Démonstration:

Commençons par une observation clef: Si f est holomorphe, alors: $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = -i \dfrac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = f'(z)$

Donc $f'(x+iy) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$. Alors u détermine f'. En particulier, on obtient ici l'unicité, à constante près.

Montrons maintenant l'existance de telles fonctions. Soit $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique avec U simplement connexe. Alors $u_x - iu_y$ est holomorphe. En effet vérifions les équations de Cauchy-Riemmann:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow (u_x)_x = (-u_y)_y \quad \text{Et par le thm Young} \quad \implies (u_x)_y = -(-u_y)_x$$

Notons $g : U \to \mathbb{C}$ $g(x+iy) := u_x - iu_y$, g est holomorphe. Comme U est simplement connexe il existe par Cauchy une fonction f telle que $f' = g$ (primitive).

Est ce que $\Re f = u$? Soit alors $f(x+iy) = \tilde{u} + i\tilde{v} \implies g = f' = \tilde{u}_x - i\tilde{u}_y \implies u_x = \tilde{u}_x,\ u_y = \tilde{u}_y$ et donc $u - \tilde{u}$ est constant.

$\square$

De ce résultats nous pouvons tirer plusieurs corollaires.

Principe de moyenne

$u : Q \to \mathbb{R}$ harmonique $\overline{D_r}(p) \subset Q$, $p = (x_0, y_0)$ alors:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$$

Démonstration:

$U = D_{r+\varepsilon}(p) \subset Q$ étoilé (et donc simplement connexe). Par le théorème précédent il existe $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe notée $f(x+iy) = u + iv$.

En utilisant ensuite le principe de la moyenne pour les foncitons holomorphes:

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + r \cdot e^{i\theta})\, d\theta$$

Il suffit donc de prendre la partie réelle.

□

Régularité

$u : U \to \mathbb{R}$ harmonique $\implies$ u est inifiniment dérivable, même analytique réelle: Pour chaque $U \ni p = (x_0, y_0)$ il existe $r > 0$ tel que

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}(x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

Converge de manière absolue et uniforme dans $D_r(p)$.

<u>*Démonstration:*</u>

f holomorphe $\implies$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ avec une convergence absolue uniforme dans $D_r(p)$.

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) \quad \text{et} \quad a_n = \alpha_n + i\beta_n$$

□

Principe de maximum

Soit $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique (U connexe), et $p \in U$ tel que $u(p) \geq u(q)$ $\forall q \in D_r(p)$ pour un $r > 0$. Alors u est constante.

4.7 Série de Fourier et régularité

Proposition: Fourier-régularité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, intégrable et telle que $\exists B > 0$:

$$\forall k \qquad |k^3 \cdot c_k[f]| < B$$

Alors f est continument dérivable.

<u>*Démonstration:*</u>

Soit $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ikc_k[f]e^{ikx}$. $|ikc_k[f]| < \dfrac{B}{k^2}$ donc la série est convergeante de manière absolue et uniforme vers $g(x)$ continue.

Soit $G(x) = \int_0^x g(t)\ dt$, alors $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π périodique et continuement dérivable avec $G' = g$. Mais donc selon la proposition [Coefficients Fourier Dérivée] $c_k[G] = \dfrac{1}{ik}c_k[g]$ et donc $G - f$ est constante, et donc égale à une constante près (le terme c_0 peut varier).

$\square$

Notons que nous pouvons itérer l'énoncer et donc si $|k^{n+2}c_k[f]| < B$ alors f est continuement dérivable n fois.

4.8 Transformation de Fourier

Définition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, alors pour $w \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx$$

Cela est bien défini si f est absolument intégrable:
$\forall N \quad f\,|_{[-N,N]}$ intégrable et $\exists B$ tel que $\displaystyle\int_{-N}^{N} |f|\, dx < B \quad \forall N$.

Lemme [Riemann]

f absoluement intégrable $\implies \lim\limits_{w\to\pm\infty} \hat{f}(w) = 0$

Proposition [FT dérivée]

Si f' est absolument intégrable et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f' = 0$, alors $\hat{f}'(w) = iw\hat{f}(w)$. En fait:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f' e^{-iwt}\, dt = \lim_{N\to\infty} f(t)e^{-iwt}\,|_{-N}^{N} + iw \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\, dt$$

Théorème: Inversion

f continument dérivable, absolument intégrable alors $\forall x$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}\, dw$$

On peut appliquer cela aux EDP. Prenons par exemple l'équation de la chaleur:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u(x,0) = f(x) \quad t \geq 0$$

Soit $\hat{u}(w,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\, dx$. Alors $\hat{u}_{xx} = -w^2\hat{u}$ et donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u} = -w^2 a^2 \hat{u},\ \hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$$

Nous avons comme solution $\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-w^2u^2t}$ et donc:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-w^2a^2t + iwx}\, dw$$