

$\mathbb{R}^n$: espace vectoriel

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ où $e_1, \dots, e_n$ = la base de $\mathbb{R}^n$

la métrique euclidienne :

$$f(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$\Rightarrow \text{la norme } \|x\| = f(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Rem: $|x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$

Rem: La norme euclidienne est associée au produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Déf: $B_x(\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta\}$

C'est la boule ouverte centrée en x de rayon δ .

Déf: Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est défini si $\forall x \in U \exists \delta > 0$ tq $B_x(\delta) \subset U$.

Formes linéaires.

Déf: Soit V , un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

a) Une forme lin. sur V est une application φ linéaire

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \varphi(\mu x + \lambda y) = \mu \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$$

b) L'ensemble des formes linéaires sur V , noté V^* est le dual de V .

Def:

V^* est un espace vectoriel si on définit : $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$

et $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Thm1:

Soit V un esp. vect avec $\dim(V) < \infty$, alors :

a) $V^* \cong V$ (Un isomorphisme d'esp. vect, une bijection linéaire)

b) $\dim(V^*) = \dim(V)$

c) Si V est muni du prod. scalaire $\langle, \rangle$, alors

$\forall f \in V^* \exists v_f \in V$ tq $f(x) = \langle x, v_f \rangle \forall x \in V$

Dém:

a) $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \Rightarrow$

$f \rightarrow v_f = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in V.$

$v \in V. v \rightarrow f_v$, qu'on définit comme

$$f_v(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

$$f(v_f)(x) = \sum_{i=1}^n (v_f)_i x_i = \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i = f(x) \Rightarrow f_{(v_f)} = f.$$

b) a) $\Rightarrow$ b)

c) $f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i = \sum_{i=1}^n f(e_i) \langle x, e_i \rangle = \langle x, \underbrace{\sum_{i=1}^n f(e_i) e_i}_{v_f} \rangle$

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormale

■

Rem:

v_f est un vecteur unique :

si $f(x) = \langle v_1, x \rangle = \langle v_2, x \rangle \quad \forall x \in$

$\langle v_1 - v_2, x \rangle = 0 \quad \forall x$ pour $x = v_1 - v_2$

alors $\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1 - v_2\|^2 = 0$

$\Rightarrow v_1 = v_2.$

Fonctions continues

- Déf:
- a) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x \in U$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_x(\delta)$
- b) $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est $f \in C(U)$ si f est continue en tout $x \in U$.

Ex: $n=2, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad \text{en } x=0 \text{ (ie: } x=(0,0))$

$$|f(y) - f(0)| = |y_1 \cdot y_2| = |y_1| \cdot |y_2| \leq \|y\|^2 < \varepsilon$$

si $y \in B_0(\sqrt{\varepsilon}) \Rightarrow f$ est continue en $x=0$.

Ex: $n=2, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \cdot x_2 / (x_1^2 + x_2^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas continue en $x=0$.

Dérivées partielles:

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

a) la dérivée partielle de f par rapport à x_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, (x_i+h), \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

b) $f \in C^1(U)$ si $\partial f / \partial x_i$ est continue sur $U \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Ex: $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

Ex: $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2) & \text{sinon.} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ existe en } x=0$$

mais pas continue!

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$,

a) la dérivée partielle d'ordre 2 est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

b) $f \in C^2(U)$ si $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \in C(U) \quad \forall i, j = 1 \dots n$

Ex: $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 e^{x_2} \quad \text{ordre 1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{x_2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{x_2} \quad \text{ordre 2 (manquent } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \text{)}$$

Rem: Il est possible que $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \neq \partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$

Thm 2: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f \in C^2(U)$.

Alors $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 f / \partial x_j \partial x_i \quad \forall i, j = 1 \dots n$

Dém: Il suffit de considérer le cas $n=2$

$$F(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \quad (\text{supposons } F(x_1, x_2) \neq 0)$$

supposons que $\exists x_0$ tq $F(x_0) > 0$

$F(x) \in C(U)$, posons $\varepsilon = \frac{F(x_0)}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0$ tq $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon = \frac{F(x_0)}{2}$

si $x \in B_{x_0}(\delta) \Rightarrow F(x) > 0 \quad \forall x \in B_{x_0}(\delta)$

Soit $I = [a, b] \times [c, d] \in B_{x_0}(\delta)$



Rem: Toute fonction continue sur un pavé est intégrable.

Rem: $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} (x) dx = f(b) - f(a)$

$$\begin{aligned} 0 &< \int_I F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \right) dx_2 \\ &\quad - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \right) dx_1 = \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} (b, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2} (a, x_2) \right) dx_2 \\ &\quad - \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1, d) - \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1, c) \right) dx_1 = \dots \\ &= f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c) - (f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c)) \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \quad \square \end{aligned}$$

dF (différentielle de F)

Déf: L'espace tangent à $\mathbb{R}^n$ en x , noté $T_x \mathbb{R}^n$, est l'ensemble des vecteurs de déplacement dont le pt de départ est x .

Rem: $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ et $T_x \mathbb{R}^n$ est un esp. vectoriel.

Rem: Pour une variété M , on peut définir $T_x M$

「Variété : sous-ensemble lisse」

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$
 f est dérivable en $x \in U$, s'il existe $df \in (T_x \mathbb{R}^n)^*$
 (une forme linéaire) tq :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - df(h)|}{\|h\|} = 0$$

Rem: $n=1$ $(T_x \mathbb{R})^* \cong \mathbb{R} \rightarrow df$ est un nbr

$$df(h) = f'(x) \cdot h$$

Rem: Si f est dérivable en $x \Rightarrow f$ est continue en x

Ex: $f(x) = x_1 \cdot x_2$, $df(h) = x_2 h_1 + x_1 h_2$

$$\text{en } x = (x_1, x_2) \quad \frac{1}{\|h\|} |f(x+h) - \underbrace{f(x_1, x_2)}_{x_1 \cdot x_2} - x_2 h_1 - x_1 h_2| = \frac{1}{\|h\|} |h_1 h_2| \leq \|h\|$$

$$x_1 h_2 + x_2 h_1 + x_1 x_2 + h_1 h_2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} | \dots | \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0.$$

Rappel

16.01.18

Déf:

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x \in U$ si $\exists df \in (T_x \mathbb{R}^n)^*$

$$\text{tq } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (f(x+h) - f(x) - df(h)) = 0$$

Rem:

df dépend de x et $df(h)$ de x et h .

Thm 3:

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

a) si f est dérivable en $x \in U$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en x existe $\forall i = 1, \dots, n$

b) si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues en x , alors f est dérivable en x

Dém:

a) $df(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$, choisissons $h = t \cdot e_i$ $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{alors } df(h) = t \cdot \alpha_i, \quad \|h\| = t, \quad \text{donc } \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_1, \dots, x_i+t, \dots, x_n) - f(x)}{t} - \alpha_i \right| = 0$$

$$(\text{ie } \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_1, \dots, x_i+t, \dots, x_n) - f(x)}{t} - \alpha_i \right| = 0)$$

$$\text{alors } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha_i$$

b) Posons $df(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2$,
 $n=2$

$$A = \frac{1}{\|h\|} \left| f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 \right|$$

$$= \frac{1}{\|h\|} \left| f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2+h_2) - f(x) - df(h) \right|$$

$$\leq B + C$$

$$B = \frac{1}{\|h\|} \left| f(x_1, x_2+h_2) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 \right| = \frac{|h_2|}{\|h\|} \left| \frac{f(x_1, x_2+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$C = \frac{|h_1|}{\|h\|} \left| \frac{f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2)}{h_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

et donc $\lim_{h \rightarrow 0} A = 0 \Rightarrow f$ est dérivable en x .

Analyse Réelle:

le 01.10.18

Rem: • Donc $f \in C^1(U) \xrightarrow{\text{Thm 3}} f$ est dérivable sur U .

• Si f est dérivable en $x \in U$, alors $df(h) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$

Ex:

$n = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle dérivable en 0?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

$$\left| \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - df(h)}{\|h\|} \right| = \frac{1}{\|h\|} |f(h_1, h_2)| = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$$

qui n'est pas continue en 0. $\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0.

Ex:

$n = 1$: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$df = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} |f(h) - f(0) - df| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{|h|} \right| =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} |h| \sin \frac{1}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \not\rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ pas cont en } 0.$$

Thm 4: Soient $f, g \in C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$

a) $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$

Dém:

a) $df(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ pareil pour $dg(h)$

$\lambda f + \mu g \in C^1(\mathcal{U})$ donc par thm 3

$$d(\lambda f + \mu g)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} h_i = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + \mu \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} h_i \\ = \lambda df(h) + \mu dg(h) \quad \forall h$$

Donc on peut conclure $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$.

b) $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \in C(\mathcal{U}) \Rightarrow f \cdot g \in C^1(\mathcal{U})$

par le thm 3 :

$$d(f \cdot g)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} h_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g h_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} f h_i \\ = g \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + f \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} h_i \\ = g \cdot df(h) + f \cdot dg(h) \\ \Rightarrow d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg.$$

Le gradient.

Def:

Soit $f \in C^1(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, alors le gradient de f en $x \in \mathcal{U}$ est le vecteur $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right) \in T_x \mathbb{R}^n$

Rem:

$$df(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i = \langle \text{grad} f, h \rangle$$

Donc $f(x+h) - f(x) = \langle \text{grad} f, h \rangle + v(h) \cdot \|h\|$ où $v(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

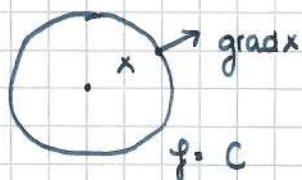
et $v(h) \cdot \|h\|$ est négligeable si $\|h\| \ll 1$.

a) f croît + rapidement dans la direction de $\text{grad} f$.

b) si $h \perp \text{grad} f$, donc f ne change pas $\Rightarrow \text{grad} f$ est orthogonale à une ligne de niveau, $\{x \in \mathcal{U} \mid f(x) = c\}$

Ex:

$n=2$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ donc $\text{grad} f = (2x_1, 2x_2)$



Rem: On peut considérer $\text{grad} f$ comme une force, dont le potentiel est f .

Alors $df(h) = \langle \text{grad} f, h \rangle =$ le travail de cette force.

1- Formes Différentielles.

$$df(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i, \quad \text{posons } f = x_i$$

$$dx_i(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_j} h_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} h_j = h_i$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$df(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(h) \quad \forall h \Rightarrow df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Lemme: $dx_i \quad \forall i=1, \dots, n$ forment une base de $(T_x \mathbb{R}^n)^* \quad \forall x$

Dém: Par thm 1, on a $\dim((T_x \mathbb{R}^n)^*) = \dim(T_x \mathbb{R}^n) = n$

dx_i sont linéairement indépendants.

Supposons qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^n \mu_i dx_i = 0$

posons $h = (0, \dots, 1, \dots, 0) = e_i$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j dx_j(e_i) = \sum_{j=1}^n \mu_j dx_j(e_i) = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{ij} = \mu_i \neq 0 \quad \nexists$$

$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0 \Rightarrow dx_i$ linéair. indép.

$\Rightarrow dx_i$ est une base.

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in C^k(U)$

$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ est 1-forme différentielle de classe C^k sur U .

Rem: ω dépend de x , $\omega(h)$ dépend de $x \in U$ et $h \in T_x \mathbb{R}^n$

Ex: $n = 2$

$$\omega = \underbrace{4x_1}_{\alpha_1} dx_1 + \underbrace{x_1 x_2}_{\alpha_2} dx_2$$

ω en $x = (2, 1)$ pour $h = (3, -5)$

$$\omega(h) = 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) = 14$$

$$dx_1(h) = 3 \text{ et } dx_2(h) = -5$$



Def: Une 1-forme ω sur M est exacte si $\exists f \in C^1(M)$ tq $\omega = df$

On dit que f est une primitive de ω

Ex: $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$

$$f = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad df = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \omega$$

Ex: $\omega = x_2 dx_1 + (0 \cdot dx_2)$

$$\text{supposons } \omega = df, \text{ alors } \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{matrix} \neq$$

$\Rightarrow \nexists f \in C^1(M) \Rightarrow \omega$ n'est pas exacte.

Rem: $\mathbb{R}^n$ et $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

$$\left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \right\} \text{ les conditions pour } \omega \text{ exacte}$$

(il en faut d'autres)

Rappel: Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ une 1-forme exacte

$$\Rightarrow \exists f \text{ tq } df = \omega \quad \text{si } \alpha_i \in C^1(I) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Donc on a : $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ conditions nécessaires pour que ω soit exacte.

Rem: Soit $f \in C(\mathbb{R})$, $\frac{d}{dt} \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{b+\varepsilon} f(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right) / \varepsilon$

$$= f(b)$$

$$\text{et } \frac{d}{da} \left(\int_a^b f(t) dt \right) = -f(a).$$

Lemme: $n=1$, soit $\omega = \alpha dx_1$, $\alpha \in C(\mathbb{R})$

alors ω est toujours exacte

Dém: Posons $f(x_1) = \int_0^{x_1} \alpha(t) dt$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha \Rightarrow df = \alpha dx_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1$
 $\Rightarrow df = \omega \Rightarrow \omega$ est exacte.

lemme: $n=2$, soit $\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\text{et } \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \Rightarrow \omega \text{ est une forme exacte.}$$

Dém: Posons $f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \alpha_1(t, 0) dt + \int_0^{x_2} \alpha_2(x_1, t) dt$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \alpha_2(x_1, x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \alpha_1(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x_1, t) dt \\ & & &= \alpha_1(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x_1, t) dt \\ & & &= \alpha_1(x_1, 0) + \alpha_1(x_1, t) \Big|_0^{x_2} = \alpha_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

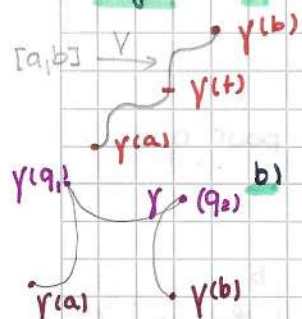
$$\text{Alors } df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 = \omega$$

$\Rightarrow \omega$ est exacte

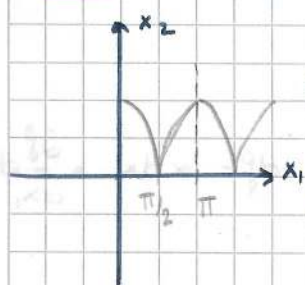
Le but : Définir l'intégrale de ω , le long d'un chemin dans $\mathbb{R}^n$.

Intégrales Curvilignes.

- Déf :
- a) Une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (c-à-d: $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, où $\gamma_i \in C^1[a, b] \forall i$)
 - b) γ est de classe C^1 par morceau s'il existe une subdivision $a = q_0 < \dots < q_n = b$ de $[a, b]$ tq $\gamma \in C^1[q_k, q_{k+1}] \forall k$
 - c) Le support de γ est $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$
 - d) On dit que γ est simple si γ est injective sur (a, b)
 - e) On dit que γ est fermé si $\gamma(b) = \gamma(a)$



Ex : $n=2$, $t \in [0, 1]$ $\gamma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$

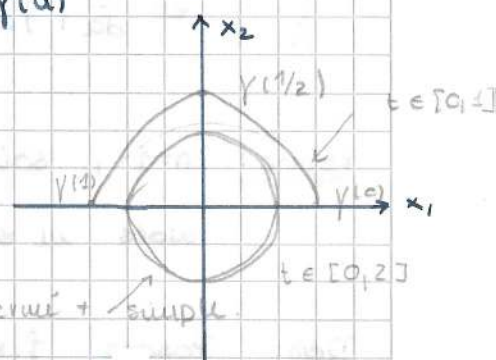


$t \in [0, 2]$

et $t \in [0, 3]$
pas simple



fermé + simple



$t \in [0, \pi]$

$\gamma(t) = (t, |\cos(t)|)$

est C^1 par morceaux

Rappel : Soit $f \in C([a, b])$, on considère une subdivision de $[a, b]$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\Delta = \max(t_{j+1} - t_j)$ et on définit

l'intégrale de Riemann de cette fonction :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) (t_{j+1} - t_j)$$

Remarque : $\partial \gamma / \partial t = (\partial \gamma_1 / \partial t, \dots, \partial \gamma_m / \partial t)$ est le vecteur vitesse.

Analyse Réelle:

le 08.10.18

Rem:
(suite)

Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée, une subdivision
de $[a, b]$ $\begin{array}{ccc} & t_0 & t_N \\ & \hline a & & b \end{array}$ $\mathcal{R}(t_j) = \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_j)(t_{j+1} - t_j) + o(t_{j+1} - t_j)$

Soit ω sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$

$$\omega(\mathcal{R}(t_j)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t_j)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \omega(\mathcal{R}(t_i)) \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_i(\gamma(t_j)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_j) (t_{j+1} - t_j) \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \int_a^b \alpha_i(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t) dt$$

Déf: a) Soit ω une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$

b) Soit γ une courbe param $\gamma: [a, b] \rightarrow U$

On définit l'intégrale curviligne de ω le long de γ par

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b \alpha_i(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t) dt$$

b) Si γ est C^1 par morceaux, on a une subdiv de $[a, b]$

$a = q_0 < \dots < q_m = b$ tq γ est C^1 sur $[q_i, q_{i+1}] \forall i$ alors

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \int_{q_k}^{q_{k+1}} \alpha_i(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t) dt$$

Ex: $n=2$ soit $\omega = x_1 x_2 dx_1 - x_2 dx_2$

$$t \in [0, 1], \gamma = (t, t^2) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (1, 2t)$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \alpha_1(t) \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t) dt + \int_a^b \alpha_2(t) \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) dt$$

$$= \int_0^1 (t \cdot t^2 \cdot 1) dt - \int_0^1 t^2 \cdot 2t dt = - \int_0^1 t^3 dt = -\frac{1}{4}$$

$$t \in [0, 1] \quad \tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6) \quad \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Ex: (suite) $t \in [0,1]$ $\tilde{\gamma}(t) = (1-t, (1-t)^2)$ $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = (-1, -2(1-t))$

$$\int_{\tilde{\gamma}} w = \int_0^1 (1-t)^3 (-1) dt + 2 \int_0^1 (1-t)^3 dt = \int_0^1 (1-t)^3 dt = \frac{1}{4}$$

Donc $\int_{\gamma} w = -\int_{\tilde{\gamma}} w$

Lemme: Soit w , une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$

Soient $\gamma: [a,b] \rightarrow U$ et $\tilde{\gamma}: [c,d] \rightarrow U$ 2 courbes

paramétrées tq $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ où ϕ est bij de classe C^1 , $\phi: [c,d] \rightarrow [a,b]$

Alors $\int_{\gamma} w = \varepsilon \int_{\tilde{\gamma}} w$ où $\varepsilon = 1$ si $\phi(c) = a$ et $\phi(d) = b$ et

$\varepsilon = -1$ si $\phi(c) = b$ et $\phi(d) = a$.



Dém: Soit $s \in [c,d]$, posons $t = \phi(s) \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} w &= \sum_{i=1}^n \int_a^b (\alpha_i(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t)) dt = \sum_{i=1}^n \int_{\substack{c \text{ ou } d \\ \uparrow \\ c \text{ si } \phi(c)=a \\ d \text{ si } \phi(d)=b}}^{\substack{d \text{ ou } c \\ \downarrow \\ b \text{ si } \phi(d)=b \\ a \text{ si } \phi(c)=a}} (\alpha_i(\gamma(\phi(s))) \frac{\partial \gamma_i(\phi(s))}{\partial (\phi(s))} \frac{\partial \phi}{\partial s}) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{c \text{ ou } d \\ \uparrow \\ c \text{ si } \phi(c)=a \\ d \text{ si } \phi(d)=b}}^{\substack{d \text{ ou } c \\ \downarrow \\ b \text{ si } \phi(d)=b \\ a \text{ si } \phi(c)=a}} \alpha_i(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_i}{\partial s}(s) ds \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \int_{\tilde{\gamma}} w \quad \text{où } \varepsilon = 1 \text{ ou } \varepsilon = -1 \text{ dépendant du sens de parcourt.}$$

Rem: Donc $\int_{\gamma} w$ ne dépend pas du paramétrage (au signe près)
le signe dépend du sens de parcourt.

Thm 5: Soit w une forme exacte sur $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, soit f une primitive de w , soit γ une courbe paramétrée $\gamma: [a,b] \rightarrow U$
Alors $\int_{\gamma} w = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Dém: Posons $F(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x = \gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma_i}{dt} \quad \text{et } w = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i = df \quad \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}$$

$$\int_{\gamma} w = \sum_{i=1}^n \int_a^b \alpha_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t) dt = \int_a^b \frac{dF}{dt} dt = F(b) - F(a)$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Analyse Réelle :

le 08.10.18

Rem : Th 5 est une généralité de la formule $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$
↳ généralisation.

Rem : Si γ est fermée, w est exacte alors $\int_{\gamma} w = 0$
parce que $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Ex : $n=3$ $w = x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3$

$$f = x_1 x_2 x_3 \text{ alors } df = w$$

Soit $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

$$\int_{\gamma} w = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 1$$

le 15.10.18

Rappel : • w exacte $\Rightarrow \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$



• Pour trouver une primitive d'une forme exacte :

fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $F(x) = \int_{\gamma} w$ où γ est tq $\gamma(a) = x_0$

$\gamma(b) = x$, alors $F(x) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(x) - f(x_0)$

$$\rightarrow dF = df - d(f(x_0)) = w$$

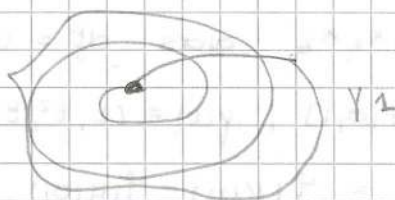
Rem : Si γ est fermée et w n'est pas exacte alors $\int_{\gamma} w \neq 0$

Le But : Étudier $\int_{\gamma} w$ pour $n=2$

La formule de Green-Riemann

Rem: Toute courbe simple $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a une orientation (un sens de parcours)

Déf: Une courbe paramétrée $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ fermée et simple est orientée dans le sens direct (trigonométrique, positif) si elle est de même orientation que $\gamma^0: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$



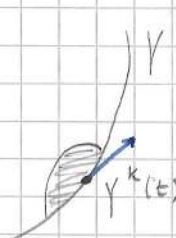
Déf: Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_x(\delta) \cap K \neq \emptyset \text{ et } B_x(\delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus K) \neq \emptyset \forall \delta > 0\}$ est la frontière de K

Ex: $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ $\partial K = \{0, 1\}$

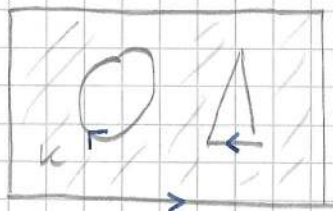
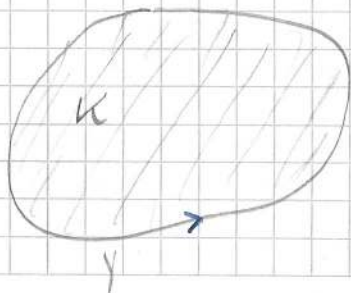
Ex: $K = \mathcal{U}$ un ouvert, alors $\partial \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Déf: Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact si K est fermé ($\partial K \subset K$) et borné ($\exists \delta \in \mathbb{R}$ tq $K \subset B_0(\delta)$)

Déf: Un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ est à bord orienté si :

-  a) ∂K est composé d'une réunion finie de courbes paramétrées $\gamma^1, \dots, \gamma^m$ fermées, simples, C^1 par morceaux, 2 à 2 disjointes
- b) pour chaque γ^K , lorsque t croît, le pt $\gamma^K(t)$ se déplace "en laissant K à sa gauche"

Ex:



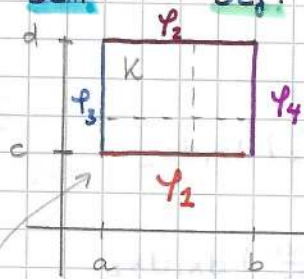
Thm 6: La formule de Green-Riemann

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert $K \subset U$ un compact à bord orienté.

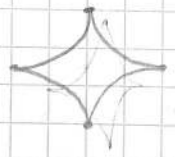
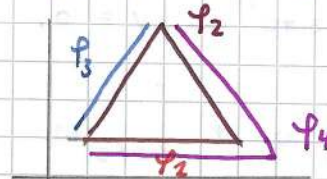
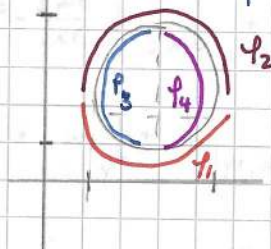
Soit w une 1-forme diff de classe C^1 sur U tq $w = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$

$$\text{alors } \int_{\partial K} w = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Dém: Déf: $K \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine élémentaire s'il existe des $f_i \in C^1$ /morc.



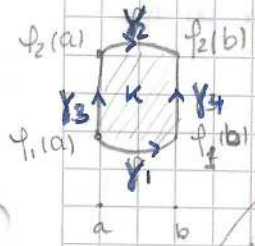
$f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_3, f_4: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tq K s'écrit
comme: $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [a, b] \text{ et } f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1) \}$
 $= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in [c, d] \text{ et } f_3(x_2) \leq x_1 \leq f_4(x_2) \}$



si on projete x_1 / x_2
alors x_2 / x_1 varie
selon un segment

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \left(1, \frac{\partial f_i(t)}{\partial t} \right)$$

• Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un domaine élémentaire, considérons les courbes



paramétrées $\gamma_1(t) = (t, f_1(t)) \quad t \in [a, b]$ $\gamma_2(t) = (t, f_2(t)) \quad t \in [a, b]$
 $\gamma_3(t) = (a, t) \quad t \in [f_1(a), f_2(a)]$ $\gamma_4(t) = (b, t) \quad t \in [f_1(b), f_2(b)]$

Considérons $w_1 = \alpha_1 dx_1$ et $\int_{\partial K} w_1 = \int_{\gamma_1} w_1 - \int_{\gamma_2} w_1 - \int_{\gamma_3} w_1 + \int_{\gamma_4} w_1$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} w_1 &= \int_a^b \alpha_1(t, f_1(t)) dt - \int_a^b \alpha_1(t, f_2(t)) dt + \int_{f_1(a)}^{f_2(a)} \alpha_1(a, t) \cdot 0 dt \\ &\quad + \int_{f_1(b)}^{f_2(b)} \alpha_1(b, t) \cdot 0 dt = \int_a^b \alpha_1(t, f_1(t)) dt - \int_a^b \alpha_1(t, f_2(t)) dt \\ &= - \left(\int_a^b (\alpha_1(t, f_2(t)) - \alpha_1(t, f_1(t))) dt \right) \\ &= - \left(\int_a^b \left(\int_{f_1(t)}^{f_2(t)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}(t, s) ds \right) dt \right) \\ &= - \int_a^b \int_{f_1(x_1)}^{f_2(x_1)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &\stackrel{\text{thm de Fubini}}{=} - \int_K \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

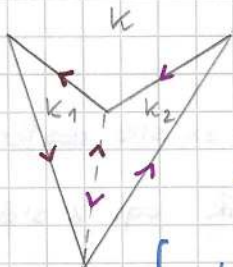
même calcul pour $w_2 = \alpha_2 dx_2$

$$\int_{\partial K} w_2 = \int_K \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2$$

Dém: (Suite)

On a $\int_{\partial K} w = \int_{\partial K} w_1 + \int_{\partial K} w_2 = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$
pour K un domaine élémentaire.

• Supposons $K = K_1 \cup K_2$ où K_1, K_2 sont des domaines élémentaires et $K_1 \cap K_2$ est le support de γ une courbe paramétrée.



Soit $w = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$

$$\int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{K_1} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 + \int_{K_2} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

la mesure de $\gamma = 0$.

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial K_1} w + \int_{\partial K_2} w = \int_{\partial K_1 \cup \gamma} w + \int_{\gamma} w + \int_{\partial K_2 \cup \gamma} w - \int_{\gamma} w \\ &= \int_{\partial K_1 \cup \gamma} w + \int_{\partial K_2 \cup \gamma} w = \int_{\partial K} w. \end{aligned}$$

le thm est vrai pour K qui peut être découpé en un nbr fini de domaines élémentaires.

Rem: Cela inclut le cas "avec des trous" :



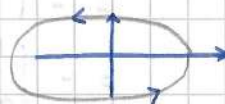
□

Ex: 1) Considérons $w_1 = -x_2 dx_1$ et $w_2 = x_1 dx_2$

Soit K un compact à bord orienté :

$$\int_{\partial K} w_1 = \int_{\partial K} w_2 = \int_K 1 dx_1 dx_2 = \text{Aire de } K.$$

2) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ (une ellipse)



$$\int_{\partial K} (-x_2 dx_1) = \int_{\gamma} (-x_2 dx_1)$$

$$\gamma = (a \cos t, b \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_0^{2\pi} -b \sin t \cdot (-a \sin t) dt$$

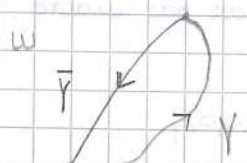
$$\frac{d\gamma}{dt} = (-a \sin t, b \cos t)$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = ab\pi.$$

Rem: $\int_K f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial K} w_1 = \int_{\partial K} w_2$

$$w_1 = - \left(\int_0^{x_2} f(x_1, t) dt \right) dx_1, \quad w_2 = \left(\int_0^{x_1} f(t, x_2) dt \right) dx_2$$

Rem: Soit w , tq γ n'est pas fermée et $\bar{\gamma}$ ferme γ

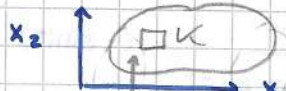


$$\int_{\gamma} w + \int_{\bar{\gamma}} w = \int_{\partial K} w = \int_K \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

$$\int_{\gamma} w = \int_K \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 - \int_{\bar{\gamma}} w$$

le 22.10.18

Soit K un compact à bord orienté dans le demi-plan

supérieur.  Soit S_K le solide engendré par la rotation de K autour de x_1 .

Ex: Si K est un disque, alors S_K est un tore

Trouvons le volume de S_K .

$$dv = 2\pi x_2 dx_1 dx_2 \Rightarrow V(S_K) = \int_K (2\pi) x_2 dx_1 dx_2 = 2\pi \int_K x_2 dx_1 dx_2$$

$$= \int_{\partial K} w_1 = \int_{\partial K} w_2 \quad \text{où } w_1 = -\pi x_2^2 dx_1, \quad w_2 = 2\pi x_2 x_1 dx_2$$

Ex: Soit $K =$  un disque de rayon r et $d(\vec{x}_1, c) = R$

$$\partial K = \gamma \quad \text{où } \gamma(t) = (r \cos t, R + r \sin t) \quad \partial \gamma / \partial t = (-r \sin t, r \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$V_{\text{tore}} = \int_{\gamma} w_2 = \int_0^{2\pi} (2\pi r \cos t (R + r \sin t) \cdot r \cos t dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 t \cdot R dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{r^3 \cos^2 t \sin t}_{=0} dt$$

$$= 2\pi^2 r^2 R$$



$$\gamma: [a, b] \rightarrow K$$



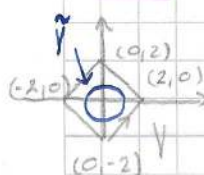
Soit γ une courbe paramétrée, fermée, simple, soit w une 1-forme sur K . On choisit $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow K$ une courbe param., fermée, simple

$$\int_{\partial K} w = \int_{\gamma} w - \int_{\tilde{\gamma}} w = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad w = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} w = \int_{\tilde{\gamma}} w + \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

cas particulier: w est tq $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}$ mais w n'est pas exacte.

Ex: $w = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



Soit γ tq le dessin $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = \frac{-1(x_1^2 + x_2^2) - (-x_2)x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$

et $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \Rightarrow \int \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 = \arctan \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow w$ pas exacte.

Donc $\int_{\gamma} w = \int_{\tilde{\gamma}} w = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (\cos t) \right) dt$

$$= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, alors $f = u + iv$, $z = x_1 + ix_2$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 = dx_1 + i dx_2$$

Soit f une fct holomorphe, alors: $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$ C.R.

$$w = f dz = (u + iv) dx_1 + (u + iv) i dx_2 \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + i \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = i \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

Soit γ : $\int_{\gamma} w = \int_{\tilde{\gamma}} w = *$

$$* = \int_{\tilde{\gamma}} f dz$$

Résumé: $f \in C^1(\mathcal{M}) \rightarrow df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \rightsquigarrow \omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \rightsquigarrow ?$

Formes bilinéaires alternées:

Déf: Soit E un ensemble. Le produit cartésien $E \times E = \{(v, u) \mid v, u \in E\}$
- l'ensemble des couples ordonnés.

Déf: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une application $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire alternée si:

$$1) B(\lambda v + \mu u, w) = \lambda B(v, w) + \mu B(u, w) \quad \text{et}$$

$$B(v, \lambda u + \mu w) = \lambda B(v, u) + \mu B(v, w) \quad \forall v, u, w \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$2) B(u, v) = -B(v, u) \quad \forall v, u \in V$$

Lemme: Si B est une forme bilinéaire, alors la prop. 2) est équivalente à $B(v, v) = 0 \quad \forall v \in V$ (2')

Dém: • 2) $\Rightarrow$ 2') prenons $u = v$, alors $B(v, v) = -B(v, v) \Rightarrow B(v, v) = 0$

$$\bullet 2') \Rightarrow 2) \quad B(v+u, v+u) = B(v, v+u) + B(u, v+u) = B(v, v) + B(u, u) + B(v, u) + B(u, v) = 0 \Rightarrow B(v, u) = -B(u, v)$$

Ex: $V = \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$

	bilinéaire	alternée
$B_1(u, v) = v_1 u_1 + v_2 u_2$	✓	-
$B_2(u, v) = v_1 + v_2 - u_1 - u_2$	-	✓
$B_3(u, v) = v_1 u_2 - v_2 u_1$	✓	✓

Déf:

$$\Lambda^2(V) = \{ \text{des formes bilinéaires alternées sur } V \}$$

$$\Lambda^1(V) = V^* \quad (\text{espace dual}) = \{ \text{formes linéaires sur } V \}$$

Déf:

Soit V un espace vectoriel, soient $\phi_1, \phi_2 \in \Lambda^1(V)$, alors

le produit extérieur $\phi_1 \wedge \phi_2$ est une application de

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par : } (\phi_1 \wedge \phi_2)(v, u) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(u) \\ \phi_2(v) & \phi_2(u) \end{pmatrix}$$

Lemme:

a) $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Lambda^2(V)$

b) $\phi_2 \wedge \phi_1 = -\phi_1 \wedge \phi_2$

c) $(\lambda\phi_1 + \mu\phi_2) \wedge \phi_3 = \lambda\phi_1 \wedge \phi_3 + \mu\phi_2 \wedge \phi_3$

$$\phi_1 \wedge (\lambda\phi_2 + \mu\phi_3) = \lambda\phi_1 \wedge \phi_2 + \mu\phi_1 \wedge \phi_3$$

$$\forall \phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \Lambda^1(V) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Rem:

• Donc $\wedge$ est une opération bilinéaire alternée

• $\phi \wedge \phi = 0$

Dém:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\phi_1 \wedge \phi_2)(u, v) &= \det \begin{vmatrix} \phi_1(u) & \phi_1(v) \\ \phi_2(u) & \phi_2(v) \end{vmatrix} = - \det \begin{vmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(u) \\ \phi_2(v) & \phi_2(u) \end{vmatrix} \\ &= -(\phi_1 \wedge \phi_2)(v, u) \Rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2 \text{ alternée} \end{aligned}$$

$$\bullet (\phi_1 \wedge \phi_2)(\lambda v + \mu u, w) = \det \begin{pmatrix} \lambda\phi_1(v) + \mu\phi_1(u) & \phi_1(w) \\ \lambda\phi_2(v) + \mu\phi_2(u) & \phi_2(w) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\phi_1(v)\phi_2(w) - \phi_2(v)\phi_1(w)) + \mu(\phi_1(u)\phi_2(w) - \phi_2(u)\phi_1(w))$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(w) \\ \phi_2(v) & \phi_2(w) \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \phi_1(u) & \phi_1(w) \\ \phi_2(u) & \phi_2(w) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\phi_1 \wedge \phi_2)(v, w) + \mu(\phi_1 \wedge \phi_2)(u, w).$$

linéarité de la 2ème coordonnée en exo.

$$\begin{aligned} \text{b) } (\phi_2 \wedge \phi_1)(v, u) &= \det \begin{pmatrix} \phi_2(v) & \phi_2(u) \\ \phi_1(v) & \phi_1(u) \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(u) \\ \phi_2(v) & \phi_2(u) \end{pmatrix} \\ &= -(\phi_1 \wedge \phi_2)(v, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } ((\lambda\phi_1 + \mu\phi_2) \wedge \phi_3)(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \lambda\phi_1(u) + \mu\phi_2(u) & \dots & \phi_3(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\phi_1(v) + \mu\phi_2(v) & \dots & \phi_3(v) \end{pmatrix} = \dots = \\ &= \lambda(\phi_1 \wedge \phi_3)(u, v) + \mu(\phi_2 \wedge \phi_3)(u, v) \end{aligned}$$

Analyse Réelle :

le 22.10.18

Ex: $V = \mathbb{R}^2$ $dx_1(v) = v_1$ et $dx_2(v) = v_2$ $dx_1, dx_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$

$$dx_1 \wedge dx_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}) \text{ et } (dx_1 \wedge dx_2)(v, u) = \det \begin{pmatrix} dx_1(v) & dx_1(u) \\ dx_2(v) & dx_2(u) \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix} = v_1 u_2 - u_1 v_2$$

Rappel: $\Lambda^1(v) \simeq V$, $v \in V \Leftrightarrow \phi_v(w) = \langle v, w \rangle$

le 29.10.18

Not: $\mathcal{B}^n = \{ B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid B^t = -B \}$ (Antisymétrie)

l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n .

$$\dim(\mathcal{B}^n) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \quad \boxed{\text{pas}} \text{ indép}$$

TR7: a) $\Lambda^2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{B}^n$ isomorphisme des esp. vectoriels

b) $\dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^n)) = \frac{n(n-1)}{2}$

c) les formes $dx_i \wedge dx_j$, $1 \leq i < j \leq n$ forme une base de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$

Dém: a) Soit $\beta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$\text{Soient } v, u \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum v_i e_i, \quad u = \sum u_i e_i$$

$$\begin{aligned} \beta(v, u) &= \beta\left(\sum v_i e_i, \sum u_j e_j\right) = \sum_i v_i \beta(e_i, \sum u_j e_j) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} v_i u_j \beta(e_i, e_j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} B_{ij} v_i u_j \end{aligned}$$

$$\text{Donc } B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}), \quad \beta_{ji} = \beta(e_j, e_i) = -\beta(e_i, e_j) = -\beta_{ij} \\ \Rightarrow B^t = -B$$

Donc on a $\beta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow B \in \mathbb{R}^n$ une applic.

linéaire, injective, surjective ($\forall \beta \in \mathcal{B}^n$ on peut associer

$$\beta_B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \text{ tq } \beta_B(v, u) = \sum_{i,j} B_{ij} v_i u_j, \quad \beta_B(e_i, e_j) = B_{ij} \\ \Rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{B}^n$$

b) $\dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^n)) = \dim(\mathcal{B}^n) = \frac{n(n-1)}{2}$

c) mq $dx_i \wedge dx_j$, $i < j$ sont lin. indép.

Par l'absurde: supposant que $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ tq

$$0 = \beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad \text{soit } m < k$$

$$\beta(e_m, e_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \det \begin{pmatrix} dx_i(e_m) & dx_i(e_k) \\ dx_j(e_m) & dx_j(e_k) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} (\delta_{im} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jm}) \quad i < j = m < k \Rightarrow i < k \Rightarrow \delta_{ik} = 0$$

$$= \lambda_{mn} = 0 \quad \forall m < k \quad \sum$$

Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ formes $dx_i \wedge dx_j$, $i < j \Rightarrow dx_i \wedge dx_j$ base.

Rem:

$$dx_i \wedge dx_j \text{ est associée à } \begin{matrix} & & j \\ & & \downarrow \\ & & 1 \\ i & - & \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[(dx_i \wedge dx_j)(v, u)] = v_i u_j - v_j u_i$$

$$\beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} B_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad \text{où } B_{ij} = \beta(e_i, e_j)$$

Rem:

a) $\dim(\Lambda^2(\mathbb{R})) = 0$, il n'y a pas de formes alternées non-nulles

car si $v, u \in \mathbb{R}$ $v, u \neq 0$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $v = \lambda u$

$$\Rightarrow \beta(v, u) = \lambda \beta(u, u) = 0$$

b) $\dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^2)) = 1 \Rightarrow \forall \beta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ on a $\beta = \lambda dx_1 \wedge dx_2$ $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $\dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^3)) = 3$ $n=3$ cas tré spécial

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3 \quad \beta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3), \quad \beta = B_{12} dx_1 \wedge dx_2 + B_{13} dx_1 \wedge dx_3 + B_{23} dx_2 \wedge dx_3$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \text{ on associe } \beta v = v_3 dx_1 \wedge dx_2 - v_2 dx_1 \wedge dx_3 + v_1 dx_2 \wedge dx_3$$

(ce sont toutes les perm. cycliques)

$$(dx_i \wedge dx_j)(u, w) = u_i w_j - u_j w_i$$

$$\beta_v(u, w) = v_3(u_1 w_2 - u_2 w_1) - v_2(u_1 w_3 - u_3 w_1) + v_1(u_2 w_3 - u_3 w_2)$$

$$= v_3 \cdot (u \times w)_3 - v_2 \cdot (-u \times w)_2 + v_1 \cdot (u \times w)_1$$

$$= \sum v_i (u \times w)_i = \langle v, u \times w \rangle = \text{le prod. mixte}$$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

aire

$$\|u\| \|v\| \sin(\theta) = \|u \times v\|$$

$$\|u\| \|v\| \sin(\theta) = \|u \times v\|$$

$$\|u\| \|v\| \sin(\theta) = \|u \times v\|$$

volume du parallélépipède

$$\langle v, u \times w \rangle = \text{volume du parallélépipède}$$

2 - Formes différentielles:

Rem: $dx_i \wedge dx_j, 1 \leq i < j \leq n$ forme une base de $\Lambda^2(T_x \mathbb{R}^n)$

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soient $\alpha_{ij} \in C^k(U)$ pour $1 \leq i < j \leq n$
Alors $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$ est une 2-forme différentielle sur U de classe C^k

Rem: ω est une application qui dépend de x et dont la valeur $\omega(h^1, h^2)$ dépend de x et de $h^1, h^2 \in T_x \mathbb{R}^n$

Ex: $V = \mathbb{R}^3$ $\omega = (x_1 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 - x_3)^2 dx_1 \wedge dx_3 + (x_2 - x_3)^3 dx_2 \wedge dx_3$
pour $x = (5, 7, 9)$ $h^1 = (1, 2, 3)$ $h^2 = (4, 5, 6)$ $dx_i \wedge dx_j(u, v) = u_i v_j - u_j v_i$
en x $\omega(h^1, h^2) = (5-7)(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) + (5-9)^2(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + (7-9)^3(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)$
 $= 6 - 16 \cdot 6 + 8 \cdot 3 = \dots$

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on note $\Omega^2(U)$ l'espace vectoriel des 2-formes diff. sur U , on note $\Omega^1(U)$ l'espace vect. des 1-formes diff. sur U , on note $\Omega^0(U)$ l'espace vect. des fonctions sur U (0-forme diff.)

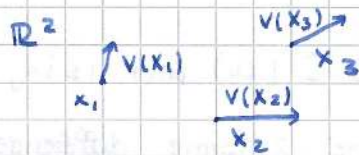
Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, soient $\phi_1, \phi_2 \in \Omega^1(U)$, alors
 $\omega = \phi_1 \wedge \phi_2 \in \Omega^2(U)$ tq $\omega(h^1, h^2) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(h^1) & \phi_1(h^2) \\ \phi_2(h^1) & \phi_2(h^2) \end{pmatrix}$
des valeurs en x

Rem: si $\phi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^1(x) dx_i$ $\phi_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2(x) dx_j$
alors $\omega = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \alpha_i^1(x) \cdot \alpha_j^2(x) dx_i \wedge dx_j$

Ex: $V = \mathbb{R}^2$ $\phi_1 = \sin x_1 dx_1 - \sin x_2 dx_2$, $\phi_2 = \cos x_1 dx_1 + \cos x_2 dx_2$
 $\Rightarrow \omega = \phi_1 \wedge \phi_2 = \sin x_1 \cos x_2 dx_1 \wedge dx_2 - \sin x_2 \cos x_1 dx_2 \wedge dx_1$
 $= \dots = \sin(x_1 + x_2) dx_1 \wedge dx_2$

Champs de Vecteurs:

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, un champs de vecteurs est une application V tq $V: x \in U \mapsto V(x) \in T_x \mathbb{R}^n$



Ex: Le gradient $\text{grad } f$ de $f \in C^1(U)$

Rem: $\varphi \in \Omega^1(V) \iff \varphi_p \in V$ tq $\varphi(u) = \langle \varphi_p, u \rangle \quad \forall u \in V$

! : si $\phi \in \Omega^1(U) \iff V(x)$ un champs de vecteurs tq $\omega(u) = \langle V(x), u \rangle$
 $\forall u \in T_x \mathbb{R}^n$

Ex: $\omega = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \iff V(x) = \text{grad } f \quad \omega(h) = \langle \text{grad } f, h \rangle$

Rem: Soit $\omega \in \Omega^2(U)$ $u(x)$ un champs de vecteurs. Alors
 $g(x) = \omega(u(x)) \in \Omega^0(U)$

Rem: $U \subset \mathbb{R}^3$, on a $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $\omega_v \in \Omega^2(U)$ par

$$\omega_v = V_3(x) dx_1 \wedge dx_2 - V_2(x) dx_1 \wedge dx_3 + V_1(x) dx_2 \wedge dx_3$$

Déf: $\omega_v(h^1, h^2) = \langle V(x), h^1 \times h^2 \rangle$ est le flux du champs vectoriel de $V(x)$ à travers le parallélogramme $h^1 \times h^2$

Ex: Si $V(x)$ est la vitesse d'un fluide, alors
 $\omega_v(h^1, h^2) =$ le volume de fluide qui traverse  par unité de temps.

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ $V(x)$ un champs de vecteurs sur U . $\omega \in \Omega^2(U)$
Alors on définit $i_V \omega \in \Omega^1(U)$ tq $(i_V \omega)(u) = \omega(V(x), u)$
 $u \in T_x \mathbb{R}^n$

Ex: $n=2 \quad \omega = dx_1 \wedge dx_2 \quad (i_V \omega)(u) = (dx_1 \wedge dx_2)(V(x), u)$
 $= \det \begin{pmatrix} V(x)_1 & u_1 \\ V(x)_2 & u_2 \end{pmatrix} = V_1(x)u_2 - V_2(x)u_1 = \underbrace{\alpha_1(x)}_{-V_2(x)} dx_1 + \underbrace{\alpha_2(x)}_{V_1(x)} dx_2$ p. 26

Formes Multi-linéaires

Déf: Soit E un ensemble. On note $E^{\wedge p} = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_p$

Déf: Soit V un esp. vect. sur $\mathbb{R}$. Une application $\beta: V^{\wedge p} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme p -linéaire alternée si :

1/ l'application $v \in V \mapsto \beta(v_1, \dots, \underset{\uparrow i}{v}, \dots, v_p)$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$
et tout $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \in V$

2/ $\beta(v_1, \dots, \underset{i}{v_i}, \dots, \underset{j}{v_j}, \dots, v_p) = -\beta(v_1, \dots, \underset{j}{v_j}, \dots, \underset{i}{v_i}, \dots, v_p)$

Rem: $\beta(v_1, \dots, \underset{i}{u}, \dots, \underset{j}{u}, \dots, v_p) = 0$

Ex: $p = 3$, $V = \mathbb{R}^3$, $\beta(v, u, w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix}$

Déf: On note $\Delta^p(V)$ l'espace vectoriel des formes p -linéaires alternées.

Rappel: Soit S_p le groupe symétrique. Si $\sigma: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$
alors sa signature $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est composée d'un nbr pair de transposition} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est composée d'un nbr impair de transposition} \end{cases}$

Ex: $\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 1, 3\}$ $\varepsilon(\sigma) = -1$ $1 \mapsto 2$
 $\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}$ $\varepsilon(\sigma) = 1$ $1 \mapsto 2$ et $2 \mapsto 3$

Rem: Si $\beta \in \Delta^p(V)$ alors $\beta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \beta(v_1, \dots, v_p)$
avec $\sigma \in S_p$

Déf: Soit V un esp. vect sur $\mathbb{R}$. Soient $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{L}'(V)$ des formes linéaires. Leur produit extérieur est $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p)(v_1, \dots, v_p)$

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \dots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \dots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix}$$

Ex: $V = \mathbb{R}^n$, dx_i

$$(dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k)(v, u, w) = \det \begin{pmatrix} v_i & u_i & w_i \\ v_j & u_j & w_j \\ v_k & u_k & w_k \end{pmatrix}$$

Lemme:

- a) $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p \in \mathcal{L}^p(V)$
- b) $\phi_1, \dots, \phi_p \rightarrow \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p$ est une application p -linéaire alternée
- c) $\sigma \in S_p$ alors $\phi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \phi_{\sigma(p)} = \varepsilon(\sigma) \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p$

Dém: a) et b): $\det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \dots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \dots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix}$ est linéaire pour chaque $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\begin{cases} \text{vecteur colonne} & \Rightarrow \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p \text{ est } p\text{-linéaire} \\ \text{vecteur ligne} & \Rightarrow \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p \text{ est } p\text{-linéaire} \end{cases}$

$\det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \dots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \dots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \dots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \dots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix} \xrightarrow{j \rightarrow i} = (-1) \det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \dots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \dots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2 \dots \wedge \phi_p$ est alternée

$\Rightarrow \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p \rightarrow \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p$ est alternée

c) b) $\Rightarrow$ c) parce que σ est une composition de transposition □

Ex: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = 0$
 $dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Rem: $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_i \wedge \dots \wedge \phi_i \wedge \dots \wedge \phi_p = 0$

Thm: a) les formes $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ où $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$

b) $\dim(\Lambda^p(\mathbb{R}^n)) = \binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Dém: Soit $\beta \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$

$$\beta(v_1, \dots, v_p) = \beta\left(\sum_{i_1=1}^p (v_1)_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^n (v_p)_{i_p} e_{i_p}\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (v_1)_{i_1} \dots (v_p)_{i_p} \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = *$$

si $e_{i_1} = e_{i_2} \Rightarrow \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = 0$

si $e_{i_1} \neq e_{i_2} \neq \dots \neq e_{i_p} \Rightarrow \exists \sigma \in S_p$ tq $i_1 = \sigma(j_1), \dots, i_p = \sigma(j_p)$

où $j_1 < \dots < j_p$ alors $\beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \beta(e_{\sigma(j_1)}, \dots, e_{\sigma(j_p)})$
 $= \varepsilon(\sigma) \beta(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$

$$* = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_p} (v_1)_{\sigma(j_1)} \dots (v_p)_{\sigma(j_p)} \varepsilon(\sigma) \right)}_{\text{formule de Leibniz}} \beta(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \beta(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \det \begin{pmatrix} (v_1)_{j_1} & \dots & (v_p)_{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{j_p} & \dots & (v_p)_{j_p} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \beta(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p})(v_1, \dots, v_p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \beta(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}}$$

On affirme $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$ (Montrer en exercice) $\square$
 linéairement indépendant.

Rem: $\dim(\Lambda^1(\mathbb{R}^n)) = 1$

$$\dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^n)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\dim(\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)) = n \Rightarrow \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$$

$$\beta \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n), \text{ alors } \beta = \sum_{i=1}^n \beta_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$\uparrow$ elle est absente.

Rem: (Suite)

$$\dim(\Lambda^n(\mathbb{R}^n)) = 1 \Rightarrow \beta \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \quad \beta = \lambda dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\dim(\Lambda^p(\mathbb{R}^n)) = 0 \quad \text{si } p > n$$

Déf: Soient $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \beta_{j_1, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

Leur produit extérieur est défini par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \cdot \beta_{j_1, \dots, j_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \in \Lambda^{p+k}(\mathbb{R}^n)$$

Ex: $(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2) \wedge (dx_2 \wedge dx_3)$
 $= \alpha_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \alpha_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Thm 9: a) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$
 $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$ } Bilineaire

b) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ Associativité

c) Si $\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n), \beta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $\beta \wedge \alpha = (-1)^{k \cdot p} \alpha \wedge \beta$

Dém: On note $I = i_1, \dots, i_p$ $\alpha_I = \alpha_{i_1, \dots, i_p}$ $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

a) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = (\sum_I \alpha_I^1 dx_I + \sum_I \alpha_I^2 dx_I) \wedge (\sum_J \beta_J dx_J)$
 $= (\sum_I (\alpha_I^1 + \alpha_I^2) dx_I) \wedge (\sum_J \beta_J dx_J)$
 $= \sum_{I, J} (\alpha_I^1 + \alpha_I^2) \beta_J dx_I \wedge dx_J = \sum_{I, J} (\alpha_I^1 \beta_J + \alpha_I^2 \beta_J) dx_I \wedge dx_J$
 $= \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$
 $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \dots = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$ $\swarrow$ m calcul

b) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = ((\sum_I \alpha_I dx_I) \wedge (\sum_J \beta_J dx_J)) \wedge (\sum_L \gamma_L dx_L)$
 $= \dots = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

Dém: (Suite)

c) Il suffit de considérer dx_I, dx_J etc.

$$\begin{aligned} dx_I \wedge dx_J &= dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= (-1) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_p} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= (-1)^p dx_{j_1} \wedge dx_I \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= (-1)^{p+1} dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{i_p} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= (-1)^{p \cdot k} dx_J \wedge dx_I \end{aligned}$$

P-Formes différentielles :

le 12.11.18

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, soient $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \in C^k(U)$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.
Alors $w = \sum \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum \alpha_I dx_I$
est une p-forme différentielle de classe C^k sur U .

Déf: $\Omega^p(U)$ est l'espace vectoriel des p-formes diff. sur U .

Déf: Soient $f \in \Omega^0(U)$, $w_1 \in \Omega^p(U)$, $w_2 \in \Omega^k(U)$. Alors

- a) si $w_1 = \sum \alpha_I dx_I$ alors $f w_1 = \sum f(x) \alpha_I(x) dx_I$
b) si $w_1 = \sum \alpha_I dx_I$ et $w_2 = \sum \beta_J dx_J$ alors $w_1 \wedge w_2 = \sum \alpha_I(x) \beta_J(x) dx_I \wedge dx_J$

Rem: $w_2 \wedge w_1 = (-1)^{p \cdot k} w_1 \wedge w_2$

Ex: $w = x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4$, alors

$$\begin{aligned} w \wedge w &= x_3 x_4 x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 2 x_1 x_2 x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned}$$

Déf. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soient $\omega \in \Omega^p(U)$, v un champ de vecteurs sur U . Alors $i_v \omega \in \Omega^{p-1}(U)$ est la $p-1$ -forme tq $(i_v \omega)(h^1, \dots, h^p) = \omega(v, h^1, \dots, h^p) \quad \forall h^1, \dots, h^p \in T_x \mathbb{R}^n$

Rem: $\dots \leftarrow \Omega^{p-1}(U) \xleftarrow{i_v} \Omega^p(U) \xleftarrow{i_v} \Omega^{p+1}(U) \leftarrow \dots$

Rem: $i_v(i_v(\omega)) = 0$ pour v fixé

Dérivées extérieures.

Rem: Si $f \in \Omega^0(U)$ est de classe C^1 , alors, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \in \Omega^1(U)$

Déf. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $\omega \in \Omega^p(U)$ de classe C^1 , alors si $\omega = \sum_I \alpha_I dx_I$
 $d\omega = \sum_I d\alpha_I \wedge dx_I = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$
 est la dérivée extérieure de ω .

Ex: $\omega = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) dx_1 \wedge dx_2$

$$\begin{aligned} d\omega &= (x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_3 dx_1 + x_1 dx_3 + x_3 dx_2 + x_2 dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (x_1 + x_2) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (x_1 + x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Ex: $d(dx_I) = 0$

Thm 10: a) Soient $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(U)$, alors $d(\lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) Soient $\omega_1 \in \Omega^p(U)$, $\omega_2 \in \Omega^k(U)$, alors $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$
 $= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$

c) Soit $\omega \in \Omega^p(U)$ tq $\omega \in C^2(U)$, alors $d(d\omega) = 0$

Dém: a) $w_1 = \sum_I \alpha_I^1 dx_I$ et $w_2 = \sum_I \alpha_I^2 dx_I$
 $d(\lambda w_1 + \mu w_2) = d(\sum_I (\lambda \alpha_I^1 + \mu \alpha_I^2) dx_I)$
 $= \sum_I (\lambda d\alpha_I^1 + \mu d\alpha_I^2) \wedge dx_I = \lambda dw_1 + \mu dw_2$

b) $w_1 = \sum_I \alpha_I dx_I$ et $w_2 = \sum_J \beta_J dx_J$
 $d(w_1 \wedge w_2) = d(\sum_{I,J} \alpha_I \beta_J dx_I \wedge dx_J)$
 $= \sum_{I,J} \beta_J d\alpha_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} \alpha_I d\beta_J \wedge dx_I \wedge dx_J$
 $= dw_1 \wedge w_2 + (-1)^p \sum_{I,J} \alpha_I dx_I \wedge d\beta_J \wedge dx_J$
 $= dw_1 \wedge w_2 + (-1)^p w_1 \wedge dw_2$

Rem: $f \in \Omega^0(U)$, $w \in \Omega^p(U)$, alors $d(f \cdot w) = df \wedge w + f \wedge dw$
 $= df \wedge w + f \cdot dw.$

Dém: c) $\alpha \in C^2(U)$, $d\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} dx_i$ et $d(d\alpha) = d(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} dx_i)$
 $= \sum_{i=1}^n d(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} dx_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \in \Omega^2(U)$
 $= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i$
 $= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j)$
 $= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j}) dx_i \wedge dx_j = 0$

si $w = \alpha dx_I \in \Omega^p(U)$ alors $dw = d\alpha \wedge dx_I \in \Omega^{p+1}(U)$
 $d(dw) = d(d\alpha \wedge dx_I) = \underbrace{d(d\alpha)}_{=0} \wedge dx_I - d\alpha \wedge \underbrace{d(dx_I)}_{=0} = 0$
 Par linéarité a), on a $d(dw) = 0 \quad \forall w \in \Omega^p(U)$

Déf: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $w \in \Omega^p(U)$

a) w est exacte si $\exists \tilde{w} \in \Omega^{p-1}$ tq $d\tilde{w} = w$

b) w est fermée si $dw = 0$

Rem: Si w est exacte et de classe C^1 , alors w est fermée :

$$\text{Si } w = d\tilde{w} \quad dw = d(d\tilde{w}) \stackrel{\text{thm 10}}{=} 0$$

Rem: Condition nécessaire pour w exacte :

Il faut que $dw = 0$ pour w exacte

Ex: $w = x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_3$

$$dw = x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0 \Rightarrow w \text{ pas fermée} \Rightarrow w \text{ pas exacte}$$

Ex: $w = x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3$

$$dw = x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_3 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = 0$$

$\Rightarrow w$ est fermée

$$\tilde{w} = x_1 x_2 x_3 dx_3, \text{ on a } d\tilde{w} = w \Rightarrow w \text{ est exacte.}$$

Rem: si $w \in \Omega^p(U)$, $p > 1$ est exacte, alors w a beaucoup de primitives :

si $\tilde{w} \in \Omega^{p-1}(U)$ tq $d\tilde{w} = w$ alors $\tilde{\tilde{w}} = \tilde{w} + \text{une } p-1\text{-forme fermée}$

$$\Rightarrow d\tilde{\tilde{w}} = d\tilde{w} = w$$

Ex: $\tilde{\tilde{w}} = x_1 x_2 x_3 dx_3 + x_3 dx_3$

$$d\tilde{\tilde{w}} = d\tilde{w} = w = x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_1 dx_2 \wedge dx_3$$

Question: Si $w \in \Omega^p(U)$ est fermée, est-elle exacte ?

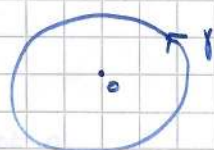
Cela dépend de U

Ex: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ $w = \frac{-x_2}{x_2^2 + x_1^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_2^2 + x_1^2} dx_2$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \Rightarrow w \text{ fermée}$$

$$dw = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

$$\int_\gamma w = 2\pi \text{ pas exacte (Thm 5)}$$



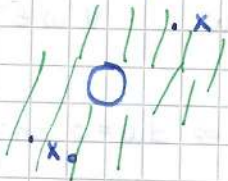
Def: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. On dit que U est étoilé si $\exists x_0 \in U$ tq le segment $[x_0, x] \subset U \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Ex:



est étoilé

Ex:



pas étoilé

Ex:

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas étoilé

Thm 11:

Lemme de Poincaré

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé, alors toute p -forme fermée ($p \geq 1$) de classe $C^1(U)$ est exacte.

Dém:

(Lemme de Poincaré)

le 19.11.18

On suppose U étoilé pour 0

Si on a $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ posons $\tilde{dx}_I = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} x_{i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$
($\widehat{dx_{i_k}} = x_{i_k} dx_{i_1} - x_{i_1} dx_{i_k}$)
il manque dx_{i_p}

alors $d(\tilde{dx}_I) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} dx_{i_k} \wedge \underbrace{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}}_{\in \Omega^{p-1}(U)}$
 $= \sum_{k=1}^p dx_I = p \cdot dx_I$

$dx_j \wedge dx_I = x_j \wedge dx_I + \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} x_{i_k} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$
 $= x_j \wedge dx_I - x_j \wedge \tilde{dx}_I$

Soit $I : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$ une applic. linéaire tq

si $w = \alpha dx_I$ alors $I(w) = \left(\int_0^1 t^{p-1} \alpha(t \cdot x) dt \right) \cdot \tilde{dx}_I$
 $(t x_1, \dots, t x_n) = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{dx}_I$

Si $w = \alpha dx_I$ $d(I(w)) = d\tilde{\alpha} \wedge \tilde{dx}_I + \tilde{\alpha} \cdot d(\tilde{dx}_I)$
 $= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(t \cdot x) dt \right) \cdot dx_j \wedge \tilde{dx}_I + p \int_0^1 t^{p-1} \alpha(t \cdot x) dt \cdot dx_I$

Dém: (Suite)

$$dw = d\alpha \wedge dx_I = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \in \Omega^{p+1}$$

$$I(dw) = \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(tx) dt \right) \cdot \underbrace{dx_j \wedge dx_I}_{= x_j \wedge dx_I - dx_j \wedge \widetilde{dx_I}}$$

$$d(I(w)) + I(dw) = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n t^p \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(tx) x_j + p t^{p-1} \alpha(tx) \right) dt \cdot dx_I$$

$$= \frac{d}{dt} (t^p \cdot \alpha(tx))$$

$$= t^p \alpha(tx) \Big|_0^1 \cdot dx_I = \alpha(x) dx_I = w \quad \forall w \in \Omega^p(U)$$

$d(I(w)) + I(dw) \Rightarrow$ si w est fermée $\Rightarrow dw=0$ on a $d(I(w))=w$
 $\Rightarrow w$ est exacte.

Gradient, divergence, rotationnel:

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit V un champs de vecteurs sur U ,

alors on associe à V : $\omega_V^1 = V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + V_3 dx_3$

et $\omega_V^2 = V_3 dx_1 \wedge dx_2 - V_2 dx_1 \wedge dx_3 + V_1 dx_2 \wedge dx_3$

Rem: $\omega_V^1 = \omega_U^1 \Leftrightarrow V = U$

$\omega_V^1 + \omega_U^1 = \omega_{V+U}^1$

$f \cdot \omega_V^1 = \omega_{fV}^1$

de même pour ω^2

Lemme: a) $\omega_V^1 \wedge \omega_U^1 = \omega_{V \times U}^2 \leftarrow \text{prod. vect.}$

b) $\omega_V^1 \wedge \omega_U^2 = \langle V, U \rangle dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Dém:

a) $(V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + V_3 dx_3) \wedge (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)$

$$= \underbrace{(V_1 U_2 - V_2 U_1)}_{(V \times U)_3} dx_1 \wedge dx_2 - \underbrace{(V_3 U_1 - V_1 U_3)}_{(V \times U)_2} dx_1 \wedge dx_3 + \underbrace{(V_2 U_3 - V_3 U_2)}_{(V \times U)_1} dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \omega_{V \times U}^2$$

b) $(V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + V_3 dx_3) \wedge (U_3 dx_1 \wedge dx_2 - U_2 dx_1 \wedge dx_3 + U_1 dx_2 \wedge dx_3)$

$$= (V_1 U_1 + V_2 U_2 + V_3 U_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \langle V, U \rangle dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Analyse Réelle :

le 19.11.18

Déf: Le gradient de $f \in C^1(\mathcal{U})$ est le champs de vecteur

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

Déf: Soit v un champs de vecteur sur $\mathcal{U}$ de classe C^1 , alors :
la fonction $\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ est la divergence de v .

Déf: Le champs de vecteurs $\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$
est le rotationnel de v .

Rem: $(\text{rot } v)_i = \partial_j v_k - \partial_k v_j$ où (i, j, k) est une permut de $(1, 2, 3)$

Lemme: Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, soient $f \in C^1(\mathcal{U})$, v un champs de vecteurs de classe C^1 , alors $df = w' \text{grad } f$, $dw'_v = w'^2_{\text{rot } v}$,
 $dw^2_v = \text{div}(v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Dém: $df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = w' \text{grad } f$
 $dw'_v = d(v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2$
 $+ \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3$
 $= \underbrace{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)}_{(\text{rot } v)_3} dx_1 \wedge dx_2 + \underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)}_{-(\text{rot } v)_2} dx_1 \wedge dx_3 + \underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)}_{(\text{rot } v)_1} dx_2 \wedge dx_3$
 $= -w'^2_{\text{rot } v}$
 $dw^2_v = d(v_3 dx_1 \wedge dx_2 - v_2 dx_1 \wedge dx_3 + v_1 dx_2 \wedge dx_3)$
 $= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$
 $= \text{div}(v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ □

Thm 12:

Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, $f \in C^2(U)$, v un champs de vecteurs de classe C^2 sur U

a) $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$, $\text{div}(\text{rot } v) = 0$

Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert étoilé, v un champs de vecteurs de classe C^1

b) si $\text{rot } v = 0$, alors $\exists f \in C^2(U)$ tq $v = \text{grad } f$

si $\text{div } v = 0$, alors $\exists u$ sur U tq $\text{rot } u = v$

Dém:

a) $\overset{\text{Lemme}}{w^2_{\text{rot}(\text{grad } f)}} = d w^1_{\text{grad } f} = d(df) \overset{\text{Thm 10}}{=} 0 \Rightarrow \text{rot}(\text{grad } f) = 0$

$\text{div}(\text{rot } v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \overset{\text{Lemme}}{=} d w^2_{\text{rot } v} = d(dw^1_v) \overset{\text{Thm 10}}{=} 0 \Rightarrow \text{div}(\text{rot } v) = 0$

b) Soit w^1_v , $d w^1_v = w^2_{\text{rot } v} = 0 \Rightarrow w^1_v$ est fermé $\overset{\text{Poincaré}}{\Rightarrow} w^1_v$ est exacte

$\Rightarrow \exists f \in C^2(U)$ tq $w^1_v = df = w^1_{\text{grad } f} \Rightarrow v = \text{grad } f$

Soit w^2_v , $d w^2_v = \text{div}(v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0 \Rightarrow w^2_v$ fermé

$\Rightarrow w^2_v$ exacte $\Rightarrow \exists w^1_u \in \Omega^1(U)$ tq $w^2_v = d w^1_u = w^2_{\text{rot } u}$

$\Rightarrow v = \text{rot } u$ □

Pas mis dans résumé

Equations de Maxwell

Soit $U \subset \mathbb{R}^4$ un ouvert $\dim(\Omega^2(\mathbb{R}^4)) = 6 = 3+3$

$F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, $x = (x_1, x_2, x_3, t)$

$$F = \sum_{i=1}^3 E_i dx_i \wedge dt + B_3 dx_1 \wedge dx_2 - B_2 dx_1 \wedge dx_3 + B_1 dx_2 \wedge dx_3$$

$$= w^1_E \wedge dt + w^2_B$$

Rem: On peut regarder E et B comme des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ dépendants de t .

$$d(B_3 dx_1 \wedge dx_2) = d_{123}(B_3 dx_1 \wedge dx_2) + \frac{\partial B_3}{\partial t} dx_1 \wedge dx_2$$

$$dF = d_{123} w^1_E \wedge dt + d_{123} w^2_B + w^2_{\partial B / \partial t} \wedge dt$$

$$= w^2_{\text{rot } E} \wedge dt + \text{div } B dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + w^2_{\partial B / \partial t} \wedge dt = 0$$

$\Rightarrow \text{rot } E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ et $\text{div } B = 0$ [les 2 premières équations de Maxwell]

$dF = 0!$
p. 38

Applications différentielles:

Déf: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ $\varphi: x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in V$

Ex: $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = (x_1, x_2, 3x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$

Déf: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, et $V \subset \mathbb{R}^m$, alors $\varphi: U \rightarrow V$ est différentiable en $x \in U$ si $\exists D\varphi: T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^m$ tq $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x+h) - \varphi(x) - D\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$

Rem: $D\varphi: h \in T_x \mathbb{R}^n \rightarrow D\varphi(h) \in T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^m$ on peut associer à $D\varphi$ une matrice $m \times n$ dépendante de x (la Jacobienne)

Déf: $\varphi: U \rightarrow V$ est de classe C^k si $\varphi_i \in C^k \forall i = 1, \dots, m$

Lemme: Si $\varphi: U \rightarrow V$ est de classe C^1 alors φ est différentiable sur U et $(D\varphi(h))_i = d\varphi_i(h)$

Dém: $\varphi \in C^1(U)$ alors $\varphi_i \in C^1(U) \xrightarrow{\text{thm 3}} \exists d\varphi_i \in \Omega^1(U)$

définissons $(D\varphi(h))_i := d\varphi_i(h)$

$$\begin{aligned} \|\varphi(x+h) - \varphi(x) - D\varphi(h)\| \cdot \frac{1}{\|h\|} &= \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x+h) - \varphi_i(x) - (D\varphi(h))_i| \\ &= \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x+h) - \varphi_i(x) - d\varphi_i(h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ est différentiable.

Rem: $(D\varphi(h))_i = d\varphi_i(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(h_j)$
 $\sum_{j=1}^n (D\varphi)_{ij} h_j$ On conclut $(D\varphi)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$

Ex: $\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix}$, alors $D\varphi = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 en $x = (1, -5)$, $h = (1, 2)$, $D\varphi(h) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Tiré en arrière (pull-back)

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi: U \rightarrow V$. Soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Alors le tiré en arrière de f par φ est $\varphi^* f = f \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$

Déf: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts, $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^1 .
Soit $\omega \in \Omega^p(V)$, alors le tiré en arrière de ω par φ est une forme diff $\varphi^* \omega \in \Omega^p(U)$ définie par:
 $\varphi^* \omega(x; h^1, \dots, h^p) = \omega(\varphi(x); D\varphi(h^1), \dots, D\varphi(h^p))$

Rem: Si $n < p$, alors $\varphi^* \omega = 0$ (car $\dim \Lambda^p(\mathbb{R}^n) = 0$ si $p > n$)

Rem: $\varphi^* \neq \varphi^{-1}$ (on ne suppose pas que φ soit injective ou surjective)

Ex: $\varphi: U \rightarrow V$ tq $\varphi(x) = y_0 \quad \forall x \in U$
alors $\varphi^* f(x) = f \circ \varphi(x) = f(y_0) = \text{const } f$.
 $\varphi^* \omega(x; h^1, \dots, h^p) = \omega(\varphi(x), D\varphi(h^1), \dots, D\varphi(h^p)) = \omega(y_0, 0, \dots, 0) = 0$
 $\varphi_i(x) = (y_0)_i \Rightarrow (D\varphi)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0$ donc $\varphi^* \omega = 0$

Lemme: Soit $\omega \in \Omega^p(V)$, $\omega = \sum_I \alpha_I d\varphi_I$ où $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p}$
Soit $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^1 . Alors $\varphi^* \omega = \sum_I \varphi^* \alpha_I d\varphi_I$ où
 $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p}$

Ex: $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 3x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$, soit $\omega = y_1 y_2 y_3 dy_1 \wedge dy_2$
 $\varphi: U \rightarrow V \quad y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), y_3 = \varphi_3(x)$
 $d\varphi_1 = x_2 dx_1 + x_1 dx_2 \quad d\varphi_2 = 3dx_1 - dx_2 \quad d\varphi_3 = 2dx_1 + dx_2$
Alors $\varphi^* \omega = x_1 x_2 (3x_1 - x_2)(2x_1 + x_2) d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$
 $\quad \quad \quad (-x_2 - 3x_1) dx_1 \wedge dx_2$

Dém: $\varphi^* \omega(x; R^1, \dots, R^p) = \sum_I \varphi^* \alpha_I dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} (D\varphi(R^1) \dots D\varphi(R^p))$
 $= \sum_I \varphi^* \alpha_I \det \begin{pmatrix} (D\varphi(R^1))_{i_1} & \dots & (D\varphi(R^p))_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (D\varphi(R^1))_{i_p} & \dots & (D\varphi(R^p))_{i_p} \end{pmatrix}$
 $= \sum_I \varphi^* \alpha_I \det \begin{pmatrix} d\varphi_{i_1}(R^1) & \dots & d\varphi_{i_1}(R^p) \\ \vdots & & \vdots \\ d\varphi_{i_p}(R^1) & \dots & d\varphi_{i_p}(R^p) \end{pmatrix} = \sum_I \underbrace{\varphi^* \alpha_I d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p}}_{\varphi^* \omega} (R^1, \dots, R^p)$
 $= \sum_I \varphi^* \alpha_I d\varphi_I (R^1, \dots, R^p)$

Rem: Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$, on peut considérer $\varphi: U \rightarrow V$ comme un changement de variables.

Ex: $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
 $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2)$ passage aux coordonnées polaires
 soit $\omega = \frac{-y_2}{y_1^2 + y_2^2} dy_1 + \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} dy_2$ $\begin{cases} d\varphi_1 = \cos x_2 dx_1 - x_1 \sin x_2 dx_2 \\ d\varphi_2 = \sin x_2 dx_1 + x_1 \cos x_2 dx_2 \end{cases}$
 $\varphi^* \omega = \frac{-x_1 \sin x_2}{x_1^2} (\cos x_2 dx_1 - \sin x_2 x_1 dx_2)$
 $+ \frac{x_1 \cos x_2}{x_1^2} (\sin x_2 dx_1 + \cos x_2 \cdot x_1 dx_2) = dx_2$

- Thm 13:
- a) Soient $\omega, \omega_2 \in \Omega^p(V)$, alors $\varphi^*(\lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda \varphi^* \omega_1 + \mu \varphi^* \omega_2$
 - b) Soient $\omega_1 \in \Omega^p(V)$, $\omega_2 \in \Omega^q(V)$, alors $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^* \omega_1 \wedge \varphi^* \omega_2$
 - c) Si φ est C^2 et $\omega \in \Omega^p(V)$ est de classe C^1 , alors $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^* \omega)$



- d) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^l$, $\varphi: U \rightarrow V$ et $\psi: V \rightarrow W$ deux applications de classe C^1 . Soit $\omega \in \Omega^p(W)$ alors $\varphi^*(\psi^* \omega) = (\psi \circ \varphi)^* \omega$.

Dém: a) $\varphi^*(\sum_I \alpha_I^1 dy_{i_1} + \sum_I \alpha_I^2 dy_{i_1}) = \varphi^*(\sum_I (\alpha_I^1 + \alpha_I^2) dy_{i_1})$
 $= \sum_I (\varphi^* \alpha_I^1 + \varphi^* \alpha_I^2) d\varphi_I = \sum_I \varphi^* \alpha_I^1 d\varphi_I + \sum_I \varphi^* \alpha_I^2 d\varphi_I$
 $= \varphi^* \omega_1 + \varphi^* \omega_2$

Dém: b) $\varphi^*((\sum \alpha_I dy_I) \wedge (\sum \beta_J dy_J)) = \varphi^*(\sum_{I,J} \alpha_I \beta_J dy_I \wedge dy_J)$

$$= \sum_{I,J} \varphi^* \alpha_I \beta_J d\varphi_I \wedge d\varphi_J = \varphi^* w_1 \wedge \varphi^* w_2$$

c) Soit $\alpha \in C^1(V)$, $d(\varphi^* \alpha) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\varphi^* \alpha)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\alpha(\varphi(x)))}{\partial x_j} dx_j$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial \alpha}{\partial y_i} \bigg|_{y_i = \varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$= \sum_{i=1}^m \varphi^* \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_i} \right) d\varphi_i = \varphi^* \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_i} dy_i \right) = \varphi^*(d\alpha)$$

Soit $w = \alpha dy_I$, $d(\varphi^* w) = d(\varphi^* \alpha dy_I)$

$$= d(\varphi^* \alpha) \wedge d\varphi_I + \varphi^* \alpha d(dy_I)$$

$$= \varphi^*(d\alpha) \wedge \varphi^*(dy_I) = \varphi^*(d\alpha \wedge dy_I) = \varphi^*(dw)$$

d) $\varphi^*(\tau^*(dz_I)) = \varphi^*(d\tau_I) = \varphi^*(d\tau_{i_1} \wedge \dots \wedge d\tau_{i_p})$

$$= \varphi^*(d\tau_{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(d\tau_{i_p}) = d(\varphi^*(\tau_{i_1})) \wedge \dots \wedge d(\varphi^*(\tau_{i_p}))$$

$$= d(\tau_{i_1} \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(\tau_{i_p} \circ \varphi) = d((\tau \circ \varphi)_{i_1}) \wedge \dots \wedge d((\tau \circ \varphi)_{i_p})$$

$$= d(\tau \circ \varphi)_I = (\tau \circ \varphi)^* dz_I$$

pour $w = \alpha dz_I$ c'est le même argument (à essayer)

□

le 03.12.18

Lemme: Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi: U \rightarrow V$ une applic. de classe C^1 , soit

$w = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \in \Omega^n(V)$, alors $\varphi^* w = \det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Dém: $\varphi^* w = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = \left(\sum_{j_1=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{j_n}} dx_{j_n} \right)$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{j_n}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\sigma(n)}} \varepsilon(\sigma) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

□

Intégration des formes différentielles (cas $p = n$)

Déf: Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Si l'intégrale $\int_X 1 \, dx_1 \dots dx_n$ existe, on dit que X est une partie mesurable.

Rem: $\int_X 1 \, dx_1 \dots dx_n$ est le volume de X .

Ex: Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ engendré par $h^1, \dots, h^n$ des vecteurs

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n t_i h^i, t_i \in [0, 1] \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{vol } X &= \int_X 1 \, dx_1 \dots dx_n = \int_{t_1, \dots, t_n \in [0, 1]} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \right| dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{t_1, \dots, t_n \in [0, 1]} \left| \det \begin{pmatrix} h_1^1 & \dots & h_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ h_n^1 & \dots & h_n^n \end{pmatrix} \right| dt_1 \dots dt_n = \left| \det \begin{pmatrix} h_1^1 & \dots & h_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ h_n^1 & \dots & h_n^n \end{pmatrix} \right| = |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(h^1, \dots, h^n)| \end{aligned}$$

Déf: $\omega = \alpha \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ est une forme volume.

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $X \subset U$ une partie mesurable.

Soit $\omega = \alpha \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$. Alors on pose $\int_X \omega = \int_X \alpha \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Rem: si $\omega = \alpha \, dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(n)}$ alors $\int_X \omega = \int_X \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Déf: Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts. Une applic. $\varphi: U \rightarrow V$ est un difféomorphisme de classe C^k si φ est une bijection, $\varphi \in C^k(U)$, $\varphi^{-1} \in C^k(V)$

Rem: Soit $\varphi: U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Alors $\varepsilon_\varphi = \text{sgn}(\det(D\varphi))$ est une constante sur U (φ inversible $\Rightarrow \det(D\varphi) \neq 0$, $\varphi \in C^1(U) \Rightarrow \det(D\varphi) \in C(U)$)

Lemme: Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts, $\varphi: U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme

soit $\omega \in \Omega^n(U)$. Soit $X \subset U$ une partie mesurable, alors

$$\int_{\varphi(X)} \omega = \varepsilon_\varphi \int_X \varphi^* \omega$$

Dém: $\int_{\varphi(X)} \omega = \int_{\varphi(X)} \alpha dy_1 \dots dy_n \stackrel{CDV}{=} \int_X \alpha(\varphi(x)) |\det(D\varphi)| dx_1 \dots dx_n$

$$= E_{\varphi} \int_X \varphi^* \alpha \cdot |\det(D\varphi)| dx_1 \dots dx_n =$$

$$= E_{\varphi} \int_X \varphi^* \alpha \cdot \varphi^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = E_{\varphi} \int_X \varphi^*(\alpha dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)$$

$$= E_{\varphi} \int_X \varphi^* \omega$$

□

Intégration des formes différentielles: (cas général)

Rem: Soit $\omega = \sum_{i=1}^m \alpha_i dy_i \in \Omega^1(V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Soit $X = [a, b]$, soit $\gamma: X \rightarrow V$ une courbe param.

Alors $\int_{\gamma} \omega = \int_X \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i(\gamma(x)) \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot dx \right)$

$$= \int_X \sum_{i=1}^m \gamma^* \alpha_i dy_i$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^m \gamma^* \alpha_i \cdot \gamma^* dy_i = \int_X \gamma^* \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i dy_i \right)$$

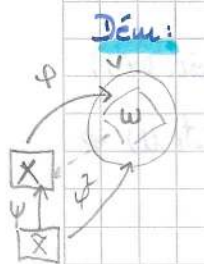
$$= \int_X \gamma^* \omega.$$

Déf: Soient $U \subset \mathbb{R}^p$, $X \subset U$ une partie mesurable. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ une application de classe C^1 . Soit $\omega \in \Omega^p(V)$. On définit l'intégrale de ω sur $Y = \varphi(X)$ pour $\int_{\varphi(X)} \omega = \int_X \varphi^* \omega$ (si $p > n$ $\int_{\varphi(X)} \omega = 0$)

Lemme: Soit $\tilde{X} \subset U$ une autre partie mesurable et $\psi: \tilde{X} \rightarrow X$ un C^1 -difféom.

Alors $\int_{\varphi(X)} \omega = E_{\varphi} \int_{\tilde{\varphi}(\tilde{X})} \omega$ où $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \psi$

Dém:



$$\int_{\varphi(X)} \omega = \int_X \varphi^* \omega = \int_{\psi(\tilde{X})} \varphi^* \omega = E_{\psi} \int_{\tilde{X}} \psi^*(\varphi^* \omega) = E_{\psi} \int_{\tilde{X}} (\varphi \circ \psi)^* \omega$$

$$= \int_{\tilde{X}} \tilde{\varphi}^* \omega \cdot E_{\psi} = E_{\psi} \int_{\tilde{\varphi}(\tilde{X})} \omega \quad \text{où } \tilde{\varphi} = \varphi \circ \psi$$

□

Rem: $\int_Y \omega$ ne dépend pas du paramétrage de Y au signe près

Analyse Réelle :

le 03.12.18

Ex: $n = 3$



Soit $U = \{y_1^2 + y_2^2 = y_3, 0 \leq y_3 \leq 1\}$

$$W = y_1 dy_2 \wedge dy_3$$

prenons $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, \cos x_2, x_1 \sin x_2, x_1^2)$ où $X \ni (x_1, x_2)$ $X = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

$$\varphi^* W = x_1 \cos x_2 (\sin x_2 dx_1 + x_1 \cos x_2 dx_2) \wedge (2x_1 dx_1)$$

$$= -x_1 \cos x_2 \cdot x_1 \cos x_2 \cdot 2x_1 dx_1 \wedge dx_2$$

$$= -2x_1^3 \cos^2 x_2 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\int_U W = \int_{\varphi(X)} W = \int_X \varphi^* W = \int_X -2x_1^3 \cos^2 x_2 dx_1 dx_2 =$$

$$= -2 \int_0^1 x_1^3 dx_1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 x_2 dx_2 = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = -\frac{\pi}{2}$$

lié directement

Rem: $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ où $(x_1, x_2) \in X = \bigcirc = B(0, 1)$

$$\varphi^* W = x_1 dx_2 \wedge (2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2) = -2x_1^2 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\int_U W = \int_X \varphi^* W = \int_X -2x_1^2 dx_1 \wedge dx_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} (-2x_1^2) dx_1 \right) dx_2$$

$$= \int_{-1}^1 -\frac{4}{3} (1-x_2^2)^{3/2} dx_2 = \dots = -\frac{\pi}{2}$$

Rem: $p = 2, n = 3$



Soit v un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$

$$w^2 v = v_3 dy_1 \wedge dy_2 - v_2 dy_1 \wedge dy_3 + v_1 dy_2 \wedge dy_3$$

$w_v^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2) = \langle v, \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \rangle$ est le flux de v à travers $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^1}$

Déf: Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, X une partie mesurable, $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert.

Soit $\varphi: U \rightarrow V$ une applic. de classe C^1 .

Soit v un champs de vecteurs sur V , alors

$$\int_{\varphi(X)} w^2 v \text{ est le flux de } v \text{ à travers } U = \varphi(X)$$

(intégrale de surface de v sur $U = \varphi(X)$)

$$\text{où } \varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_3(x_1, x_2))$$

Démo:

$$\int_X \det \begin{pmatrix} v_1(\varphi(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ v_2(\varphi(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ v_3(\varphi(x)) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} dx_1 dx_2 = \int_X \det(\dots) dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$= \int_X (v_3(\varphi(x)) (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}) dx_1 \wedge dx_2 + \dots) =$$

$$= \int_X v_3 (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2) \wedge (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2) \dots =$$

$$= \int_X v_3(\varphi(x)) df_1 \wedge df_2 - v_2(\varphi(x)) df_1 \wedge df_3 + v_1(\varphi(x)) df_2 \wedge df_3 =$$

$$= \int_X \varphi^* (v_3 dy_1 \wedge dy_2 - v_2 dy_1 \wedge dy_3 + v_1 dy_2 \wedge dy_3) = \int_X \varphi^* \omega_V = \int_{\varphi(X)} \omega_V \quad \square$$

Théorème de Stokes:

le 10.12.18

Théorème de Stokes:

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, soit $K \subset U$ un compact à bord orienté. Soit $w \in \Omega^1(U)$

$$w = \alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2.$$

$$dw = (\frac{\partial \alpha_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_2}) dy_1 \wedge dy_2$$

$$GR: \int_{\partial K} w = \int_K (\frac{\partial \alpha_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_2}) dy_1 dy_2 = \int_K dw. \quad (\text{Green-Riemann})$$

Théorème 14: Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $K \subset U$ un compact à bord orienté.

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^1

Soit $w \in \Omega^1(V)$. Alors $\int_{\varphi(K)} dw = \int_{\varphi(\partial K)} w$

(la formule de Green-Riemann généralisée)

Dém: $\int_{\varphi(K)} dw = \int_K \varphi^*(dw) = \int_K d(\varphi^*w) = \int_{\partial K} \varphi^*w = \int_{\varphi(\partial K)} w \quad \blacksquare$

Rem: si $n=3$. Soit v un champ de vecteurs sur V de classe C^1 .

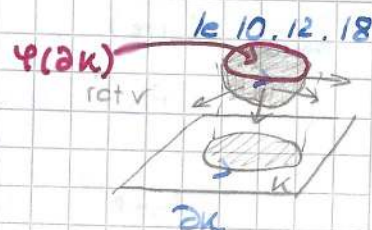
aussi un champ de vecteurs

Alors le flux de $\text{rot}(v)$ à travers $\varphi(K)$ est donné par la formule

$$\text{de Stokes - Ampère: } \int_{\varphi(K)} \omega_{\text{rot } v}^2 = \int_{\varphi(K)} dw'_v = \int_{\varphi(\partial K)} \omega'_v$$

Analyse Réelle:

Ex: $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$



Lemme: Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et soit $S^2 \subset V$ une sphère.

Soit $\omega \in \Omega^2(V)$, si ω est exacte alors $\int_{S^2} \omega = 0$

Dém: Supposons que S^2 est de rayon 1 est centrée en $(0,0,0)$.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tq $\varphi(x_1, x_2) = (\cos 2\pi x_1, \sin 2\pi x_1, \sin 2\pi x_1 \cdot \sin \pi x_2)$
 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$

Notons $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, alors $\varphi(I^2) = S^2$

Si $\omega = d\tilde{\omega}$, $\int_{S^2} \omega = \int_{\varphi(I^2)} d\tilde{\omega} = \int_{\varphi(I^2)} \tilde{\omega}$

(2 fois la $\tilde{\omega}$ courbe parcourut dans les 2 sens)
 $\Rightarrow \int_{\varphi(I^2)} \tilde{\omega} + \int_{\varphi(I^2)} \tilde{\omega} = 0$

$\Rightarrow \int_{\varphi(\partial I^2)} \tilde{\omega} = 0$

Déf: Soit $I^p = [0,1] \times \dots \times [0,1] \subset \mathbb{R}^p$, soit $\Psi_{ia}: \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ tq

$\Psi_{ia}(x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_1, \dots, a, x_i, \dots, x_{p-1})$

a) Soient $i \in \{1, \dots, p\}$, $a \in \{0,1\}$ $I_{ia}^p = \Psi_{ia}(I^{p-1}) = \{x \in I^p: x_i = a\}$
 = une face de I^p

b) $\partial I^p = \bigcup_{i=1, \dots, p} \bigcup_{a=0,1} (-1)^{i+a} I_{ia}^p$ est le bord orienté de I^p

Lemme: Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert tq $I^p \subset U$, soit $\omega \in \Omega^{p-1}(U)$ de classe C^1 , alors $\int_{\partial I^p} \omega = \int_{I^p} d\omega$

Dém: Soit $\omega = \sum_{j=1}^p \alpha_j dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_p$

$(\Psi_{ia}(x))_j = \begin{cases} x_j & j < i \\ a & j = i \\ x_{j-1} & j > i \end{cases}$ donc $\Psi_{ia}^*(dx_j) = d((\Psi_{ia})_j) = \begin{cases} dx_j & j < i \\ 0 & j = i \\ dx_{j-1} & j > i \end{cases}$

$\Rightarrow$ si $j \neq i$ alors $\Psi_{ia}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_p) = 0 \Rightarrow$

$\Psi_{ia}^*(\omega) = \alpha_i(x_1=a, \dots, x_p) dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{p-1}$

Dém: (Suite)

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i,a}^*(w) &= \alpha(x_1, \dots, \overset{i}{a}, \dots, x_p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p-1} \\
 \int_{\partial I^p} w &= \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \int_{I_{i,a}^p} w = \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \int_{\varphi_{i,a}(I^{p-1})} w = \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \int_{I^{p-1}} \varphi_{i,a}^* w \\
 &= \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \int_{I^{p-1}} \alpha_i(x_1, \dots, a, \dots, x_p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p-1} \quad \text{CDV: } x_1, x_{p-1} \rightarrow y_1, \dots, y_{i-1} \\
 &\quad x_i, \dots, x_{p-1} \rightarrow y_{i+1}, y_p \\
 &= \sum_{i=0}^p (-1)^{i-1} \sum_{a=0}^1 (-1)^{a-1} \int_{I^{p-1}} \alpha_i(y_1, \dots, a, y_p) dy_1 \wedge \dots \wedge \hat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_p \\
 &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_{I^{p-1}} (\alpha_i(y_1, \dots, 1, y_p) - \alpha_i(y_1, \dots, 0, y_p)) dy_1 \wedge \dots \wedge \hat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_p \\
 &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_{I^{p-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} dy_i \right) dy_1 \wedge \dots \wedge \hat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_p \\
 &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_{I^p} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p = \int_{I^p} \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \\
 &= \int_{I^p} \sum_{i=1}^p \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} dy_1 \wedge \dots \wedge \hat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_p \\
 &= \int_{I^p} dw
 \end{aligned}$$

Thm 15: Thm de Stokes

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert tq $I^p \subset U$. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Soit $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^2 . Soit $w \in \Omega^{p-1}(V)$ de classe C^1 .

Alors
$$\int_{\varphi(I^p)} dw = \int_{\varphi(\partial I^p)} w$$

Dém:
$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi(I^p)} dw &= \int_{I^p} d(\varphi^* w) = \int_{\partial I^p} \varphi^* w = \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \int_{I_{i,a}^p} \varphi^* w \\
 &= \sum_{i,a} (-1)^{i+a} \int_{\varphi(I_{i,a}^p)} w = \int_{\varphi(\partial I^p)} w
 \end{aligned}$$

Lemme: Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit $B^3 \subset U$ une boule, Soit $S^2 = \partial B^3$

Soit $w \in \Omega^2(U)$ de classe C^1 . Alors $\int_{B^3} dw = \int_{S^2} w$

Thm 16: Formule de Gauss - Ostrogradski, flux - divergence

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^3$ deux ouverts, $B^3 \subset U$ une boule, $f: U \rightarrow V$ un C^2 difféomorphisme, $M = f(B^3)$, ∂M le bord de M .

(Soit $\omega \in \Omega^2(U) \subset C^1$. Alors $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$)

Soit v un champ de vecteurs sur V . Alors, le flux de v à travers ∂M est donné par $\int_{\partial M} \omega_v^2 = \int_M (\operatorname{div} v) dy_1 dy_2 dy_3$

Dém: Si f est un difféo, alors $f(\partial B^3) = \partial(f(B^3)) = \partial M$

$x \in \partial B^3 \subset B^3$ (fermée) $\Rightarrow f(x) \in f(B^3) = M$, au voisinage de x
 $\nexists x' \in B^3 \Rightarrow f(x') \notin M$ (f est bijective)

et $f(x')$ est au voisinage de $f(x)$ (f est continue)

$\Rightarrow f(x) \in \partial M \Rightarrow f(\partial B^3) \subset \partial M$

la réciproque de f est aussi vraie pour toutes ces conditions

$\Rightarrow \partial M \subset f(\partial B^3) \Rightarrow f(\partial B^3) = \partial M$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega_v^2 &= \int_{f(\partial B^3)} \omega_v^2 = \int_{\partial B^3} f^*(\omega_v^2) = \int_{B^3} d(f^*(\omega_v^2)) = \int_{B^3} f^*(d\omega_v^2) \\ &= \int_{f(B^3)} d\omega_v^2 = \int_M d\omega_v^2 = \int_M \operatorname{div}(v) dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

Rem: Si $v = \operatorname{rot} u$, on a $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0 \Rightarrow \int_{\partial M} \omega_v^2 = 0$

spaces normés :Ex : Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^n$

dimension finie

 $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$

" "

 $\mathbb{R}[t]$

polynômes

" ∞ $C[0,1]$

fonctions continues

" ∞ Déf :

Un e.v normé est un e.v V muni d'une norme, une application $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq $\forall x, y \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

c) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ex : $V = C[0,1]$,

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \quad (\text{norme uniforme})$$

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$$

Déf :

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un e.v V sont équivalentes si

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } c \|x\|' \leq \|x\| \leq c' \|x\|' \quad \forall x \in V.$$

Ex : $V = C[0,1]$

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt \leq \int_0^1 \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| dt = \|x\|_{\infty}$$

Considérons $x_n(t) =$ supposons $\exists M$ tq $\|x\|_{\infty} \leq M \cdot \|x\|_1$,

$$\text{alors } 1 = \|x\|_{\infty} \leq M \cdot \|x\|_1 = M \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow M \geq 2n \quad \forall n$$

$\Rightarrow \|x\|_{\infty}$ et $\|x\|_1$ ne sont pas équivalentes

Thm 1: Riesz

Soit V un e.v. de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes.

Déf: Soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ une suite dans e.v. normé V .

a) On dit que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ (la suite converge vers x)

$$\text{si } \|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \text{ tq } \forall n > N_{\varepsilon} \|x_n - x\| < \varepsilon)$$

b) On dit que $\{x_n\}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^+$

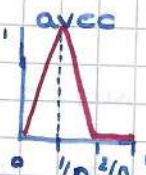
$$\text{tq } \forall n, m > N_{\varepsilon} \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Rem: Soit V un e.v. normé fonctionnel, si $\{x_n\}$ est une suite tq

$$x_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x(t) \not\Rightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \quad (\text{ici conv. ponctuelle})$$

Ex: $V = C[0,1]$ avec $\|\cdot\|_{\infty}$

$$x_n(t) =$$



$$\text{alors } x_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ mais } \|x_n - x\|_{\infty} = 1$$

$$\text{donc } x_n \not\rightarrow x$$

Lemme: Toute suite convergente est de Cauchy

Dém: Si $x_n \rightarrow x$, fixons $\varepsilon > 0$, prenons N_{ε} tq $\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \forall n > N_{\varepsilon}$

$$\text{Alors } \|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ est de Cauchy □

Déf: Un e.v.n V est dit de Banach si V est complet

(Toute suite de Cauchy a une limite dans V)

Équivalentes

Lemme: Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur un e.v. V . Si V est de Banach pour $\|\cdot\|$, alors il est aussi de Banach pour $\|\cdot\|'$.

Dém: $m\|\cdot\|' \leq \|\cdot\| \leq M\|\cdot\|'$, soit $\{x_n\}$ de Cauchy pour $\|\cdot\|'$

Alors $\|x_n - x_m\| \leq M\|x_n - x_m\|' \leq M\varepsilon$ si $n, m > N_\varepsilon$

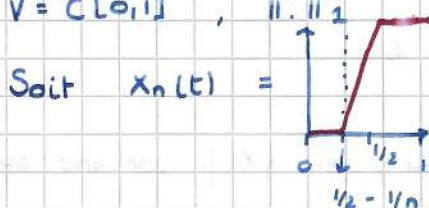
$\Rightarrow \{x_n\}$ de Cauchy pour $\|\cdot\| \Rightarrow \exists x, \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \|x_n - x\|' \leq \frac{1}{m}\|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x$ avec $\|\cdot\|'$

$\Rightarrow V$ est de Banach pour $\|\cdot\|'$ □

Thm 2: Tout esp. vect. de dim. finie est de Banach

Rem: $V = C[0,1]$



Donc $x_n - x_m =$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|_1 \leq \int_{1/2 - 1/n}^{1/2} 1 dt = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et $\{x_n\}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$

Mais si $\|x_n - x_m\|_1 \rightarrow 0$ alors $x(t) = 0 \forall t < 1/2$ et $x(t) = 1 \forall t > 1/2$
et $x \notin C[0,1] \Rightarrow V$ n'est pas de Banach.

Thm 3: $V = C[0,1]$, $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach

Dém: Soit $\{x_n\} \subset V$ de Cauchy, fixons $\varepsilon > 0$, prenons N_ε tq $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$

$$= \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \text{ si } n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \forall t$$

si $n, m > N_\varepsilon$ (*)

Fixons t , $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy. $\mathbb{R}$ est de Banach,

donc $x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t)$ (déf de $x(t)$). Mq x est continue.

considérons $\lim_{m \rightarrow \infty}$ de (*) $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \forall t$ si $n > N_\varepsilon$

$$|x(t+\delta) - x(t)| = |x(t+\delta) - x_n(t+\delta) + x_n(t+\delta) - x_n(t) + x_n(t) - x(t)|$$

$$\leq |x(t+\delta) - x_n(t+\delta)| + |x_n(t+\delta) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + |x_n(t+\delta) - x_n(t)|$$

Analyse Réelle :

4 = 19.12.18

Dém: (Suite)

$$x_n \in C[0,1] \Rightarrow \exists \delta \text{ tq } |t| < \delta \Rightarrow |x_n(t)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |x(t+\delta) - x(t)| \leq 3\epsilon$$

Lemme: $C^1[0,1]$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas de Banach.

Dém: Si $a, b \geq 0$ alors $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\text{Considérons } x_n(t) = \sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n} \in V$$

$$\text{Posons } x(t) = |t-1/2|$$

$$0 \leq x_n(t) - x(t) = \sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n} - \sqrt{(t-1/2)^2} \leq 1/\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \|x_n - x\|_\infty \leq 1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc $x_n \rightarrow x$ en norme, mais $x \notin V$ ($x(t) = |t-1/2|$ pas dérivable)

$\Rightarrow V$ n'est pas de Banach.

Rem: $C^1[0,1]$ muni de $\|\cdot\|_1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ est de Banach

Déf: Soient U et V deux e.v.n. Une applic. $f: V \rightarrow U$ est continue en $x \in V$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq $\|f(x) - f(y)\|_U < \epsilon \quad \forall y \in B_x(\delta)$
 f est continue sur V si f est continue en $x, \forall x \in V$

Ex: $V = C[0,1], f: V \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(0)$

$$\|\cdot\|_\infty: \|x(0) - y(0)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|_\infty$$

$\Rightarrow f$ est continue

$\|\cdot\|_1$ Considérons $x_n(t) = \begin{cases} 1/n & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0 & 1/n < t \leq 1 \end{cases}$ posons $x(t) = 0$

$$\|x_n - x\|_1 = \int_0^1 |x_n(t)| dt \leq 1/2n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|f(x_n) - f(x)\| = |1/n - 0| = 1/n \not\rightarrow 0 \Rightarrow f \text{ n'est pas continue}$$

1. Definition of a function $f: X \rightarrow Y$ is a rule that assigns to each element $x \in X$ a unique element $y \in Y$.

2. Graph of a function $f: X \rightarrow Y$ is the set of all points $(x, f(x))$ in the Cartesian plane.

3. Domain of a function f is the set of all elements $x \in X$ for which $f(x)$ is defined.

4. Range of a function f is the set of all elements $y \in Y$ such that $y = f(x)$ for some $x \in X$.

5. Injective (one-to-one) function: A function $f: X \rightarrow Y$ is injective if and only if $f(x_1) \neq f(x_2)$ whenever $x_1 \neq x_2$.

6. Surjective (onto) function: A function $f: X \rightarrow Y$ is surjective if and only if for every $y \in Y$, there exists an $x \in X$ such that $f(x) = y$.

7. Bijective function: A function $f: X \rightarrow Y$ is bijective if and only if it is both injective and surjective.

8. Composition of functions: If $f: X \rightarrow Y$ and $g: Y \rightarrow Z$ are functions, then the composition $g \circ f: X \rightarrow Z$ is defined by $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

9. Inverse function: If $f: X \rightarrow Y$ is a bijective function, then its inverse function $f^{-1}: Y \rightarrow X$ is defined by $f^{-1}(y) = x$ where $f(x) = y$.

10. Properties of functions: Functions have various properties such as being odd, even, periodic, etc.