UNIVERSITÉ
DE GENÈVE

FACULTÉ DES SCIENCES

Cours donné par

Andréy Bytsko

Analyse réelle

Table des matières

1 Introduction

Thèmes abordés dans le cours :

- Fonctions à plusieurs variables
- Formes différentielles
- Intégrales curvilignes et intégrales de surface

Remarque

Si V est un espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$, alors $(\alpha x + \beta y) \in V$ $\forall x, y \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (+ propriétés). Par exemple : $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Exemple

$V = \mathbb{R}^n$ $V \ni x = (x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ avec le 1 la $i$ème position.
$e_1, \cdots e_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ (la base canonique)

Exemple

$V = Mat(n, \mathbb{R})$ les matrices carrées réelles $n \times n$:

$$V \ni A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{i=1,\, j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \text{ où } E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{11}, E_{12} \cdots$ forment une base de V

Définition

Une <u>norme</u> sur un Espace Vectoriel est une application $|| \cdot ||\ : V \to \mathbb{R}_+$ tel que :

- 1) $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in V$
- 2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ $\forall x, y \in V$
- 3) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exemples

- $V = \mathbb{R}^n$ $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$,

  $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ la norme euclidienne.

- $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2},\ a_i > 0$ une norme

- $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i |x_i|,\ a_i > 0$ une norme sur $\mathbb{R}^n$

- $V = Mat(n, \mathbb{R})$

  $tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $|tr(A)|$ n'est pas une norme.

  $\sqrt{|tr(A^2)|}$ pas une norme non plus. A = 0100, A carré = 0000

- $||A|| = \sqrt{tr(A \cdot A^t)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (A \cdot A^t)_{ii}} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} A_{ij} \cdot (A^t)_{ij}} = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

  C'est la norme de Frobening.

Définition

Un Espace Normé $(Vm|| \cdot ||)$ est un Espace Vectoriel muni d'une norme $|| \cdot ||$

Définition

Soit $(V, || \cdot ||)$ un Espace Normé. Alors :

- 1) On note $B_x(\delta) = \{y \in V \big| ||x - y|| < \delta\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon δ.

- 2) $U \subset V$ est un ouvert si pour tout $x \in U$ il existe $\delta > 0$ tel que $B_x(\delta) \subset U$

  Dessin

- 3) $U \subset V$ est un fermé si $V \backslash U = \{x \in V \big| x \not\in U\}$ est un ouvert.

- 4) $U \subset V$ est borné s'il existe $\delta > 0$ tel que $U \subset B_0(\delta)$

  Dessin

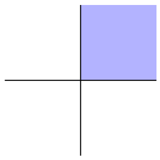
Exemples

$V = \mathbb{R}$

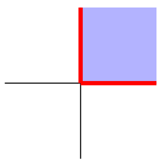
- $(0,1)$ est une ouvert
- $[0,1]$ est un fermé car $\mathbb{R}\backslash[0,1] = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ est un ouvert.
- $(0,1]$ est un ouvert ni fermé.

$V = \mathbb{R}^2$

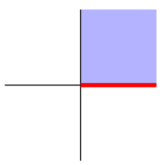
- $U = \{(x_1,x_2) \subset V \big| x_1 > 0, x_2 > 0\}$ un ouvert. On ne prend aucun des bords :



- $U = \{(x_1,x_2) \in V \big| x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ un fermé. On prend le bord sur l'axe des ordonnées et le bord sur l'axe des abscisses (en rouge)



- $U = \{(x_1,x_2) \in V \big| x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$ ni ouvert ni fermé. car un des bords est ouvert et l'autre est fermé. (le bord fermé est noté en rouge)



Définition

Un produit scalaire sur un Espace Vectoriel est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tel que :

- $\langle \alpha \cdot x, y\rangle = \langle x, \alpha \cdot y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in V$

  $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \ \forall x, y, z \in V$

  Les deux premières propriétés définissent une forme bilinéaire.

  $\langle x, y + z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle x, y\rangle$

- $\langle x, y\rangle = \langle y.x\rangle \ \forall x, y \in V$
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exemples

- $V = \mathbb{R}^n$ $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$

  $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $V = \mathbb{R}^n$ $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$ où $a_i > 0$
- $V = Mat(n, \mathbb{R})$

  $\langle A, B\rangle = tr(AB^t) = \sum\limits_{i=1}^{n}(AB^t)_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B^t)_{ji} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$

2 Formes linéaires

Définition

Soit V un Espace Vectoriel sur $\mathbb{R}$:

- 1) Une forme linéaire sur V est une application $\phi \ : \ V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot \phi(x) + \beta \cdot \phi(y) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in V$
- 2) L'ensemble des formes linéaires sur V, noté V^*, est l'espace dual de V

Exemples

- $V = \mathbb{R}^n$, définissons ϕ par : $\phi(x) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$, alors $\phi \in V^*$
- $V = Mat(n, \mathbb{R})$ $A \in V$:

  $\phi(A) = det(A)$ n'est pas une forme linéaire.

  $\phi(A) = tr(A)$ est une forme linéaire. $\phi \in V^*$

  $\phi(A) = tr(A^2)$ n'est pas une forme linéaire.

Théorème 1

Soit V un Espace Vectoriel, $dim(V) < \infty$. Alors :

- 1) V et V^* sont isomorphes (comme espaces vectoriels)
- 2) $dim(V^* = dim(V)$
- 3) Si V est muni d'un produit scalaire, alors pour tout $\phi \in V^*$, il existe un unique $v \in V^*$ tel que $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ pour tout $x \in V$

Démonstration

Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de V.

- 1) Il faut montrer qu'il existe une bijection linéaire $V \longleftrightarrow V^*$:

  $V \longrightarrow V^*$: pour $v \in V$, définissons $\phi \in V^*$ par $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i x_i$

  $V^* \longrightarrow V$: pour $\phi \in V^*$, posons $V = (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n))$

  $V \longrightarrow V^* \longrightarrow V : v \longrightarrow \phi \longrightarrow \tilde{v} = (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)) = (v_1, \cdots, v_n) = v$

  Donc, on a une bijection et donc un isomorphisme entre V et V^*

- 2) 1) $\implies$ 2)

- 3) Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base orthonormée de V, c'est à dire $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

  Soit $\phi \in V^*$ $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors :

  $\phi(x) = \phi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i\rangle \phi(e_i) = \langle x, \sum\limits_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i)\rangle = \langle x, v\rangle\ \forall x \in V$

  Unicité : Si $\phi(x) = \langle x, v\rangle = \langle x, u\rangle\ \forall x$

  $\implies \langle x, v - u\rangle = 0 \implies \langle v - u, x\rangle = 0 \implies$ prenons $x = v - u,\ v - u = 0 \implies u = v$

$\square$

3 Fonctions continues

Définition

Soit $(V, ||\cdot||)$ un espace normé. Soit $U \subset V$:

- 1) Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> en $x \in U$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in B_x(\delta)$
- 2) Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est continue sur U si f est continue en tout $x \in U$
- 3) L'ensemble des fonctions continues sur U est noté $C(U)$.

Exemples

- $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$

  $f(x) = 2x_1 \cdot x_2$, $x_0 = (0,0)$, alors $|f(x) - f(x_0)| = 2|x_1| \cdot |x_2| \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 = ||x||^2 \to 0$, $||x|| \to 0$

  $\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $x \in B_{x_0} 8\sqrt{\varepsilon = \delta})$

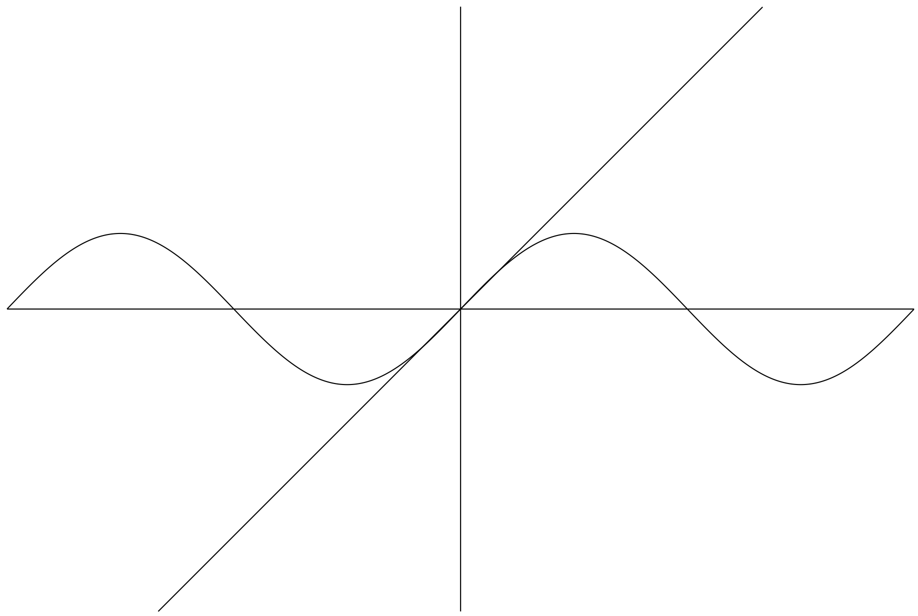
Exemple

$V = \mathbb{R},\ x_0 = (0,0)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 sin(x_2)}{|x_1| + x_2^2} \text{ si } x \neq x_0 \\ 0 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

$|sin(x)| \leq |x|$:

Dessin



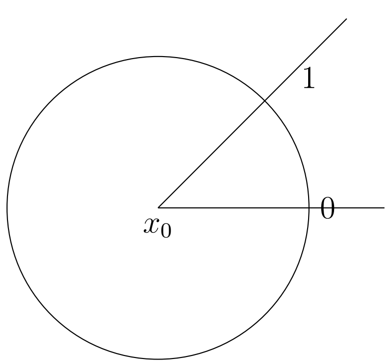
$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{x_1 sin(x_2)}{|x_1| + x_2^2} \leq \frac{|x_1||x_2|}{|x_1| + x_2^2} = \frac{|x_1|}{|x_1| + x_2^2} \cdot |x_2| \leq |x_2| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $f \in C(\mathbb{R}^2)$

Exemple

$V = \mathbb{R}^2,\ x_0 = (0,0)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = x_0 \\ \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } x_1 = \dfrac{1}{n}, x_2 = 0 \\ 1 \text{ si } x_1 = \dfrac{1}{n}, x_2 = \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{cases}$$



Donc f n'est pas continue en x_0

$f \in C(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$

Dérivée d'une intégrale (Rappel)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $g \in C(I)$. Soit $f(x) = \displaystyle\int_a^x g(s)\mathrm{d}s$, où $a, x \in I$. Alors $f'(x) = g(x)$

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^b g(s)\mathrm{d}s$, où $b, x \in I$

Alors, $f'(x) = \left(-\displaystyle\int_b^x g(s)\mathrm{d}s\right)' = -g(x)$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Soit $b : J \to I$ une fonction différentiable.

Soit $f(x) = \displaystyle\int_a^{b(x)} g(s)\mathrm{d}s = \varphi(b(x))$ où $\varphi(b) = \displaystyle\int_a^b g(s)\mathrm{d}s$

Donc $f'(x) = \varphi_b'|_{b=b(x)} b'(x) = g(b(x)) \cdot b'(x)$

Soit $a : J \to I$ une fonction différentiable.

$f(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^b g(s)\mathrm{d}s$

Alors $f'(x) = -g(a(x)) \cdot a'(x)$

Lemme 1

Soit $f(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} g(s)\mathrm{d}s$.

Alors $f'(x) = \left(\displaystyle\int_{a(x)}^c g(s)\mathrm{d}s + \int_c^{b(x)} g(s)\mathrm{d}s\right)' = g(b(x)) \cdot b'(x) - g(a(x)) \cdot a'(x)$

Exemple

$f(x) = \displaystyle\int_{cos(x)}^{sin(x)} e^{t^2}\mathrm{d}t$

$f'(x) = e^{sin(x)^2} cos(x) - e^{cos(x)^2}(-sin(x))$

Dérivées partielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction :

- a) La dérivée partielle de f par rapport à x_i en $x \in U$ est : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\Big(f(x_1, \cdots, x_i + t, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)\Big) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}(f(x + t \cdot e_i) - f(x))$
- b) On dit que $f \in C^1(U)$ (f est de classe C^1 sur U si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in C(U)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$

Exemple

$\mathbb{R}^2$, $f(x) = (sin(x_1), (cos(x_2))$
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = cos(x_1)cos(x_2)$
$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -sin(x_1)sin(x_2)$

Exemple

$f(x) = \sqrt[3]{x_1x_2}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0$ car $f(x_1,0) = 0 \forall x_1$
Mais pour $x_1 \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x_2^2}{x_1^2}}$
$\implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ n'est pas continue en $x_0 = (0,0)$

Remarque

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si en $x \in U$, la dérivée $f'(x)$ existe, alors f est continue en x car $f'(x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(f(x+t) - f(x))$

Remarque

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si en $x_0 \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_2)$, existe pour tout $i = 1, \cdots, n$.
Alors f n'est pas forcément continue en x_0.

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_1, x_2 = 0 \\ \dfrac{1}{x_1x_2} \text{ sinon} \end{cases}$$
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$
Mais si $x_1, x_2 \neq 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{-1}{x_1^2x_2}$

Théorème 2

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, Si $f \in C^1(U)$, alors $f \in C(U)$

Lemme : Théorème des accroissements finis

Soit $f \in C([a.b])$. Si f est dérivable sur (a,b), alors il existe $c \in (a,b)$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$$

Preuve du théorème 2

$n = 1$ trivial

$n = 2$ Soient $a = (a_1, a_2), x = (x_1, x_2) \in U$

$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(a, x_1) + f(a, x_1) + f(a_1, a_2) =$
$(x_1 - a_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) + (x_2 - a_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$
où $c_1 \in (a_1, x_1)$ et $c_2 \in (a_2, x_2)$

Théorème 3

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$. Soit $[a,b] \times [c,d] \subset U$.
Soit $g \in C(U)$ une fonction tel que $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} \in C(U)$.
Soient $f(x) = \displaystyle\int_a^b g(s,x)\mathrm{d}s$
Alors $f'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(s,x)\mathrm{d}s$

Preuve

$$f(x) = \int_a^b g(s,x)\mathrm{d}s = \int_a^b \left(\int_c^x \frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\mathrm{d}t + g(s,c) \right) \mathrm{d}s$$

Prenons $\alpha \in [c,d]$:

Par le Théorème de Fubini :

$$= \int_\alpha^x \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t + \int_a^b g(s,x)\mathrm{d}s$$

$$\implies f'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(s,x)\mathrm{d}s + 0$$

$\square$

Exemple

$$f(x) = \int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{e^{xt}}{t}\mathrm{d}t$$
$$f'(x) = \int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{te^{xt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ln(2)}^{ln(3)} e^{xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}e^{xt}\Big|_{ln(2)}^{ln(3)} = \frac{1}{x}\left(e^{xln(3)} - e^{xln(2)}\right) = \frac{1}{x}\left(3^x - 2^x\right)$$
$$f : U \to \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ pour } i = 1, \cdots, n$$

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

- a) Les dérivées partielles de f d'ordre 2 sont les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ avec $i, j = 1, \cdots, n$
- b) On dit que $f \in C^2(U)$ ($\equiv f$ est de classe C^2 sur (U)) si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C(U)$

Remarque

$f \in C^2(U) \implies f \in C^1(U) \implies f \in C(U)$ Par le théorème 2.

Exemple

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot sin(x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = sin(x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \cdot cos(x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 \cdot cos(x_2)\right) = cos(x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(sin(x_2))\right) = cos(x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -x_1 \cdot sin(x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0)}_{\text{une fonction à une variable } x_1} \right)\Bigg|_{x_1=0}$$

Exemple

$$f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) :$$

Fixons $x_1 \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,0)\Bigg|_{x_2=0} = \frac{4x_2^3}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\Bigg|_{x_2=0} = 0$$

Fixons $x_1 = 0$, on a $f(0,x_2) = x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^2\right)\Bigg|_{x_2=0} = 0$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0) = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$$

Fixons $x_2 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\Bigg|_{x_1=0} = 0$$

Fixons $x_2 = 0$. On a $f(x_1,0) = |x_1|$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0)\Bigg|_{x_1=0} \text{ n'existe pas}$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) \text{ n'existe pas}$$

Théorème 4(Schwarz)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Si $f \in C^2(U)$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pour tout $i, j = 1, \cdots, n$

Preuve

Considérons le cas $n = 2$ (car toutes les autres variables sont constantes).
Posons $F(x_1, x_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$
Supposons qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $F(x_0) \neq 0$

$F \in C(U) \implies$ il existe un carré $[a, b] \times [c, d] \equiv I \subset \mathbb{R}^2$ tel que $F(x) > 0 \, \forall x \in I$

$F(x_0) > 0$
Rappelons $\displaystyle\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$

$$0 < \int_I F(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_I \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \int_I \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$

$$= \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(b, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, x_2) \right) \mathrm{d}x_2 - \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, d) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, c) \right) \mathrm{d}x_1$$

$$= f(b, d) - f(b.c) - f(a, d) + f(a, c) - f(b.d) + f(a, d) + f(b, c) - f(a, c) = 0 \text{ Contradicitino}$$

$\square$

4 Fonctions implicites

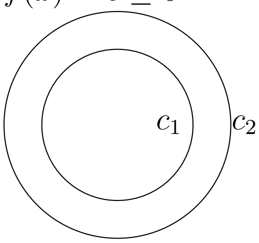
Définition

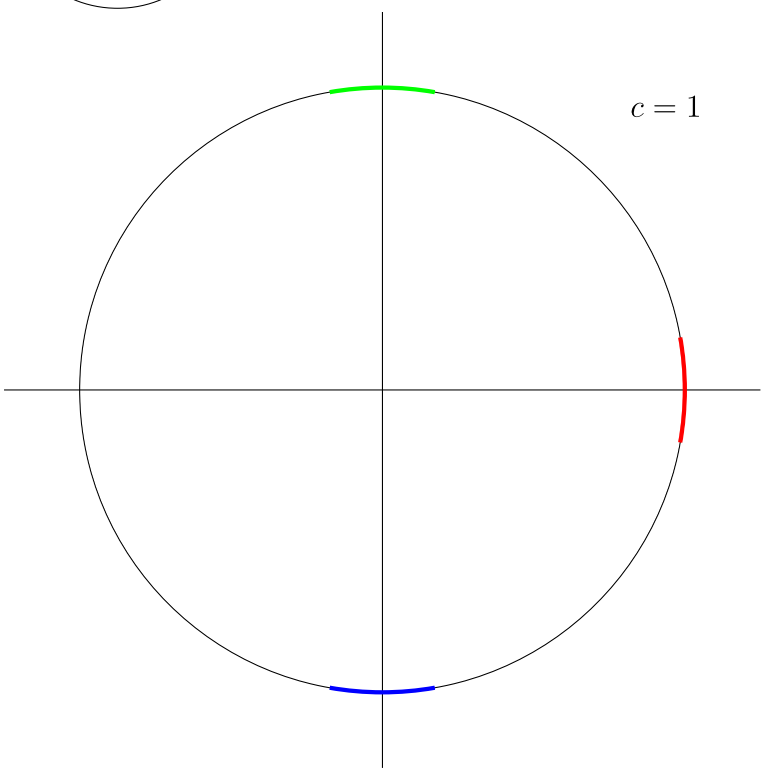
Soient $U \subset \mathbb{R}^n, f \in C(U)$. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. L'ensemble $\{x \in U | f(x) = c\}$ est une <u>ligne</u> ou la surface de niveau de f

Exemple

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$f(x) = c \geq 0$





- Au voisinage de $(0, 1)$, on a $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$
- Au voisinage de $(0, -1)$, on a $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$
- Au voisinage de $(1, 0)$, on a x_2 n'est pas une fonction de x_1

  $F = x_1^1 + x_2^2 - 1$

Définition

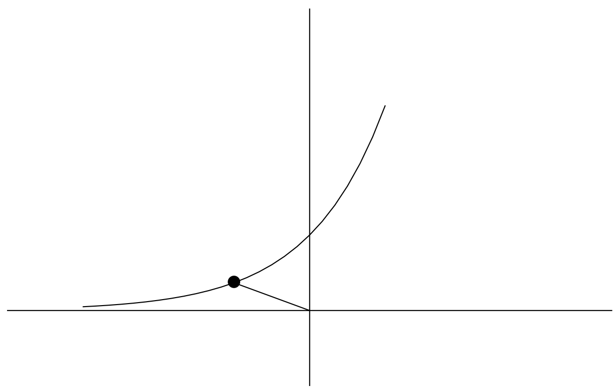
On dit que l'équation $F(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0$ est une fonctions implicite si elle définit (localement au voisinage d'un point) x_{n+1} en fonction de $x_1, \cdots, x_n$

Exemple

$F(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + x_2 e^{x_1}$

$F(x_1, x_2) = 0$ au voisinage de (0,0)

Fixons $x_1 = a > 0$, alors $F(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow e^{x_2} = -\dfrac{e^a}{a} x_2$ Il existe une solution x_2



Fixons $x_1 = a < 0$, alors $F(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow e^{x_2} = -\dfrac{e^a}{a} x_2 > 0$

$\Longrightarrow$ il existe une solution x_2

Image

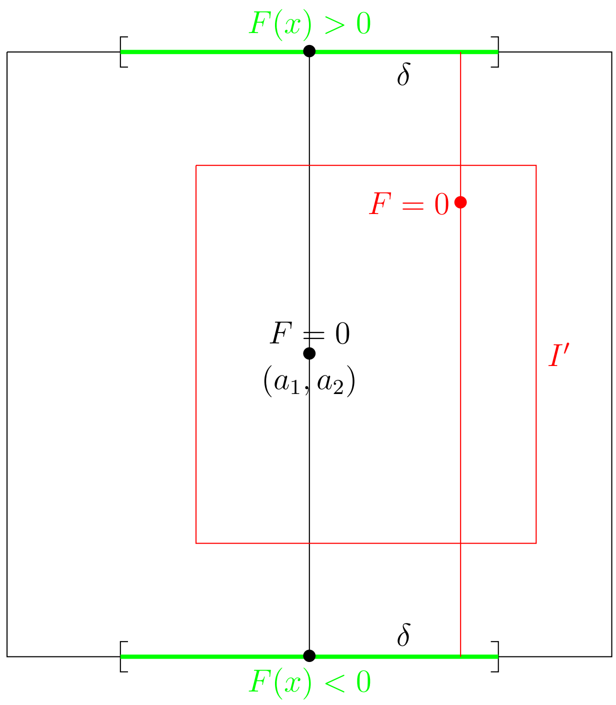
Donc il existe $\delta > 0$ et une fonction f tel que $x_2 = f(x_1)$ au voisinage de (0,0).

Théorème 5(de fonctions implicites)

Soient $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert et $F \in C^1(U)$.

Soit $a = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$ un point tel que $F(a) = 0$ et on a $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0$. Alors il existe $\delta > 0$ et une fonction à n variables $f \in C^1(B_{(a_1, \cdots, a_n)})$ telle que $f(a_1, \cdots, a_n) = a_{n+1}$ et $F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) = 0$ pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in B_{(a_1, \cdots, a_n)}$

Preuve



Considérons le cas $\mathbb{R}^2$. Alors $F(x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(a) = F(a_1, a_2) = 0$

Soit $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(a) > 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$ est continue.

$\implies$ il existe un carré $I = [a_1 - \beta, a_1 + \beta] \times [a_2 - \beta, a_2 + \beta] \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$ si $x \in I$ $\implies F(a_1, a_2 + \beta) > 0$

$F(a_1, a_2) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} > 0$ sur $I \implies F(a_1, a_2 - \beta) < 0$

$\implies$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\begin{cases} F(x_1, a_2 + \beta) > 0 \, \forall x_1 \in [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \\ F(x_1, a_2 - \beta) < 0 \, \forall x_1 \in [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \end{cases}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_2} > 0$ sur I

Fixons x_1, alors il existe $y \in [a_2 - \beta, a_2 + \beta]$ tel que $F(x_1, y) = 0$

Définissons f par $f(x) = y$

Alors $F(x_1, f(x_1)) = 0$ et $f(a_1) = a_2 \implies f$ existe.

Il faut encore montrer que cette fonction est de classe C^1. Montrons qu'elle est continue car continue $\implies C^1$

$$(x_1, f(x_1)) \subset I \iff \begin{cases} x_1 \in [a_1 - \beta, a_1 + \beta] \\ x_2 \in [a_2 - \beta, a_2 + \beta] \end{cases}$$

Prenons $\beta \to 0$. Alors $x_1 \to a_1$ et $f(x_1) \to a_2 = f(a_1) \implies f$ est continue en $x_1 = a_1$.

Soit $a' = (a'_1, a'_2)$ sur le graphe de F dans I

$\implies F(a'_1, a'_2) = F(a'_1, f(a'_1)) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(a') > 0$

On peut répéter la considération $\implies f$ est continue en $x_1 = a'_1$

Prenons $x, \tilde{x} \in [a - \delta, a + \delta] \implies f(x_1), f(\tilde{x_1}) \in [a_2 - \beta, a_2 + \beta]$

$O = F(x_1, f(x_1)) - F(\tilde{x_1}, f(\tilde{x_1})) = F(x_1, f(x_1)) - F(\tilde{x_1}, f(x_1)) + F(\tilde{x_1}, f(x_1)) - F(\tilde{x_1}, f(\tilde{x_1}))$

$= (\lambda_1 - \tilde{\lambda_1})\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(c_1, f(x_1)) + (f(x_1) - f(\tilde{x_1}))\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\tilde{x_1}, c_2)\,(*)$

où $c_1 \in (x, \tilde{x_1})$ et $c_2 \in (f(x_1), f(\tilde{x_1}))$

$$\implies f'(x_1) = \lim_{\tilde{x_1} \to x_1} \frac{f(\tilde{x_1}) - f(x_1)}{\tilde{x_1} - x_1} \overset{(*)}{=} - \lim_{\tilde{x_1} \to x_1} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1, f(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(\tilde{x_1}, c_2)}$$

$$= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, f(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, f(x_1))}$$

$\implies f'$ existe et f' est une fonction continue. $\implies f' \in C^1$ (car c'est une composition de fonctions continues)

$\square$

Remarque

Soit $a \in U$ tel que $F(a) = 0$, mais $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}} = 0$ n'implique pas que f n'existe pas.

Exemple

$F(x) = x_1 - x_2^3, a = (0, 0), \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(a) = 0$

mais $F(x) = 0 \implies x_2 f(x_1) = \sqrt[3]{x_1}$

Remarque

$$x_1 = a,\ f(a_1) = a_2 \implies f'(a_1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(a_1, a_2)}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(a_1, a_2)}$$

Exemple

$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - cos(x_1 + x_2)$

$a = (1, -1),\ F(x) = 0, F(a) = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x) = 2x_1 + x_2 + sin(x_1 + x_2),\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(a) = 1$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x) = x_1 + 2x_2 + sin(x_1 + x_2) = -1$

$\implies \exists f$ tel que $x_2 = f(x_1)$ au voisinage de a. $f(a_1) = -1$, $f'(a_1) = -\dfrac{1}{-1} = 1$

$F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = 0$, $a = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$ tel que $F(a) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0 \implies \exists f$ tel que $x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)$ ou $F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) = 0$ au voisinage de a.

$\implies 0 = F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) - F(x_1, \cdots, \tilde{x_1}, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, \tilde{x_1}, \cdots, x_n)) \pm ? \mp F(x_1, \cdots, \tilde{x_1}, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n))$

$\implies \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))}{\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))}$

$\implies f(a_1, \cdots, a_n) = a_{n+1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(a)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(a)}$

Exemple

$F(x) = x_1^3 - x_2^3 + x_3^4 - x_1x_2x_3$

$F(x) = 0$ au voisinage de $a = (1, 1, 1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = 3x_1^2 - x_2x_3,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) = -3x^2 - x_1x_3\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(x) = 4x_3^3 - x_1x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a) = 2\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(a) = -4\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(a) = 3$$

$\implies \exists f$ tel que $x_3 = f(x_1, x_2)$ tel que $f(1, 1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1, 1) = -\dfrac{2}{3}\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1, 1) = -\dfrac{-4}{3} = \dfrac{4}{3}$

Exemple (Théorème)

Soit $F(a_1, \cdots, a_n, x) = x^n + a_x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel que toutes les fonctions de F sont simples. Alors chaque racine de F est une fonction de classe C^1 de $a_1, \cdots, a_n$

Définition

Soit $x = \alpha$ une racine simple de F, $F(a_1, \cdots, a_n, \alpha) = 0$

$\implies$ (Théorème de Bézout) $F(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$, où $Q(\alpha) \neq 0$ un polynôme.

$\implies \dfrac{\partial F}{\partial x} = Q(x) + (x - \alpha) \cdot Q'(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, \cdots, a_n, x) = Q(\alpha) \neq 0$$

$\implies$ Théorème des fonctions implicites.

$\exists f$ tel que $\alpha = f(a_1, \cdots, a_n)$ où $f \in C^1(U)$

$\square$

Exemple

$V = \mathbb{R}^3$

$F_1(x) = x_2^2 + x_3^2 - 2,\ F_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

$F_1(x) = 0$ est un cylindre et $F_2(x)$ est une cône.

On peut réécrire les deux équations comme :

$$\begin{cases} x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_2^2 - x_3^2 = -x_1^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2}x_1^2} \\ x_3 = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{2}x_1^2} \end{cases}$$

Au voisinage du point $a = (0, 1, -1)$:

$$\implies \begin{cases} x_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2}x_1^2} \\ x_3 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x_1^2} \end{cases} \quad \text{qui sont des fonctions explicites.}$$

Théorème 6 (des fonctions implicites générales)

Soit $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ un ouvert. Soient $F_1, \cdots, F_k \in C^p(U)$ avec $p \geq 1$

Soit $a = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k}) \in U$ un point tel que $F_i(a) = 0\, \forall\, i = 1, \cdots, k$ et

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_{n+1}}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+k}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_{n+k}}(a) \end{pmatrix} \neq 00$$

Alors, il existe $\delta > 0$, et des fonctions $f_1, \cdots, f_n \in C^p(B_{(a_1,\cdots,a_n)}(\delta))$ tel que $f_i(a_1, \cdots, a_n) = a_{n+i}\, \forall\, i = 1, \cdots, k$ et on a $F_i(x_1, \cdots, x_n, f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_n)) = 0\, \forall\, i = 1, \cdots, k$ et pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in B_{(a_1,\cdots,a_n)}(\delta)$

Exemple

$V = \mathbb{R}^3$

$F_1(x) = x_2^2 + x_3^2 - 2,\ F_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

$$det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_3 \\ 2x_2 & -2x_3 \end{pmatrix} = -8x_2x_3$$

Remarque :

$$x_3 = 0 \begin{cases} F_1(x) = x_2^2 - 2 = 0 \\ \\ F_2(x) = x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \quad \text{pas possible.}$$

$\implies$ au voisinage de $a = (a_1, a_2, a_3), a_2 \neq 0$, il existe f_1, f_2 de classe C^∞ tel que $x_2 = f_1(x_1)$, $x_3 = f_2(x_2)$

5 Gradient et dérivée directionnelle

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. L'espace tangent à x, noté $T \times \mathbb{R}^n$, est l'ensemble des vecteurs dont l'origine est x.

Remarque

$T \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$

Dessin

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $x \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors le gradient de f en x est $(grad\, f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in T \times \mathbb{R}^n$

Exemple

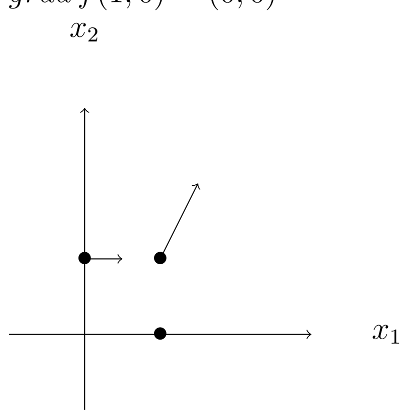
$\mathbb{R}^2$:

$f(x) = x_1 x_2^2$, $grad\, f(x) = (x_2^2, 2x_1x_2)$

$grad\, f(1,1) = (1,2)$

$grad\, f(0,1) = (1,0)$

$grad\, f(1,0) = (0,0)$



Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $x \in U$ et $h \in T \times \mathbb{R}^n$.

La dérivée directionnelle de f en x suivant h est :

$$f'_h(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+th)-f(x)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x_1+th_1,\cdots,x_n+th_n)-f(x_1,\cdots,x_n))$$

Exemple

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=(0,0) \\ \dfrac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{sinon} \end{cases}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)=0$
Soit $h=(1,2)\in T_{(0,0)}\times\mathbb{R}^2$

$$f'_h(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(th_1,th_2)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{th_1\cdot(th_2)^2}{(th_1)^2+(th_2)^2}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \frac{4}{5}$$

Théorème 7

Soit $f\in C^1(U)$. Soit $x\in U$. Soit $h\in T\times\mathbb{R}^n$.
Alors, $f'_h(x)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot h_i = \langle grad\, f(x), h\rangle$ $(**)$

Preuve

Le cas $n=2$:

$$(*) = \frac{1}{t}(f(x_1+th_1,x_2+th_2)-f(x_1,x_2))$$

$$= \frac{1}{t}(\underbrace{f(x_1+th_1,x_2+th_2)-f(x_1,x_2+th_2)}_{th_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,x_2+th_2)} + \underbrace{f(x_1,x_2+th_2)-f(x_1,x_2)}_{th_2\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,c_2)}$$

Où le théorème des acroissement finis nous dit : $c_1\in(x_1,x_1+th_1)\underset{t\to 0}{\to} x_1$
$c_2\in(x_2,x_2+th_2)\underset{t\to 0}{\to} x_2$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0}(*) = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

$\square$

$(**) \implies f(x+th) - f(x) = t \cdot \langle grad\, f(x), h\rangle + o(t)$

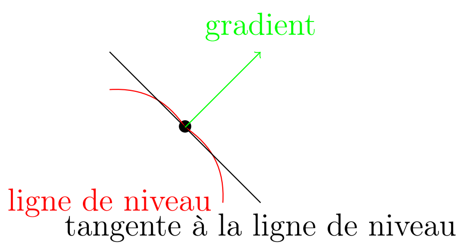
$\tilde{h} = th$, $||\tilde{h}|| = |t| \cdot |h|$, donc $f(x+\tilde{h}) - f(x) = \langle grad\, f, \tilde{h}\rangle + o(||\tilde{h}||)$

$\implies$ Lemme :

Lemme

Soit $f \in C^1(U)$, alors :

- a) f croît le plus rapidement dans la direction de $grad\, f$
- b) $grad\, f_{(x)}$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau de f passant par x.



Lemme 3

Soit $[a,b] \times [c,d] = M \subset \mathbb{R}^2$. Soit $h \in C(M)$. Soit $f(x) = \displaystyle\int_a^b h(s,x)\mathrm{d}s$, $f \in C([c,d])$

Preuve

Comme M est fermé et borné, alors h est <u>uniformément</u> continue (Théorème de Heine Cantor), c'est à dire, $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0$, tel que $\forall y_1, y_2 \in M$ tel que $||y_1 - y_2|| < \delta$, on a $|h(y_1) - h(y_1)| < \varepsilon$

Fixons $\varepsilon > 0$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_a^b (h(s_1,x_1) - h(s_2,x_2))\mathrm{d}s \right|$$

$$\leq \int_a^b |h(s_1,x_1) - h(s_2,x_2)|\, \mathrm{d}s \leq \varepsilon|a-b| \text{ si } |x_1 - x_2| < \delta$$

car $h(s_1,x_1) - h(s_2,x_2) < \varepsilon \iff$ si $||(s_1,x_1) - (s_1,x_2)|| < \delta \iff |x_1 - x_2| < \delta$

Théorème 8

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $[\alpha, \beta] \times [c, d] \subset U$. Soit g une fonction telle que $g \in C(U)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_2} \in C(U)$

Soient a, b des fonctions différentiables et telles que $a(x), b(x) \in [\alpha, \beta]$ si $x \in (c, d)$. Soit $f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(s, x) \mathrm{d}s$

Alors $f \in C^1((c, d))$ et on a :

$$f'(x) = g(b(x), x) \cdot b'(x) - g(a(x), x) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(s, x) \mathrm{d}s$$

Preuve

Posons $h = (1, 1, 1)$ et $F(x_1, x_2, x_3) = \int_{a(x_2)}^{b(x_1)} g(s, x_3) \mathrm{d}s$

$\implies f(x) = F(x, x, x) \implies$

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(F(x+t, x+t, x+t) - F(x, x, x))$$

$$= F'_h(x, x, x) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, x, x) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x, x, x) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(x, x, x)$$

qui sont toutes continues par le Lemme 1 et 3 et aussi par le Théorème 3 pour la dernière dérivée partielle. Donc $f'(x)$ est continue.

$\square$

Exemple

$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} arctan\left(\frac{s}{x}\right) \mathrm{d}s, x > 0$

$$f'(x) = 3x^2 arctan(x^2) - 2x \cdot arctan(x) + \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{s}{x^2}\right) \mathrm{d}s$$

$$= -\int_{x^2}^{x^3} \frac{s}{x^2 + s^2} \mathrm{d}s = -\frac{1}{2} ln(s^2 + x^2)\Big|_{x^2}^{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2} ln(x^6 + x^2) + \frac{1}{2} ln(x^4 + x^2)$$

6 Extrema d'une fonction

Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que g admet un extremum local en $a \in U$ s'il existe $\delta > 0$ tel que l'on a $g(x) \geq g(a)$ (un minimum local) ou $g(x) \leq g(a)$ (maximum local) pour tout $x \in B_a(\delta)$

Lemme 4

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $g \in C^1(U)$. Si g admet un extremum local en $a \in U$, alors $grad\, g(a) = 0$. C'est une condition nécessaire, pas suffisante.

Preuve

Supposons que $grad\, g(a) = h \neq 0$. Alors $g'_h(a) = \langle grad\, g(a), h\rangle = ||h||^2 > 0$ et $g'_{-h}(a) = \langle grad\, g(a), -h\rangle = -||h||^2 < 0$

On a donc des points x proches de a où $g(x)$ peut être positif ou négatif. Donc g n'admet pas d'extremum en a.

$\square$

Définition

Soit $g \in C^1(U)$. On dit que $a \in U$ est un point critique de g si $grad\, g(a) = 0$

Exemple

$$g(x) = 2e^{x_1 - x_2} - \frac{x_1^2}{x_2} + (1-\alpha)x_2,\ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$grad\, g(x) = 0$$
$$\begin{cases} 2e^{x_1-x_2} - 2\dfrac{x_1}{x_2} = 0 \\ -2e^{x_1-x_2} + \dfrac{x_1^2}{x_2^2} + 1 - \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x_1-x_2} = \dfrac{x_1}{x_2} \\ \dfrac{x_1^2}{x_2} - 2\dfrac{x_1}{x_2} + 1 - \alpha = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} e^{x_2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)} = \dfrac{x_1}{x_2} \\ \left(\dfrac{x_1}{x_2} - 1\right)^2 = \alpha \end{cases} \overset{t=\frac{x_1}{x_2}-1}{\iff} \begin{cases} e^{x_2 t} = t+1 \\ t^2 = \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{t} ln(1+t) \\ t = \pm\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

Si $\alpha < 0$, on n'a pas de points critiques.

Si $\alpha = 0$, on a une infinité de points critiques $a = (a_1, a_1)$ avec $a_1 \neq 0$.

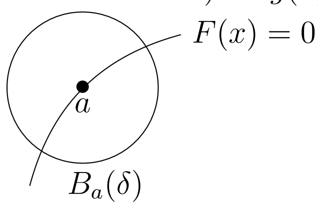
Si $\alpha \in (0, 1)$, on a deux points critiques $(t = \pm\sqrt{\alpha})$

Si $\alpha \geq 1$, on a qu'un seul point critique $(t = +\sqrt{\alpha})$

7 Multiplicateurs de Lagrange

Soit $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ un ouvert. Soient $g \in C(U)$, $F_1, \cdots, F_k \in C(U)$.

Soit $S = \{x \in U \Big| F_i(x) = 0, i = 1, \cdots, k\}$. On dit que g admet un extremum local lié aux conditions $F_i(x) = 0$ pour tout $i = 0, \cdots, k$ en $a \in S$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \geq g(a)$ (un minimum local lié) ou $g(x) \leq g(a)$ (un maximum local lié) pour tout $x \in B_a(\delta) \cap S$

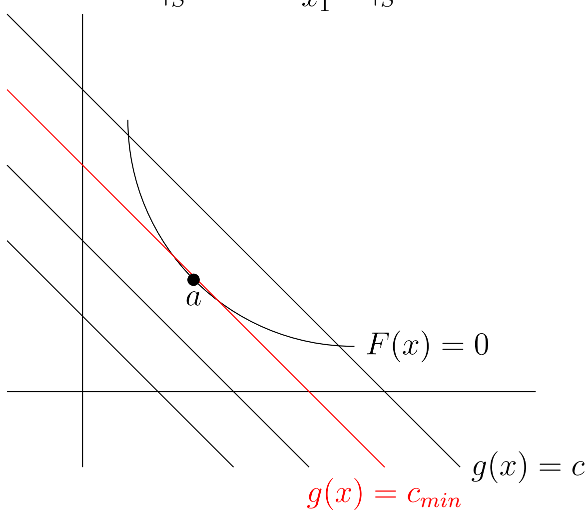


Autrement dit, $g\Big|_S$ admet un extremum local.

Exemple

$g(x) = x_1 + x_2$, $F(x) = x_1 \cdot x_2 - 1$,$U = \{x \in \mathbb{R}^2 \Big| x_1, x_2 \rangle 0\}$

$F(x) = 0, g\Big|_S = x_1 + \dfrac{1}{x_1}$, $g\Big|_S$ admet un minimum global en $a = (1, 1)$



Théorème 9 (condition nécessaire pour un extremum local lié)

Soit $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ un ouvert. Soient $g \in C^1(U), F_1, \cdots, F_k \in C^1(U)$

Si g admet un extremum local lié aux conditions $F_1(x) = \cdots = F_k(x) = 0$ en $a \in S$ et $grad\, F_1(a), \cdots, grad\, F_k(a)$ sont linéairement indépendants (ou $grad\, F_1(a) \neq 0$ pour le cas $k = 1$), alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (appelés les multiplicateurs de Lagrange) tels que :

$$grad\, g(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, grad\, F_i(a) \, (*)$$

Remarque

$(*) \iff a$ est un point critique de la fonction de Lagrange $Lg = g - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i$

Remarque

Si S est compact, (fermé et borné), alors $g\Big|_S$ admet toujours un maximum global et un minimum global (même si g n'admet pas de points critiques sur U !)

Exemple

On la fonction $g(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ sous la condition $2x_1^3 + 3x_2^2 \leq 7$:

Posons $F(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 7$

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \Big| F(x) = 0\}$ est une ellipse.

$M = \underbrace{\{F(x) \leq 0\}}_{\text{compact}} = M^\circ \cup \partial M = \underbrace{\{F(x)\langle 0\}}_{\text{un ouvert}} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \Big| F(x) = 0\}$

Sur M° : $grad\, g(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff a = (0,0), g(a) = 0$

Sur $\partial M = S$, d'après le Théorème 9, on a : $grad\, g(x) = \lambda \, grad\, F(x)$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = \lambda \, 4x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 = \lambda \, 6x_2 \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2\lambda - 1)x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + (3\lambda + 1)x_2 = 0 \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2\lambda - 1 & -1 \\ -1 & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Si $det(A) \neq 0 \implies x_1 = x_2 = 0$, mais $F(0,0) = -7 \neq 0$

Si $det(A) = 0 \iff (2\lambda - 1)(3\lambda + 1) - 1 = 0 \iff 6\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$\implies \lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \dfrac{1 \pm 7}{12}$

Si $\lambda = \dfrac{2}{3}$, alors $x_2 = (2\lambda - 1)x_1 = \dfrac{1}{3}x_1$, donc $F(x) = 0 \iff 2\lambda_1^2 + 3\left(\dfrac{1}{3}x_1\right)^2 = 7$

$$\implies \begin{matrix} x_1^2 = 3 \\ x_2^2 = \dfrac{1}{3} \end{matrix} \implies \begin{matrix} a_1 = \left(\sqrt{3}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ a_2 = \left(-\sqrt{3}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{matrix} \quad g(a) = 3 + 2 - \frac{1}{3} = 4 + \frac{2}{3} \text{ maximum}$$

Si $\lambda = -\dfrac{1}{2}, x_2 = (2\lambda - 1)x_1 = -2x_1$

$F(x) = 0 \iff 2x_1^2 + 3(2x_1)^2 = 7 \iff 14x_1^2 = 7 \iff x_1^2 = \dfrac{1}{2}$

$$\implies \begin{matrix} a_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) \\ a_4 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) \end{matrix}, g(a) = \frac{1}{2} - 2 - 2 = -3 + \frac{1}{2} \text{ minimum}$$

Exemple

$g(x) = e^{x_1}$ sous la condition $x_1^4 - x_1^3 + x_2^2 = 0$

Posons $F(x) = x_1^4 - x_1^3 + x_2^2$

$$\begin{cases} grad\, g(x) = \lambda\, grad\, F(x) \\ F(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x_1} = \lambda(4x_1^3 - 3x_1^2) \\ 0 = -2\lambda x_2 \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\lambda \neq 0}{\iff} \begin{cases} e^{x_1} = \lambda(4x_1^3 - 3x_1^2) \\ x_2 = 0 \\ x_1^3(x_1 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ \lambda = e \end{cases}$$

$\implies g(a) = g(1,0) = e$ c'est le maximum global de g.

$S = \{F(x) = 0\}$

$F(x) = 0 \iff 0 \leq x_2^2 = x_1^3 - x_1^4 = x_1^3(x_1 - 1) \iff 0 \leq x_1 \leq 1$, $g = e^{x_1}$ est monotone.

Nous n'avons pas trouvé de minimum global de g parce que $grad\, F(0,0) = (0,0)$

Remarque

Un point $a \in S$ tel que $grad\, F(a) = 0$ (ou $grad\, F_1(a), \cdots, grad\, F_k(a)$ ne sont pas linéairement indépendants) peut être un point ou g admet un extremum local.

Preuve du Théorème 9

Le cas $k = 1$: $\mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = 0, g \in C^1(U)$

g admet un extremum local lié en $a \in U$ et $grad\, F(a) \neq 0$

$\implies$ Soit $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0 \implies$ (Par le Théorème des fonctions implicites) Il existe une fonction f de classe C^1 tel que :

$$F(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n) \\ a_{n+1} = f(a_1, \cdots, a_n) \end{cases} \quad \text{au voisinage de } a.$$

Donc, $g\Big|_S = g(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$

$g\Big|_S$ admet un extremum local en $(a_1, \cdots, a_n)$

$$\underset{\text{Lemme 4}}{\implies} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\Big|_S\right)(a_1, \cdots, a_n)\, \forall\, i = 1, \cdots, n \Longleftrightarrow 0 = \frac{\partial \left(g\Big|_S\right)}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, \cdots, a_n)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(a) \cdot \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}}(a) = \lambda$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$ et aussi pour $i = n + 1$

$\implies$ $grad\, g(a) = \lambda\, grad\, F(a)$

Le cas $k = 2$, $n = 1$

$F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0$

$U \subset \mathbb{R}^3, g(x_1, x_2, x_3)$

$a \in U$ tel que $grad\, F_1(a)$ et $grad\, F_2(a)$ sont linéairement indépendants.

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}(a) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix} = 2$$

rang ligne $=$ *rang* colonne

$\Longrightarrow$ il existe 2 colonnes linéairement indépendantes.

Supposons que la 2ème et la 3ème colonne sont linéairement indépendantes, alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(a) \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix} \neq 0 \text{ avec } a = (a_1, a_2, a_3)$$

Par le théorème des fonctionc implicites, il existe des fonctions f_1, f_2 de classe C^1 telles que :

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \\ F_2(x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = f_1(x_1), \quad a_2 = f_1(a_1) \\ \\ x_3 = f_2(x_1), \quad a_3 = f_2(a_1) \end{cases}$$

$\Longrightarrow g\Big|_S = g(x_1, f_1(x_1), f_2(x_1))$

g admet un extremum local lié en $a \Longleftrightarrow g\Big|_S$ admet un extremum local en $x_1 = a_1 \Longrightarrow$ $\left(g|_S\right)'(a) = 0$

$$\Longleftrightarrow 0 = \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) f_1'(a_1) + \frac{\partial g}{\partial x_3}(a) f_2'(a_1)$$

$$\Longleftrightarrow \langle grad\, g(a), v \rangle = 0 \text{ pour } v = (1, f_1'(a_1), f_2'(a_1))$$

$$0 = F_i(x, f_1(x_1), f_2(x_2)) \implies (F_i)'_{x_1} = 0$$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}(a) f_1'(a_1) + \frac{\partial F_i}{\partial x_3}(a) f_2'(a_1)$$

$$\Longleftrightarrow \langle grad\, F_1(a), v \rangle = \langle grad\, F_2(a), v \rangle = 0$$

$$grad\, g(a),\ grad\, F_1(a),\ grad\, F_2(a) \perp v$$

$\Longrightarrow$ les vecteurs sont linéairement indépendants $\Longrightarrow$ $grad\, F_1(a)$ et $grad\, F_2(a)$ sont linéairement indépendants, et donc : $grad\, g(a) = \lambda_1\, grad\, F_1(a) + \lambda_2\, grad\, F_2(a)$ $\square$

8 Les 1-formes di�érentielles

V est un espace vectoriel et V^* est son espace dual associé, c'est toutes les formes linéaires de l'espace vectoriel V.

Une forme linéaire $\phi \in V^* \overset{\text{Théorème 1}}{\Longleftrightarrow}$ il existe un unique vecteur $v \in V$ tel que $\phi(h) = \langle v, h \rangle \,\forall\, h \in V$

Considérons $V = T \times \mathbb{R}^n$. Soit $f \in C^1(U), x \in U$, alors par le théorème 7 :

$$f'_h(x) = \langle grad\, f(x), h \rangle\, forall\, h \in T \times \mathbb{R}^n$$

Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x \in U$ $f \in C^1(U)$. La différentielle de f est une forme linéaire df sur $T \times \mathbb{R}^n$ tel que $df(h) = \langle grad\, f(x), h \rangle \,\forall\, h \in T \times \mathbb{R}^n$

Remarque

La valeur $df(h)$ dépend de x, on écrit parfois $df_x(h)$

Lemme 5

Soient $f, g \in C^1(U)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

- a) $d(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot df + \mu \cdot dg$
- b) $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$

Preuve

- a) Posons $F = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$, alors $grad\, F = \lambda \cdot grad\, g + \mu \cdot grad\, f$

  $\implies dF(h) = \langle \lambda \cdot grad\, g + \mu \cdot grad\, f, h \rangle = \lambda \langle grad\, g, h \rangle + \mu \langle grad\, f, h \rangle = \lambda \cdot dg(h) + \mu \cdot df(h) = (\lambda \cdot dg + \mu \cdot df)(h) \,\forall\, h$

  $\implies dF = \lambda \cdot dg + \mu \cdot df$

- b) $F = fg$
  $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = f \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i} + g \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\implies grad\, F = f \cdot grad\, g + g \cdot grad\, f \implies dF(h) = f\langle grad\, g, h\rangle + g\langle grad\, f, h\rangle$$

$$\iff dF(h) = (f \cdot dg + g \cdot df)(h)\,\forall\, h \implies dF = f \cdot dg + g \cdot df$$

□

Exemple

Prenons $f = x_i$

$dx_i(h) = \langle grad\, x_i, h\rangle = \langle e_i, h\rangle = h_i$ avec $e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ et le 1 est à la $i$ème place.

Lemme 6

Les formes linéaires $dx_1, \cdots, dx_n$ forment une base de $(T \times \mathbb{R}^n)^*$

Preuve

$dim(T \times \mathbb{R}^n)^* = dim(T \times \mathbb{R}^n)$ par le théorème 1.

$= dim(\mathbb{R}^n) = n$, donc il suffit de montrer que $dx_1, \cdots, dx_n$ sont linéairement indépendants.

Supposons qu'il existe $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i dx_i = 0$

Prenons $h = e_j$, Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i dx_i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \delta_{ij} = \mu_j = 0$$

avec $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque

Si $f \in C^1(U)$, alors $df_x(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(h)\,\forall\, h$

$\implies df = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $dx_1, \cdots, dx_n \in C^{(k)}(U)$. Alors $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$ est une 1-forme différentielle sur U.

Définition

Si $\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i, \omega_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i dx_i$. Alors on pose $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot \alpha_i + \mu \cdot \beta_i) dx_i$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Définition

On note $\Omega^1(U)$ est l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur U.

Définition

Soient $f \in C^1(U), \omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U)$

Alors on pose $f \cdot \omega = \sum_{i=1}^{n} (f \cdot \alpha_i) dx_i$

Remarque

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i = \omega \in \Omega^1(U)$, $x \in U, h \in T \times \mathbb{R}^n$, alors la valeur de ω en x pour $h \in T \times \mathbb{R}^n$:

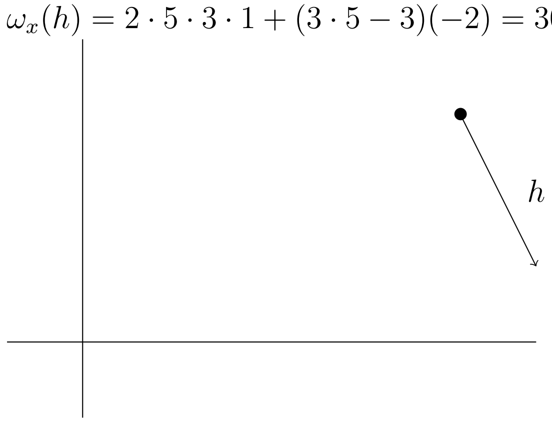
$\omega_x(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \cdot h_i$

Exemple

$n = 2, \omega = 2x_1x_2dx_1 + (3x_1 - x_2)dx_2$

$x = (5, 3), h = (1, -2)$

$\omega_x(h) = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 + (3 \cdot 5 - 3)(-2) = 30 - 24 = 6$



9 Formes exactes

Définition

$\omega \in \Omega^1(U)$ est dite exacte s'il existe $f \in C^1(U)$ tel que $df = \omega$. On dit que f est une primitive de ω.

Remarque

Si $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$ et $\omega = df \iff \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Exemple

$n = 2$

$\omega = (x_1 + x_2)dx_1 + (x_1 + 1)dx_2$

Si $\omega = df$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 + x_2 \implies f = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + C(x_2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 1 = x_1 + (C(x_2))'_{x_2} \implies C(x_2) = x_2(+const)$

$\implies f = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2 -$ une primitive de $\omega \implies \omega$ est exacte.

Exemple

$\omega = (x_1 - x_2)dx_1 + (x_1 + 1)dx_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_1 - x_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 1 \in C^1(U)$

Si f existe, alors $\implies f \in C^2(U)$ par le théorème 4 (Schwarz)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

Mais $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -1$

Donc une telle fonction n'existe pas et donc ω n'est pas une forme exacte.

Lemme 7

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U)$ où $\alpha_i \in C^1(U) \, \forall \, i = 1, \cdots, n$

Alors des conditions nécessaires pour que ω soit une forme exacte sont : $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \, \forall \, i, j = 1, \cdots, n$

Preuve

Si f existe (tel que $df = \omega$), alors $f \in C^1(U)$, donc par le théorème 4 (Shwarz) :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_i)$

$\square$

Remarque

On a $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions nécessaires

Remarque

Soit $(a,b) \subset \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in C(a,b)$.

Alors $\omega = \alpha dx_1$ est exacte :

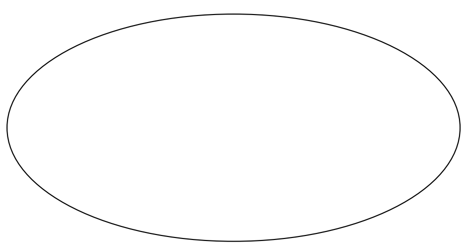
Prenons $c \in (a,b)$ et posons $f(x) = \int_c^x \alpha(t)\mathrm{d}t$

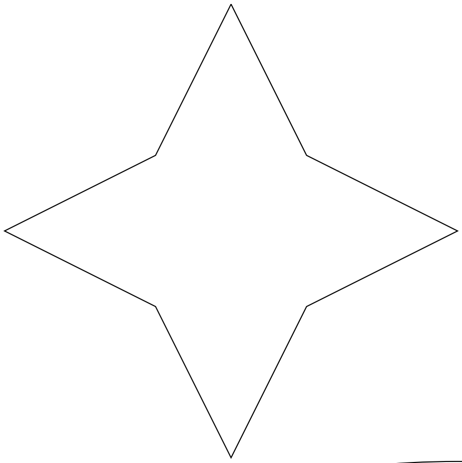
$\implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1) = \alpha(x_1) \implies df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = \alpha \cdot dx_1 = \omega$

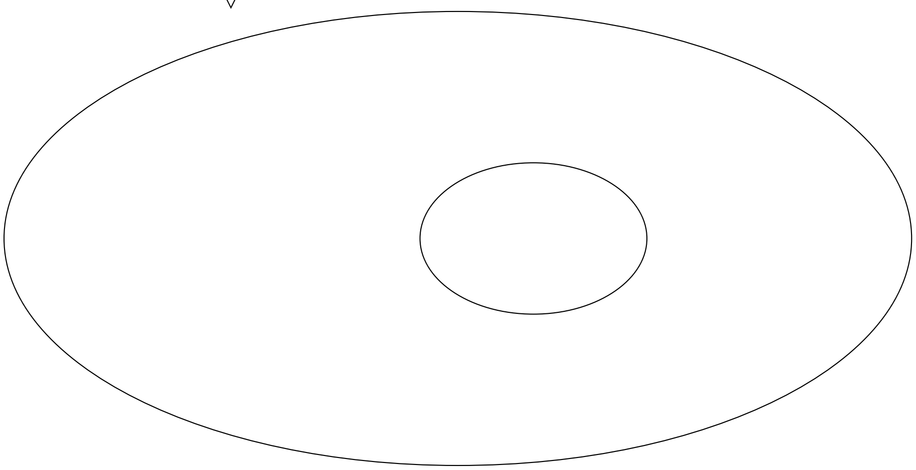
Définition

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé s'il contient un point x_0 tel que le segment $[x_0, x]$ est contenu dans U pour tout $x \in U$.

Exemples







Théorème 10 (Lemme de Poincaré, le cas de 1-formes différentielles)

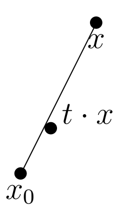
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé. Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U)$, avec $\alpha_i \in C^1(U)$.

Si on a $\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \; \forall \, i, j = 1, \cdots, n$, alors ω est exacte !

Preuve

Supposons que U est étoilé par rapport à $x_0 = (0, 0)$.

Soit $x \in U$. Alors $t \cdot x \in U \; \forall \, t \in [0, 1]$



Posons $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 x_i \alpha_i(t \cdot x) \mathrm{d}t$

On veut montrer que f est une primitive de ω :

On considère le cas $n = 2$: $f(x_1, x_2) = \int_0^1 \left(x_1 \alpha_1(t \cdot x_1, t \cdot x_2) + x_2 \alpha_2(t \cdot x_1, t \cdot x_2) \right) \mathrm{d}t$

$$(\alpha_1(t\cdot x_1, t\cdot x_2))'_t = x_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(t\cdot x) + x_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}(t\cdot x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \int_0^1 \left(\alpha_1(t\cdot x) + x_1\cdot t\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(t\cdot x) + x_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}(t\cdot x)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (\alpha_1(t\cdot x) + t\cdot(\alpha_1(t\cdot x)')\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (t\cdot\alpha_1(t\cdot x))'\,\mathrm{d}t = t\cdot\alpha_1(t\cdot x)\Big|_0^1 = \alpha_1(x)$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \alpha_2(x)$
$df = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 = \omega$

$\square$

9.1 Intégrales curvilignes

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert :

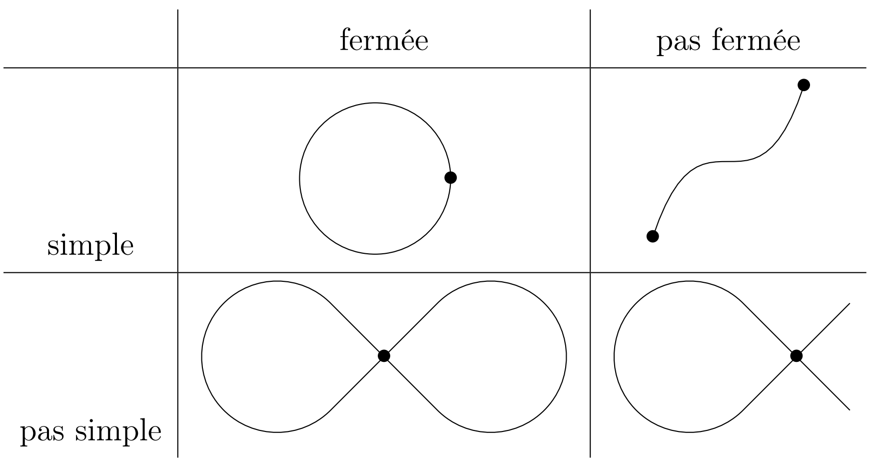
- a) Une courbe paramétrée est une $\gamma(a)$ application $\gamma : [a, b] \to U$ de classe C^1

  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t))$ où $\gamma_i \in C^1([a, b])$

- b) On dit que γ est C^1 par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tel que γ est de classe C^1 sur $[a_k, a_{k+1}]\, \forall l\, n$

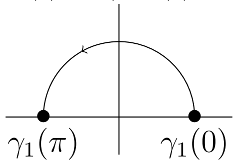
- c) $\Gamma = \Big(\gamma(t) \in \mathbb{R} \Big| t \in [a, b]\Big)$ est le support de γ.

- d) On dit que γ est fermée su $\gamma(a) = \gamma(b)$ et on dit que γ est simple si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pour tous les points $t_1, t_2 \in [a, b]$ tel que $t_1 \neq t_2$.



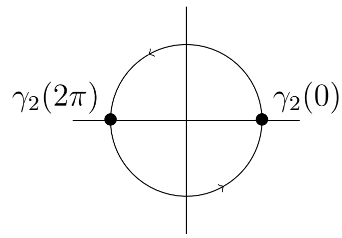
Exemples

$\gamma_1(t) = (cos(t), sint(t))$, $t \in [0, \pi]$



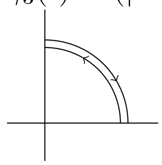
$\gamma_1(t)$ est simple, mais pas fermée.

$\gamma_2(t) = (cos(t), sint(t))$, $t \in [0, 2\pi]$



γ_2 est fermée, mais pas simple.

$\gamma_3(t) = (|cos(t)|, sint(t))$, $t \in [0, \pi]$



$\gamma_3(t)$ est fermée mais pas simple.

Elle est C^1 par morceaux : $[0,\pi] = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$ qui sont fermés et simples.

Remarque

$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$. Soit $x \in h$ avec $h \in T \times \mathbb{R}^n$

$\omega_x(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) h_i = \langle \alpha(x), h \rangle$ où $\alpha_(x) = (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x))$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U)$

- a) Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe paramétrée. On définit l'intégrale curviligne de ω le long de γ par :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \langle \alpha(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \alpha_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\mathrm{d}t$$

- b) Si γ est de classe C^1 par morceaux, et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ tel que γ est de classe C^1 sur $[a_k, a_{k+1}] \forall k$.

  Alors on pose $\int_\gamma = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t$

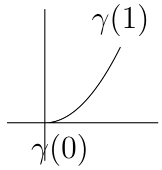
Exemple

$\gamma(t) = (t, t^2)\, t \in [0,1]$

$\omega = 3x_2 dx_1 - x_1 dx_2$

$\gamma'(t) = (1, 2t)$ et $\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 3 \cdot t^2 - t \cdot 2t = t^2$

$\implies \displaystyle\int_\gamma \omega = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$



Lemme 8

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\omega \in \Omega^1(U)$. Soient $\gamma : [a,b] \to U$ et $\tilde{\gamma}[c,d] \to U$ tel que $ga\tilde{m}ma = \gamma \circ \phi$ où $\phi : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection de classe C^1. Alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$ si $\phi(c) = a$ et $\int_\gamma \omega) - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$ si $\phi(c) = b$

Preuve

Soit $S \in [c,d]$, posons $t = \phi(S) \in [a,b]$. Soit $\omega = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i dx_i$

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b \alpha_i(\gamma(t)) \left(\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_c^d \alpha_i(\gamma(\phi(s))) \underbrace{\left(\frac{\partial \gamma_i(\phi(s))}{\partial \phi(s)} \cdot \frac{\partial \phi(s)}{\partial s} \right)}_{= \frac{\partial \gamma_i(\phi(s))}{\partial s}} \mathrm{d}s$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_c^d \alpha_i(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) \mathrm{d}s = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

$$= \begin{cases} \int_{\tilde{\gamma}} \omega & \text{si } \phi(c) = a \\ -\int_{\tilde{\gamma}} \omega & \text{si } \phi(c) = b \end{cases}$$

Remarque

Donc, $\displaystyle\int_\gamma \omega$ ne dépend pas (au signe près) de la paramétrisation de la courbe.
Le signe dépend du sens du parcours.

Théorème 11

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe paramétrée. Soit $\omega \in \Omega^1(U)$ une forme exacte telle que $\omega = df$ avec $f \in C^1(U)$.

Alors $\displaystyle\int_\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Preuve

Posons $F(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$
$F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i(t)\, \omega = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

$$\int_\gamma = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

□

Si ω est exacte, alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(\omega(b)) - f(\omega(a))$

Si $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

Si ω est fermée, alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$

Exemple

$\omega = \underbrace{\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}}_{\alpha_1} dx_1 + \underbrace{\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}}_{\alpha_2} dx_2$
$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_2(2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$
$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1(2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$
Mais notre forme n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}^2$, elle est définie seulement sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Soit $\gamma(t) = (cos(t), sin(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$, alors $\gamma'(t) = (-sin(t), cos(t))$
$\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left((-sin(t))^2 + (cos(t))^2\right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi$
$\implies$ ω n'est pas exacte !

Remarque

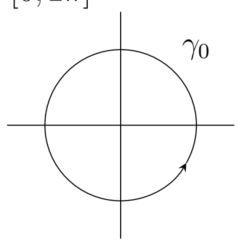
ω est exacte sur $U = \{x \in \mathbb{R} \big| x_2 > 0\}$

10 La formule de Green-Riemann

On va calculer $\int_\gamma \omega$ pour γ fermée et ω pas exacte.

Définition

Une courbe paramétrée $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est orientée dans le sans direct = positif = trigonométrique si cette courbe a le même sens de parcours que le courbe $\gamma_0(t) = (cos(t), sin(t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$



Définition

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. La frontière de M est $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \Big| B_x(\delta) \cup M \neq \emptyset$ et $B_x(\delta) \cup (\mathbb{R}^n \backslash M) \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0\}$

Exemple

$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \Big| x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \Big| x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
$\partial K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \Big| x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ et donc $\partial K_1 = \partial K_2$

Définition

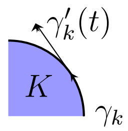
$K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact si K est borné et fermé ($\partial K \subset K$)

Définition

Un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ est un compact à bord orienté si :

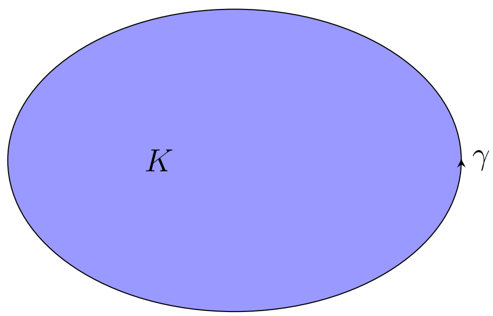
- a) $\partial(K \backslash \partial K) = \partial K$
- b) ∂K est le réunion de supports des courbes paramétrées $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ qui sont simples, fermées et C^1 par morceaux, deux à deux disjointes.

- c) Pour chaque courbe γ_k et pour tout t, $\gamma_k'(t) \neq 0$ et K est situé à gauche de $\gamma_k'(t)$

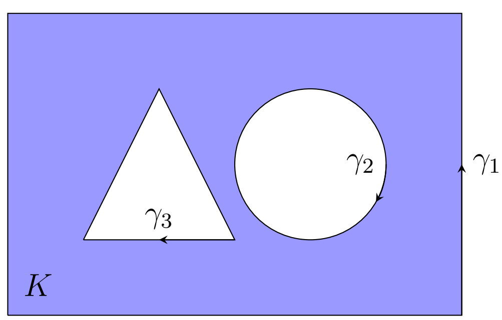


Exemples

- 1)



- 2)



Théorème 12

Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $K \subset U$ un compact à bord orienté. Soit $\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 \in \Omega^1(U)$ de classe C^1.

On pose $\displaystyle\int_{\partial K} \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega$. Alors : $\displaystyle\int_{\partial K} \omega = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial dx_2} \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$

Remarque

Si ω est exacte, alors on a $0 = 0$

Remarque

On peut ramener le calcul de $\displaystyle\int_K g(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$ au calcul d'une intégrale curviligne.

Posons $\omega_1 = \left(-\int_C^{x_2} g(x_1,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_1$ et $\omega_2 = \left(\int_C^{x_1} g(t,x_2)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_2$ Alors $\int_{partialK} \omega_1 = \int_{\partial K} \omega_2 = \int_K g(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$

Remarque

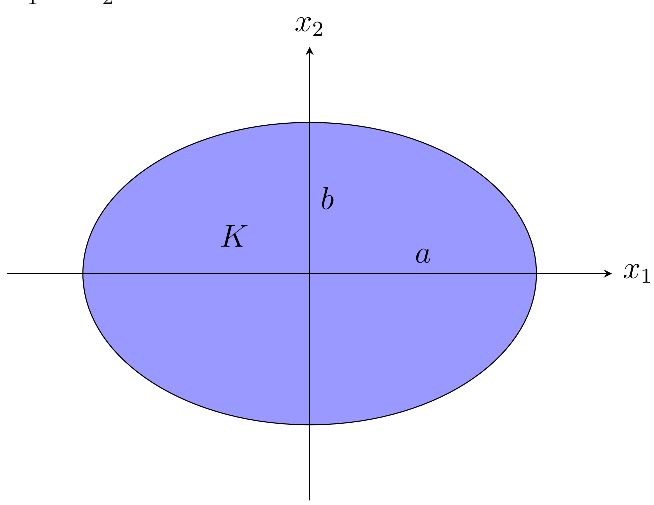
$g(x_1,x_2) = 1$

$\implies \omega_1 = -x_2 dx_1$ et $\omega_2 = x_1 dx_2$

$\int_{\partial K} \omega_1 = \int_{\partial K} \omega_2 = \int_K 1\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 =$ l'aire de K.

Exemple

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$



L'aire de

$$K = \int_K 1\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{\partial K} x_1\mathrm{d}x_2 = \cdots$$

On pose : $\gamma(t) = (a\cdot cos(t), b\cdot sin(t)), t\in[0,2\pi]$

$\gamma'(t) = (-a\cdot sin(t), b\cdot cos(t))$

$$\cdots = \int_0^{2\pi} (a\cdot cos(t))(b\cdot cos(t))\mathrm{d}t =$$

$$= a\cdot b\left(\int_0^{2\pi} cos^2(t)\mathrm{d}t\right) = \pi\cdot a\cdot b = \pi$$

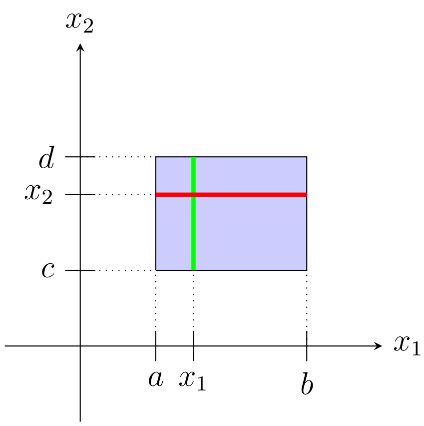
Définition

$K \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine élémentaire s'il existe des fonctions $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux telles que :

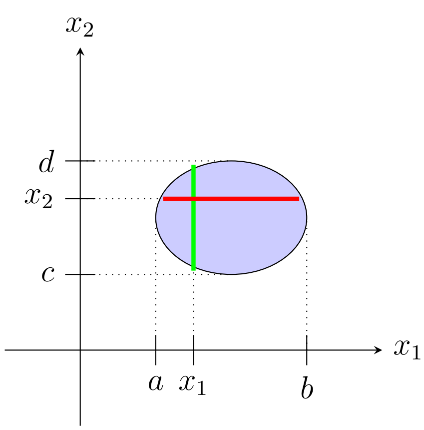
$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| x_1 \in [a,b], g_1(x_1) \leq g_2(x_1)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| x_2 \in [c,d], h_1(x_2) \leq h_2(x_2)\}$$

Exemples

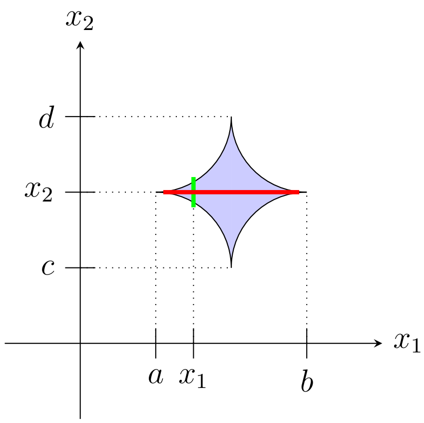
- 1) Un domaine élémentaire



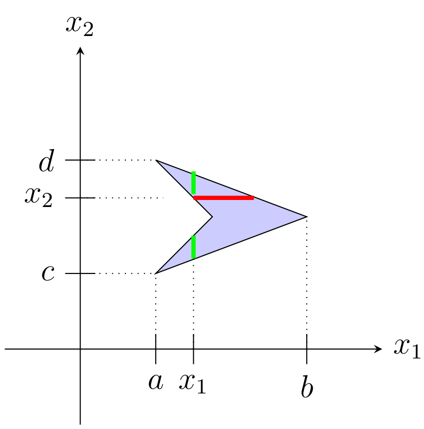
- 2) Un domaine élémentaire



- 3) Un domaine élémentaire



- 4) Un domaine pas élémentaire



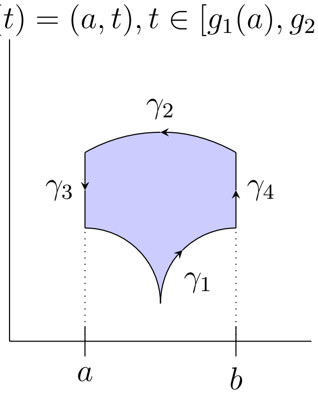
Lemme (Fubini)

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un domaine élémentaire et soir $f \in C(U)$. Alors on a :

$$\int_K f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_a^b \left(\int_{g_1(x_1)}^{g_2(x_1)} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int_c^d \left(\int_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2$$

Preuve du théorème 12

Supposons que K soit élémentaire. Posons $\gamma_1(t) = (t, g_1(t)), t \in [a, b]$, $\gamma_2(t) = (t, g_2(t)), t \in [a, b]$, $\gamma_3(t) = (a, t), t \in [g_1(a), g_2(a)]$, $\gamma_4(t) = (b, t), t \in [g_1(b), g_2(b)]$



$\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 = \omega_1 + \omega_2$. Alors : $\gamma_1'(t) = (1, g'(t))$, $\gamma_3'(t) = (0, 1)$

$$\int_{\partial K} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 - \int_{\gamma_2} \omega_1 - \int_{\gamma_3} \omega_1 + \int_{\gamma_4} \omega_1$$

$$= \int_a^b \alpha_1(t, g_1(t)) \cdot 1 \cdot \mathrm{d}t - \int_a^b \alpha_1(t, g_2(t)) \cdot 1 \cdot \mathrm{d}t - \int_{g_1(a)}^{g_2(a)} \alpha_1(a, t) \cdot 0 \cdot \mathrm{t} + 0$$

$$= -\int_a^b \left(\alpha_1(t, g_2(t)) - \alpha_1(t, g_1(t))\right) \mathrm{d}t$$

$$= -\int_a^b \left(\alpha_1(x_1, g_2(x_1)) - \alpha_1(x_1, g_1(x_1))\right) \mathrm{d}x_1$$

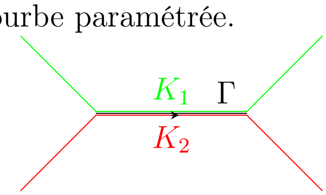
$$= -\int_a^b \left(\int_{g_1(x_1)}^{g_2(x_1)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2\right) \mathrm{d}x_1 = -\int_K \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

De même, $\int_{\partial K} \omega_2 = \int_K \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1$

$\implies \int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} \omega_1 + \int_{\partial K} \omega_2 = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\alpha_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$

Le cas général

Supposons que la formule est vraie pour K_1 et K_2, tel que $\Gamma = K_1 \cap K_2$ est le support d'une courbe paramétrée.



La paramétrisation de la courbe sera bien orienté pour K_1, mais pas pour K_2 ou inversement. Alors,

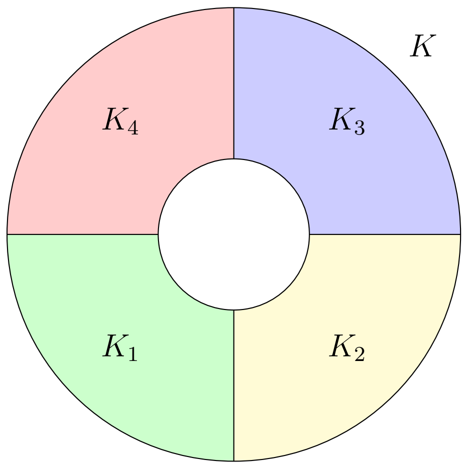
$$\int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_{K_1} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int_{K_2} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_{\partial K_1} \omega + \int_{\partial K_2} \omega = \int_{\partial K_1 \setminus \Gamma} \omega + \int_\gamma \omega + \int_{\partial K_2 \setminus \Gamma} \omega - \int_{gamma} \omega$$

$$= \int_{\partial K_1 \setminus \Gamma} + \int_{\partial K_2 \setminus \Gamma} = \int_{\partial (K_1 \cup K_2)} \omega$$

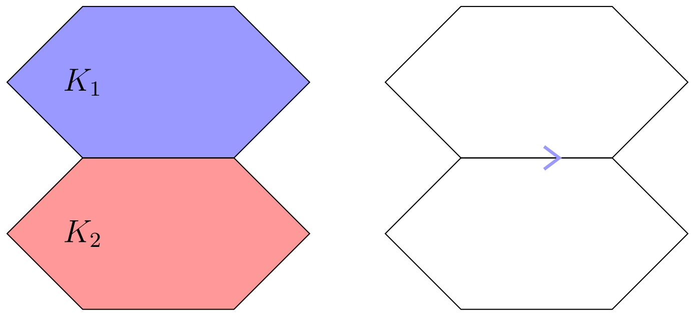
Exemple



K n'est pas élémentaire, mais les K_i sont élémentaires.

$K = K_1 \cup K_2$ et $\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$

$$\int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{K_1} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) + \int_{K_2} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right)$$
$$= \int_{\partial K_1} \omega + \int_{\partial K_2} \omega = \int_{\partial (K_1 \cup K_2)} \omega = \int_{\partial K} \omega$$



11 Formes linéaire alternées

Définition

Soit E un ensemble. On note par $E^{\times p} = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ l'ensemble des p-tuples ordonnés $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ avec $a_i \in E$

Définition

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme p-linéaire alternée est une application $\beta : V^{\times p} \to \mathbb{R}$ tel que :

- a) β est linéaire en chaque variable (c'est à dire si l'on fixe $u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_p$, alors l'application $v \to \beta(u_1, \cdots, u_{i-1}, v, u_{u+1}, \cdots, u_p)$ est linéaire)
- b) $\beta(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p) = -\beta(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_p) \, \forall \, i, j$

Remarques

b) $\implies \beta(v_1, \cdots, u, \cdots, u, \cdots, v_p) = 0$

b) $\implies$ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_p$ (le groupe symétrique), alors $\sigma : [1, \cdots, p] \to \{i_1, \cdots, i_p\}$, alors $\beta(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \beta(v_1, \cdots, v_p)$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Exemple

$$\beta(v_1, v_2, v_3) = \beta(v_2, v_3, v_1) = \beta(v_3, v_1, v_2) = -\beta(v_1, v_3, v_2) = -\beta(v_3, v_2, v_1) = -\beta(v_2, v_1, v_3)$$

Exemple

$$\beta(v_1, \cdots, v_p) = det(v_1 | \cdots | v_p) = det \begin{pmatrix} (v_1)_1 & \cdots & (v_p)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_p & \cdots & (v_p)_p \end{pmatrix}$$

Définition

On note par $\Lambda^p(U)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur un espace vectoriel V.

En particulier, $\Lambda^1(U) = V^*$

Définition

Soit V un espace vectoriel. Soient $\phi_1, \cdots, \phi_p \in \Lambda^1(V)$ des formes linéaires.

Le produit extérieur de $\phi_1, \cdots, \phi_p$ est une application $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p : V^{\times p} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v_1, \cdots, v_p) = det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \cdots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \cdots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix}$$

Exemple

$V = \mathbb{R}^4$, $dx_1, dx_2 \in \Lambda^1(V)$

$dx_1 \wedge dx_2(v_1, v_2) = det \begin{pmatrix} dx_1(v_1) & dx_1(v_2) \\ dx_2(v_1) & dx_2(v_2) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} (v_1)_1 & (v_1)_2 \\ (v_2)_1 & (v_2)_2 \end{pmatrix}$

Théorème 13

- a) $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \in \Lambda^p(V)$
- b) L'opération $\phi_1, \cdots, \phi_p \to \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ est p-linéaire et alternée.

Remarque

b) $\implies \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi \wedge \cdots \wedge \phi \wedge \cdots \wedge \phi_p = 0$

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_p$, on a : $\phi_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \phi_{\sigma(p)} = \varepsilon(\sigma)\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$

Preuve

$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v_1, \cdots, v_p) = det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \cdots & \phi_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \cdots & \phi_p(v_p) \end{pmatrix}$

Cette opération est linéaire par rapport aux :

- colonnes $\implies \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ est p-linéaire
- lignes $\implies$ l'opération $\phi_1, \cdots, \phi_p \to \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ est p-linéaire

Elle est alternée par rapport aux :

- colonnes $\implies \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ est alternée

- lignes $\implies$ l'opération $\phi_1, \cdots, \phi_p \to \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ est alternée

$\square$

Exemple

$(dx_1 + 2dx_2) \wedge (3dx_1 + 4dx_3) = 3dx_1 \wedge dx_1 + 4dx_1 \wedge dx_3 + 6dx_2 \wedge dx_1 + 8dx_2 \wedge dx_3 = 4dx_1 \wedge dx_3 - 6dx_1 \wedge dx_2 + 8dx_2 \wedge dx_3$

Exemple

$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = 0$

Exemple

$dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Exemple

$V = \mathbb{R}^3$

$\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$: dx_1, dx_2, dx_3 forment une base de $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$

$\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$: $dx_1 \wedge dx_2, dx_1, dx_3$ et $dx_2 \wedge dx_3$ forment une base

$\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ forment une base.

$\Lambda^4(\mathbb{R}^3) = \{0\}$ car si $\beta \in \Lambda^4(\mathbb{R}^3)$, alors :

$\beta(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$ car on aura 4 dx et on a que 3 indices, donc il y aura forcément deux mêmes indices, et donc ça sera égal à 0.

Remarque

$\Lambda^p(\mathbb{R}^k) = \{0\}$ si $p > k$

Théorème 14

- a) $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$
- b) $dim(\Lambda^p(\mathbb{R}^n)) = C_n^p = \binom{k}{n} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Preuve

Soit $\beta \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $v_1, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$

Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$\beta(v_1, \cdots, v_p) = \beta\left(\sum_{i_1=1}^{n}(v_1)_{i_1}e_{i_1}, \cdots \sum_{i_p=1}^{n}(v_p)_{i_p}e_{i_p})\right)$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n}(v_1)_{i_1}\cdots(v_p)_{i_p}\cdot\beta(e_{i_1},\cdots,,e_{i_p}) = (*)$$

$\beta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}) \neq 0 \implies i_1, \cdots, i_p$ sont disjoints.

$\implies \exists\sigma \in \mathcal{S}_p$ tel que $\sigma : \{j_1, \cdots, j_p\} \to i_1, \cdots, i_p\}$ où $j_1 < \cdots < j_p$

$$(*) = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p=n}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}(v_1)_{\sigma(j_p)}\cdots(v_p)_{\sigma(j_p)}\cdot\beta(e_{\sigma(j_i)},\cdots,e_{\sigma(j_p)})$$

$$= \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p=n}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}(v_1)_{\sigma(j_p)}\cdots(v_p)_{\sigma(j_p)}\cdot\epsilon(\sigma)\right)\beta(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})$$

$$= \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p=n}\beta(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})\cdot det\begin{pmatrix}(v_1)_{j_i} & \cdots & (v_p)_{j_1}\\ \vdots & & \vdots\\ (v_1)_{j_p} & \cdots & (v_p)_{j_p}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p=n}\beta(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})\cdot dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p}(v_1,\cdots,v_p)$$

$\implies \beta = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p=n}\beta(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})\cdot dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p}$

Exercice

Montrer que : $dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$ sont linéairement indépendants

$\square$

Notation

$I = \{i_1, \cdots, i_p\}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$

$\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, où $\alpha = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p=n}\alpha_{i_1,\cdots,i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} = \sum_I \alpha_I dx_I$

Définition

Soient $\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ où $\alpha = \sum\limits_I \alpha_I dx_I$ et $\beta = \sum\limits_J \alpha_J dx_J$

Leur produit extérieur est donné par $\alpha \wedge \beta = \sum\limits_{I,J} \alpha_I \cdot \beta_J dx_I \wedge dx_J$ où $dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$

Exemple

$$(\underbrace{\alpha dx_i + \beta dx_2}_{\in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)}) \wedge (\underbrace{\gamma dx_2 \wedge dx_3}_{\in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)})$$
$$= \alpha \cdot \gamma dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \beta \cdot \gamma dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \alpha \cdot \gamma dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Théorème 15

- a) $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$ et $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$
- b) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- c) Si $\alpha \in \Lambda^p(v)$ et $\beta \in \Lambda^k(V)$, alors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{p \cdot k} \beta \wedge \alpha$

Preuve

- a) $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \left(\sum\limits_I \alpha_I dx_I + \sum\limits_I \beta_I dx_I\right) \wedge \left(\sum\limits_J \gamma_J dx_J\right)$

  $= \left(\sum\limits_I (\alpha_I + \beta_I) dx_I\right) \wedge \left(\sum\limits_J \gamma_J dx_J\right)$

- b) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \left(\left(\sum\limits_I \alpha_I dx_I\right) \wedge \left(\sum\limits_J \beta_J dx_J\right)\right) \wedge \left(\sum\limits_K \gamma_K dx_K\right)$

  $= \left(\sum\limits_{I,J} \alpha_I \beta_J dx_I dx_J\right) \wedge \left(\sum\limits_K \gamma_K dx_K\right) = \sum\limits_{I,J,K} \alpha_I \beta_J \gamma_K dx_I \wedge dx_J \wedge dx_K$

  $= \left(\sum\limits_I \alpha_I dx_I\right) \wedge \left(\sum\limits_{J,K} \beta_J \gamma_K dx_J dx_K\right) = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

- c) $\alpha \in \Lambda^P(\mathbb{R}^n)\, \beta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\, \alpha = \sum\limits_I \alpha_I dx_I\, \beta = \sum\limits_J \beta_J dx_J$

  $dx_I \wedge dx_j = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_P} \wedge dx_j = -dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_j \wedge dx_{i_P}$

  On fait cela P fois, du coup c'est égal à : $(-1)^P dx_j \wedge dx_I$

  $dx_I \wedge dx_J = dx_I \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_K} = \underbrace{(-1)^P \cdots (-1)^P}_{k \text{ fois}} dx_J \wedge dx_I = (-1)^{P \cdot K} dx_J \wedge dx_I$

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J dx_I dx_J = (-1)^{P \cdot K} \sum_{I,J} \alpha_I, \beta_J dx_J \wedge dx_I = (-1)^{P \cdot K} \beta \wedge \alpha$$

12 Les p-formes différentielles

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $\alpha_{i_1,\cdots,i_p} \in C^K(U)$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_p \leq n$

Alors, $\omega = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum\limits_I \alpha_I dx_I$ est une p-forme différentielle de classe C^K

Définition

$\Omega^p(U)$ est l'espace vectoriel des p-formes différentielles.

Remarque

Soit $x \in U$. Soient $h_1, \cdots, h_p \in T \times \mathbb{R}^n$

Alors $\omega_x(h_1, \cdots, h_p) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_p}(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}(h_1, \cdots, h_p)$

Exemple

$\mathbb{R}^3 : \omega = e^{x_3} dx_1 \wedge dx_2 - e^{x_1} dx_2 \wedge dx_3$

Soit $x = (1, 2, 3)$ et $h = (1, 0, -1)$, $h_2 = (4, 5, 6)$

$\omega_x(h_1, h_2) = e^3 \cdot det \begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{matrix} - e^1 \cdot \begin{matrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{matrix} = 5 \cdot e^3 - 5e$

Définition

Soient $f \in C(U), \omega_1 \in \Omega^p(U)$, $\omega_2 \in \Omega^K(U)$

Alors si $\omega_1 = \sum\limits_I \alpha_I dx_I$, $\omega_2 = \sum\limits_J \beta_J dx_J$. On pose $f \cdot \omega_1 = \sum\limits_I f \cdot \alpha_I \cdot dx_I$ et $\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum\limits_{I,J} \alpha_I \beta_J dx_I dx_J$

Remarque

$\wedge$ est bilinéaire est associatif, $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p \cdot K} \omega_1 \wedge \omega_2$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

$\omega_1 \wedge \omega_2 = (e^{x_3} \cdot dx_1 \wedge dx_2 - e^{x_1} dx_2 \wedge dx_3) \wedge (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)$

$= x_3 e^{x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_1 e^{x_1} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 = (x_3 e^{x_3} - x_1 e^{x_1}) \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

13 Dérivée extérieure

Notation : $\Omega^0(U) = C^1(U)$
Soit $f \in \Omega^0(U)$, $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \in \Omega^1(U)$
$d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$ est une opération linéaire tel que $d(f) = df$

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\omega = \sum\limits_I \alpha_I dx_I \in \Omega^p(U)$

La dérivée extérieure de ω est $d\omega = \sum\limits_I d\alpha_I \wedge dx_I = \sum\limits_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1,\cdots,i_p}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I \in \Omega^{p+1}(U)$

Exemple

$\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dx_1 + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)dx_2 + 2 \cdot dx_3 \in \Omega^1(U)$

$d\omega = d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \wedge dx_1 + d(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \wedge dx_2 + d(2) \wedge \cdot dx_3$

$= 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3) \wedge dx_3 + (x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3) \wedge dx_2$

$= 2x_2 dx_2 \wedge dx_1 + 2x_3 dx_3 \wedge dx_1 + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_2 + x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_2$

$= (x_2 x_3 - 2x_2) dx_1 \wedge dx_2 - 2x_3 dx_1 \wedge dx_3 - x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_3$

Théorème 16

- a) $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(U)$ de classe C^1, alors $d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2 \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- b) Si $\omega_1 \in \Omega^p(U)$, $\omega_2 \in \Omega^K(U)$ de classe C^1, alors $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$

  En particulier, $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$
- c) Si $\omega \in \Omega^p(U)$ de classe C^2, alors $d(d\omega) = 0$

Preuve

- a) $d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = d(\sum\limits_I (\lambda \cdot \alpha_I + \mu\beta_I) dx_I)$

  $= \sum\limits_I (\lambda . d\alpha_I + \mu \cdot d\beta_I) \wedge dx_I = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$
- b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\left(\left(\sum\limits_I \alpha_I dx_I\right) \wedge \left(\sum\limits_J \beta_J dx_J\right)\right)$

  $= d\left(\sum\limits_{I,J} \alpha_I \beta_J dx_I dx_J\right) = \sum\limits_{I,J} d(\alpha_I \cdot \beta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J$

$$= \sum_{I,J} (\beta_J d\alpha_I + \alpha_I d\beta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_J \beta_J d\omega_1 \wedge dx_J + \sum_J d\beta_J d\omega_1 \wedge dx_J = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

- c) $d(dx_I) = d(1 \cdot dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0$

  Soit $\alpha \in C^2(U)$, $d\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} dx_i$

  $$d(d\alpha) == \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j}}_{= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_i}} \underbrace{dx_i \wedge dx_j}_{= -dx_j \wedge dx_i} = -d(d\alpha)$$

  Comme $d(d\alpha) = -d(d\alpha)$, alors $d(d\alpha) = 0$

14 Formes exactes et fermées

Définition

- a) $\omega \in \Omega^p(U)$ est dite exacte s'il existe $\tilde{\omega} \in \Omega^{p-1}(U)$ tel que $d\tilde{\omega} = \omega$
- $\omega \in \Omega^p(U)$ de classe C^1 est fermée si $d\omega = 0$

Lemme 9

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\omega \in \Omega^p(U)$ de classe C^1.

Une condition nécessaire pour que ω soit exacte est $d\omega = 0$

Preuve

Si ω est exacte, alors $\exists \tilde{\omega} \in \Omega^{p-1}$ tel que $\tilde{\omega} = \omega$. Donc, $d\omega = d(d\tilde{\omega}) = 0$ d'après le Théorème 16.

□

Remarque

Si $\omega \in \Omega^p(U)$ est exacte, alors elle a beaucoup de primitives.

En effet, si on a $d\tilde{\omega} = \omega$, avec $\tilde{\omega} = \Omega^{p-1}(U)$, alors $d(\tilde{\omega} +$ une forme arbitraire fermée de degré $(p-1)) = \omega$

Exemple

$\omega = x_2x_3dx_1 \wedge dx_3 + x_1x_3dx_2 \wedge dx_3 = (x_2dx_1 + x_1dx_2) \wedge (x_3dx_3) = d(x_1x_2) \wedge (x_3dx_3)$

$\implies \tilde{\omega} = x_1x_2x_3dx_3$ et $d\tilde{\omega} = x_2x_3dx_1 \wedge dx_3 + x_1x_3dx_2 \wedge dx_3$

$\tilde{\tilde{\omega}} = x_1x_2x_3dx_3 + \underbrace{x_1dx_1 + x_2^2}_{\text{une forme fermée}} dx_2$

$\implies d\tilde{\tilde{\omega}} = \omega.$

Exemple

$\omega = d\omega_1 \wedge d\omega_2$

$\tilde{\omega} = \omega_1 \wedge d\omega_2$

$d\tilde{\omega} = d\omega_1 \wedge d\omega_2 + (-1)^p\omega_1 \wedge \underbrace{d(d\omega_2)}_{=0}$

$\tilde{\tilde{\omega}} = (-1)^{p+1}d\omega_1 \wedge \omega_2$

$d(\tilde{\tilde{\omega}}) = (-1)^{p+1} d(d\omega_1) \wedge \omega_2 + d\omega_1 \wedge d\omega_2 = \omega$

Rappel

- $d\omega = 0 \implies \omega$ est fermée
- $\omega = d\tilde{\omega} \implies \omega$ est exacte

Soit $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U)$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \left(\sum_{1\leq i<j\leq n} + \underbrace{\sum_{i=j}}_{=0} + \sum_{1\leq j<i\leq n} \right) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

$$\implies d\omega = 0 \iff \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \, \forall\, i, j$$

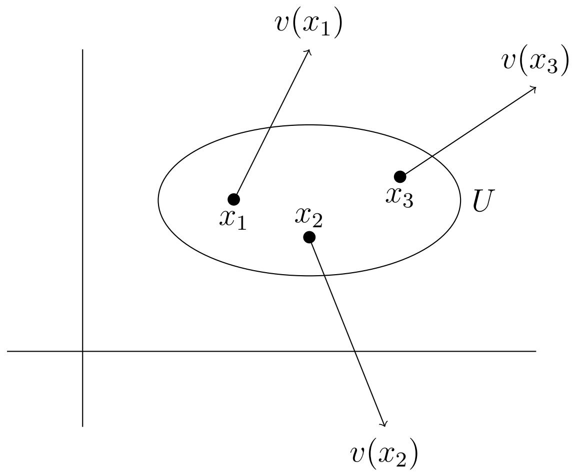
Théorème 17 (Lemme de Poincaré)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé. Soit $\omega \in \Omega^p(U)$, $p \geq 1$. Si ω est fermée, alors ω est exacte.

15 Champs de vecteurs

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Un champ de vecteur sur U est une application $v : XX \in U \to v(x) \in T \times \mathbb{R}^n$. v est de classe C^k si $\forall\, i, v_i \in C^k(U)$



Définition

$X(U)$ est l'espace vectoriel de champs de vecteurs sur U.

Exemple

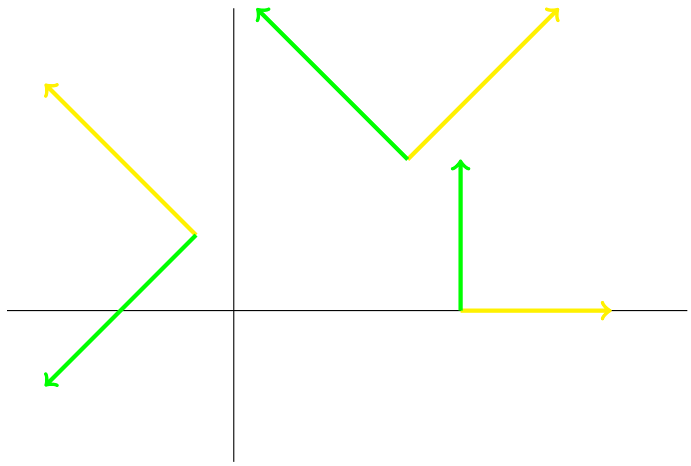
Soit $f \in C^1(U)$, $grad\, f = X(U)$

Exemple

Soit $U = \mathbb{R}^2$, $v(x) = (x_1, x_2)$

Exemple

Soit $U = \mathbb{R}^2$, $u(x) = (-x_2, x_1)$, $\langle v, u \rangle = 0$



Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \in \Omega^1(U) \longleftrightarrow \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in T \times \mathbb{R}^n$

Donc, on a une bijection entre $\Omega^1(U)$ et $X(U)$.

Si ω est exacte, $\omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \longleftrightarrow \alpha = grad\, f$

Remarque

Soit $\omega \in \Omega^1(U)$. Soit $v \in X(U)$. Posons $f(x) = \omega_x(v(x))$

$\implies f \in C(U)$

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $v \in X(U)$ de classe C^1.

Alors $div\, v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in C(U)$ est la divergence de v.

Exemple

$v = (x_1 x_2, x_1 + x_2, x_1)$

$div\, v = x_2 + 1 + 0 = x_2 + 1$

Remarque

$$\begin{tikzcd} & X(U) \arrow[dr, "div"] & \\ C^2(U) \arrow[ur, "grad"] \arrow[rr, "\Delta"] & & C(U) \end{tikzcd}$$

Définition

Soit $f \in C^2(U)$. Alors $\Delta f = div(grad\, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in C(U)$ est le Laplacien de f.

Si $\Delta f = 0$, alors f est une fonction harmonique.

16 Champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Remarque

$dim(T \times \mathbb{R}^3) = 3$, $dim\Lambda^1(\mathbb{R}) = 3$

$dim\Lambda^2(\mathbb{R}^3) = 3 \implies \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \simeq \Lambda(\mathbb{R}^3)$ (C'est vrai seulement pour $\mathbb{R}^3$)

Preuve

Soit $v \in X(U)$, $U \in\subset \mathbb{R}^3$. On associe à v :

$\omega_v^1 = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$

$\omega_v^2 = v_3 dx_1 \wedge dx_2 - v_2 dx_1 \wedge dx_3 + v_1 dx_2 \wedge dx_3$

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit $v \in X(U)$

Le rotationnel de v est :

$$rot\, v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \in X(U)$$

Remarque

$(rot\, v)_i = \partial_j v_k - \partial_k v_j$ où (i, j, k) est une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$

Théorème 18

- a) $\omega_v^1 + \omega_u^1 = \omega_{u+v}^1$ et $\omega_v^2 + \omega_u^2 = \omega_{u+v}^2$

  $f \cdot \omega_v^1 = \omega^1 f \cdot v$ et $f \cdot \omega_v^2 = \omega^2 f \cdot v$

- b) $\omega_v^1 \wedge \omega_u^1 = \omega_{v\times u}^2$

- c) $\omega_v^1 \wedge \omega_u^2 = \langle v, u\rangle dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

- d) Si $f \in C^1(U)$ et $v = grad\, f$, alors $\omega_{grad\, f}^1 = df$

- e) $d\omega_v^1 = \omega_{rot\, t}^2$ et $d\omega_v^2 = div\, v \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Preuve

- b) $\omega^1_v \wedge \omega^1_u = (v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3) \wedge (u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3) = (v_1u_2 - v_2u_1)dx_1 \wedge dx_2 + (v_1u_3 - v_3u_1)dx_1 \wedge dx_3 + (v_2u_3 - v_3u_2)dx_2 \wedge dx_3 = \omega^2_{v\times u}$
- c) $\omega^1_v \wedge \omega^2_u = (v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3) \wedge (u_3dx_1 \wedge dx_2 - u_2dx_1 \wedge dx_3 + u_1dx_2 \wedge dx_3) = v_1u_1dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - v_2u_2dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + v_3u_e dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \langle v, u\rangle dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$
- d) $\omega^1_{grad\, f} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df$
- e) $d\omega^1_v = d(v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3) =$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_2 +$$
$$+\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_3$$
$$= \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 = \omega^2_{rot\, v}$$
$$d\omega^2_v = d(v_3dx_1 \wedge dx_2 - v_2dx_1 \wedge dx_3 + v_1dx_2 \wedge dx_3)$$
$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_1 \wedge dx_2$$
$$= \frac{\partial v_3}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$
$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$\square$

Soient, $f, g \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$

$div(grad\, f \times grad\, g)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$= d(\omega^2_{grad\, f \times grad\, g}) = d(\omega^1_{grad\, f} \wedge \omega^1_{grad\, g})$

$= d(df \wedge dg) = d(df) \wedge dg - df \wedge d(dg) = 0$

$\implies div(grad\, f \times grad\, g) = 0$

Théorème 19

- a) Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit $f \in C^2(U)$. Soit $v \in X(U)$ de classe 2. Alors $rot(grad\, f) = 0$ et $div(rot\, v) = 0$

- b) Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert étoilé. Soit $v \in X(U)$ de classe C^1

  Si $rot\, v = 0$, alors il existe $f \in C^2(U)$ tel que $grad\, f = v$

  Si $div\, v = 0$, alors il existe $u \in X(U)$ tel que $rot\, u = v$

Preuve

- a) $\omega^2_{rot(grad\, f)} = d\omega^1_{grad\, f} = d(df) = 0 \implies rot(grad\, f) = 0$

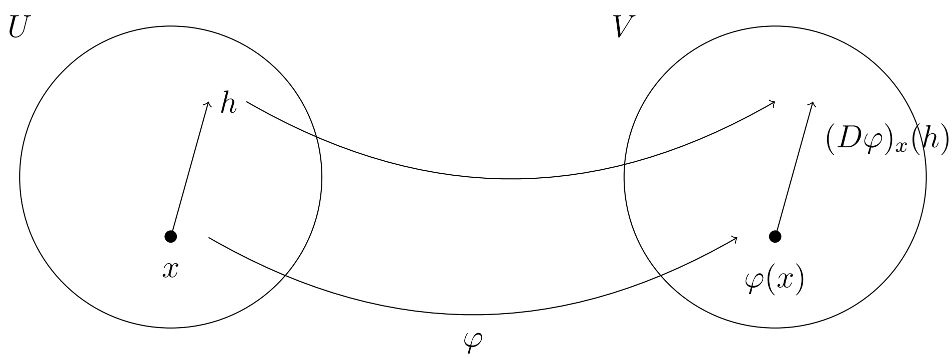
  $div(rot\, v)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = d\omega^2_{rot\, v} = d(d\omega^1_v) = 0 \implies div(rot\, v) = 0$

17 Tiré en arrière

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts.

- a) Une application $\varphi : U \to V$ (donc $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) = (\varphi_n(x_1), \cdots, \varphi(x_n))$ est de classe C^k si $\varphi_i \in C^k(U)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$
- b) $C^k(U;V)$ est l'espace vectoriel des applications de U dans V de classe C^k.
- c) Soit $\varphi \in C^1(U;V)$. Alors $D\varphi : T_x\mathbb{R}^n \to T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ est l'application tel que :

$$((D\varphi)_x(h))_i = d\varphi_i(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)h_j$$



Remarque

$(D\varphi)_x(h) = (D\varphi)_x \cdot h$ où $(D\varphi)_x$ est la matrice jacobienne donnée par : $((D\varphi)_x)_{ij} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$

Exemple

$U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2) = (\underbrace{x_1 + 2x_2}_{\varphi_1}, \underbrace{x_1x_2}_{\varphi_2}, \underbrace{sin(x_1)}_{\varphi_3})$

$$(D\varphi)_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x_2 & x_1 \\ cos(x_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

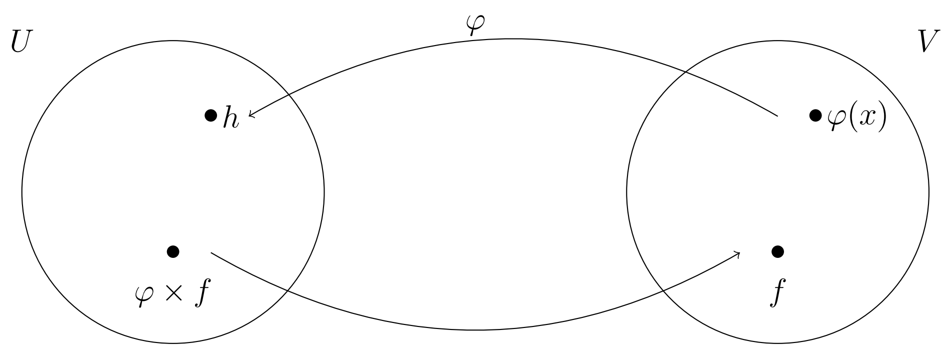
Soit $x = (0,3)$, $h = (4,5) \in T_{(0,3)}\mathbb{R}^2$

$$(D\varphi)(h) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \in T_{(6,0,0)}\mathbb{R}^3$$

Définition

Soient $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts. Soit $\varphi \in C^1(U;V)$

- a) Soit $f \in C(U)$. Alors $\varphi^* f = f \circ \varphi \in C(U)$ est le tiré en arrière par φ.



- b) Soit $\omega \in Omega^p(V)$. Alors le tiré en arrière de ω est la forme $\varphi^*\omega \in \Omega^p(U)$ tel que $(\varphi^*\omega)_x(h_1, \cdots, h_p) = \omega_{\varphi(x)}((D\varphi)_x(h_1), \cdots, (D\varphi)_x(h_p))$

Exemple

$U = \mathbb{R}^2$ et $V = \mathbb{R}^3$

$\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1x_2, sin(x_1))$

Soit $f(y) = y_1y_2y_3$

$\varphi^* f(x_1, x_2) = f(\varphi(x_1, x_2)) = f(x_1 + 2x_2, x_1x_2, sin(x_1)) = (x_1 + 2x_2) \cdot x_1x_2 \cdot sin(x_1)$

DESSIN

Remarque

Si $n < p$, alors $\varphi^*\omega = 0$ (car $dim\, \Lambda^p(\mathbb{R}^n) = 0$ si $p > n$)

Lemme

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts. Soit $\varphi \in C^(U;V)$. Soit $\omega = \sum_I \alpha_I dy_I \in \Omega^p(V)$ $(dy_I = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_p})$

Alors $\varphi^*\omega = \sum_I \varphi^*\alpha_I d\varphi_I$, où $\varphi^*\alpha = \alpha \circ \varphi, d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p}$

Preuve

$$(\varphi^*\omega)_x(h_1,\cdots,h_p)=\sum_I \varphi^*\alpha_I dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_p}((D\varphi)_x(h_1),\cdots,(D\varphi)_x(h_p))=$$

$$=\sum_I \varphi^*\alpha_I\, det\begin{pmatrix}((D\varphi)_x(h_1))_{i_1}, & \cdots & ((D\varphi)_x(h_p))_{i_1}\\ \vdots & & \vdots\\ ((D\varphi)_x(h_1))_{i_p} & \cdots & ((D\varphi)_x(h_p))_{i_p}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_I \varphi^*\alpha_I\, det\begin{pmatrix}(d\varphi_{i_1})(h_1) & \cdots & (d\varphi_{i_1})(h_p)\\ \vdots & & \vdots\\ (d\varphi_{i_p})(h_1) & \cdots & (d\varphi_{i_p})(h_p)\end{pmatrix}$$

$$=\sum_I \varphi^*\alpha_I\cdot d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_p}(h_1,\cdots,h_p)\,\forall h_1,\cdots,h_p \implies \varphi^*\omega$$

$$=\sum_I \varphi^*\alpha\cdot d\varphi_I$$

□

Exemple

$U=\mathbb{R}^3$, $V=\mathbb{R}^3$. $\varphi(x)=(\underbrace{x_1+2x_2}_{\varphi_1},\underbrace{x_1x_2}_{\varphi_2},\underbrace{sin(x_1)}_{\varphi_3})$

Soit $\omega=(y_1y_1+y_3)dy_2\wedge dy_3$

$(\varphi^*\omega)=\varphi^*(y_1y_2+y_3)d\varphi_2\wedge d\varphi_3=\cdots$

$d\varphi_2=x_1dx_2+x_2dx_1$, $d\varphi_3=cos(x_1)dx_1$

$\cdots=((x_1+2x_2)\cdot x_1x_2+sin(x_1))\cdot(x_1dx_2+x_2dx_2)\wedge(cos(x_1)dx_1)$

$=-x_1(x_1x_2(x_1+2x_2)+sin(x_1))dx_1\wedge dx_2\in\Omega^2(U)$

Théorème 20

Soient $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^m$, $W\subset\mathbb{R}^l$ des ouverts.

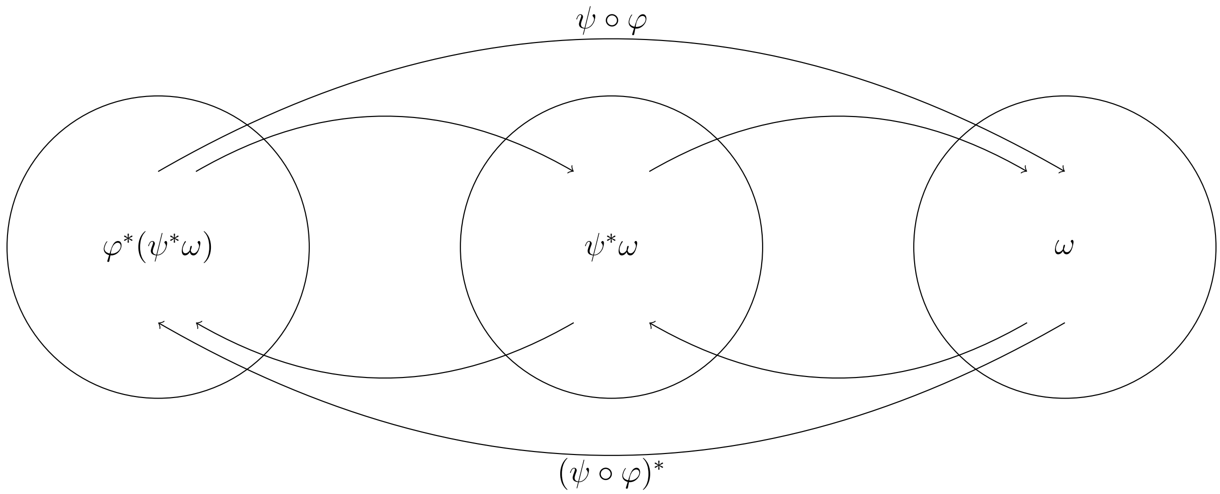
- a) Soit $\varphi\in C^(U;V)$. Soient $\omega_1,\omega_2\in\Omega^p(V)$. Alors $\varphi^*(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)=\lambda\varphi^*\omega_1+\mu\varphi^*\omega_2\,\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
- b) Soit $\varphi\in C^(U;V)$. Soient $\omega_1\in\Omega^p(V)$ et $\omega_2\in\Omega^k(V)$

  Alors $\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\varphi^*\omega_1\wedge\varphi^*\omega_2$

- c) Soit $\varphi \in C^1(U;V)$. Soit $\omega \in \Omega^p(V)$ de classe C^1.

  Alors $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$

- d) Soient $\varphi \in C^1(U;V)$, $\psi \in C^{(}V;W)$. Soit $\omega \in \Omega^p(W)$, alors $\varphi^*(\psi^*\omega) = (\psi \circ \varphi)^*\omega$



Preuve

- a) $\omega_1 = \sum_I \alpha_I dy_I$, $\omega_2 = \sum_I \beta_I dy_I$

$$\varphi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \varphi^*\left(\sum_I (\lambda\alpha_I + \mu\beta_I) \cdot dy_I\right)$$

$$= \sum_I \varphi^*(\lambda\alpha_I + \mu\beta_I) d\varphi_I$$

$$= \lambda \cdot \sum_I \varphi^*\alpha_I \cdot d\varphi_I + \mu \cdot \sum_I \varphi^*\beta_I d\varphi_I$$

$$= \lambda\varphi^*\omega_1 + \mu\varphi^*\omega_2$$

- b) $\omega_1 = \sum_I \alpha_I dy_I$, $\omega_2 = \sum_J \beta_J dy_J$

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\left(\sum_{I,J} \alpha_I \beta_J dy_I \wedge dy_J\right)$$

$$= \sum_{I,J} \varphi^*\alpha_I \cdot \varphi^*\beta_J d\varphi_I \wedge d\varphi_J$$

$$\left(\sum_I \varphi^*\alpha_I d\varphi_I\right) \wedge \left(\sum_J \varphi^*\beta_J d\varphi_J\right)$$

$$= \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$$

- c) Soit $\alpha \in C^1(V)$

$$d(\varphi^*\alpha) = d(\alpha(\varphi(x))) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x))}{\partial x_j} dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\alpha(y)}{\partial y_i}\Big|_{y_i=\varphi_i(x)} \cdot \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \varphi^*\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_i}\right) d\varphi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\alpha}{\partial y_i} dy_i\right) = \varphi^*(d\omega)$$

Soit $\omega = \alpha \cdot dy_I$.

$$d(\varphi^*\omega) = d(\varphi^*\alpha \cdot d\varphi_I)$$

On sait que $d(d\varphi) = 0$

$$= d(\varphi^*\alpha) \wedge d\varphi_I + \varphi^*\alpha \cdot \underbrace{d(d\varphi_I)}_{=0}$$

$$= \varphi^*\left(d\alpha\right) \wedge d\varphi_I = \varphi^*(d\alpha) \wedge \varphi^*(dy_I)$$

$$= \varphi^*(d\alpha \wedge dy_I) = \varphi^*(d\omega)$$

Donc : $d\left(\varphi^*\left(\sum_I \alpha_I dy_I\right)\right) = \varphi^*(d\omega)$

- d)

$$\varphi^*(\psi^*(dz_i)) = \varphi^*(d(\psi^*(z_i)))$$

$$= d(\varphi^*(\psi^*(z_i))) = d(z_i \circ \psi \circ \varphi)$$

$$= d((\psi \circ \varphi)^*(z_i)) = (\psi \circ \varphi)^*(dz_i)$$

$\omega = \alpha \cdot dz_I = \alpha \cdot dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$

$$\varphi^*(\psi^*\omega)) = \varphi^*((\psi^*\alpha)\psi^*(dz_i) \wedge \cdots \wedge \psi^*(dz_{i_p}))$$

$$= \varphi^*(\psi^*\alpha) \cdot \varphi^*(\psi^*(dz_{i_1})) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(\psi^*(dz_{i_p}))$$

$$= (\alpha \circ \psi \circ \varphi)(\psi \circ \varphi)^*(dz_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\psi \circ \varphi)^*(dz_{i_p})$$

$$= ((\psi \circ \varphi)^*\alpha)(\psi \circ \varphi)^*(dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p})$$

$$= (\psi \circ \varphi)^*(\alpha \cdot dz_I) = (\psi \circ \varphi)^*\omega \; (\star)$$

Si $\omega = \sum_I \alpha_I dz_I \implies \varphi^*(\psi^*\omega) = (\psi \circ \varphi)^*\omega$ par $(\star)$

$\square$