Espaces Normés :

Ex : Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$	dim	finie
$Mat(n, \mathbb{R})$	"	"
$\mathbb{R}[t]$ polynômes	"	∞
$C[0,1]$ fonctions continues	"	∞

Déf: Un e.v normé est un e.v V muni d'une norme, une application $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tq $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

c) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

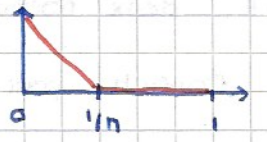
Exc : $V = C[0,1]$, $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$ (norme uniforme)

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, dt$$

Déf: Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes sur V si $\exists c, c' \in \mathbb{R}^+$ tq $c \cdot \|x\|' \leq \|x\| \leq c' \|x\|'$ $\forall x \in V$

Ex : $V = C[0,1]$

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, dt \leq \int_0^1 \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \, dt = \|x\|_\infty$$

Considérons $x_n(t) :=$ 

supposons $\exists M$ tq $\|x\|_\infty \leq M \cdot \|x\|_1$

alors $1 = \|x\|_\infty \leq M \cdot \|x\|_1 = M \cdot 1/2n \Rightarrow M \geq 2n$ $\forall n$ ↯

$\Rightarrow \|x\|_1$ et $\|x\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Thm 1: Riesz

Soit V un e.v de dimension finie. Alors toutes les normes sur V sont équivalentes.

Déf: Soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ une suite dans e.v. normé V

a) On dit que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ si $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

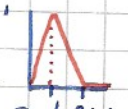
$(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \text{ tq } \forall n > N_\varepsilon \ \|x_n - x\| < \varepsilon)$

b) On dit que $\{x_n\}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall n,m > N_\varepsilon \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Rem: Soit V un e.v normé fonctionnel, si $\{x_n\}$ est tq $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$

✗ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Ex: $V = C[0,1]$ avec $\|.\|_\infty$

$X_n(t) :=$ 

alors $X_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais $\|X_n - 0\|_\infty = 1$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Lemme: Toute suite convergente est de Cauchy

Dém: Si $x_n \to x$, fixons $\varepsilon > 0$, prenons N_ε tq $\|x_n - x\| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon$, alors $\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < 2\varepsilon \Rightarrow \{x_n\}$ est de Cauchy. ∎

Déf: Un e.v.n V est dit de Banach si V est complet (Toute suite de Cauchy possède une limite)

Lemme: Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes sur un e.v V. Si V est de Banach pour $\|.\|$, alors il l'est aussi pour $\|.\|'$.

le 17.12.18

Analyse Réelle :

Dém : $m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\cdot\|x\|'$, soit $\{x_n\}$ de Cauchy pour $\|.\|'$

Alors $\|x_n - x_m\| \leq M\|x_n - x_m\|' \leq M\cdot\varepsilon$ si $m,n \geq N_\varepsilon$

$\Rightarrow \{x_n\}$ de Cauchy pour $\|.\| \Rightarrow \exists x \in V$ tq $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

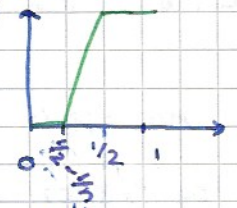
$\Rightarrow \|x_n - x\|' \leq 1/m \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x_n \to x$ avec $\|.\|'$

$\Rightarrow$ V est de Banach pour $\|.\|'$

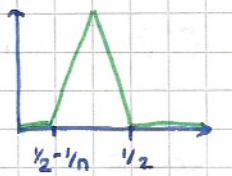
Thm 2 : Tout e.v de dimension finie est de Banach.

Rem : $V = C[0,1]$, $\|.\|_1$

Soit $X_n(t)$:



Donc $X_n - X_m$ $(m>n)$ =



$\Rightarrow \|X_n - X_m\|_1 \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2} 1\,dt = 1/n \longrightarrow 0$

et $\{X_n\}$ est de Cauchy pour $\|.\|_1$

Mais si $\|X_n - X_m\|_1 \to 0$ alors $x(t) = 0$ $\forall t < 1/2$ et $x(t) = 1$

$\forall t \geq 1/2$ et $x \notin C[0,1] \Rightarrow$ V n'est pas de Banach.

Thm 3 : $V = C[0,1]$, $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

Dém : Soit $\{x_n\} \subset V$ de Cauchy, fixons $\varepsilon > 0$, prenons N_ε tq $\|x_n - x_m\|_\infty$

$= \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ si $n,m > N_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon}_{(*)}$ $\forall t$

Fixons t, $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy, $\mathbb{R}$ est de Banach

$\Rightarrow x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x(t)$, tq $x(t)$ est continue.

Considérons $\lim_{m\to\infty}$ de $(*)$ $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ $\forall t$ si $n > N_\varepsilon$

$|x(t+\delta) - x(t)| = |x(t+\delta) - x_n(t+\delta) + x_n(t+\delta) - x_n(t) + x_n(t) - x(t)|$

$\leq |x(t+\delta) - x_n(t+\delta)| + |x_n(t+\delta) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \leq 2\varepsilon + |x_n(t+\delta) - x_n(t)|$,

$x_n \in C[0,1] \Rightarrow \exists \delta > 0$ tq $|x_n(t+\delta) - x_n(t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x(t+\delta) - x(t)| \leq 3\varepsilon$ ∎

Lemme : $C^1[0,1]$ muni de $\|.\|_\infty$ n'est pas de Banach

Dém : Si $a, b \geq 0$ alors $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Considérons $x_n(t) := \sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n} \in V$

posons $x(t) = |t - 1/2|$

$0 \leq x_n(t) - x(t) = \sqrt{(t-1/2)^2 + 1/n} - \sqrt{(t-1/2)^2} \leq 1/\sqrt{n}$

$\Rightarrow \|x_n - x\|_\infty \leq 1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Donc $x_n \to x$ en norme, mais $x \notin V$

$\Rightarrow$ V n'est pas de Banach. ∎

Rem : $C^1[0,1]$ muni de $\|.\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ est de Banach

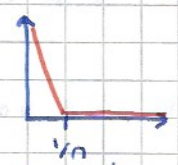
Déf : Soient U et V deux e.v.n. Une applic $f : V \to U$ est continue en $x \in V$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\|f(x) - f(y)\|_U < \varepsilon \ \forall y \in B_x(\delta)$

et f est continue sur V si f est continue en x, $\forall x \in V$

Ex : $V = C[0,1]$, $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(0)$

$\|.\|_\infty$: $\|x(0) - y(0)\|_\infty \leq \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|_\infty$

$\Rightarrow$ f est continue

$\|.\|_1$: Considérons $x_n(t) =$ 

posons $x(t) = 0$

$\|x_n - x\| = \int_0^1 |x_n(t)| \, dt \leq 1/2n \longrightarrow 0$

$|f(x_n) - f(x)| = |1 - 0| = 1 \Rightarrow f$ pas continue.

Analyse Réelle : le 18.02.19

Déf: Un espace métrique (X, ρ) est un ensemble X muni d'une application $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ appelée "métrique" tq :

1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ "symétrique" $\forall x, y \in X$
2) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ $\forall x, y, z \in X$ "inég. Δ-aire"
3) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

ρ est "la distance" entre x et y

Ex: $(V, \|.\|)$ espace vectoriel normé $X \subseteq V$ sous-ensemble avec $\rho(x,y) = \|x - y\|$ (X, ρ) est un mét

Déf: (X, ρ) esp. mét., $\{x_n\}_{n \geq 1}$, $x_n \in X$. On dit $\{x_n\}_n$ est convergente si $\exists\, x \in X$ tq $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$

Déf: (X, ρ) esp. mét., $\{x_n\}_{n \geq 1}$, $x_n \in X$, On dit que $\{x_n\}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m > N_\varepsilon$

OBS: Si $\{x_n\}_n$ converge $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ est de Cauchy.

Déf: (X, ρ) esp. mét. est complet si toute suite de Cauchy converge.

Ex: $X = C[0,1]$, $\rho(x,y) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| := \|x - y\|_\infty$ est complet.

Déf: (X, ρ) esp. mét. $M \subseteq X$ sous-ens

a) $x \in X$, $\operatorname{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x,y)$

b) $\overline{M} = \{ x \in X \mid \operatorname{dist}(x, M) = 0 \}$ la fermeture de M

c) M est fermé si $M = \overline{M}$

Ex: $(V, \|.\|)$ e.v.n. $M = \overline{B_x(\delta)} = \{ y \in V \mid \|y - x\| \leq \delta \}$ M est fermé

Dém: • $M \subseteq \overline{M}$: toujours vrai ($x \in M \Rightarrow dist(x, M) = 0 \Rightarrow x \in \overline{M}$)

• $\overline{M} \subseteq M$: $z \in \overline{M} \Rightarrow \exists \{x_n\}$ tq $x_n \in M \ \forall n$ et $\rho(x_n, z) < 1/n \ \forall n$. Donc $\|z - x\| =$

$\|z - x_n + x_n - x\| \leq \|z - x_n\| + \|x_n - x\| \leq 1/n + \delta$

$\Rightarrow \|z - x\| \leq \delta$ ∎

Lemme: (X, ρ) e.m.v. Complet et $M \subseteq X$ fermé, alors (M, ρ) est un esp métrique complet.

Dém: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ de Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ est de Cauchy

Comme (X, ρ) est complet, $\exists x \in X$ tq $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$

(= x_n converge vers x).

Il faut voir $x \in M$: $dist(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y) \leq$

$\rho(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow dist(x, M) = 0 \Rightarrow x \in \overline{M} = M$ ▨

Déf: (X, ρ_X) et (Y, ρ_Y) deux esp. métriques, $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tq $\rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

On dit f est continue si elle est continue $\forall x \in X$.

Applications Contractantes :

Déf. (X, ρ) esp. métrique, $f : X \to X$ est contractante si $\exists\ 0 \leq c \leq 1$ dite constante de contraction tq $\rho(f(x); f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$

Ex : $X = \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ tq $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| = c < 1$

$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x - y)|$ pour $z \in (x, y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y| \Rightarrow f$ est contractante.

⚠ Il ne suffit pas $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$ ⚠

Ex : $f(x) = x$, ou $f(x) = x + c$ dans $\mathbb{R}$ $\forall c$

⚠ Il ne suffit pas $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ ⚠

Ex : ... $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, $x \mapsto x + 1/x$ Pas contractante.

Ex : $X = C[0,1]$, $f : X \to X$, $(f(x))(t) = \frac{3}{2} t\, x(t^2)$

a) $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty$ $x(t) = 1$ et $y(t) = 0$

$\Rightarrow \rho(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| = 1$

et $\rho(f(x), f(y)) = \sup_{t \in [0,1]} |\frac{3}{2} t\, x(t^2) - \frac{3}{2} t\, y(t^2)| = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f$ pas contractante.

b) $\rho(x, y) = \|x - y\|_1 = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$

alors $\rho(f(x), f(y)) = \int_0^1 |\frac{3}{2} t\, x(t^2) - \frac{3}{2} t\, y(t^2)|\, dt$ CDV $t^2 = s$, $t 2dt = ds$

$= \frac{3}{4} \int_0^1 |x(s) - y(s)|\, ds \Rightarrow f$ est contractante.

$\downarrow$

$3/4 = c < 1$

Lemme: $f: X \to X$ est contractante $\Rightarrow$ f est continue

Dém: $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon \Rightarrow \rho(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x,y) < \delta = \varepsilon$ □

Thm 4: Théorème du point fixe

Soit (X, ρ) esp. mét complet, $f: X \to X$ contractante de cst $c < 1$

a) $\exists!\, x_0 \in X$ tq $f(x_0) = x_0$

b) $\forall\, y_0 \in X$, on définit la suite $y_n = f^n(y_0) = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{n}(y_0)$

alors $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

c) $\rho(x_0, y_n) \leq \dfrac{c^n}{1-c}\, \rho(y_0, y_1)$ (convergence exponentielle)

Dém: $y_0 \in X$, $y_1 = f(y_0)$, $y_2 = f(y_1)$

Donc $\rho(y_n, y_{n+1}) = \rho(f(y_{n-1}), f(y_n)) \leq c\, \rho(y_{n-1}, y_n)$

$= \dots \leq c^n \cdot \rho(y_0, y_1)$

Soit $m > n$ alors $\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_m) \leq \dots \leq$

$\leq \rho(y_n, y_{n+1}) + \dots + \rho(y_{m-1}, y_m) \leq (c^n + \dots + c^{m-1})\, \rho(y_0, y_1)$

$= c^n (1 + c + \dots + c^{m-n-1})\, \rho(y_0, y_1) = c^n \dfrac{1 - c^{m-n}}{1-c}\, \rho(y_0, y_1)$

$= \dfrac{c^n}{1-c}\, \rho(y_0, y_1) - \dfrac{c^m}{1-c}\, \rho(y_0, y_1) \leq \dfrac{c^n}{1-c}\, \rho(y_0, y_1)$

b) $\Rightarrow (y_n)$ est de Cauchy $\Rightarrow \exists\, x_0 \in X$ tq $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

$f(x_0) = f(\lim_{n \to \infty} y_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} y_{n+1} = x_0$

$\Rightarrow x_0$ est un point fixe. (Existence)

Si $x_0' \in X$ est tq $f(x_0') = x_0'$

alors $\rho(x_0', x_0) = \rho(f(x_0'), f(x_0)) \leq c\, \rho(x_0', x_0)$

$\Rightarrow (1-c)\, \rho(x_0', x_0) \Rightarrow \rho(x_0', x_0) \leq 0 \Rightarrow \rho(x_0', x_0) = 0$

$\Rightarrow x_0' = x_0$ (Unicité)

Dém : (Suite)

c) $\rho(x_0, y_n) \leq \rho(y_n, y_m) + \rho(y_m, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c}\rho(y_0, y_1) + \rho(y_m, x_0)$ (→ 0)

$\Rightarrow \rho(x_0, y_n) \leq \frac{c^n}{1-c}\rho(y_0, y_1)$ □

Rem : f contractante et X complet $\Rightarrow f(x) = x$ admet une unique solution qu'on peut obtenir par itération

Ex : $X = \mathbb{R}$; $t^3 + t = 1$

On définit $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$f(t) = t \Leftrightarrow t^3 + t = 1$

$f'(t) = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$, $f''(t) = -2\frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3} = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1/3$

Quel théorème ? Le même 2.

$\Rightarrow \sup |f'(t)| = |f'(1/\sqrt{3})| = \frac{2/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$

$\Rightarrow f$ est contractante.

$t_0 = 1$ $f(t_0) = t_1 = \frac{1}{1+1} = 1/2$ $t_2 = f(t_1) = \frac{1}{1+1/4} = 4/5$

$t_3 = \ldots = \frac{25}{41} \simeq 0,609756\ldots$

$\rho(x_0, t_3) \leq \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^3}{1 - \frac{3\sqrt{3}}{8}} \cdot 1/2 = \ldots$ (Limite de l'erreur)

$x_0 \simeq 0,6495\ldots$

Thm : Point fixe version généralisée

(X, ρ) esp. mét complet, $f : X \to X$ pour laquelle $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $f^p = f \circ \ldots \circ f$ soit contractante alors f admet un unique pt fixe $x_0 \in X$ et $\lim_{n \to \infty} f^n(y_0) = x_0$ $\forall y_0 \in X$

Dém: $F = f^p$ admet ! (un unique) point fixe x_0, $x_0' = f(x_0)$

$F(x_0') = F(f(x_0)) = f(x_0) = x_0' \Rightarrow x_0' = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

Convergence: $p = 2$ $y_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ $f^{2n}(y_0) = F^n(y_0) \longrightarrow x_0$

$\Rightarrow \exists N_\varepsilon$ tq $\rho(f^{2m}(y_0), x_0) < \varepsilon \quad \forall m > N_\varepsilon$

aussi $f^{2n+1}(y_0) = F(f(y_0)) \longrightarrow x_0 \Rightarrow \exists N_\varepsilon'$ tq $\rho(f^{2n+1}(y_0), x_0) < \varepsilon$

$\forall n > N_\varepsilon'$, $N_\varepsilon'' := \max\{2N_\varepsilon ; 2N_\varepsilon' + 1\}$

$\Rightarrow$ si $k > N_\varepsilon''$ $\Rightarrow \rho(f^k(y_0), x_0) < \varepsilon$. Donc $f^k(y_0) \xrightarrow[k\to]{} x_0$

$p > 2$ même chose

□

---

le 25.02.19

Ex: $V = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$f: V \longrightarrow V$ $\quad f(x) = Ax$ où $A = \begin{pmatrix} a & 2019 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Prenons $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x - y\| = 1$, $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 2019 \\ a \end{pmatrix}$ $\quad f(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|f(x) - f(y)\| = \sqrt{2019^2 + a^2} > \|x + y\|$ (f pas contractante)

$F = f^2 = f \circ f$, $\quad F(x) = A^2 x$ $\quad A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \cdot 2019 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

Donc F est contractante si $|a|$ est suffisament petit.

Équations différentielles ordinaires : (EDO)

Notation: Soit $J \subset \mathbb{R}$ un ouvert, soit $y: J \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k, on note $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_n' \end{pmatrix}$, ..., $y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix}$

Déf: Soit $G \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{\times k}$ un ouvert. Une EDO (sous forme normale) d'ordre k dans $\mathbb{R}^n$ est une équation $y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$ où $y(x) \in \mathbb{R}^n$ et $f: G \to \mathbb{R}^n$ est continue.

le 25.02.19

Analyse Réelle :

Exc : $n = 1$, $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$, où $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 > 0\}$

ou $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 < 0\}$

Rem : Une EDO dans $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ un système d'EDO dans $\mathbb{R}$

$y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$ $\Leftrightarrow$ $y_i^{(k)} = f_i(x, y, \dots, y^{(k-1)})$ $i = 1 \dots n$

Exc : $n = 2$, $y'' = xy + \left(\frac{1}{x}\right)$ $\Leftrightarrow$ $y_1'' = xy_1 + 1$

$y_2'' = xy_2 + x$

Déf : Une EDO est <u>autonome</u> si f ne dépend pas explicitement de x.

Exc : $y' = \sqrt{y}$ $G = \mathbb{R}$ (comme il n'y a pas de x) $\times \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$

$n = 1$

Déf : Une solution d'une EDO $y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$

est une application de classe C^k $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sur un intervalle I et tq on a $\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x))$ $\forall\, x \in I$

Déf : Dans le cas où $G = J \times \tilde{G}$, J étant un intervalle, une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est dite <u>globale</u> si $I = J$.

Exc : $n = 1$

$y' = y^2$, autonome $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Solutions : $\varphi(x) = 0$ $I = \mathbb{R}$ sol. globale

$\varphi(x) = \dfrac{1}{c - x}$ $c \in \mathbb{R}$ $\left[\varphi'(x) = \dfrac{1}{(c-x)^2} = \varphi(x)^2\right]$

$I = (-\infty, c)$ ou (c, ∞) - deux solutions

Rem: Une EDO d'ordre k dans $\mathbb{R}$ peut-être ramenée à une EDO d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^k$

$y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$

Posons $u_1 = y$, $u_2 = y'$, $\dots$, $u_k = y^{(k-1)}$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_k \end{pmatrix}$, $u_1' = u_2$, $u_2' = u_3$, $\dots$, $u_{k-1}' = u_k$, $u_k = f(x, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$

$u' = F(x, u)$

Ex: $n = 1$, $y'' = -y$ $\quad u_1 = y$, $u_2 = y'$ $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 \end{cases} \Leftrightarrow u' = F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u$$

Déf: Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : G \to \mathbb{R}^n$ continue

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, tq $(x_0, z) \in G$.

Le <u>problème de Cauchy</u> associé à une EDO $u' = f(x, u)$ avec une <u>condition initiale</u> $u(x_0) = z$ est la recherche d'une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tq $x_0 \in I$ et $\varphi(x_0) = z$

Ex: $n = 1$, $u' = u^2$,

$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = 0$ et $I = \mathbb{R}$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = \frac{1}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad I = (-\infty, 1) \ni x_0 = 0$

$y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = \frac{1}{c} = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{-1}{1+x}$ $\quad I = (-1, +\infty)$

Rem: Considérons le problème de Cauchy $n = 1$, $uu' + x = 0$, $u(0) = 0$

si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une solution, $(\varphi^2(x) + x^2)' = 2\varphi(x)\varphi'(x) + 2x = 0$

$\Rightarrow \quad \varphi^2(x) + x^2 = cst \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi^2(0) + 0^2 = 0^2 + 0^2 = cst$

$\Rightarrow \quad cst = 0$ et $\varphi^2(x) + x^2 = 0 \quad \forall x \in I$ ↯

$\Rightarrow$ Il n'y a pas de solutions

Thm 5 : Péanot

Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : G \to \mathbb{R}^n$ une appl. continue

Alors le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = z$

possède des solutions $\forall (x_0, z) \in G$

Exc : $n = 1$, $y' = 2\sqrt{|y|}$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

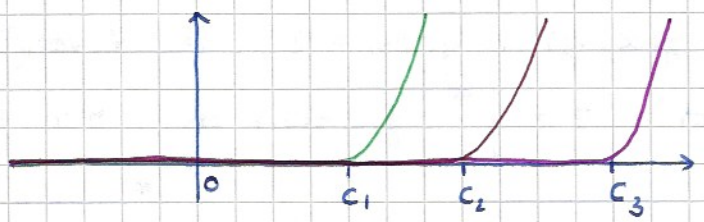
$y(0) = 0$, fixons $c \geq 0$

posons $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq c \\ (x-c)^2 & \text{si } x \geq c \end{cases}$

$\varphi'(x) = 0 = \varphi(x)$ si $x \leq c$

$\varphi'(x) = 2(x-c) = 2\sqrt{|\varphi(x)|}$ si $x \geq c$

Remarquons que : $\varphi'(x)$ est continue.



(Infinité de sol.)

Déf : Soient $(V, \|.\|_V)$ et $(W, \|.\|_W)$ des e.v.n.

Une applications $f : V \to W$ est Lipschitzienne sur $\mathcal{U} \subset V$ si

$\|f(x) - f(y)\|_W \leq L \|x - y\|_V$ où $L > 0$ $\forall x, y \in \mathcal{U}$

Rem : Toute fonction lipschitzienne sur $\mathcal{U}$ est continue sur $\mathcal{U}$.

fixons $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ alors si $\|x - y\|_V < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$

$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_W \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

Rem : Il existe des fonctions continues qui ne sont pas lipschitziennes.

Exc : $n = 1$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$, si f est lipschitzienne

on a $|f(x) - 0| = \sqrt{x} \leq L \cdot x \Rightarrow L \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x \in (0,1)$ ↯

f pas lipschitzienne.

Exc : • $n = 1$, $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$

$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y| \leq 2|x-y|$

$\Rightarrow$ f est lipschit. sur $[0,1]$

• $n = 1$, $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, si f est lipschitz.

on a $|f(x) - f(0)| = |x^2| \leq L \cdot |x| \Rightarrow L \geq |x| \quad \forall x \neq 0$ ↯

$\Rightarrow$ f pas lipsch. sur $\mathbb{R}$.

Lemme : Une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du prob. de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = z$ $\Leftrightarrow$ φ vérifie l'équation intégrale $\varphi(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds \quad \forall x \in I$. (*)

Dém : $\Rightarrow$: Soit φ une solution du prob. de Cauchy , alors

$\varphi'(s) = f(s, \varphi(s)) \quad \forall s \in I$. Donc :

$$\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds = \int_{x_0}^{x} \varphi'(s)\, ds = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) - z$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

$\Leftarrow$: Soit φ vérifie (*)

(Rem : si $\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$ existe , alors $\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$ est continue par rapport à x (même si g ne l'est pas)

$\Rightarrow$ φ est continue. Alors $\left(\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds \right)' = f(x, \varphi(x))$ (continue)

$\Rightarrow$ φ est de classe C^1

$\Rightarrow$ $\varphi'(x) = (z)' + \left(\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds \right)' = f(x, \varphi(x))$

$\Rightarrow$ φ est une solution de $y' = f(x, y)$

de plus $\varphi(x_0) = z + \int_{x_0}^{x_0} \ldots\, ds = z$

□

Rem: si $y' = f(x) \Rightarrow \varphi(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

Rem: $y^{(k)} = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y' = F(Y)$, $Y \in \mathbb{R}^k$

$Y_1 = y$, $Y_2 = y'$, ... et $Y(x_0) = Z$ (condition initiale)

$\Leftrightarrow y(x_0) = z_1$ et $y'(x_0) = z_2$ .....

Thm6: Cauchy - Lipschitz

Soit $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$ tq $(x_0, z) \in G$. (= pb de Cauchy)

On a : $y' = f(x, y)$ et $y(x_0) = z$. Soient $a > 0$, $b > 0$

tq $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq a,\ \|y - z\| \leq b\} \subset G$

Soit $f : G \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et tq $\exists L > 0$ tq

$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$ si $(x, y_1), (x, y_2) \in C$.

Alors le pb de Cauchy $y' = f(x, y)$ avec $y(x_0) = z$ admet

une solution unique $\varphi : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ où

$\alpha = \min(a, b/m)$ où $m = \max_{(x,y) \in C} \|f(x, y)\|$

Dém: On pose $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\alpha = \min(a, b/m)$, $m = \max_{(x,y) \in C} \|f(x, y)\|$

Considérons $V = C(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} \|\varphi(x)\|$

Rem: $(V, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach (thm 3 généralisé)

Considérons la boule fermée $\overline{B_z(b)} = \{\varphi \in V \mid \|\varphi - z\|_\infty \leq b\}$ (fct vect constante)

Rem: $\overline{B_z(b)}$ est un espace métrique complet (lemme)

Définissons T par $(T\varphi)(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds$

$\|(T\varphi)(x) - z\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds \right\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(s, \varphi(s))\|}_{\leq M}\,ds \right|$

Rem: si $\varphi \in \overline{B_z(b)}$ alors $(s, \varphi(s)) \in C$ $\forall s \in I$

$\leq m \cdot \|x - x_0\| = m|x - x_0| \leq b \Rightarrow T\varphi \in \overline{B_z(b)}$

donc $T : \overline{B_z(b)} \longrightarrow \overline{B_z(b)}$

Dém : (Suite)

Soient $\varphi, \psi \in \overline{B_2(b)}$, alors

$$\|(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|}_{\leq L \cdot \|\varphi(s) - \psi(s)\|} ds \right| \leq L \cdot \|\varphi(s) - \psi(s)\| \cdot |x - x_0|$$

Rem : $\Rightarrow \|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \, |x - x_0|$

$\Rightarrow$ si $x \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ où $\beta < 1/L$ alors

$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \|\varphi - \psi\|_\infty$ est contractante

Mais L peut être grande même si $\|f\| \ll 1$

Mq $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tq T^p est contractante.

montrons par récurrence que $\|(T^p\varphi)(x) - (T^p\psi)(x)\| \leq \frac{L^p}{p!} \|\varphi(s) - \psi(s)\| \cdot |x - x_0|^p$

$$\|(T^{p+1}\varphi)(x) - (T^{p+1}\psi)(x)\| = \|(T(T^p\varphi))(x) - (T(T^p\psi))(x)\|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \| f(s, T^p\varphi(s)) \, ds - f(s, T^p\psi(s)) \| \, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \, \|(T^p\varphi)(s) - (T^p\psi)(s)\| \, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{L^{p+1}}{(p)!} \|\varphi(s) - \psi(s)\| \, |s - x_0|^p \, ds \right|$$

$$= \frac{L^{p+1}}{(p+1)!} \underbrace{\|\varphi(s) - \psi(s)\|}_{\leq \|\varphi - \psi\|_\infty} |x - x_0|^{p+1} \leq \frac{L^{p+1}}{(p+1)!} \|\varphi - \psi\|_\infty \, |x - x_0|^{p+1}$$

$\Rightarrow \|T^p\varphi - T^p\psi\|_\infty \leq \frac{L^p \alpha^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty \Rightarrow \exists p$ tq T^p est contractante

(car $\frac{L^p \alpha^p}{p!} \xrightarrow{p \to \infty} 0$)

$\Rightarrow$ (par thm 4) $\exists!\, \varphi_0$ tq $\varphi_0(x) = (T\varphi_0)(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\, ds$

$\Leftrightarrow \varphi_0$ est l'unique solution du p.b de Cauchy $y' = f(x, y)$

et $y(x_0) = z$

∎

Rem : Par le thm du point fixe, on a $T^p\varphi \longrightarrow \varphi_0$ la solution

$\varphi_1(x) = z$, $\varphi_2(x) = \underset{T\varphi_1}{z + \int_{x_0}^{x} f(s,z)\, ds}$, $\varphi_3(x) = \underset{T^2\varphi_1}{z + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_2(s))\, ds}$

Ex : $n=1$, $y' = y^2$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $y(0) = 1$

C : $x \in [-a, a]$, $|y - z| \leq b \iff y \in [b-1, b+1]$

$m = \max_{(x,y)\in C} (y^2) = (b+1)^2 \Rightarrow \alpha = \min(a, b/m) = \min(a, b/(b+1)^2)$

le max en $b = 1 \Rightarrow \alpha = \min(a, 1/4) \Rightarrow \alpha = 1/4$

$I = [-1/4, 1/4]$ (On applique la solution approchée)

$\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1^2 ds = 1 + x$

$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + 2s + s^2) ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$

$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x (1 + s + s^2 + s^3/3)^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{5} + \frac{x^7}{63}$

$\varphi_k(x) = 1 + x + \dots + x^k$

$\Rightarrow \varphi_0(x) = \frac{1}{1-x}$

Ex : $n = 2$, $y'' = -y$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$,

$\iff Y = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} Y_2 \\ -Y_1 \end{pmatrix} = f(Y)$

Rem : $\|Y\| = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$ alors $\|f(Y)\| = \|Y\|$

$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z$

$\varphi_1(x) = z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = z + \int_0^x f(\varphi(s))\, ds = z + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi_3(x) = z + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x \\ 1 - x^2/2 \end{pmatrix}$

$\varphi_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 - s^2/2 \\ -s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x - x^3/6 \\ 1 - x^2/2 \end{pmatrix}$ $\varphi_5(x) = \dots$

on a deux séries qui se profilent et qui convergent

$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ répond au pb de Cauchy

EDO dans $\mathbb{R}$:

EDO à variables séparées :

Déf : Soient $J_1 \subset \mathbb{R}$, $J_2 \subset \mathbb{R}$ des ouverts, $f \in C(J_1)$, $g \in C(J_2)$.

Une <u>EDO à variables séparées</u> est une équation $g(y)\,y' = f(x)$

et év. $y(x_0) = z$. $\quad y' = f(x)\,h(y) \quad y(x_0) = z$ (*)

Si $h(y) \neq 0 \ \forall y \Rightarrow g(y)y' = f(x)$ où $g(y) = 1/h(y)$

Si $h(y) = 0$ pour $y \Rightarrow h(z) \overset{?}{=} 0$

oui : $y(x) = z$ une solution

non : si φ est sol. du pb de Cauchy (*) alors $h(\varphi(x_0)) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, I \subset J_1$ tq $h(\varphi(x)) \neq 0$ sur I

$\Rightarrow \varphi(x)$ est une sol de $g(y)\,y' = f(x)$ sur I

où $g(y) = 1/h(y)$.

---

le 11.03.19

Ex : $yy' = -x \qquad y(0) = 0$ n'a pas de solution

Ex : $y\,y' = x \qquad y(0) = 0 \qquad \varphi(x) = x$, $\varphi(x) = -x$

Déf : Une <u>courbe intégrale</u> d'une EDO dans $\mathbb{R}^n$ est une courbe param. γ : $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$ où $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'EDO.

Thm 7 : Soit une EDO à var séparable, $g(y)y' = f(x)$ et $y(x_0) = z$

a) Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une solution, alors $\int_z^{\varphi(x)} g(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

b) si $g(y) \neq 0 \ \forall y$ et $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions vérifiant $y(x_0) = z$, alors $\psi(x) = \varphi(x) \ \forall x \in I$

c) Toute courbe intégrable de l'EDO $g(y)y' = f(x)$ est située sur une ligne de niveau de la fonction $W(x,y) = G(y) - F(x)$ où G et F sont les primitives de g et f.

Dém : a) Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une solution, alors $g(\varphi(s))\,\varphi'(s) = f(s) \ \forall s \in I$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} g(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

$$= \int_z^{\varphi(x)} g(t)\,dt \quad \text{où } t = \varphi(s)$$

b) si $g(y) \neq 0 \Rightarrow$ supposons que $g(y) > 0$, si $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions $\underbrace{\int_z^{\varphi(x)} g(t)\,dt}_{a} = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds = \underbrace{\int_z^{\psi(x)} g(t)\,dt}_{b}$

$\Rightarrow a - b = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} g(t)\,dt = 0$ et comme $g > 0$

$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \Rightarrow \varphi \equiv \psi$

c) $\int_z^{\varphi(x)} g(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \Rightarrow G(\varphi(x)) - G(z) = F(x) - F(x_0)$

soit γ une courbe intégrable, $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$

Posons $W(x,y) = G(y) - F(x)$ donc

$W(\gamma(x)) = W(x, \varphi(x)) = G(\varphi(x)) - F(x) = G(z) - F(x_0) = c$

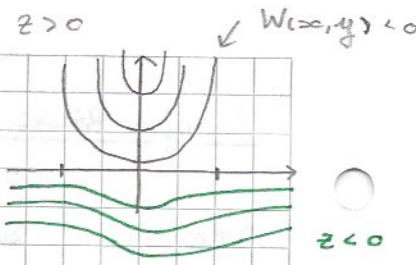
qui est donc une ligne de niveau. ∎

Ex : $y' = x y^2$, $y(0) = z$

si $z = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$

si $z \neq 0 \Rightarrow 1/y^2 \cdot y' = x \Rightarrow \int_z^{\varphi(x)} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^{x} s\,ds$

$\Rightarrow -1/\varphi(x) + 1/z = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow W(x,y) = -1/y - \frac{x^2}{2} = -1/z = c$



Ex: (Suite)

si $z>0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1/2 - \frac{x^2}{2}}$ $\quad I = \left(-\sqrt{\frac{2}{z}} ; \sqrt{\frac{2}{z}}\right)$

si $z<0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{-1/2 + \frac{x^2}{2}}$ $\quad I = \mathbb{R}$

Rém: Il existe beaucoup d'EDO qui peuvent être ramenée à une EDO à var. séparé par un CDV.

Ex: $y' = f\left(\dfrac{ay + bx + c}{dx + e}\right)$ $\quad$ CDV : $u = ay + bx + c \,/\, dx + e$ $\quad a \neq 0$, $d \cdot e \neq 0$

$\Rightarrow (dx+e)u = ay + bx + c$

$d \cdot u + (dx + e)u' = ay' + b = a \cdot f(u) + b$

$(dx + e)u' = a \cdot f(u) - du + b$ est une EDO à var. sép.

Ex : $y' = \dfrac{x + y}{x}$ $\quad y(1) = 1$ $\quad \Leftrightarrow \quad y' = 1 + y/x$ $\quad$ posons $u = y/x$

$\Rightarrow xu = y \qquad u + x \cdot u' = y' = 1 + u \Rightarrow xu' = 1 \quad \Leftrightarrow$

$u' = 1/x \qquad \int_1^{u(x)} 1\,dt = \int_1^x 1/t\,dt \Rightarrow u(x) - 1 = \ln(x)$

$\Rightarrow u(x) = 1 + \ln(x) \Rightarrow \varphi(x) = x + x\ln x \quad I = (0, \infty)$

EDO avec différentielles totales :

Déf: Soient $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un ouvert, $f, g \in C(G)$, une EDO $g(x,y)\,y' = f(x,y)$ est dite une EDO avec diff. totales si la 1-forme diff $\omega = -f\,dx + g\,dy$ est exacte.

Rem: $\omega \in \Omega^1(G)$ est exacte si $\exists\, W \in C^1(G)$ tq $dW = \omega$.

Rem: $\omega = -f\,dx + g\,dy$ est exacte si $d\omega = 0 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{\partial f}{\partial y}\, dy \wedge dx + \dfrac{\partial g}{\partial x}\, dx \wedge dy\right.$

$\left. = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x} + \partial f/\partial y\right) dx \wedge dy = 0\right) \Leftrightarrow \left[\partial g/\partial x = -\partial f/\partial y\right]$

Thm 8 : Toute courbe intégrale d'une EDO avec diff totales $g(x,y)\,y' = f(x,y)$ est située sur une ligne de niveau d'une primitive de $\omega = -f\,dx + g\,dy$ (1-forme diff)

Dém : Rap : $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,dx_i$, $\omega(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$

une courbe paramétrée $\gamma : [x_0, x] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \omega = \int_{x_0}^{x} \sum \alpha_i(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\,dt = \int_{x_0}^{x} \omega\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) dt$$

Soit γ une courbe intégrale. $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une solution de $g(x,y)\,y' = f(x,y)$, $\omega = -f\,dx + g\,dy$

$\partial\gamma/\partial t = (1, \varphi'(t)) \Rightarrow \omega\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = -f(t,\varphi(t)) \cdot 1 + g(t,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$

$\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

Si ω est exacte, $\exists W$ tq $\omega = dW$ (thm 5 automne)

$\int_\gamma \omega = W(\gamma(x)) - W(\gamma(x_0)) = 0 \Rightarrow W(\gamma(x)) = W(x, \varphi(x)) = W(\gamma(x_0)) = C$ ∎

Rem : Pour résoudre une EDO avec diff totales, il faut trouver une primitive de $\omega = -f\,dx + g\,dy$.

Ex : $y' = \dfrac{xy^2 + 1}{y(1-x^2)}$ et $y(0) = 1$ et $G = (-1,1) \times \mathbb{R}_{>0}$

Considérons $\underbrace{y(1-x^2)}_{g}\,y' = \underbrace{xy^2 + 1}_{f}$

$\partial f/\partial y + \partial g/\partial x = 2xy - 2xy = 0$

$\Rightarrow \omega = -f\,dx + g\,dy = -(xy^2 + 1)\,dx + y(1-x^2)\,dy$

$W(x,y) = -\frac{x^2y^2}{2} - x + C(y)$

$\frac{\partial W}{\partial y} = -x^2 y + C'(y) = y - yx^2 \Rightarrow C'(y) = y$

$\Rightarrow W(x,y) = \frac{-x^2y^2}{2} - x + \frac{y^2}{2} = C$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1/2 \Rightarrow \frac{-x^2}{2}\varphi(x)^2 - x + \frac{\varphi(x)^2}{2} = 1/2$

$\Rightarrow \varphi(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{1-x^2}}$, $I = (-1/2, 1)$

Ex: $y' = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $y(0) = 1$ $\quad G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (**)

Considérons $(x^2+y^2)\,y' = -xy$

$\omega = xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$

$\partial f/\partial y + \partial g/\partial x = -x + 2x = x \neq 0$

$\Rightarrow$ ω n'est pas exacte.

Considérons $\tilde{\omega} = y\omega = xy^2\,dx + (x^2y + y^3)\,dy$

(*) $y' = -\dfrac{xy^2}{x^2y+y^3}$ $\quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$

$\partial f/\partial y + \partial g/\partial x = -2xy + 2xy = 0$ $\quad (\tilde{\omega}$ exacte)

$W(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$

$\dfrac{\partial W}{\partial y} = x^2y + C'(y) = x^2y + y^3 \Rightarrow C'(y) = y^3 \Rightarrow C(y) = \frac{1}{4}y^4$

$W(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = c$

$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1/4 \Rightarrow \varphi(x)^4 + 2\varphi(x)^2x^2 + x^4 = 1 + x^4$

$(\varphi(x)^2 + x^2)^2 = 1 + x^2 \Rightarrow \varphi(x)^2 + x^2 = \sqrt{1+x^2}$

$\varphi(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2} - x^2}$ solution de (*) et (**)

Déf: Une fonction $\mu \in C^1(G)$ est un facteur intégrant d'une forme $\omega \in \Omega^1(G)$ si $\tilde{\omega} = \mu\omega$ est exacte.

le 18.03.19

EDO linéaires dans $\mathbb{R}$

Déf: Soient $J \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $f, h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues. Une EDO $y' = f(x)\,y$ est une EDO linéaire homogène. Une EDO $y' = f(x)\,y + h(x)$ est dite linéaire non-homogène.

Méthode: $y' = f(x)\,y$ $\quad y(x_0) = z$ $\quad y'/y = f(x) \Rightarrow \displaystyle\int_z^{\varphi(x)} \frac{1}{t}\,dt = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

$\ln(t)\Big|_z^{\varphi(x)} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \Rightarrow \varphi(x) = z \cdot e^{\tau}$ où

$\ln\left(\frac{\varphi(x)}{z}\right)$

$\tau = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

Méthode : $y' = f(x)y + h(x)$ $\quad y(x_0) = z$ [méthode de var de la cst]

$\varphi(x) = z(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}$, $\quad z(x_0) = z$

$\varphi'(x) = \underbrace{f(x)\cdot z(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}}_{f(x)\cdot\varphi(x)} + \underbrace{z'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}}_{h(x)}$

$= f(x)\cdot\varphi(x) + h(x)$

$\Rightarrow z'(x) = h(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}$

$\Rightarrow z(x) = z(x_0) + \int_{x_0}^{x} z'(t)\,dt$

$= z + \int_{x_0}^{x} h(t)\, e^{-\int_{x_0}^{t} f(s)\,ds}\,dt$

$\Rightarrow \varphi(x) = \left(z + \int_{x_0}^{x} h(t)\, e^{-\int_{x_0}^{t} f(s)\,ds}\,dt \right) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}$

Ex : $y' = \frac{2}{x}y - 2x^3$ $\quad y(1) = 1$

Lin. homo : $y' = \frac{2}{x}y$ $\quad y(1) = z$

$\Rightarrow \int_{z}^{\varphi(x)} \frac{1}{t}\,dt = \int_{1}^{x} \frac{2}{s}\,ds$

$\Rightarrow \ln|\varphi(x)| - \ln|z| = 2\ln(x) \quad \Rightarrow \varphi(x) = z\cdot x^2$

Lin. non-homo : $y' = \frac{2}{x}y - 2x^3$ $\quad y(1) = 1$

$\varphi(x) = z(x)\, x^2$ $\quad z(1) = 1$

$\varphi'(x) = 2x\, z(x) + x^2 z(x) = \frac{2\varphi(x)}{x} + z'(x)\, x^2$

$\Rightarrow z'(x)\, x^2 = -2x^3 \Rightarrow z' = -2x \Rightarrow z(x) = 1 - 2\int_{1}^{x} s\,ds$

$= 1 - x^2 + 1 = 2 - x^2$

$\Rightarrow \varphi(x) = (2 - x^2)\, x^2$

Rem : L'équation de Bernoulli

$y' = f(x)\cdot y + h(x)\, y^r$ $\quad r \neq 1, 0$, posons $u(x) = y^{1-r}(x)$

$u' = (1-r)\, y^{-r}\cdot y' \quad \Rightarrow u' = (1-r) f(x)\, u + (1-r) h(x)$

EDO autonome d'ordre 2.

Déf: $y'' = f(y, y')$ et $y(x_0) = z_1$, $y'(x_0) = z_2$

(Méthode) Cherchons u tq $y'(x) = u(y(x)) \Leftrightarrow y' = u(y)$

$\Rightarrow y'' = u'_y \cdot y' = u'_y \cdot u$

alors ① $u \cdot u'_y = f(y, u)$, $u(z_1) = z_2 = u(y(x_0)) = y'(x_0)$

② $y'(x) = u(y)$ $y(x_0) = z_1$

Ex: $y \cdot y'' = (y')^2 + y'$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

Posons u tq $y' = u(y)$ $y'' = u'_y \cdot y' = u'_y \cdot u$

$\Rightarrow y \cdot u'_y \cdot u = u^2 + u \Rightarrow u(1) = 2$

$$\frac{u'_y}{u+1} = \frac{1}{y} \Rightarrow \int_2^{u(y)} \frac{1}{t+1}\, dt = \int_1^y \frac{1}{s}\, ds$$

$\Rightarrow \ln|u+1| - \ln 3 = \ln y$

$\Rightarrow u = 3y - 1 = y'$

$y' = 3y - 1$ $y(0) = 1$ $\Rightarrow \dfrac{y'}{3y-1} = 1$

$$\Rightarrow \int_1^{y(x)} \frac{1}{3t-1}\, dt = \int_0^x 1\, ds$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \ln(3t-1) \Big|_1^{y(x)} = x$$

$\Rightarrow \ln(3y-1) - \ln 2 = 3x \Rightarrow 3y - 1 = 2e^{3x}$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{3x}$

Analyse Réelle : le 18.03.19

EDO linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Déf : $Mat(n, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$

Déf : Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert (intervalle). Soient $A : I \to Mat(n, \mathbb{R})$ $h(x) : I \to \mathbb{R}^n$ tq $A_{ij}(x) \in C(I)$, $h_j(x) \in C(I)$ $\forall i, j$

une EDO $y' = A(x)y + h(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ est linéaire ($y \in \mathbb{R}^n$)

(homogène si $h \equiv 0$ et non-homogène sinon).

même suppositions

Ex :
$$\begin{cases} y_1' = x y_1 + x^2 \\ y_2' = x^3 y_1 + 1 - x y_2 \end{cases} \iff y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad y' = \underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 \\ x^3 & -x \end{pmatrix}}_{A(x)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{h(x)}$$

Thm 9 : $\forall x_0 \in I$, $z \in \mathbb{R}^n$, le pb de Cauchy $y' = A(x)y + h(x)$, $y(x_0) = z$ admet une solution unique $\phi : I \to \mathbb{R}^n$.

Rem : Ainsi toute solution d'une EDO linéaire est tjrs globale.

Dém : Considérons $[\alpha, \beta] \subset I$. Posons $\|A\| = \max_{i,j} \left(\max_{x \in [\alpha, \beta]} |A_{ij}(x)| \right)$

Posons $\|y\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$. Considérons $f(x, y) = A(x)y + h(x)$

$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| = \|A(x)(y_1 - y_2)\| = \sum_i |(A(x)(y_1 - y_2))_i|$

$= \sum_i \left| \sum_j A_{ij}(x)(y_1 - y_2)_j \right| \leq \sum_{i,j} |A_{ij}(x)| |(y_1 - y_2)_j|$

$\leq n \cdot \|A\| \sum_j |(y_1 - y_2)_j| = \underbrace{n \cdot \|A\|}_{L} \|y_1 - y_2\|$

$\Rightarrow f(x, y)$ est lipschitzienne en $y \in \mathbb{R}^n$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$

Considérons $V = C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$ muni de $\|y\|_\infty = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \|y\|$

V est de Banach. On définit $T : V \to V$ ($T\phi(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\, ds$

$\Rightarrow \exists p$ tq T^p est contractante $\Rightarrow \exists!\ \phi$ tq $T\phi = \phi$

$\Rightarrow \phi$ est une solution de $y' = f(x, y) = A(x)y + h(x)$

$\Rightarrow \phi$ est unique sur $[\alpha, \beta]$ $\forall \alpha, \beta$

$\Rightarrow \phi$ est unique sur I. $\square$

EDO lin. hom dans $\mathbb{R}^n$:

Lemme: Soient $\phi_1, \dots, \phi_k : I \to \mathbb{R}^n$ des solutions de $y' = A(x)y$ et $c_1, \dots, c_k$ des constantes, alors $\phi(x) = \sum c_i \phi_i(x)$ est aussi une solution

Dém: $\phi(x)' = \sum_i c_i \phi_i'(x) = \sum_i c_i A(x) \phi_i(x) = A(x) \sum_i c_i \phi_i(x)$
$= A\phi(x)$. □

Déf: Des applications $\phi_1, \dots, \phi_k : I \to \mathbb{R}^n$ sont linéairement dépendantes si $\exists\, c_1, \dots c_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tq $\sum_i c_i \phi_i(x) = 0 \quad \forall x \in I$

Ex : $n = 2$ $\quad \phi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\phi_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ sont lin. indépendants

Exc : $\phi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$ $\phi_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$ $\phi_3(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3x \end{pmatrix}$

$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow$ lin. dépendantes.

Thm 10: L'ensemble des solutions sur $I \subset \mathbb{R}$ d'une EDO $y' = A(x)y$ dans $\mathbb{R}^n$ est un e.v de dimention n.

Dém: le principe de superposition $\Rightarrow$ un e.v.

Fixons $x_0 \in I$, prenons $z_1, \dots z_n \in \mathbb{R}^n$ lin indép.

(Thm 9) $\Rightarrow \exists$ solutions $\phi_1, \dots \phi_n$ tq $\phi_i(x_0) = z_i$

mq $\phi_1 \dots \phi_n$ lin. indép :

supposons $\exists c_1, \dots c_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tq $\sum_i c_i \phi_i(x) = 0 \ \forall x \in I$

$\Rightarrow 0 = \sum_i c_i \phi_i(x_0) = \sum_i c_i z_i$ ↯

mq $\phi_1, \dots, \phi_n$ forment une base : $\exists c_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

soit $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ une solution, alors $\phi(x_0) = \sum_i c_i z_i$

Considérons $\psi = \phi - \sum c_i \phi_i$ (principe de sup) $\Rightarrow$

ψ est une solution, $\psi(x_0) = \phi(x_0) - \sum c_i \phi_i(x_0) = 0$

$\Rightarrow \phi(x) = \sum c_i \phi_i(x)$

□

Analyse Réelle : le 25.03.19

Déf : Soient $\phi_1 \dots \phi_n$ des solutions de l'EDO $y' = A(x)y$ dans $\mathbb{R}^n$.
On dit que $W(x) = \det\left(\begin{pmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \end{pmatrix}\right)$ est le wronskien de l'EDO $y' = A(x)y$

Thm 11 : Soient $\phi_1 \dots \phi_n$ des solutions de $y' = A(x)y$ dans $\mathbb{R}^n$.
Alors $\phi_1 \dots \phi_n$ sont lin. indép. $\Leftrightarrow$ $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

Dém : Soit $W(x) \neq 0$, supposons que $\phi_1, \dots, \phi_n$ sont lin. dép $\Rightarrow \exists c_1 \dots c_n$
tq $\sum_i c_i \phi_i = 0 \quad \forall x \Rightarrow \phi_1(x), \dots \phi_n(x)$ sont liés
$\Rightarrow W(x) = 0$ ↯

Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ lin. indép, supposons que $\exists x_0 \in I$ tq $W(x_0) = 0$
$\Rightarrow \phi_1(x_0), \dots, \phi_n(x_0)$ sont liés $\Rightarrow \exists c_1 \dots c_n$ tq $\sum_i \phi_i(x_0) c_i = 0$
posons $\phi(x) = \sum_i c_i \phi_i(x)$ et ϕ est une solution tq $\phi(x_0) = 0$
par thm 9 (unicité) $\Rightarrow \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi_1 \dots \phi_n$ lin. dép. ↯

□

Ex : $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ sont lin. indép.
Mais $W(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow$ elles ne sont pas solution d'une EDO $y' = A(x)y$
(Une telle Edo n'existe pas)

Déf : Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ des solutions lin. indép. de l'EDO $y' = A(x)y$.
On dit que $\phi_1 \dots \phi_n$ forment un ensemble fondamental de solution et que $M(x) = (\phi_1(x) | \dots | \phi_n(x))$ est une matrice fondamentale.

Lemme : $M : I \to Mat(n, \mathbb{R})$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)y \Leftrightarrow M'(x) = A(x)M(x)$ et $M(x)$ est inversible $\forall x \in I$

Dém: $(\phi_1'(x) | \dots | \phi_n'(x)) = (A(x)\phi_1(x) | \dots | A(x)\phi_n(x)) \Leftrightarrow$

$\phi_i'(x) = A(x)\phi_i(x)\ \forall i \Leftrightarrow \phi_1 \dots \phi_n$ sont des solutions.

$M(x)$ est inversible $\Leftrightarrow W(x) \neq 0 \Leftrightarrow \phi_1 \dots \phi_n$ sont lin. indép. □

Rem: Etant donnée $M(x)$, on peut trouver $A(x)$:

$$A(x) = M'(x) \cdot (M(x))^{-1}$$

Ex:

$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = x y_1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y' = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}}^{A(x)} y$$

$$\phi_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$W(x) = -1$$

$$A(x) \cdot M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = M'(x)$$

Rem: Si $B(x), C(x)$ tq $B_{iL}, C_{Lj} \in C^1(I)$, alors $(B(x) \cdot C(x))' = B'(x) \cdot C(x) + B(x) \cdot C'(x)$

$$(B(x) \cdot C(x))'_{ij} = \left(\sum_L B_{iL}(x) C_{Lj}(x)\right)' = \sum_L B'_{iL}(x) \cdot C_{Lj}(x) + \sum_L B_{iL} \cdot C'_{Lj}$$

$$= (B'(x) \cdot C(x))_{ij} + (B(x) C'(x))_{ij}$$

Lemme: Soit $M(x)$ une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x) y$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors : inversible.

a) Si $C \in Mat(n, \mathbb{R})$, alors $\tilde{M}(x) = M(x) \cdot C$ est aussi une matrice fondamentale.

b) La solution au problème de Cauchy $y' = A(x) y$, $y(x_0) = z$ est donnée par $\phi(x) = M(x) (M(x_0))^{-1} z$

Dém : a) $\tilde{H}'(x) = H'(x) \cdot C = A(x) H(x) \cdot C = A(x) \tilde{H}(x)$

$\tilde{W}(x) = W(x) \det(C) \neq 0 \Rightarrow \tilde{H}$ inversible

$\Rightarrow \tilde{H}$ matrice fondamentale

b) $\Phi(x_0) = H(x_0) (H(x_0))^{-1} \cdot z = z$

$\Phi'(x) = H'(x) (H(x_0))^{-1} \cdot z = A(x) H(x) (H(x_0))^{-1} \cdot z = A(x) \Phi(x)$ □

Lemme : Soit $A(x)$ une matrice de taille n, dont les vecteurs propres $V_1, \dots, V_n$ ne dépendent pas de x et ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in I$. On pose $\Phi_i(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)\, ds\right) \cdot V_i$ où $\lambda_i(x)$ est la valeur propre associée à V_i. Alors $H(x) = (\Phi_1(x) | \dots | \Phi_n(x))$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)\, y$

Dém : $\Phi_i'(x) = \lambda_i(x) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)\, ds\right) V_i = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)\, ds\right) A(x) V_i$

$= A(x) \Phi_i(x) \Rightarrow \Phi_i$ est une solution.

$$W(x) = \det\left(\exp\left(\int_{x_0}^{x} \lambda_1(s)\, ds\right) V_1 | \dots | \exp\left(\int_{x_0}^{x} \lambda_n(s)\, ds\right) V_n\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \lambda_i(s)\, ds\right) \det(V_1 | \dots | V_n) \neq 0$$

$\Rightarrow \Phi_1 \dots \Phi_n$ sont lin indép. □

Ex : $y' = A(x)\, y \qquad A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + x$, $\lambda_2 = 1 - x$

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \int_0^x \lambda_1(s)\, ds = x + \frac{x^2}{2} \qquad (x_0 = 0)$

$\Phi_1(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_2(x) = e^{x - \frac{x^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$H(x) = \begin{pmatrix} e^{x + \frac{x^2}{2}} & e^{x - \frac{x^2}{2}} \\ e^{x + \frac{x^2}{2}} & -e^{x - \frac{x^2}{2}} \end{pmatrix} \qquad W(x) = -2e^{2x}$$

Rem: Si $A(x) = A$ (une matrice à coeff const) et A a n vect. propre, $\phi_i(x) = e^{(x-x_0)\lambda_i} v_i$

Ex: $y' = A(x)\,y \qquad A(x) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = i+1$, $\lambda_2 = 1-i$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow b = ia \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

même méthode $\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\phi_1(x) = e^x e^{i} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \phi_2(x) = e^x e^{-i} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\tilde{\phi}_1 = \dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ -e^x \sin x \end{pmatrix}$

$\tilde{\phi}_2 = \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2i} = \begin{pmatrix} e^x \sin x \\ e^x \cos x \end{pmatrix}$

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$
$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$$
$$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ -e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix}$$

$W(x) = e^{2x}$

Matrice e^B et Matrice fondamentale:

Déf: Soit $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, on pose $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{B^k}{k!} = I + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots$

Lemme: $(e^B)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(B^k)_{ij}}{k!}$ converge absolument donc e^B est bien définie.

Dém: Posons $\|B\| = \max_{ij} |B_{ij}|$ alors si $B, C \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ on a $\|B \cdot C\|$

$= \max_{ij} |(B \cdot C)_{ij}| = \max_{ij} \left| \sum_{l=1}^{n} B_{il} \cdot C_{lj} \right| \leq \max_{ij} \sum_{l=1}^{n} |B_{il}| \cdot |C_{lj}|$

$\leq n \cdot \|B\| \cdot \|C\|$

$\|B^k\| = \|B \cdot B^{k-1}\| \leq n \cdot \|B\| \cdot \|B^{k-1}\| \leq (n \cdot \|B\|)^k$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{|(B^k)_{ij}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\|B^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(n \cdot \|B\|)^k}{k!} = e^{n \cdot \|B\|}$

∎

Rem: $e^{B(x)}$ où $B : [\alpha, \beta] \longrightarrow Mat(n, \mathbb{R})$

posons $\|B\| = \max_{i,j} \left(\max_{x \in [\alpha,\beta]} |B_{ij}(x)| \right)$

$\Rightarrow$ la série $e^{B(x)}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$

Déf: Soient $A, B \in Mat(n, \mathbb{R})$. Si $AB = BA$, on dit que A et B commutent.

Rem: Si A et B commutent $e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B} = e^{B} \cdot e^{A}$

Rem: Donc $e^{B} \cdot e^{-B} = e^{0 \cdot I} = I \Rightarrow e^{B}$ est inversible $\forall B$

Lemme: Soit $B : I \longrightarrow Mat(n, \mathbb{R})$ une app. C^1. le 01.04.19

Si $B'(x)$ et $B(x)$ commutent, alors on a :

$$(B(x)^k)' = k \cdot B'(x) \cdot B(x)^{k-1}$$

Dém: Par récurrence: $k = 1$ - vrai

$$((B(x))^{k+1})' = (B(x) \cdot B(x)^k) = B'(x) \cdot B(x)^k + B(x) \cdot B'(x) \cdot k \cdot B(x)^{k-1} = (k+1) B'(x) B(x)^k$$

∎

Thm 12 :

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Soit $A : I \to Mat(n, \mathbb{R})$ une appli. tq $A_{i,j} \in C(I)$ $\forall i,j$, de plus, on suppose que $A(x)$ et $A(s)$ commutent $\forall x, s \in I$. Alors

$H(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A(s)\,ds}$ est une matrice fondamentale de l'EDO $y' = A(x)\,y$ dans $\mathbb{R}^n$.

Dém: Posons $B(x) = \int_{x_0}^{x} A(s)\,ds$. Alors $B'(x) = A(x)$

$$B'(x)\cdot B(x) = A(x)\cdot \int_{x_0}^{x} A(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} A(x)A(s)\,ds$$

$$= \int_{x_0}^{x} A(s)A(x)\,ds = \int_{x_0}^{x} A(s)\,ds \cdot A(x) = B(x)\cdot B'(x)$$

Donc $(M(x))' = \left(e^{\int_{x_0}^{x} A(s)\,ds} \right) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B(x))^k}{k!} \right)'$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B(x)^k)'}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} B'(x)\frac{k}{k!} B(x)^{k-1}$$

$$= B'(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot B(x)^n = B'(x)\cdot e^{B(x)} = A(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} A(s)\,ds}$$

$$= A(x)\cdot M(x)$$

$\Rightarrow M'(x) = A(x)\cdot M(x)$

De plus, $M(x) = e^{B(x)}$ est inversible

$\Rightarrow M$ matrice fondamentale

∎

Rem: $M(x_0) = I$

Rem: Si $A(x) = A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ une matrice à coeff cst alors $A(x)$ et $A(s)$ commutent.

A est continue sur $I = \mathbb{R}$, on peut choisir $x_0 = 0$.

Donc $M(x)\, e^{x\cdot A}$

Rem: Généralisation :

$A(x) = a_0(x)\, I + a_1(x)\cdot A + a_2(x)\cdot A^2 + \ldots$ $\quad A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$

$a_j \in C(I)$, alors $A(x)$ et $A(s)$ commutent.

Rem: (Forme normale de Jordan)

Si $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ alors $\exists\, S \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ inversible tq $B = SJS^{-1}$ où J est une matrice diag. par bloc

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & J_{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Lemme : Si $B = SJS^{-1}$ alors $e^B = e^{SJS^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SJS^{-1})^k}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SJ^kS^{-1}}{k!} = S \cdot e^J \cdot S^{-1}$$ (□)

Thm 13 : Soit $B \in Mat(n, \mathbb{C})$

a) Si B a n val. propres distinctes, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$e^B = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (B - \lambda_j I) \right)$$

b) Si B a une unique val. prop. λ_1, alors

$$e^B = e^{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(B-\lambda I)^k}{k!} \right)$$

Exc : $n = 2$: si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors

$$e^B = \frac{e^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} (B - \lambda_2 I) + \frac{e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} (B - \lambda_1 I)$$

si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors

$$e^B = e^{\lambda}(B - \lambda I) + e^{\lambda} I$$

Rem : Si $J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_n}} \end{pmatrix}$, $e^J = \begin{pmatrix} e^{J_{\lambda_1}} & & \\ & & e^{J_{\lambda_n}} \end{pmatrix}$

où $e^{J_{\lambda_i}} = e^{\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(B-\lambda_i)^k}{k!} \right)$ où $m = \dim J_{\lambda_i}$

Dém : a) Soit $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs p. de B, $v_1, \dots, v_n$ sont lin. indép.

$\Rightarrow$ il suffit de vérifier l'égalité $\forall v_i$

$$e^B v_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} v_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_m^k}{k!} v_m = e^{\lambda_m} v_m$$

si $i \neq m$: $\prod_{j \neq i}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (B - \lambda_j I) \cdot v_m = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (\lambda_m - \lambda_j) v_m = 0$ ($i = m$)

$\exists j = m$

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} \left(\prod_{j \neq i}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (B - \lambda_j I) \right) \cdot v_m = e^{\lambda_m} \left(\prod_{j \neq m}^{n} \frac{\lambda_m - \lambda_j}{\lambda_m - \lambda_j} \right) v_m = e^{\lambda_m} v_m$$ ∎

Dém:

b) $B = SJS^{-1}$ où $J = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \text{ ou } 1 \\ & \ddots & \\ 0 \text{ ou } 1 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot I + C$ où

$C = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ & \ddots & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^n = 0$ matrice nilpotente.

$\Rightarrow B = \lambda \cdot I + S \cdot C \cdot S^{-1} = \lambda \cdot I + \tilde{C}$

et $\tilde{C}^n = (SCS^{-1})^n = SC^nS^{-1} = 0$ nilpotente.

$$e^B = e^{\lambda I + \tilde{C}} = e^{\lambda I} \cdot e^{\tilde{C}} = e^{\lambda} \cdot e^{\tilde{C}} = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tilde{C}^k}{k!} = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (B - \lambda I)^k$$

□

Ex: $Y' = A(x)\, Y$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & 2x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} = I + 2x \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A(x)$ et $A(s)$ commutent

Soit $x_0 = 0$, $B(x) = \int_0^x A(s)\, ds = \begin{pmatrix} x - x^2 & x^2 \\ -x^2 & x + x^2 \end{pmatrix}$

$M(x) = e^{B(x)}$

$\det (B(x) - \lambda I) = (x - x^2 - \lambda)(1 + x^2 - \lambda) + x^4 = (x - \lambda)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = x$

$$M(x) = e^B = e^x (I + B(x) - xI) = e^x \begin{pmatrix} 1 - x^2 & x^2 \\ -x^2 & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

Rem: 1) $B(x) = x \cdot I + x^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$

$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^B = e^{xI} \cdot e^{x^2 C} = e^x (I + x^2 C)$

$$= e^x \begin{pmatrix} 1 - x^2 & x^2 \\ -x^2 & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

2) $\tilde{M}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & 1 + x^2 \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale

$W(x) = e^{2x}$.

Lemme : Soient $A \in \mathrm{mat}(n, \mathbb{R})$, J sa forme normale de Jordan,
$S \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ tq $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$.
Alors $H(x) = S \cdot e^{xJ}$ est une matrice fond. de $Y' = A(x)Y$

Dém : $\tilde{H}(x) = e^{xA} = e^{xSJS^{-1}} = Se^{xJ}S^{-1}$ est matrice fond

$\Rightarrow H(x) = \tilde{H}(x) \cdot S$ est aussi matrice fond.

$= S \cdot e^{xJ}$ □

Cas : A a n vect. propres $v_1, \dots, v_n$ lin. indép $\Rightarrow$

$S = (v_1 | \dots | v_n)$ car $A \cdot S = (Av_1 | \dots | Av_n) = (\lambda_1 v_1 | \dots | \lambda_n v_n)$

$= S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = S \cdot J \Rightarrow A = S \cdot J \cdot S^{-1}$

Donc $H(x) = (v_1 | \dots | v_n) \begin{pmatrix} e^{x\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x\lambda_n} \end{pmatrix} = \left(e^{x\lambda_1} v_1 | \dots | e^{x\lambda_n} v_n\right)$

Cas : Si A a n-1 vect. propres $v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. indép et un vect.
propre généralisé u tq $Au = \lambda_1 u + v_1$

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$ alors $S = (v_1 | u | \dots | v_n)$

Car $A \cdot S = (Av_1 | \dots | Av_n) = (\lambda_1 v_1 | \lambda_1 u + v_1 | \dots)$

$= (v_1 | u | v_2 | \dots) \cdot SJ \Rightarrow A = SJS^{-1}$

$e^{x\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}} = e^{x\lambda_1}\left(I + x\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} - x\lambda_1 I\right) = \begin{pmatrix} e^{x\lambda_1} & xe^{x\lambda_1} \\ 0 & e^{x\lambda_1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H(x) = (v_1 | u | v_2 | \dots) \begin{pmatrix} e^{x\lambda_1} & xe^{x\lambda_1} & & \\ 0 & e^{x\lambda_1} & & \\ & & e^{x\lambda_2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

$= \left(e^{x\lambda_1} v_1 | e^{x\lambda_1}(u + xv_1) | \dots\right)$

EDO Linéaires non-homogènes :

le 08.04.19

Méthode: Soient $A : I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $h : I \to \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, u

pb de Cauchy $y' = A(x) \cdot y + h(x) \qquad y(x_0) = z_0$

Soit M une matrice fond. de $y' = A(x) \cdot y$ alors

le pb de Cauchy $y' = A(x)\, y \qquad y(x_0) = z$ a la solution

$$\phi_0(x) = M(x) \left(M(x_0)\right)^{-1} \cdot z$$

Variation de la cst :

$$z : I \to \mathbb{R}^n, \ C^1, \quad z(x_0) = z_0$$

$$\phi(x) = M(x) \cdot \left(M(x_0)\right)^{-1} \cdot z(x)$$

$$\phi'(x) = M'(x) \left(M(x_0)\right)^{-1} \cdot z(x) + M(x) \left(M(x_0)\right)^{-1} \cdot z'(x) =$$

$$= A(x) \cdot \phi(x) + h(x)$$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = M(x_0) \cdot \left(M(x)\right)^{-1} h(x) \Rightarrow \quad z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} z'(s)\, ds$$

$$= z_0 + M(x_0) \int_{x_0}^{x} \left(M(s)\right)^{-1} \cdot h(s)\, ds$$

Donc $$\phi(x) = M(x) \left(\left(M(x_0)\right)^{-1} z_0 + \int_{x_0}^{x} \left(M(s)\right)^{-1} h(s)\, ds \right)$$

Ex: $y' = A \cdot y + h(x) \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad h(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M(x) = e^{xA} = \exp\begin{pmatrix} 2x & x \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = e^{2x} \left(I + \begin{pmatrix} 2x & x \\ 0 & 2x \end{pmatrix} - 2x\, I \right)$$

$$= e^{2x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(x)^{-1} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(0) = I \quad \Rightarrow \quad \left(M(0)\right)^{-1} \cdot z_0 = z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x e^{-2s} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$\phi(x) = M(x) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \end{pmatrix} = e^{x} \begin{pmatrix} 1 + x/2 - x/2\, e^{-2x} \\ 1/2 - 1/2\, e^{-2x} \end{pmatrix}$$

EDO Autonomes dans $\mathbb{R}^n$:

Déf: Une EDO autonome $y' = f(y)$ où f est un champs de vecteurs $U \subset \mathbb{R}^n$.

Exc : $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2^2 \\ y_2' = y_1 \cdot y_2 \end{cases}$ $\qquad f(y) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2^2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}$

Exc : $y' = A \cdot y$, $f_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot y_j$

Déf: Soit $\phi : I \longrightarrow U$, une solution de l'EDO $y' = f(y)$, alors on dit que la courbe paramétrée $\gamma = \{ ((\phi(x))_1, \dots, (\phi(x))_n) \in U \mid x \in I \}$ est une orbite dans l'espace de phase $\mathbb{R}^n$.

Rem : $\partial\gamma/\partial x = (\phi'(x)_1, \dots, \phi'(x)_n) = (f(\phi(x))_1, \dots, f(\phi(x))_n)$

$\Rightarrow f(\phi(x))$ est tangeant à γ au point $\gamma(x)$

Déf: L'ensemble des orbites est appelé le portrait de phase de l'EDO $y' = f(y)$

Déf: Si $y_0 \in U$ est tq $f(y_0) = 0$, alors on dit que $\phi(x) = y_0$ est une solution stationaire.

(L'orbite est juste un point)

Exc : $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2^2 \\ y_2' = y_1 \cdot y_2 \end{cases}$ $\qquad \phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la sol. stationaire.

Déf: Une fonction $F \in C^1(U)$ est dite intégrable première de l'EDO $y' = f(y)$, si F est cst sur toute orbite.

(ie: $\forall \phi : I \to U$ sol. on a $F(\phi(x)) = F(\phi(s)) \quad \forall x, s \in I$)

Ex : $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \Rightarrow y_1 \cdot y_1' + y_2 \cdot y_2' = 0 \Rightarrow (y_1^2 + y_2^2)' = 0$

$\Rightarrow F(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ est int. première.

Lemme : Soit $F \in C^1(U)$, si $\langle \text{grad } F, f(y) \rangle = 0 \quad \forall y \in U$

alors F est une intégrale première.

Dém : $(F(\phi(x)))' = (F(\phi(x)_1, \dots, \phi(x)_n))'$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\Big|_{y_i = \phi(x)_i} \cdot \phi'(x)_i =$$

$$= \langle \text{grad}(F(\phi(x))), f(\phi(x)) \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ F est une intégrale première. ∎

Rem : Si F est une intégrale première et $g \in C^1(\mathbb{R})$, alors $g(F)$ est aussi une intégrale première.

Déf : Les intégrales premières $F_1, \dots, F_k$ sont <u>indépendantes</u> si grad $F_1, \dots$, grad F_k sont lin. indép.

Rem : Le fait de connaître k int. premières permet de ramener l'EDO dans $\mathbb{R}^n$ à une EDO dans $\mathbb{R}^{n-k}$

Ex : $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \Rightarrow F = y_1^2 + y_2^2 = C$

$\Rightarrow y_2 = \sqrt{C - y_1^2}$ et $y_1' = \sqrt{C - y_1^2}$

Thm 15 : (14)

Soit l'EDO $\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$, posons $\omega = f_2\, dy_1 - f_1\, dy_2 \in \Omega^1(U)$

(f champs de vect sur U)

S'il existe $\mu \in C(U)$ et $F \in C^1(U)$ tq $dF = \mu \cdot \omega$, alors

F est une intégrale première.

Dém : $dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i = \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2$

$= \mu f_2 dy_1 - \mu f_1 dy_2$

$\Rightarrow \langle \text{grad } F, f \rangle = \mu f_2 f_1 - \mu f_1 f_2 = 0 \Rightarrow F$ int. première.

Ex : $\begin{cases} y_1' = y_1 \sin y_2 \\ y_2' = 2\cos y_2 \end{cases}$, $\omega = 2\cos y_2 \, dy_1 - y_1 \sin y_2 \, dy_2$

Prenons $\mu = y_1$, $\mu\omega = 2y_1 \cos y_2 \, dy_1 - y_1^2 \sin y_2 \, dy_2$

$= d(y_1^2 \cos y_2) \Rightarrow F = y_1^2 \cos y_2$

Orbites dans $\mathbb{R}^2$:

$y' = A \cdot y$ où $A \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\text{Im } \lambda_1 \neq 0 \neq \text{Im } \lambda_2$ $Av = \lambda v \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \lambda_2 = \bar{\lambda_1}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda + \mu i$, $\lambda_2 = \lambda - i\mu$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\mu \in \mathbb{R}^*$

$v = h_1 + ih_2$, $\bar{v} = h_1 - ih_2$ où $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^2$ sont lin. indép.

$\Rightarrow \phi(x) = c_1 e^{\lambda x + i\mu x} \cdot v + c_2 e^{\lambda x - i\mu x} \cdot \bar{v}$ prenons

$c_1 = 1/2 \, e^{i\alpha}$ et $c_2 = 1/2 \, e^{-i\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \phi(x) = \frac{e^{\lambda x}}{2} \left(e^{i\mu x + i\alpha}(h_1 + ih_2) + e^{-i\mu x - i\alpha}(h_1 - ih_2) \right)$

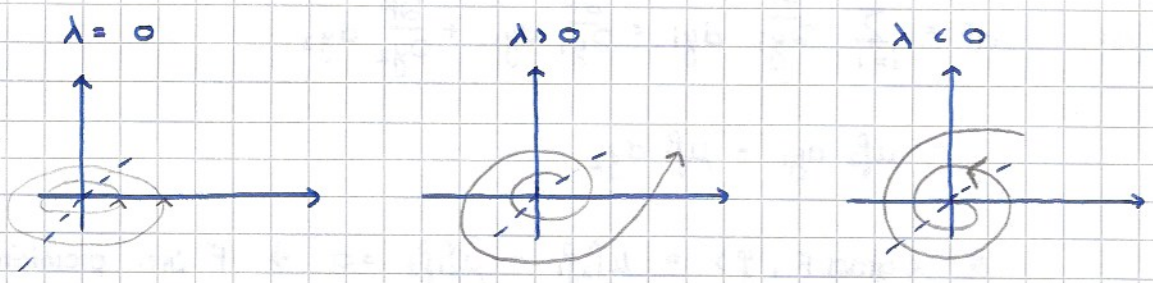
$= e^{\lambda x} \left(h_1 \cos(\mu x + \alpha) - h_2 \sin(\mu x + \alpha) \right)$

Prenons h_1, h_2 comme une base de $\mathbb{R}^2$

Dans cette base, $\phi(x)_1 = e^{\lambda x} \cos(\mu x + \alpha)$

$\phi(x)_2 = -e^{\lambda x} \sin(\mu x + \alpha)$

Trois cas :



Rem: $\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une sol stationaire.

Rem: Une orbite fermée $\Rightarrow$ solution périodique

$\exists T > 0$ tq $\phi(x+T) = \phi(x)$ non stationaire

Rem: L'EDO $y' = A \cdot y$ dans $\mathbb{R}^2$ n'a pas de sol. périodique ✓ si

$\lambda_1 \neq i\mu$ et $\lambda_2 \neq -i\mu$.

($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors ϕ est comb. lin de $e^{\lambda_1 x} V_1$ et $e^{\lambda_2 x} V_2$

ou $e^{\lambda x} v$ et $e^{\lambda x}(u + x v)$)

Lemme: L'EDO $y' = Ay$ n'a pas de sol périodiques non-stationaires si $\operatorname{tr} A = A_{11} + A_{22} \neq 0$

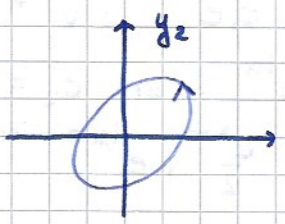
Dém: $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ ☐

---

le 15.04.19

Rap: $y' = Ay$, $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$

$\lambda_{1,2} = \pm i\mu$



orbite périodique fermée

Thm 15 : (Critère de Dulac)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe. Soit $f = (f_1, f_2)$ un champs de vecteurs de classe C^1 sur U. Supposons qu'il existe $\mu \in C^1(U)$ tq $\operatorname{div}(\mu \cdot f) = \frac{\partial(\mu f_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\mu f_2)}{\partial y_2} \neq 0$ $\forall y \in U$. Alors l'EDO $y' = f(y)$ n'a pas de solutions périodiques non-stationaires.

Démo : Soit γ une orbite fermée, $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mu$, $\gamma = (\phi(x)_1, \phi(x)_2)$

$$\partial\gamma/\partial x = (\phi'(x)_1, \phi'(x)_2) = (f_1(\phi(x)), f_2(\phi(x)))$$

Posons $\omega = \mu f_2 \, dy_1 - \mu f_1 \, dy_2$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^T \left((\mu f_2)(\phi(x)) \underbrace{\partial\gamma_1/\partial x}_{f_1} - (\mu f_1)(\phi(x)) \underbrace{\partial\gamma_2/\partial x}_{f_2} \right) dx = 0$$

$\mu \in C^1(\mu)$, f est $C^1 \Rightarrow \operatorname{div}(\mu f) \in C(\mu)$ (continue et ne traverse pas 0)

$\operatorname{div}(\mu \cdot f) \neq 0 \quad \forall y \Rightarrow \operatorname{div}(\mu \cdot f)$ ne change pas de signe

$$d\omega = \frac{\partial(\mu \cdot f_2)}{\partial y_2} dy_2 \wedge dy_1 - \frac{\partial(\mu \cdot f_1)}{\partial y_1} dy_1 \wedge dy_2 = -\operatorname{div}(\mu \cdot f)\, dy_1 \wedge dy_2$$



$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = \pm \int_D d\omega \overset{GR}{=} \pm \int_D \operatorname{div}(\mu \cdot f)\, dy_1 dy_2 \neq 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow \nexists$ orbite fermée $\Rightarrow \nexists$ sol. périodique ∎

Exc :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 = f_1 \\ y_2' = y_2 = f_2 \end{cases} ; \quad \operatorname{div} f = \partial f_1/\partial y_1 + \partial f_2/\partial y_2 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ pas de sol périodiques non-stationaires.

Exc :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 e^{y_1} \\ y_2' = y_2 e^{y_2} \end{cases} ; \quad \operatorname{div} f = e^{y_1}(1 + y_1) + e^{y_2}(1 + y_2)$$

$\mu = e^{-y_1 - y_2}$ fct lisse C^1 (hyp ✓)

$$\operatorname{div}(\mu f) = \partial/\partial y_1 (y_1 e^{-y_2}) + \partial/\partial y_2 (y_2 e^{-y_1}) = e^{-y_2} + e^{-y_1} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ pas de sol. périodiques non-stationaires.

EDO linéaires d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$:

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle ouvert.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (*)$$

Rem: $a, b \in C(I)$!

Lemme: $(*)$ est équivalent à : $u'' + p(x)u = 0$, où $x_0 \in I$,

$u(x) = e^{1/2 \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} \cdot y(x)$ et

$p(x) = b(x) - \frac{1}{2}a'(x) - \frac{1}{4}a^2(x)$

} changement de variables.

Démo: Posons $y(x) = A(x) \cdot u(x)$, où $A(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$

$$y' = A'u + Au' = -\frac{1}{2}aAu + Au'$$

$$y'' = -\frac{1}{2}a'Au + \frac{1}{4}a^2Au - \frac{1}{2}aAu' - \frac{1}{2}aAu' + Au''$$

$$\frac{1}{A}(y'' + ay' + by) = u'' + u\left(-\frac{1}{2}a' - \frac{1}{4}a^2 + b\right)$$

∎

Lemme: Si $\varphi, \psi \in C^2(I)$ sont des solutions de $(*)$, alors $C_1\varphi + C_2\psi$ est aussi une sol de $(*)$.

(Pv: calculer 1ère et 2è dérivée + somme)

Déf. $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont linéairement dépendants s'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$C_1, C_2 \neq 0$ tq $C_1 \cdot \varphi(x) + C_2 \cdot \psi(x) = 0 \ \forall x \in I$

Posons $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & a(x) \end{pmatrix}$ $\quad Y' = A(x) \cdot Y$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $(**)$

Thm IG:

a) $\varphi \in C^2(I)$ est une sol de $(*) \Leftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est une sol. de $(**)$

b) $\varphi, \psi \in C^2(I)$ sont linéairements indépendants $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$ le sont.

c) L'ensemble de sol de $(*)$ est un esp. vect. de dim. 2.

Démo: a) $\phi' = A(x)\phi \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\varphi'\\ \psi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi'\\ -b(x)\varphi' - a(x)\varphi\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \varphi'' + a(x)\varphi' + b(x)\varphi = 0$

b) Supposons que $\exists c_1, c_2$ tq $c_1\varphi(x) + c_2\psi(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1\varphi(x) + c_2\psi(x) = 0 \\ c_1\varphi'(x) + c_2\psi'(x) = 0 \end{cases}$ $\forall x \in I \Leftrightarrow c_1\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix} = 0 \ \forall x \in I$

$\Rightarrow$ lin. dép. $\Leftrightarrow$ lin. dép.

c) a) + b) $\Rightarrow$ il y a un isomorphisme entre les deux espaces de solutions $\Rightarrow$ dim 2 ▨

Déf: Soient $\varphi, \psi \in C^2(I)$ des solutions de (*), on dit que $W(x) = \det\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ \varphi' & \psi'\end{pmatrix}$ est le <u>wronskien</u> de φ et ψ.

Lemme: Deux solutions φ et ψ de (*) sont lin. indép. $\Leftrightarrow W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

Démo: Thm 16 + 11 ▨

Thm 17: Soit $x_0 \in I$. Soient $\varphi, \psi \in C^2(I)$ des sol. de (*), alors

$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$.

Démo: Si φ, ψ sont linéairement dép $\Rightarrow W(x) = 0$

Supposons φ et ψ lin. indép. $W(x) = \varphi\cdot\psi' - \varphi'\cdot\psi$

$W'(x) = \varphi'\cdot\psi' + \varphi\psi'' - \varphi'\cdot\psi' - \varphi''\psi = \varphi\cdot\psi'' - \varphi''\cdot\psi$

$= \varphi(-a(x)\psi' - b(x)\psi) - \psi(-a(x)\varphi' - b(x)\varphi) = -a(x)W$

$\Rightarrow \frac{W'}{W} = -a(x)$ ▨

Rem: Etant données deux solutions φ, ψ lin. indép., on peut trouver $a(x)$ et $b(x)$:

$$\begin{cases} a(x)\varphi' + b(x)\varphi = -\varphi'' \\ a(x)\psi' + b(x)\psi = -\psi'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\varphi' & \varphi\\ \psi' & \psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(x)\\ b(x)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\varphi''\\ \psi''\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a(x)\\ b(x)\end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix}\psi & -\varphi\\ -\psi' & \varphi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi''\\ \psi''\end{pmatrix}$$

Rem: $u'' + p(x) \cdot u = 0 \quad \Rightarrow \quad W(x) = cst$

Rem: Soit $\varphi \in C^2(I)$ une sol. de (*), on cherche l'autre sol ψ lin. indép. $\varphi \cdot \psi' - \psi \cdot \varphi' = c \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$

$\Rightarrow$ ψ est une sol de l'EDO à d'ordre 1

Si $\varphi(x) \neq 0$ sur $[\alpha, \beta] \subset I \Rightarrow \psi' = \psi \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{c}{\varphi} e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$

Rem: φ est une sol de (*) $\Leftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est une sol de (**)

$$A(x) \cdot A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(s) & a(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b(s) & a(s) \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$A(s) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} -b(x) & a(x) \\ * & * \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ a et b sont constantes

Considérons ce cas : $y'' + ay' + by = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$ (*)

(*) $Y' = A \cdot Y$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow det(A - \lambda \cdot I) = \lambda(\lambda + a) + b = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

l'<u>équation caractéristique</u> de (*)

On a trois cas :

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \Phi = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 x}$ sol de (*)

$\Rightarrow \varphi(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ sol. de (*)

II. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow \Phi = c_1 v e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} (u + x v)$ (*)

$\Rightarrow \varphi(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ (*)

III. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \lambda + i\mu$ et $\lambda_2 = \lambda - i\mu$

$\Rightarrow \Phi = c_1 v e^{\lambda x + i\mu x} + c_2 \bar{v} e^{-i\mu x + \lambda x}$ (*)

$\Rightarrow \varphi(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos(\mu x) + c_2 e^{\lambda x} \sin(\mu x)$ (*)

le 15.04.19

1' Équation d' Euler :

$x^2y'' + axy' + by = 0$, $a,b \in \mathbb{R}$, $I \in (0,\infty)$

Posons $x = e^t$, $t = \ln x$, $t_x' = \frac{1}{x}$, $y(x) = y(e^t) = \tilde{y}(t)$

$y_x' = \tilde{y}_t' \cdot t_x' = \tilde{y}_t' \cdot \frac{1}{x}$; $y_x'' = \tilde{y}_t'' \cdot \frac{1}{x^2} - \tilde{y}_t' \cdot \frac{1}{x^2}$

Donc : $x^2 y_x'' + axy_x' + bx = \tilde{y}_t'' - \tilde{y}_t' + a\tilde{y}_t' + b\tilde{y} = 0$

$\Rightarrow \tilde{y}_t'' + (a-1)\tilde{y}_t' + b\tilde{y} = 0$

$\Rightarrow$ L' équation caractéristique : $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$

On a 3 cas :

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \Phi = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \varphi(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$

II. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow \Phi = \dots$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \Rightarrow \varphi(x) = c_1 x^{\lambda} + c_2 \ln x \cdot x^{\lambda}$

III. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda + i\mu$ $\lambda_2 = \lambda - i\mu \Rightarrow \Phi = \dots$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$

$\Rightarrow \varphi(t) = c_1 x^{\lambda} \cos(\mu \ln x) + c_2 x^{\lambda} \sin(\mu \ln x)$

---

le 29.04.19

EDO linéaires d'ordre 2 (Non-homogène)

(*) $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ $a,b \in C(I)$

(**) $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$ $g \in C(I)$

Lemme : Soient φ, ψ des solutions de (*) lin. indép. Soient ξ une solution de (**). Alors, toutes autres solutions $\tilde{\xi}$ de (**) est de la forme $\tilde{\xi} = \xi + c_1\varphi + c_2\psi$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Dém: $(\tilde{\xi} - \xi)'' + a(x)(\tilde{\xi} - \xi)' + b(x)(\tilde{\xi} - \xi) =$

$= \tilde{\xi}'' + a(x)\tilde{\xi}' + b(x)\tilde{\xi} - (\xi'' + a(x)\xi' + b(x)\xi) = g(x) - g(x) = 0$

$\Rightarrow \tilde{\xi} - \xi$ est une solution de $(*)$ $\overset{\text{Thm 16}}{\Rightarrow}$ $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tq

$\tilde{\xi} - \xi = c_1\varphi + c_2\psi$

□

Rem: Donc la sol. générale de $(**)$ = une sol. particulière de $(**)$ + la sol. générale de $(*)$

Rem: Etant données φ, ψ, ξ on peut construire $\tilde{\xi}$ la sol. de $(**)$ vérifiant la cond. initiale, $\tilde{\xi}(x_0) = z_1$, $\tilde{\xi}'(x_0) = z_2$

On pose $\tilde{\xi} = \xi + c_1\varphi + c_2\psi$

$\tilde{\xi}(x_0) = \xi(x_0) + c_1\varphi(x_0) + c_2\psi(x_0)$

$\tilde{\xi}'(x_0) = \xi'(x_0) + c_1\varphi'(x_0) + c_2\psi'(x_0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi(x_0) & \psi(x_0) \\ \varphi'(x_0) & \psi'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} - \xi \\ \tilde{\xi}' - \xi' \end{pmatrix}$$

Le cas $a, b \in \mathbb{R}$:

Thm 18: Méthode de Cauchy

Soit $x_0 \in I$, soit $g \in C(I)$. Soient φ, ψ deux sol. lin. indép. de $y'' + ay' + by = 0$ Δ. Soit $K \in C^2(I)$ une sol. de Δ tq $K(x_0) = 0$, $K'(x_0) = 1$. Alors $\xi = \int_{x_0}^{x} K(x + x_0 - s)\, g(s)\, ds$ est une sol. de $y'' + ay' + by = g(x)$

Dém: $\xi'(x) = \overbrace{K(x + x_0 - x)}^{K(x_0) = 0} g(x) + \int_{x_0}^{x} K'(x + x_0 - s)\, g(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} K'(x + x_0 - s)\, g(s)\, ds$

$\xi''(x) = \overbrace{K'(x + x_0 - x)}^{K'(x_0) = 1} g(x) + \int_{x_0}^{x} K''(x + x_0 - s)\, g(s)\, ds$

$\Rightarrow \xi'' + a\xi' + b\xi = g(x) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{(K'' + aK' + bK)}_{= 0 \text{ sol de } \Delta}(x + x_0 - s) \cdot g(s)\, ds$

$= g(x)$

Ex: $y'' - y' - 2y = g(x)$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \Rightarrow \varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

(Sol. générale). Prenons $x_0 = 0$, $K(x_0) = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$

$K(x) = c_1 (e^{2x} - e^{-x})$.

$K'(x_0) = 1 \qquad K'(x) = c_1 (2e^{2x} + e^{-x}) \Rightarrow c_1 = 1/3$

$\Rightarrow K(x) = \frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})$

Donc $\xi(x) = \frac{1}{3}\int_0^x (e^{2x-2s} - e^{s-x}) g(s)\, ds$

$= \frac{e^{2x}}{3}\int_0^x e^{-2s} g(s)\, ds - \frac{e^{-x}}{3}\int_0^x e^{s} g(s) ds$

$(**) \overset{(***)}{\iff} Y' = A(x) Y + R(x)$ où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}$, $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$

et $R(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$

Donc $\xi \in C^2(I)$ est la sol de $(**)$ vérifiant $\xi(x_0) = z_1$, $\xi'(x_0) = z_2$

$\iff \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix}$ est la sol. du pb de Cauchy pour $(***)$ avec $Y(x_0) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Soient φ, ψ deux sol. lin. indép. de $(*)$ alors $M(x) = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix}$

est une matrice fond. de $Y' = A(x) Y$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = M(x)\left(M^{-1}(x_0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x M^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds \right)$

Ex: $x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$, $I = (0, \infty)$

$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 1$ (Eq. d'Euler)

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow \varphi(x) = x, \psi(x) = x^2 \Rightarrow M(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$

Prenons $x_0 = 1$, $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$M^{-1}(1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $M^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 2x & -x^2 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

$\int_1^x \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} 2s & -s^2 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \int_1^x \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} -s^2 \\ s \end{pmatrix} ds$

$= \int_1^x \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - x \\ \ln x \end{pmatrix}$

Ex : (Suite)

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - x \\ -2 + \ln x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 + 4x + x^2 \ln x \\ 4 - 5x + 2x \ln x \end{pmatrix}$$

Théorie de Sturm - Liouville.

(*) $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, $a, b \in C(I)$

Lemme : Soit $\varphi \in C^2(I)$ une sol. de (*), $\varphi \neq 0$. Soit $[\alpha, \beta] \subset I$.
Alors le nombre de zéros de φ sur $[\alpha, \beta]$ est fini.

Dém : Supposons que φ a une infinité de zéros. Toute suite bornée contient une sous-suite convergente.

Donc, on a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [\alpha, \beta]$ tq $\varphi(x_n) = 0$ et $x_n \to x_0 \in [\alpha, \beta]$

$\Rightarrow \varphi(x_0) = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = 0$

On a $\varphi(x_n) = \varphi(x_0) \Rightarrow \exists \tilde{x}_n \in (x_n, x_0)$ tq $\varphi'(\tilde{x}_n) = 0$

on a $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [\alpha, \beta]$ tq $\varphi'(\tilde{x}_n) = 0 \ \forall n$ et $\tilde{x}_n \to x_0$

$\Rightarrow \varphi'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\tilde{x}_n) = 0$

Si ψ est une autre sol.(*) lin. indép. de φ. Alors $W(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ 0 & \psi' \end{pmatrix} = 0$ ↯

Lemme : Entrelacement des zéros

Soient φ, ψ lin. indép. de (*). Si $\alpha, \beta \in I$ sont deux zéros consécutifs de φ ($\alpha < \beta$ $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ $\varphi(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$)
Alors ψ a exactement un zéro sur (α, β).

Dém : Soit $\varphi(x) > 0$ sur $(\alpha, \beta) \Rightarrow \varphi'(\alpha)$ et $\varphi'(\beta)$ sont de signes opposés. Supposons que $\psi(x) \neq 0$ sur (α, β). Soit $\psi(x) > 0$ sur (α, β)

$W(\alpha) = \varphi(\alpha)\psi'(\alpha) - \varphi'(\alpha)\psi(\alpha) = -\varphi'(\alpha) \cdot \psi(\alpha)$

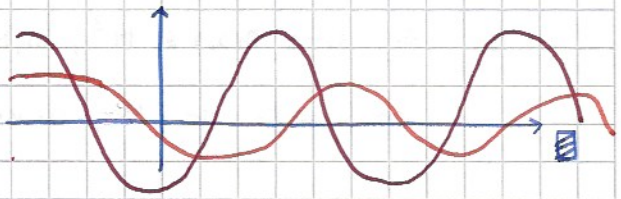
$W(\beta) = \varphi(\beta)\psi'(\beta) - \varphi'(\beta)\psi(\beta) = -\varphi'(\beta) \cdot \psi(\beta)$

$W(x)$ ne change pas de signe $\Rightarrow \psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ sont de signes opposés ↯ $\Rightarrow \exists \gamma \in (a, b)$ tq $\psi(\gamma) = 0$

Rq : (Suite)

Si $\exists\, \gamma_2 \in (\alpha, \beta)$ tq $\eta(\gamma_2) = 0$ $\Rightarrow \exists\, \eta \in (\gamma_1, \gamma_2)$ tq $\varphi(\eta) = 0$ ↯

$\Rightarrow \exists!\, \gamma \in (\alpha, \beta)$ tq $\eta(\gamma) = 0$



Thm 19 : de Sturm

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $b, B \in C(I)$ tq $b(x) \leq B(x)$ $\forall x \in I$. Soit φ une sol. de $y'' + b(x)y = 0$, $\varphi \not\equiv 0$,

Soit η une sol. de $y'' + B(x)y = 0$, $\eta \not\equiv 0$

Si $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de φ, et $b(x) \not\equiv B(x)$ sur (α, β). Alors η a au moins un zéro sur (α, β).

Dém : Soit $\varphi(x) > 0$ sur (α, β), donc $\varphi'(\alpha) > 0$ et $\varphi'(\beta) < 0$.

Supposons $\eta(x) \neq 0$ sur (α, β). Donc, $\eta(\alpha) \geq 0$, $\eta(\beta) \geq 0$

$$(\varphi\eta' - \varphi'\eta)' = \varphi\eta'' - \eta\varphi'' = \varphi\eta(b(x) - B(x))$$

$$\int_\alpha^\beta \underset{>0}{\varphi(x)}\,\underset{\geq 0}{\eta(x)}\,\underset{<0}{(b(x) - B(x))}\,dx = (\varphi\eta' - \varphi'\eta)\Big|_\alpha^\beta \quad \text{↯}$$

$$= \underset{\geq 0}{-\eta(\beta)}\,\underset{>0}{\varphi'(\beta)} + \underset{\geq 0}{\eta(\alpha)} \cdot \underset{>0}{\varphi'(\alpha)} \geq 0 \quad \text{↯}$$

∎

Thm 20: Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $b \in C(I)$.

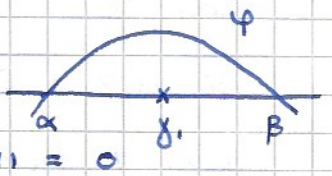
Soit φ une solution non nulle de l'équation $y'' + b(x)y = 0$

a) Si $b(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$, alors φ a au plus un zéro sur I.

b) si $m^2 \leq b(x) \leq M^2$, $m, M > 0$, et $\alpha, \beta \in I$ sont deux zéros consécutifs de φ, alors on a $\frac{\pi}{M} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{m}$

Dém: a) Posons $B(x) = 0$, alors $b(x) \leq B(x)$

Soient $\alpha, \beta \in I$ deux zéros de φ. Par thm 19 $\Rightarrow$ toute sol. non nulle de $y'' + 0 \cdot y = 0$ a au moins un zéro sur (α, β). Mais pour $\psi = \cot$ pas vrai $\not\exists$



b) $y'' + M^2 y = 0$

Considérons $\psi(x) = \sin[M(x - \alpha)]$ $\quad \psi(\alpha) = 0$

Par thm 19 $\left(b(x) \leq B(x) \leq M^2\right)$ $\quad \alpha$ et $\alpha + \frac{\pi}{M}$ ($= \gamma_1$) sont deux zéros consécutifs de $\psi \Rightarrow \gamma_1 \in (\alpha, \beta)$

$\Rightarrow \beta - \alpha \geq \gamma_1 - \alpha = \frac{\pi}{M}$

$y'' + m^2 y = 0$, $\tilde{\psi}(x) = \sin[m(x - \alpha)]$, $\tilde{\psi}(\alpha) = 0$

alors α et $\gamma_2 = \alpha + \frac{\pi}{m}$ sont deux zéros consécutifs.

Par thm 19 $\Rightarrow \beta \in (\alpha, \gamma_2)$

$\Rightarrow \beta - \alpha \leq \gamma_2 - \alpha = \frac{\pi}{m}$ ∎

Déf: Le problème de Sturm-Liouville

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $p, r \in C(I)$, avec $r(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

On cherche des sol. non nulles de l'équation $-u'' + p(x)u = \lambda r(x) u$ vérifiant les conditions aux limites (de Dirichlet) $u(a) = u(b) = 0$

Le λ pour lequel il existe une sol. non nulle φ est appelé valeur propre et φ est la fonction propre.

le 06.05.19

Analyse Réelle:

Exc: $p=0$, $r=1$ $\Rightarrow$ $-u'' = \lambda u$, $u(a) = u(b) = 0$

$u'' + \lambda u = 0$ $\qquad$ $\mu^2 + \lambda = 0$ $\quad \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$

Si $\lambda \leq 0 \Rightarrow$ pas de fonction propre.

(par thm 20 a), toute sol. a au plus un zéro)

Si $\lambda > 0 \Rightarrow \varphi(x) = \sin\left[\sqrt{\lambda}(x-a)\right]$, $\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}(b-a) = \pi n$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ donc $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}$ sont les val. propres et

$\varphi_n(x) = \sin \dfrac{\pi n (x-a)}{b-a}$ sont fonctions propres.

Rem: Notons $L = -\frac{1}{r(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} * + \frac{p(x)}{r(x)}$, alors éq. de S-L $\Leftrightarrow$

$L \cdot u = \lambda u$.

$Ax = \lambda x$, $A \in Mat(n, \mathbb{R})$

} on cherche une val. propre et une fonction / un vecteur propre.

Rem: En général, $\lambda \in \mathbb{C}$ même si $A \in Mat(n, \mathbb{R})$

Thm 21:

a) Toutes les val. propres de S.-L. sont réelles.

b) Si φ et ψ sont les fonctions propres correspondant à la même valeur propre, alors φ et ψ sont lin. dép.

c) Si φ et ψ sont deux fonct. propres de deux val. propres distinctes, alors on a $\int_a^b r(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx = 0$

(on dit que φ et ψ sont orthogonales sur $[a,b]$ par rapport à la fonction poids $r(x)$)

Dém: b) Si φ et ψ sont des sol. de $-u'' + p(x)u = \lambda r(x) u$

tq $\varphi(a) = \psi(a) = \varphi(b) = \psi(b)$, alors $W(a) = \begin{pmatrix} \varphi(a) & \psi(a) \\ \varphi'(a) & \psi'(a) \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ φ et ψ lin. dép.

Dém : (Suite)

c) $-\varphi'' + p(x)\varphi = \lambda_1 r(x)\varphi$, $-\psi'' + p(x)\psi = \lambda_2 r(x)\psi$

$(\varphi\psi' - \psi\varphi')' = \varphi\psi'' - \psi\varphi'' = \varphi(p(x) - \lambda_2 r(x))\psi - \psi(p(x) - \lambda_1 r(x))\varphi$

$= (\lambda_1 - \lambda_2) r(x)\varphi\psi$

$$\int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) r(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx = \left[\varphi\psi' - \psi\varphi'\right]_a^b$$

$= 0$ car $\varphi(a) = \psi(a) = \varphi(b) = \psi(b) = 0$

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une v.p. , $-\varphi'' + p(x)\varphi = \lambda r(x)\varphi$

$\Rightarrow -\bar{\varphi}'' + p(x)\bar{\varphi} = \bar{\lambda} r(x)\bar{\varphi}$ $\Rightarrow \bar{\lambda}$ est aussi une v.p.

$\overset{c)}{\Rightarrow}$ $\varphi = \varphi$ et $\psi = \bar{\varphi}$, $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ $\quad (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x) \underbrace{\varphi(x)\psi(x)}_{|\varphi(x)|^2}\,dx = 0$$ ↯

Extrema d'une fonction :

Déf : Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $z \in \mathcal{U}$, $f \in C(\mathcal{U})$, s'il existe $\delta > 0$ tq on a $f(x) \geq f(z)$ $(f(x) \leq f(x))$ $\forall x \in B_z(\delta)$, alors on dit que z est un minimum (maximum) local de f.

Dans les 2 cas z est un extremum local de f.

Déf : Soit $f \in C^1(\mathcal{U})$. On dit que $z \in \mathcal{U}$ est un pt critique de f si $\text{grad}(f(z)) = 0$

Lemme : Condition nécessaire pour un extremum local.

Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in C^1(\mathcal{U})$. Si $z \in \mathcal{U}$ est un extremum local de f, alors z est un pt critique de f.

Dém : Posons $h = \text{grad}(f(z)) \in T_z\mathbb{R}^n$. Soit z un extremum loc. de f

Supposons $h \neq 0$, alors : $f(z + \varepsilon h) - f(z) = \sum_{i=1}^n \partial f/\partial x_i \big|_{x=z} \varepsilon h_i + o(\varepsilon^2)$

$= \varepsilon \langle \text{grad } f(z), h \rangle + o(\varepsilon) = \varepsilon \|h\|^2 + o(\varepsilon^2) \Rightarrow z$ pas extremum loc de f ↯

$> 0 \quad \varepsilon > 0$

$< 0 \quad \varepsilon < 0$

Analyse Réelle :

Exe : $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2$, $a \in \mathbb{R}$

$\text{grad } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2ax_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ si $a \neq 1$ $z = (0,0)$

si $a = 1$ $z = (x_1, -x_1)$

$z = (0,0)$, $f(z) = 0$, ext. loc ?

$f(x) = (x_1 + x_2)^2 + (a-1)x_2^2 \Rightarrow$ $a \geq 1$ $z = (0,0)$ est min. loc de f $f(x) \geq f(z)$

$\Rightarrow$ $a < 1$ z pas un extremum de f.

Multiplicateurs de Lagrange :

Étant données $F_1, F_2, \dots F_m \in C(\mathcal{U})$. Posons $S_i = \{ x \in \mathcal{U} \mid F_i(x) = 0 \}$.

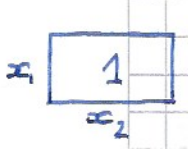
Posons $S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i$ $(x \in S \Leftrightarrow F_i(x) = 0 \ \forall i = 1, \dots m)$

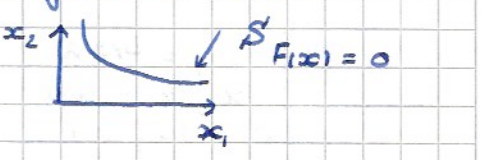
Déf : Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in C(\mathcal{U})$, $F_1, \dots, F_m \in C(\mathcal{U})$.

On dit que $z \in S$ est un min. (max.) de f lié aux conditions $F_i(x) = 0$ $i = 1, \dots m$ s'il existe $\delta > 0$ tq on a $f(x) \geq f(z)$ ($f(x) \leq f(z)$) $\forall x \in B_z(\delta) \cap S$. Dans tous ces cas on dit $f|_S$ possède un extremum local en z.

Ex : On cherche le min. du périmètre d'un rectangle dont l'aire = 1

$f(x) = 2x_1 + 2x_2$, $F(x) = x_1 \cdot x_2 - 1$





Rem : Si S est compact (Fermé et Borné) alors $f|_S$ admet toujours un min et un max global. (Même si f n'a pas d'ext. local)

Ex : $\mathbb{R}^3$, $F_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2$ le 13.05.19

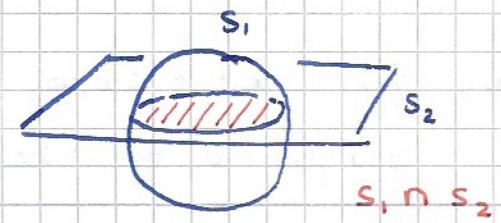
S_1 =



$F_2(x) = x_3 - 1$

S_2 =





$S_1 \cap S_2$

Thm 21 : Condition nécessaire pour un extremum lié ? page 53

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(U)$, $F_1, \dots, F_m \in C^1(U)$. Si $z \in S$ est un extremum local de f lié aux conditions $F_i(x) = 0 \ \forall i$ et grad $F_1(z), \dots,$ grad $F_m(z)$ sont lin. indép.

Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tq grad $f(z) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ grad $F_i(z)$

Rem : Donc si $z \in S$ est un extremum local de $f|_S$, alors $\exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ tq z est un pt critique de la fonction de Lagrange

$L_f = f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i$ (les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange)

Ex : $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

$F(x) = x_1 + 2x_2 - 1$

grad $f(x) = \lambda$ grad $F(x)$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = \lambda \\ 2x_1 - 2x_2 = 2\lambda \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3/4\,\lambda \\ x_2 = -1/4\,\lambda \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow z(3,-1)$ est un pt critique de $f|_S$

z est un ext. loc :

$x_1 = 1 - 2x_2$ $\quad f|_S = (1 - 2x_2)^2 + 2(1 - 2x_2)x_2 - x_2^2$

$= 2 - (1 + x_2)^2$

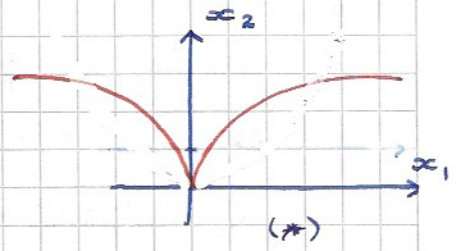
$f|_S(z) = 2$, on a $f|_S(x) \leq f(z) \Rightarrow z$ max local.

Analyse Réelle : le 13.05.19

Ex : $f(x) = x_2$, $F(x) = x_1^2 - x_2^3$

$\operatorname{grad} f(x) = \lambda \operatorname{grad} F(x)$

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda x_1 \\ 1 = -3\lambda x_2^2 \\ x_1^2 = x_2^3 \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 = -1/3\lambda \\ x_1^2 = x_2^3 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ pas de solution $\Rightarrow$ pas de pts critiques.

(*) $F(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = |x_1|^{2/3}$ $\quad \operatorname{grad} F(x) = (2x_1, -3x_2^2)$

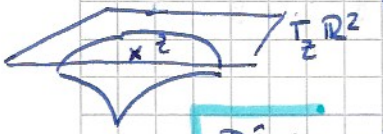
Dém :

Soit W le sous-espace de $T_z\mathbb{R}^n$ engendré par $\operatorname{grad} F_1(z), \dots, \operatorname{grad} F_m(z)$

Posons $W^\perp = \{ h \in T_z\mathbb{R}^n \mid \langle v, h \rangle = 0 \ \forall v \in W \}$

On a $T_z\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ ($\forall u \in T_z\mathbb{R}^n$, $\exists!\ v \in W$ et $h \in W^\perp$ tq $u = v + h$)

Lemme : Soit $h \in T_z\mathbb{R}^n$, alors $h \in W^\perp \Leftrightarrow \exists$ une courbe γ paramétrée, $\gamma : (-1,1) \longrightarrow S$ tq $\gamma(0) = z$ et $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(0) = h$



Dém :

$\Leftarrow$: $\gamma(t) \in S \Rightarrow \gamma(t) \in S'_i \Rightarrow F_i(\gamma(t)) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} F_i(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\gamma(0)) \frac{\partial \gamma_j}{\partial t}(0)$$

$= \langle \operatorname{grad} F_i(z), h \rangle \ \forall i \Rightarrow h$ orthog. à W

$\Rightarrow h \perp W \Rightarrow h \in W^\perp$.

$\Rightarrow$: (pas donnée)

Conséquence du thm de fonctions implicites. ▨

Supposons que $\operatorname{grad} f(z) \notin W \Rightarrow \operatorname{grad} f = \underset{\in W}{v} + \underset{\in W^\perp}{h}$ avec $h \neq 0$

$\langle \operatorname{grad} f, v + h \rangle = \langle h, h \rangle = \|h\|^2 \neq 0$. $\quad h \in W^\perp$

$\Rightarrow \exists\ \gamma(t) \subset S'$ tq $\gamma(0) = z$ et $\partial\gamma/\partial t, (0) = t$

$\Rightarrow f(\gamma(\varepsilon)) - f(\gamma(0)) = \varepsilon \langle \operatorname{grad} f(z), h \rangle + o(\varepsilon)$ $\quad \operatorname{grad} f(z) \in W$

$z + \varepsilon h + o(\varepsilon/2)$ $\qquad z$

$= \varepsilon \|h\|^2 + \alpha(\varepsilon)$

> 0 si $\varepsilon > 0$

< 0 si $\varepsilon < 0$ $\quad \Rightarrow z$ pas un ext. déf ↯

Calculs des variations :

Déf : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $L \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^2)$. $\forall y \in C^1[a,b]$, on associe la fonction (Lagrangien) $L[y] : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $L[y] = L(x, y(x), y'(x))$. On définit la fonctionelle $J_L : C^1[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $J_L[y] = \int_a^b L[y]\,dx = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$

Ex : $L(x,u,v) = x \cdot u + e^v$

alors $J_L[y] = \int_a^b \left(x \cdot y(x) + e^{y'(x)} \right) dx$

Déf : On munit l'espace $C^1[a,b]$ de la norme $\|y\|_1 = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|$

Soient $A, B \in \mathbb{R}$, on pose $C^1_{A,B}[a,b] = \{ y \in C^1[a,b] \mid y(a) = A,\ y(b) = B \}$

Déf : On dit que $\varphi \in C^1_{A,B}[a,b]$ est un extremum local de J_L (parmis les fct vérifiants $y(a) = A$ et $y(b) = B$) si $\exists \delta > 0$ tq on a $J_L[y] \geq J_L[\varphi]$ (ou $J_L[y] \leq J_L(\varphi)$) pour tout $y \in C^1_{A,B}[a,b]$ tq $\|y - \varphi\|_1 < \delta$



Déf : Le problème variationnel (le cas à extrémités fixes) consiste à chercher les extrema locaux de J_L sous les contraintes $y(a) = A$ et $y(b) = B$

Thm 22 : Condition nécessaire pour un extremum local

Si $\varphi \in C^1_{A,B}[a,b]$ est un ext. loc. de $J_L[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ alors $\left(\partial L / \partial y'\right)\Big|_{y=\varphi} \in C^1[a,b]$ et φ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange : $\frac{?}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$

Exc : $L[y] = y$, $J_L[y] = \int_a^b y\,dx$

E-L : $0 = 1$ → pas de sol → pas de fct / pt critique

→ pas d'extremum local.

$J_L[\varphi + \eta] - J_L[\varphi] = \int_a^b (\varphi + \eta)\,dx - \int_a^b \varphi\,dx = \int_a^b \eta\,dx \gtrless 0$

Déf. Une solution de l'équation de E-L est une extrémale de J_L

Exc : $L[y] = y'$

E.-L. : $\frac{d}{dx}(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ une infinité de solutions

tant que $\varphi \in C^1_{A,B}[a,b]$ est une extrémale

$J_L[y] = \int_a^b y'\,dx = y(x)\Big|_a^b = y(b) - y(a) = B - A$

Exc : $L[y] = (y')^2 + p(x)\,y^2$, où $p \in C[a,b]$

E-L : $\frac{d}{dx}(2y') = 2p(x)\,y$

$y'' = p(x)\,y \qquad y(a) = A \ , \ y(b) = B$

le cas : $p = 1 \qquad y(a) = y(b) = 0$

alors $y'' = y \qquad y(a) = y(b) = 0$

par thm 19 : $b(x) < 0 \Rightarrow$ max 1 zéro

$\Rightarrow$ pas de sol.

$\Rightarrow$ $\varphi(x) = 0$ est la seule extrémale

le cas : $p = 1$, $A = 0$, $B = 1$, $a = 0$, $b = 1$

alors $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$

$\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \qquad \varphi(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e - e^{-1}}$

Donc $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}$ est l'extremale

Ex : (Suite)

Soit $y \in C^1_{0,1}[a,b]$. Alors $y - \varphi \equiv \eta \in C^1_{0,0}[a,b]$

$$J_L[y] - J_L[\varphi] = J_L[\varphi+\eta] - J_L[\varphi] = \int_a^b \left((\varphi'+\eta')^2 + (\varphi+\eta)' - \varphi'^2 - \varphi^2\right) dx$$

$$= \int_a^b (2\varphi'\eta' + 2\varphi\eta + \eta''^2 + \eta^2)\, dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{2(-\varphi'' + \varphi)\eta}_{=0 \text{ car } \varphi \text{ extremal (E-L)}} + \underbrace{(\eta')^2}_{\geq 0} + \underbrace{\eta^2}_{\geq 0}\, dx \quad \Rightarrow \varphi \text{ est un minimum local.}$$

Problèmes d'extrema :

$z \in \mathbb{R}^n$ un point $\longleftrightarrow$ $y \in C^1_{AB}[a,b]$

$f(x)$ une fonction $\longleftrightarrow$ $J_L[y]$ une fonctionelle

z est un pt critique $\longleftrightarrow$ φ est une extremalle

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\text{grad } f(z) = 0$ φ satisfait l'eq. E-L

(éq. algébrique) (EDO)

---

le 20.05.19

Lemme : de Dubois - Reymond

Soient $f, g \in C[a,b]$ tq on a $\int_a^b (f(x)\eta(x) + g(x)\eta'(x))\, dx = 0$

$\forall \eta \in C^1_{0,0}[a,b]$. Alors $g \in C^1[a,b]$ et on a $g' \equiv f$.

Dém : • Le cas $f \equiv 0$: mq $g = \text{cst}$.

Posons $\eta(x) = \int_a^x g(s)\, ds - (x-a)\cdot c$ où $c = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(s)\, ds$.

Alors, $\eta \in C^1_{0,0}[a,b]$. On a $\eta'(x) = g(x) - c$.

$$\int_a^b (g(x)-c)^2 dx = \int_a^b (g(x)-c)\eta'(x)\, dx = -c\int_a^b \eta'(x)\, dx$$

$$= -c\left(\eta(x)\right)_a^b = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = c$$

• Le cas général :

Posons $d(x) = \int_a^x f(s)\, ds$, on a $d' = f$, $\int_a^b f(x)\eta(x)\, dx$

$$= \int_a^b d'(x)\eta(x)\, dx = d(x)\eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b d(x)\eta'(x)\, dx$$

$$0 = \int_a^b f(x)\eta(x) + g(x)\eta'(x)\, dx = \int_a^b (g(x)-d(x))\eta'(x)\, dx$$

$\Rightarrow g(x) - d(x) = \text{cst} \Rightarrow g(x) = \int_a^x f(s)ds + \text{cst} \Rightarrow g \in C^1[a,b]$ et $g' \equiv f$ ∎

Dém : (thm 23)

Soit $\varphi \in C^1_{A,B}[a,b]$ un extremum de J_L.

Prenons $h \in C^1_{0,0}[a,b]$, alors $\varphi + t\cdot h \in C^1_{A,B}[a,b]$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Posons $y(t) = J_L[\varphi + th]$, alors y est C^1 et a un ext. loc. en $t=0$.

$$\Rightarrow 0 = dy/dt\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_a^b L(x, \varphi + th, \varphi' + th')\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{\varphi = y} \cdot h + \partial L/\partial y'\Big|_{y=\varphi} \cdot h' \right) dx \quad \forall h \in C^1_{0,0}[a,b]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\Big|_{y=\varphi} \right)' = \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=\varphi}$$

$\Rightarrow$ φ satisfait l'équation d'E-L ∎

Si $L(x,y,y')$ ne dépend pas explicitement de : alors, l'éq d'E-L :

0. y' · $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ - éq. algébrique

1. y · $(\partial L/\partial y')' = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial y'} = c$ où c est à déterminer. - EDO ordre 1.

2. x · l'éq. d'E-L est une EDO autonome d'ordre 2 → on peut chercher u tq $y'(x) = u(y(x))$ ou ...

Lemme : Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement de x, alors $H(y,y') = y' \cdot \partial L/\partial y' - L$ est une intégrale première de l'éq. d'E.-L. (ie : $H(\varphi,\varphi') = c$ si φ satisfait l'éq. d'E-L)

Dém : $H(y,y')' = (y' \partial L/\partial y')' - (L(y,y'))' = y'' \partial L/\partial y' + y'\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)' - \frac{\partial L}{\partial y} y' - \frac{\partial L}{\partial y'} y''$

$= y'\left((\partial L/\partial y')' - \partial L/\partial y \right)$

$\Rightarrow (H(\varphi,\varphi'))' = 0$ si φ est une extrémale ∎

Rem : $H(y,y') = c$ est une EDO d'ordre 1.

Exc : $J_L[y] = \int_0^1 e^y (y')^2 \, dx$ $\quad y(0) = 0$, $y(1) = \ln 4$

$H(y,y') = y' (y' e^y) - L = (y')^2 e^y$

$(y')^2 e^y = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y' e^{y/2} = c \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 (e^{\varphi(x)/2} - e^{\varphi(0)/2}) = cx$

$\Rightarrow e^{\varphi(x)/2} = \frac{c}{2} x + 1 \Rightarrow \varphi(x) = 2 \ln (\frac{c}{2} x + 1)$

$\varphi(1) = 2 \ln 2 = \ln 4 \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow \varphi(x) = 2 \ln (x+1)$ est l'extrémale de J_L

Problème isopérimétrique :

Déf : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soient $A, B, Q \in \mathbb{R}$. Soient deux lagrangiens $L[y] = L(x,y,y')$ et $K[y] = K(x,y,y')$. On considère $J_L[y] = \int_a^b L[y] \, dx$ et $J_K[y] = \int_a^b K[y] \, dx$.
On pose $S^Q_{AB}[a,b] = \{ y \in C^1_{AB}[a,b] \mid J_K[y] = Q \}$

Déf : Le problème isopérimétrique consiste à chercher les extrema de J_L sous les contraintes $y(a) = A$, $y(b) = B$ et $J_K[y] = Q$.

Thm 24 : Si $\varphi \in S^Q_{A,B}[a,b]$ est un extr. loc de J_L lié à la condition $J_K[y] = Q$ et φ n'est pas une extrémale de J_K. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq φ satisfait l'éq $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial K}{\partial y'} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda \frac{\partial K}{\partial y}$

Rem : Donc φ est une extrémale de $J_{L - \lambda K}$

Dém : Notons $\delta J_K[\varphi, h] = \int_a^b \left(\frac{\partial K}{\partial y} \Big|_{y=\varphi} \cdot h + \frac{\partial K}{\partial y'} \Big|_{y=\varphi} \cdot h' \right) dx$

φ n'est pas une extrémale de $J_K \Rightarrow \exists h_0 \in C^1_{0,0}[a,b]$ tq $\delta J_K[\varphi, h_0] \neq 0$

Posons $F(t,s) = J_K[\varphi + th + sh_0] - Q$ où $h \in C^1_{0p}[a,b]$, $h \neq h_0$

On a $F(0,0) = 0$

Lemme : $\exists$ un voisinage de $(0,0)$ où $F(t,s) = 0$ admet une sol. continue.

Dém : (Suite)

Dém: (lemme)

On cherche une fonction $s(t)$ tq $s(0) = 0$ et $F(t, s(t)) = F(0,0)$

$$\frac{d}{dt} F(t,s(t)) = \frac{d}{dt} \int_a^b K(x, \varphi + th + s(t)h_0, \varphi' + th' + s(t)h_0') \, dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial K}{\partial y}\Big|_{y=\varphi} (h + \frac{\partial s}{\partial t} h_0) + \frac{\partial K}{\partial y'}\Big|_{y=\varphi} (h' + \frac{ds}{dt} h_0') \right) dx$$

$$= \delta J_K[\varphi, h] + \frac{ds}{dt} \underbrace{\delta J_K[\varphi, h_0]}_{\neq 0} \quad \text{où} \quad \psi = \varphi + th + s(t)h_0$$

Donc $\begin{cases} s(0) = 0 \\ F(t,s(t)) = F(0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} s(0) = 0 \\ \frac{ds}{dt} = - \frac{\delta J_K[\varphi, h]}{\delta J_K[\varphi, h_0]} \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Il existe une sol. $s(t)$. ∎

Posons $\psi(t,s) = J_L[\varphi + t \cdot h + s \cdot h_0]$. $\psi(t,s)$ a un extr. loc lié à la cond. $J_K[y] = Q \Leftrightarrow F(t,s) = 0$

$\Rightarrow$ On considère $\psi - \lambda F$, φ est un pt critique de $\psi - \lambda F$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(0,0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial t}(0,0) \\ \partial \psi / \partial s \, (0,0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial s}(0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \delta J_L[\varphi, h] = \lambda \delta J_K[\varphi, h] \\ \delta J_L[\varphi, h_0] = \lambda \underbrace{\delta J_K[\varphi, h_0]}_{\neq 0} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta J_{L-\lambda K}[\varphi, h] = 0 \\ \lambda = \dfrac{\delta J_L[\varphi, h_0]}{\delta J_K[\varphi, h_0]} \end{cases} \Leftrightarrow 0 = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{y=\varphi} (L - \lambda K) h + \frac{\partial}{\partial y'}\Big|_{y=\varphi} (L - \lambda K) h' \right) dx$$

(λ dépend pas de h)

$\Rightarrow$ φ satisfait $\left(\frac{\partial}{\partial y'} (L - \lambda K) \right)' = \frac{\partial}{\partial y} (L - \lambda K)$ ∎

Ex : $J_L[y] = \int_0^1 (y')^2 \, dx \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 2$

$J_k[y] = \int_0^1 y \, dx \quad , \quad J_k[y] = 1$

$\Rightarrow J_{L-\lambda k} = \int_0^1 (|y'|^2 - \lambda y) \, dx$

E.-L : $(2y')' = -\lambda \iff y'' = -\frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow \varphi(x) = -\frac{\lambda x^2}{4} + c_1 x + c_2$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 2 \\ \int_0^1 \varphi(x) \, dx = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ -\lambda/4 + c_1 + 1 = 2 \\ -\frac{\lambda}{12} + \frac{c_1}{2} + 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ \lambda = 6 c_1 \\ -\frac{\lambda}{4} + c_1 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = -2 \\ \lambda = -12 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(x) = 3x^2 - 2x + 1$ est l'extrémale (min. globale)